GEOMETRÍA

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

PROPOSICIÓN.- Es una sucesión finita de signos (palabras o términos) que se puede calificar como verdadero o como falso pero nunca como ambos valores a la vez, es decir, es imposible que una proposición rea verdadera y falsa al mismo tiempo, Las proposiciones más comunes son:
Axiomas, postulados, teoremas y corolarios,

AXIOMAS.- Es una proposición que se admite sin demostración debido a que en tan sencilla y evidente, se la emplea en todas las ciencias del conocimiento,
Ejemplos:
- El todo es mayor que cualquiera de sus partes e igual a la suma de las mismas.
- Si cantidades iguales se multiplican por cantidades iguales, los productos son iguales.

POSTULADOS.- Es una proposición no tan evidente como un axioma pero también se admite sin demostración, se los emplea generalmente en Geometría.
Ejemplos:
- Si en un plano, dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, la suma de las medidas de los ángulos internos formados de un mismo lado es igual a 180º (ángulos colaterales).
- Dos rectas no paralelas solo tienen un punto en común.
- Cualquier figura geométrica puede moverse sin que cambie su forma y tamaño.

TEOREMA.- Es una proposición que necesita demostración .La demostración consta de un conjunto de razonamientos que conducen a la evidencia de la verdad de la proposición.
Un teorema consta de dos partes:
Hipótesis.- Que son las condiciones o datos del problema
Tesis.- Es lo que se quiere demostrar.

Ejemplo. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180^o
Hipótesis: A,B,C son ángulos interiores del triángulo ABC
Tesis: $A+B+C=180^O$

COROLARIO.- Es una proposición que es una consecuencia inmediata de un teorema demostrado, por lo tanto no requiere de demostración. Es una proposición que se deduce de un teorema como consecuencia del mismo.
Ejemplos
Del teorema: "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°, se deduce el siguiente corolario: "La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a 90°"

AXIOMAS DE LA IGUALDAD EN LOS NÚMEROS REALES

1.- **AXIOMA DE DICOTOMÍA**.- Para todo número a y b elemento de los reales, solo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:
- Que a sea igual a b
- Que a sea diferente de b
Simbólicamente: $a = b$ o $a \neq b$

2.- AXIOMA REFLEXIVO.- Dado un número real cualquiera, éste es siempre igual a sí mismo
Simbólicamente: $a = a$

3.- AXIOMA SIMÉTRICO.- Para todo número real a y b, si a es igual a b, entonces b es igual a a
Simbólicamente: $a = b \rightarrow b = a$

4.- AXIOMA TRANSITIVO.- Para todo número a, b,c elementos de los reales, si a es igual b**,** y b es igual a c, entonces a es igual a c.
Simbólicamente: $a = b$ y $b = c \rightarrow a = c$

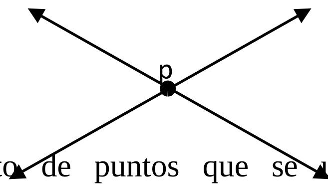
5.- AXIOMA ADITIVO.- Para todo número a, b, c, si a es igual a b. entonces, a más c es igual a b más c.
Simbólicamente: $a = b \rightarrow a + c = b + c$

6.- AXIOMA MULTIPLICATIVO.- para todo a, b, c, si a es igual a b**,** entonces, a por c es igual a b por c.
Simbólicamente: $a = b \rightarrow a.\ c = b.c$

SEGMENTOS

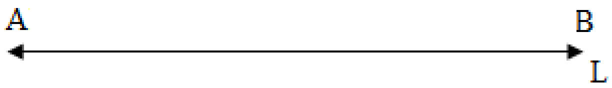
DEFINICIONES BÁSICAS:

PUNTO.- Se ha dicho que el punto no se define. La idea del punto esta sugerida por la huella que deja en el papel un lápiz bien afilado. Un punto es imaginado tan pequeño que carece de dimensión.
Notación,- Los puntos los representamos por letras mayúsculas



P = Punto P

RECTA.- Es un conjunto de puntos que se ubican en una misma dirección, se prolonga indefinidamente en ambas direcciones. No comienza ni termina, admitimos los siguientes postulados:
"Por dos puntos pasa una recta y solamente una"
"Dos rectas cuando son perpendiculares no pueden tener más que un solo punto en común"
Notación,- La recta se suele designar por dos de sus puntos con el símbolo ⟷ encima o por medio de una letra mayúscula cerca de la recta

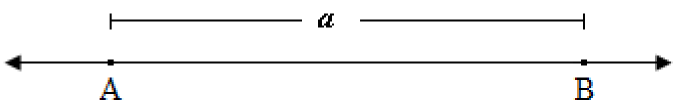


$\overleftrightarrow{AB}$ = recta AB
L = recta L

SEGMENTO.- Es la parte comprendida entre dos puntos de una recta, llamados origen y extremo del segmento o simplemente extremos.
El segmento de extremos A y B se simboliza por AB

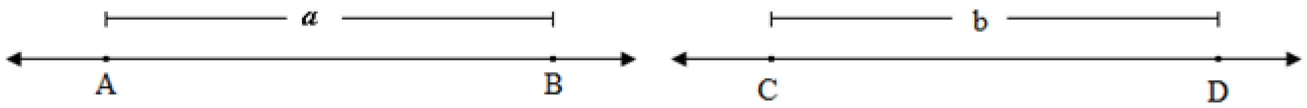
$\overline{AB}$ = Segmento AB

Medida de segmentos.- Medir un segmento es compararlo con otro elegido como unidad. El número que expresa a que distancia se encuentra A de B se llama medida o longitud de AB. Usaremos la simbología $m\overline{AB}$ para denotar la longitud del segmento AB.



$m\,\overline{AB} = AB = a$

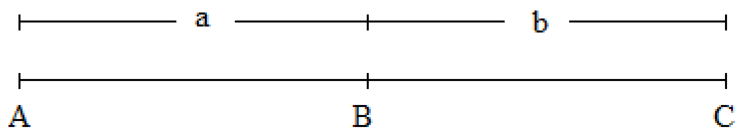
Congruencia de segmentos
Dos o más segmentos son congruentes si tienen la misma longitud.
Ejemplo:



$$\text{Si } \overline{AB} \cong \overline{CD} \rightarrow m\overline{AB} = m\overline{CD} \rightarrow a = b$$

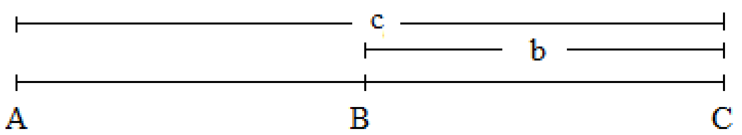
Operaciones con segmentos.- Consiste en encontrar un segmento de longitud igual a las longitudes de los segmentos dalos.

Suma de longitudes de segmentos.
Ejemplo:



$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = a + b$$

Diferencia de longitudes de segmentos.
Ejemplo:

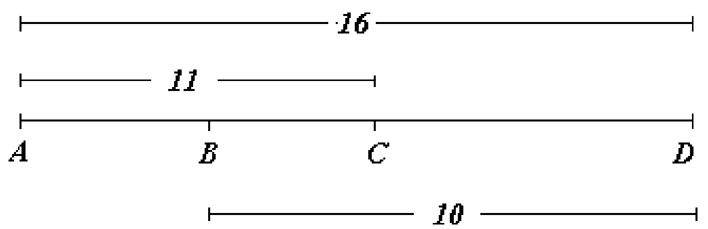


$$\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC} = c - b$$

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

1. Los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D son tales que AD = 16, BD = 10 y AC = 11. Hallar BC.

Solución:
Realizando un gráfico ilustrativo se obtiene:



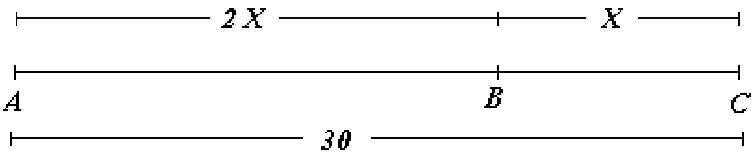
Planteando la Hipótesis y la Tesis:
H)
AD = 16
BD=10
AC = 11
T) BC=?

Demostración

Proposiciones	**Razones**
1) AD = AC + CD	1) Suma de segmentos
2) 16 = 11 + CD	2) Sustitución de valores
3) CD = 16 -11= 5	3) Transposición y reducción de términos semejantes
4) BD = BC + CD	4) Suma de segmentos
5) 10 = BC + 5	5) Sustitución de valores
6) BC = 10 – 5 = 5	6) Transposición y reducción de términos semejantes

2. Sobre una línea recta se ubican en forma consecutiva los puntos A, B, C, de tal manera que AB= 2BC y AC = 30. Determinar la longitud del segmento BC.

Solución:
Realizando un gráfico ilustrativo se obtiene:



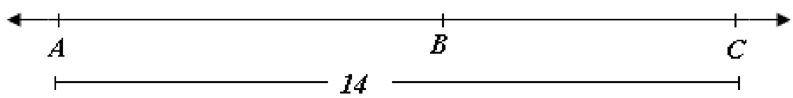
Planteando la Hipótesis y la Tesis:
H)
AB = 2BC
Haciendo BC = X
AB = 2X

T) BC =?

Demostración

Proposiciones	**Razones**
1) AC = AB + BC	1) Suma de segmentos
2) 30 = 2X + X	2) Sustitución y cambio de variable
3) 3X = 30	3) Reducción de términos semejantes.
4) X = 10	4) Axioma multiplicativo.
5) BC = X = 10	5) Hipótesis

3. Sobre una línea recta se ubican en forma consecutiva los puntos A, B, C, de tal manera que AC= 14 y AB – BC = 2 Determinar la longitud de BC.
Solución:
Realizando un gráfico ilustrativo:



Planteando la Hipótesis y la Tesis:
H)
AC = 14
AB – BC = 2

T) *BC = ?*

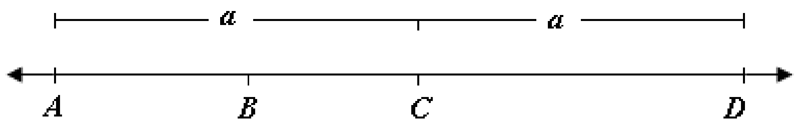
Demostración

Proposiciones	**Razones**
1) AB + BC = AC	1) Suma de segmentos
2) AB + BC =14	2) Hipótesis
3) AB – BC =2	3) Hipótesis
4) 2AB = 16	4) Suma de igualdades (2) y (3)
5) AB = 8	5) Axioma multiplicativo
6) BC = 6	6) Sustituyendo (5) en (2)

4. Los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D son tales que AC = CD, Demostrar que BC = $\frac{BD - AB}{2}$

Solución:

Realizando un gráfico ilustrativo:



Planteando la Hipótesis y la Tesis:

H) AC = CD

T) BC = $\frac{BD - AB}{2}$

Demostración

Proposiciones	**Razones**
1) BD = BC + a	Suma de segmentos
2) AB = a - BC	Suma de segmentos
3) BD - AB = 2BC	Suma de igualdades (1) y (2)
4) $\mathrm{BC} = \frac{\mathrm{AD} - \mathrm{AB}}{2}$	Axioma multiplicativo.

TAREA

1) A B C D

H) AC = BD   T) AB = CD

2) A B C D E F

H) $\overline{DE} \cong \overline{EF}$ T) $\overline{BE} = \frac{\overline{AD} + \overline{CF}}{2}$

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$

3) A B C D H) $\overline{AB}=\dfrac{\overline{AC}+\overline{CD}}{2}$ T) $\overline{AD}=2$

4) Sobre una recta se dan los puntos consecutivos A, B, C y D. Hallar AD, sabiendo que AC=BD= l6m y BC = 400 cm.

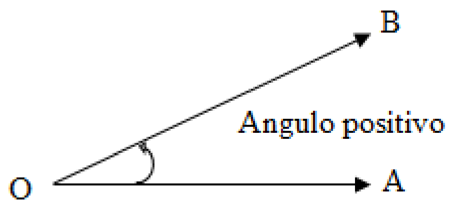
AD= 24m

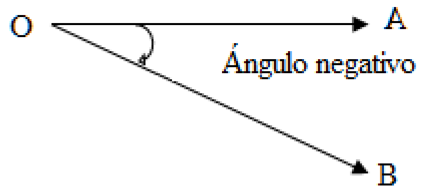
5) Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C, D, E, F de modo que BE=5AF/8. Calcular AF sabiendo que: AC+BD+CE+DF = 39

24

ÁNGULOS

DEFINICIÓN.- Consideremos una semirrecta en el plano y hagámosla rotar alrededor del origen O. este movimiento de rotación que hacemos sobre la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ en el plano con el punto O fijo, hasta una posición final $\overrightarrow{OB}$ determina una figura geométrica que llamamos ángulo por rotación.





La semirrecta $\overrightarrow{OA}$ la llamamos lado inicial del ángulo y la semirrecta $\overrightarrow{OB}$ la llamamos lado terminal del ángulo respectivo. El punto O de intersección coincide con el sentido de la semirrectas en el vértice.

Si la rotación de la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ es contraria a la de las agujas o manecillas del reloj, diremos que el ángulo es positivo. Si la rotación coincide con el sentido de giró de las agujas del reloj diremos que el ángulo es negativo.

NOTACIÓN

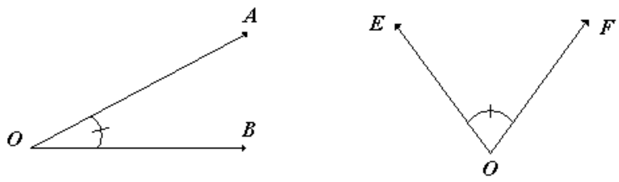
∡ BOA ó ∡AOB (la letra del vértice en el centro)

o también:

∡O; $\hat{O}$; etc.

ÁNGULOS CONGRUENTES

Dos ángulos son congruentes si tienen igual medida.



$\measuredangle\ AOB \cong \measuredangle\ EOF$

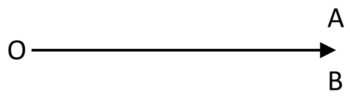
o también

m $\measuredangle$ AOB = m $\measuredangle$ EOF si nos referimos a las medidas

CLASIFICACIÓN

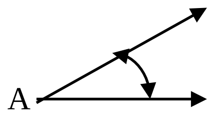
Por su magnitud se clasifican en:

ANGULO NULO.- Su magnitud es igual a 0°



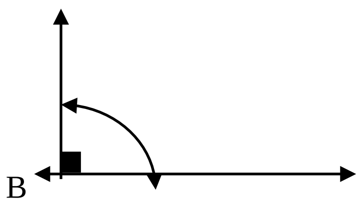
AOB = 0°

Agudo.- Su medida es mayor que 0^0 y menor que $90\,^o$



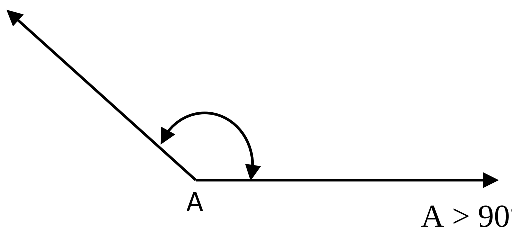
A > 0° y A < 0°

Recto.- Su magnitud es igual a $90\,^o$



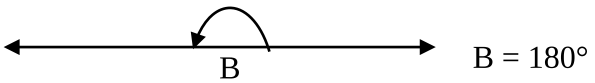
B = 90°

Obtuso.- Su magnitud es mayor que $90\,^o$ y menor que 180^o

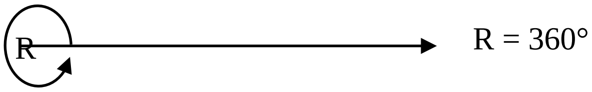


A > 90° y A < 180°

Angulo llano.- Mide 180°

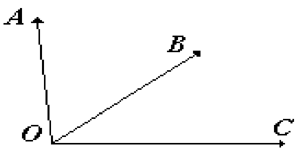


Angulo plano.- Su magnitud es igual a 360°

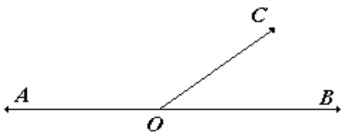


Por la relación de sus lados se clasifica en:

Ángulos Consecutivos.-
Dos ángulos son consecutivos si tienen el mismo vértice; un lado común y los otros lados en regiones distintas del común.

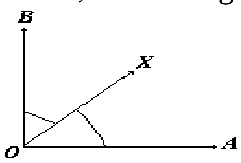


Ángulos adyacentes.-
Denominado también par lineal; son dos ángulos consecutivos cuyas medidas suman 180º.

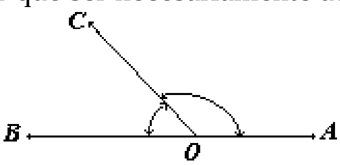


$\measuredangle$ AOC + $\measuredangle$ COB = 180º

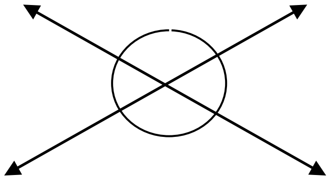
Ángulos complementarios.-
Ángulos complementarios son los que, sumados, dan un ángulo recto (90º).



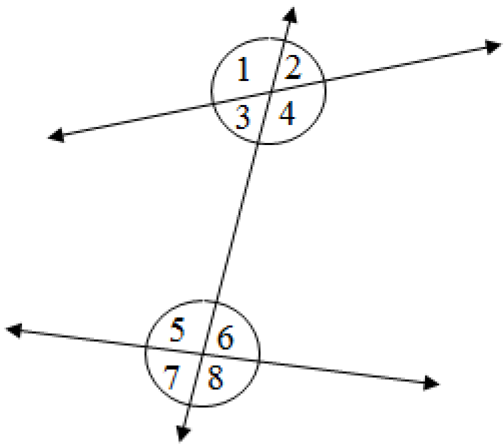
Ángulos suplementarios.-
Ángulos suplementarios son aquellos que sumados dan como resultado un ángulo llano (180º). Los ángulos suplementarios no tienen por qué ser necesariamente adyacentes.



Opuestos por el vértice.- son dos ángulos no adyacentes formados cuando dos rectas se intersecan.



Ángulos formados en dos rectas cortadas por una transversal



Internos.- Son aquellos que están dentro de las rectas 3, 4, 5 y 6

Externos.- Aquellos que están fuera de las rectas 1, 2, 7 y 8

Alternos internos.- Se encuentran dentro de las rectas y a cada lado de la trasversal.

3 y 6, 4 y 5

Aleatorios externos.- Están fueras de las rectas y a diferente lado de la trasversal.

1 y 8, 2 y 7

Correspondientes.- Son aquellos que están al mismo lado de la trasversal, el uno interior y el otro exterior.

1 y 5, 3 y 7, 2 y 6, 4 y 8

Colaterales.- Son aquellos que están dentro de las rectas o fuera de ellas, pero al mismo lado de la trasversal.

1 y 7, 3 y 5, 2 y 8, 4 y 6

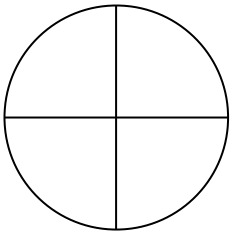
MEDIDA DE ÁNGULOS

La magnitud de un ángulo en la amplitud de rotación para llegar desde el lado inicial hasta el lado terminal.

Los sistemas más utilizados para medir ángulos son el sistema sexagesimal y el Sistema Internacional (SÍ)

Sistema sexagesimal.- Sus unidades son el grado (^{0}), el minuto (’) y el segundo (’’)

Un grado sexagesimal (1^o) es la medida de un ángulo formado por 1/360 de un giro completo en sentido opuesto.



Un giro o revolución mide 360^o, es decir, $1Rev = 360^0$

Un grado es igual a 60 minutos, es decir, $1^0 = 60'$

Un minuto es igual a 60 segundos, es decir, $1' = 60''$

Sistema Internacional.- Su unidad es el radian (rad)

Un radián es la de un ángulo central que determina un arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia.

$$1rad = \frac{longitud\ de\ la\ circunferencia}{radio\ de\ la\ circunferencia} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Por lo tanto un giro completo es igual a 2лrad, es decir, $1Rev = 360^0 = 2\pi rad$

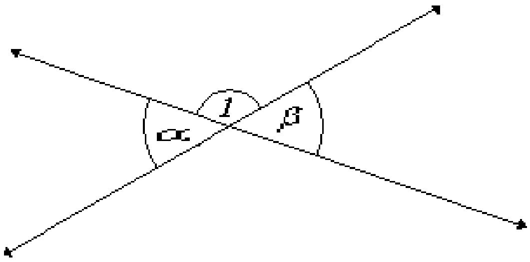
EQUIVALENCIAS

NOTA: se requiere que el estudiante complete el cuadro de equivalencias

Grados (^{o})	0	30	45	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
Radianes (rad)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$							
Revoluciones (Rev)											3/4	5/6	11/12

TEOREMAS

1. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes:

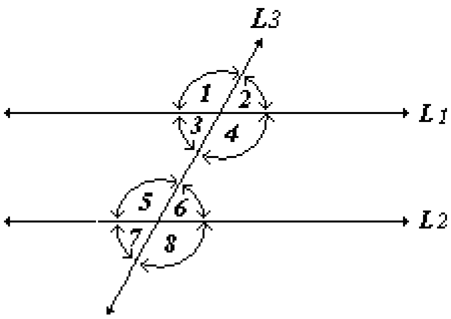


H) $\measuredangle\, \alpha$ y $\measuredangle\, \beta$ Opuestos por el vértice

T) $\measuredangle\, \alpha \cong \measuredangle\, \beta$

$m\measuredangle\, \alpha + m\measuredangle 1 = 180^{o}$	1) Par lineal (Suplementarios)
$m\measuredangle\, \beta + m\measuredangle 1 = 180^{o}$	Par lineal.
$m\measuredangle\, \alpha + m\measuredangle 1 = m\measuredangle\, \beta + m\measuredangle 1$	Axioma transitivo
$m\measuredangle\, \alpha = m\measuredangle\, \beta$	Axioma cancelativo.
$\measuredangle\, \alpha \cong \measuredangle\, \beta$	Definición de congruencia.

2. Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante los ángulos alternos internos son congruentes.

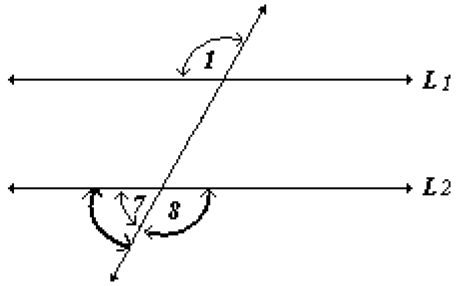


H) $L_1 // L_2$

T) $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 6$

$m\measuredangle 3 + m\measuredangle 5 = 180^{o}$	Ángulos conjugados internos (Postulado)
$m\measuredangle 6 + m\measuredangle 5 = 180^{o}$	Par lineal.
$m\measuredangle 3 + m\measuredangle 5 = m\measuredangle 6 + m\measuredangle 5$	Axioma transitivo
$m\measuredangle 3 = m\measuredangle 6$	Axioma cancelativo.
$\measuredangle 3 \cong \measuredangle 6$	Definición de congruencia.

3. Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante los ángulos alternos externos son congruentes.

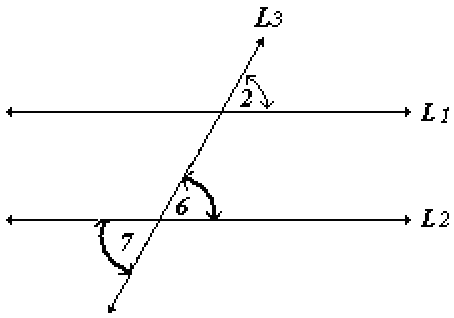


H) $L_1 // L_2$

T) $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 8$

$m \measuredangle 1 + m \measuredangle 7 = 180^\circ$	Ángulos conjugados externos (Postulado)
$m \measuredangle 8 + m \measuredangle 7 = 180^\circ$	Par lineal.
$m \measuredangle 1 + m \measuredangle 7 = m \measuredangle 8 + m \measuredangle 7$	Axioma transitivo
$m \measuredangle 1 = m \measuredangle 8$	Axioma cancelativo.
$\measuredangle 1 \cong \measuredangle 8$	Definición de congruencia.

4. Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante los ángulos correspondientes son congruentes.

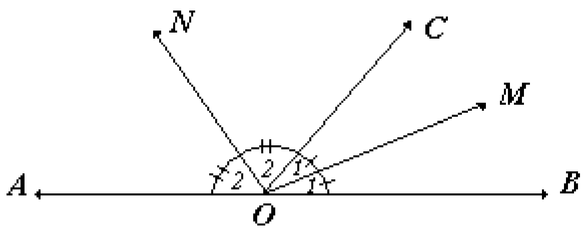


H) $L_1 // L_2$

T) $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 6$

$m \measuredangle 2 = m \measuredangle 7$	Ángulos alternos externos(Teorema 3)
$m \measuredangle 6 = m \measuredangle 7$	Ángulos opuestos por el vértice (Teorema 1)
$m \measuredangle 2 = m \measuredangle 6$	Axioma transitivo
$\measuredangle 2 \cong \measuredangle 6$	Definición de congruencia.

5. Las bisectrices de los ángulos de un par lineal forman entra sí un ángulo cuya medida es 90º

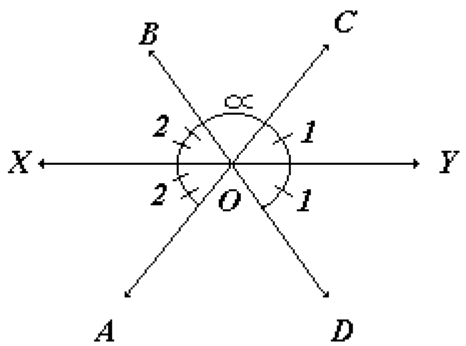


H) $\measuredangle$AOC y $\measuredangle$COB Suplementarios
$\overrightarrow{ON}$ bisectriz $\measuredangle$AOC
$\overrightarrow{OM}$ bisectriz $\measuredangle$COB

T) $\measuredangle$NOM=90º

2m $\measuredangle$1 + 2m $\measuredangle$2 = 180º	Suma de ángulos a un mismo lado de una recta.
m $\measuredangle$1 + m $\measuredangle$2 = 90º	Axioma multiplicativo.
m $\measuredangle$NOM = 90º	Axioma.

6. Las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice son colineales.



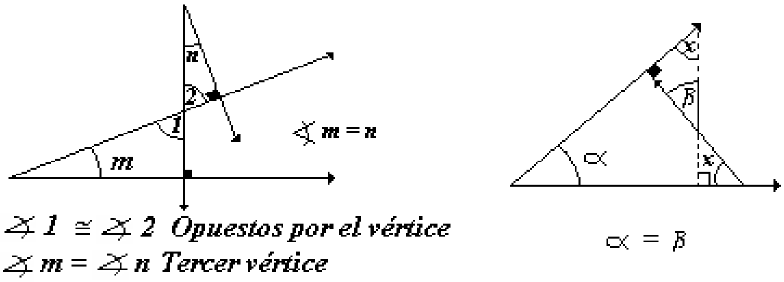
H) $\measuredangle$AOB y $\measuredangle$COD Opuestos por el vértice.

T) m $\measuredangle$YOX = 180º

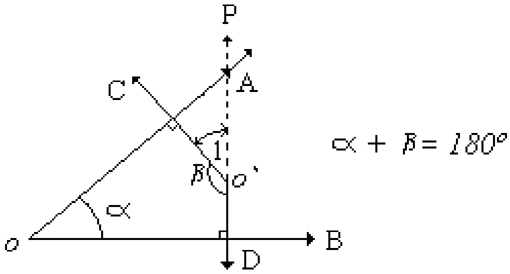
2m $\measuredangle$1 = 2m $\measuredangle$2	Ángulos opuestos por el vértice (Teorema1)
m $\measuredangle$1 = m $\measuredangle$2	Axioma multiplicativo.
m $\measuredangle$2 + m $\measuredangle$2 + m $\measuredangle$ α = 180º	Suma de ángulos a un mismo lado de una recta.
m $\measuredangle$1 + m $\measuredangle$2 + m $\measuredangle$ α = 180º	Sustitución
m $\measuredangle$YOX = 180º	El todo es igual a la suma de sus partes(Axioma)

Ángulos de lados perpendiculares

7. Si los dos ángulos son agudos y tienen sus lados respectivamente perpendiculares serán iguales.

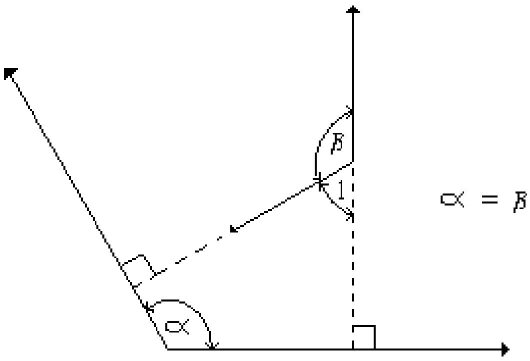


8. Si dos ángulos, uno agudo y el otro obtuso tienen sus lados respectivamente perpendiculares entonces serán suplementarios.



$\overrightarrow{O`P}$	Por construcción
$\measuredangle \alpha \cong \measuredangle 1$	Ángulos agudos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares.
$\measuredangle \beta + \measuredangle 1 = 180^o$	Suplementarios.
$\measuredangle \beta + \measuredangle \alpha = 180^o$	Sustitución

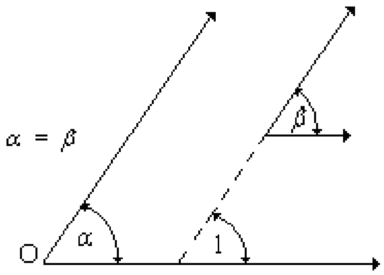
9. Si los dos ángulos son obtusos y tienen sus lados respectivamente perpendiculares, será iguales.



$\measuredangle \alpha + \measuredangle 1 = 180^o$	Ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares.
$\measuredangle \beta + \measuredangle 1 = 180^o$	Suplementarios.
$\measuredangle \alpha - \measuredangle \beta = 0$	Restando las igualdades.
$\measuredangle \alpha = \measuredangle \beta$	Axioma aditivo.

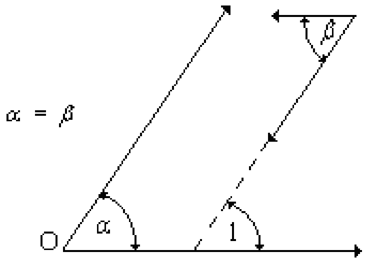
Ángulos de lados paralelos.-

10. Si los ángulos son agudos y dirigidos en el mismo sentido éstos serán iguales.



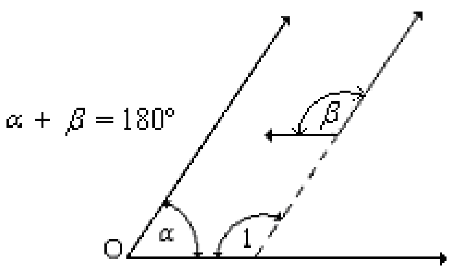
$\measuredangle \alpha \cong \measuredangle 1$	Correspondientes.
$\measuredangle \beta \cong \measuredangle 1$	Correspondientes.
$\measuredangle \alpha \cong \measuredangle \beta$	Axioma Transitivo.

11. Si los ángulos son agudos y sus lados dirigidos en sentido contrario, estos ángulos también será iguales.



$\measuredangle \alpha \cong \measuredangle 1$	Correspondientes.
$\measuredangle \beta \cong \measuredangle 1$	Alternos internos.
$\measuredangle \alpha \cong \measuredangle \beta$	Axioma Transitivo.

12. Si uno es agudo y el otro obtuso siendo los dos lados del mismo sentido y los otros de sentidos contrarios los ángulos serán suplementarios.



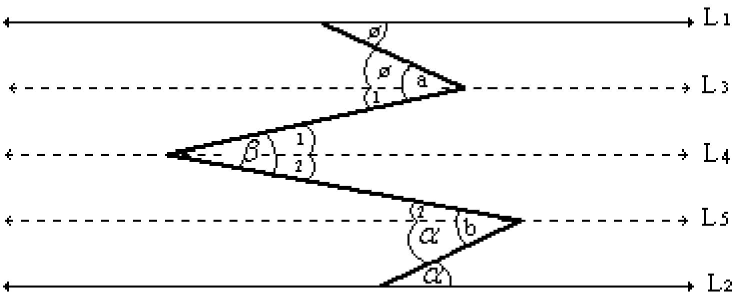
$\measuredangle \alpha + \measuredangle 1 = 180^{o}$	Ángulos colaterales.

$\measuredangle 1 \cong \measuredangle \beta$ Correspondientes.

$\measuredangle \alpha + \measuredangle \beta = 180º$ Sustitución

Propiedades.-

Si $L_1 // L_2 \Rightarrow a + b = Ø + \beta + \alpha$



$L_1 // L_3 // L_4 // L_5$	Por construcción
$\measuredangle a = \measuredangle Ø + \measuredangle 1$	Axioma. El todo es igual a la suma de sus partes.
$\measuredangle b = \measuredangle \alpha + \measuredangle 2$	Axioma.
$\measuredangle a + \measuredangle b = \measuredangle Ø + \measuredangle \alpha + \measuredangle 1 + \measuredangle 2$	Suma de igualdades.
$\measuredangle \beta = \measuredangle 1 + \measuredangle 2$	Axioma.
$\measuredangle a + \measuredangle b = \measuredangle Ø + \measuredangle \alpha + \measuredangle \beta$	Sustitución.

Ejemplos ilustrativos

1. La suma de complementos y suplementos de dos ángulos que se diferencian en 40º es 400º. Calcular el complemento del mayor ángulo.

$\Theta - \beta = 40º$ **(1)** Hipótesis

$S_\Theta + S_\beta + C_\Theta + C_\beta = 400º$ Hipótesis

$(180º-\Theta)+(180º-\beta)+(90º-\Theta)+(90º-\beta)= 400º$ Definición de suplemento y complemento

$540º - 2\Theta - 2\beta = 400º$ Propiedad clausurativa y reducción de términos semejantes.

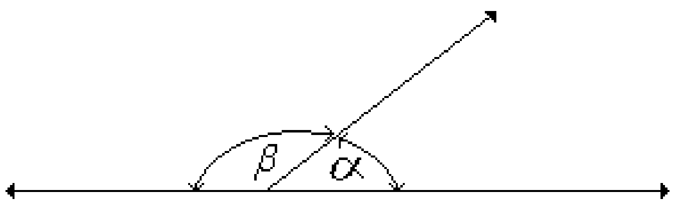
$140º = 2\Theta + 2\beta$ Axioma aditivo

$70º = \Theta + \beta$ **(2)** Axioma multiplicativo.

(1) $\Theta - \beta = 40º$	Hipótesis
(2) $\Theta + \beta = 70$	Ecuación deducida
$2\Theta = 110º$	Suma de igualdades.
$\Theta = 55º,\ \beta = 15º$	Axioma multiplicativo.
$C_\Theta = C_{55º} = 35º$	Complemento del mayor ángulo.

2. *Dos veces la medida de un ángulo es igual el suplemento de dicho ángulo. Hallar los ángulos.*

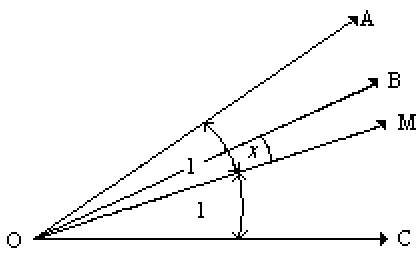
Solución:



$2\alpha = \beta$	Hipótesis.
$\alpha + \beta = 180º$	Suplementarios.
$\alpha + 2\alpha = 180º$	Sustitución.
$3\alpha = 180º$	Reducción de términos semejantes.
$\alpha = 60º$	Axioma multiplicativo.
$\therefore \beta = 120º$	Suplementario.

3. Se tiene los ángulos consecutivos AOB y BOC, luego se traza $\overrightarrow{OM}$, bisectriz del $\measuredangle$AOC. Calcular la medida del ángulo MOB, sabiendo que m$\measuredangle$BOC - m$\measuredangle$AOB =30º.

Resolución:



m$\measuredangle$BOC - m$\measuredangle$AOB =30º	Hipótesis.
(m$\measuredangle$x + m$\measuredangle$1)-(m$\measuredangle$1- m$\measuredangle$x) = 30º	Axioma.
2m$\measuredangle$x = 30º	Axioma cancelativo.
m$\measuredangle$x = 15º	Axioma multiplicativo.

TAREA

1) Realice un organizador gráfico de la clasificación de los ángulos

2) Termine de llenar la siguiente tabla

Grados (º)	0	30	45	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
Radianes (rad)	0	π/6											
Revoluciones (Rev)													11/12

3) Dos ángulos son complementarios y uno le ellos es л rad/10 más que el triple del otro. Cuánto mide cada ángulo. 18°, 72º

4) Calcular el valor de dos ángulos suplementarios de modo que si el quíntuplo del menor le disminuye la mitad del mayor, se obtiene el triple del menor aumentado en л rad/18.

40°, 140°

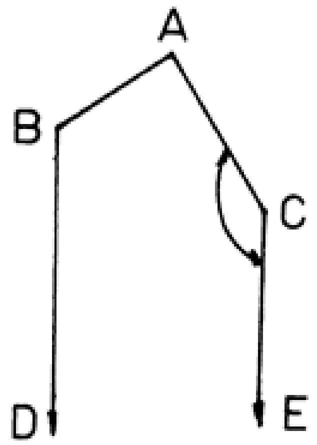
5) De dos ángulos suplementarios, los 2/3 de uno de ellos más la sexta parte del otro forman un ángulo recto, -cuanto mide cada ángulo.

60°, 120°

6) Los 4/7 de un ángulo menos la cuarta parte de su suplemento, dan su suplemento aumentado en л rad/6. ¿Cuánto mide el ángulo?

140°

7)



H) $\overrightarrow{BD} \parallel \overrightarrow{CE}$

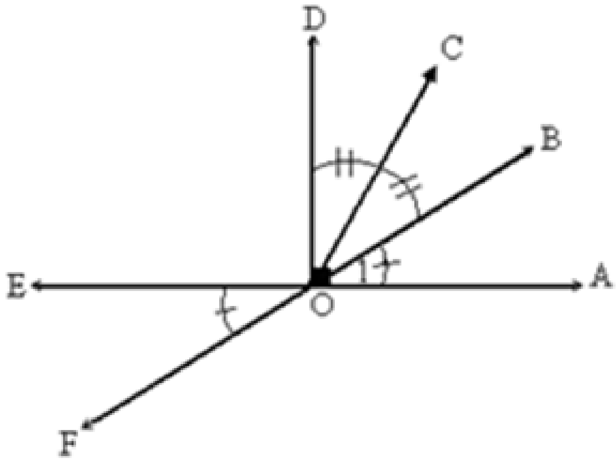
$m\ \hat{A} = 4\ \pi/9$ rad

$m\ \hat{B} = 13\ \pi/18$ rad

T) $m\ \hat{C} = ?$

Resp. 150°

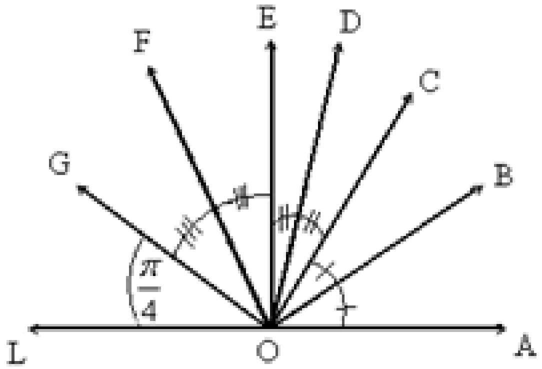
8)



T) $\dfrac{m\angle AOC}{m\angle COF} = \dfrac{11}{29}$

H) $m\angle\ 1 = 20^0$

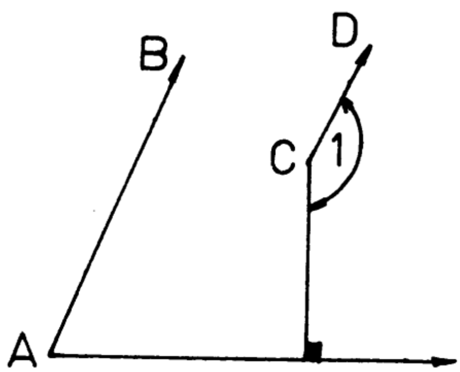
9)



T) $\vec{OF}$ *bisectriz* $\angle COL$

H) $m\angle\ COE = 45^0$

10)



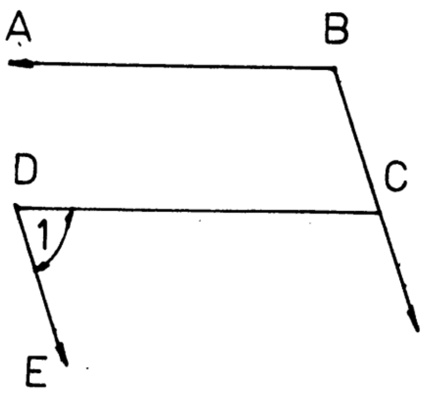
H) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

$m\ \hat{A} = 3\ \pi/10$ rad

T) $m\ \hat{1} = ?$

Resp. 144°

11)



H) $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{DC}$

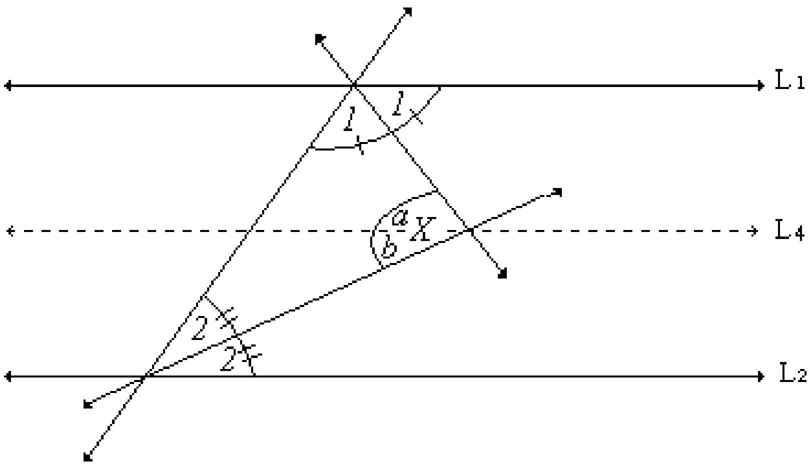
$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DE}$

$m\ \widehat{B} = 3\ \pi/4$ rad

T) $m\ \widehat{1} = ?$

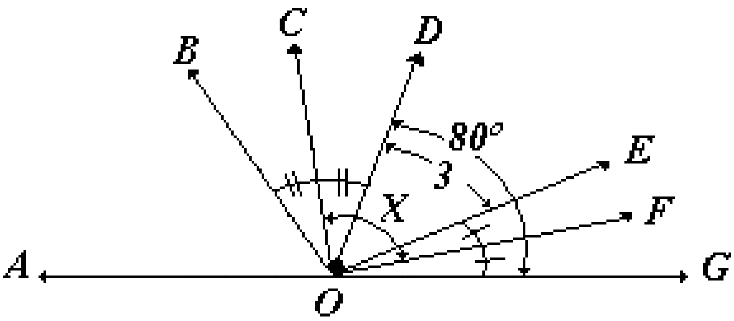
Resp. 45°

12) Si L_1 // L_2, hallar x



90º

13) Hallar x



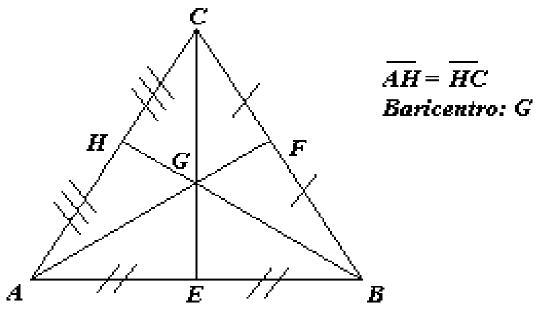
85º

TRIÁNGULOS

Definición.- Es una porción de plano limitado por tres segmentos.

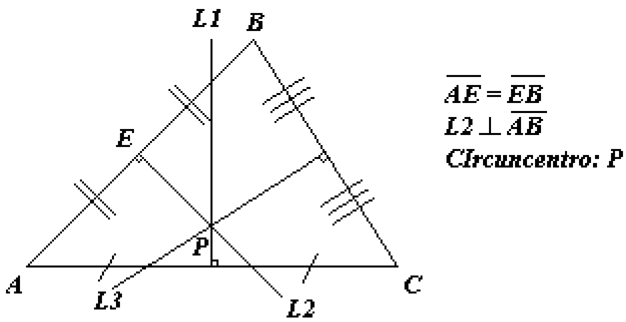
LÍNEAS Y PUNTOS NOTABLES DE UN TRIANGULO:

Mediana.- Es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.



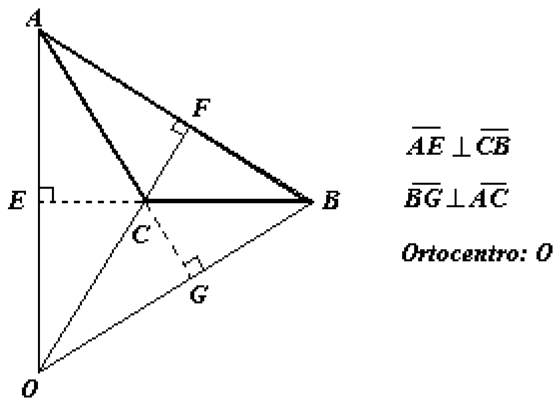
El punto de intersección de las medianas se llama BARICENTRO O CENTRO DE GRAVEDAD.

Mediatriz.- Es la perpendicular trazada en el punto medio de uno de los lados.



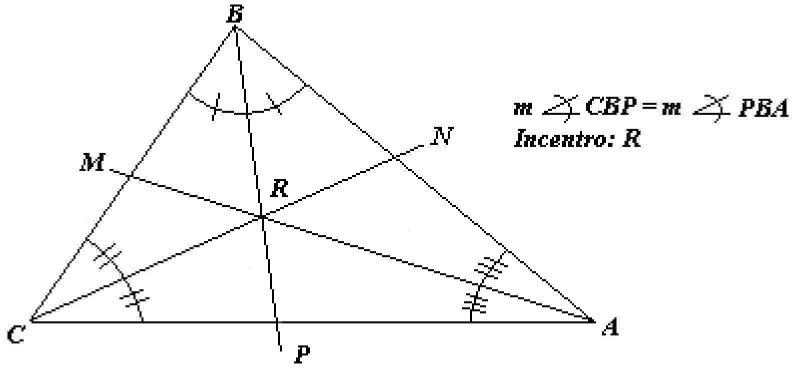
Se denomina CIRCUNCENTRO al punto de intersección de las mediatrices.
Es el centro del círculo circunscrito.

Altura.- Es el segmento que parte de un vértice en forma perpendicular a su lado opuesto o su prolongación.



El punto de intersección de las tres alturas se llama ORTOCENTRO.

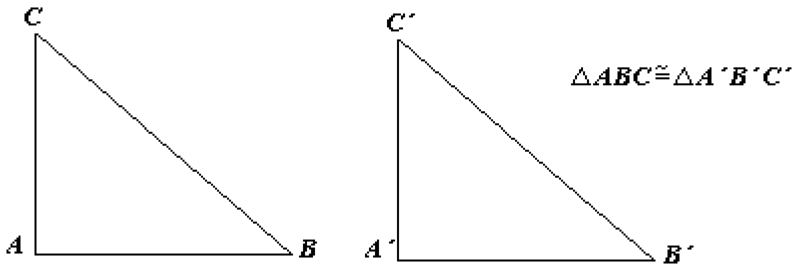
Bisectriz.- Es el segmento que divide al ángulo en dos ángulos de igual medida.



La intersección de las bisectrices toma el nombre de INCENTRO. Es el centro del círculo inscrito.

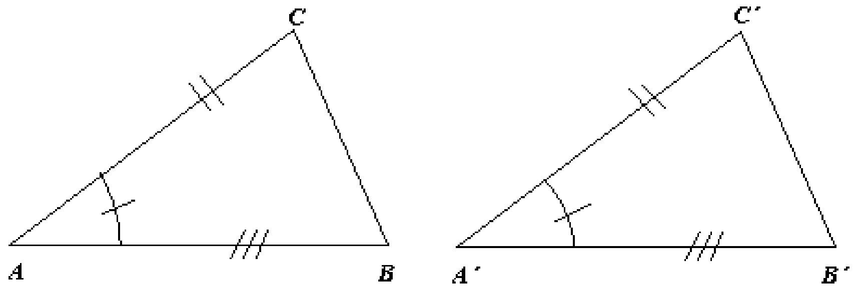
CONGRUENCIA (≅) DE TRIÁNGULOS

Dos figuras geométricas son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño.



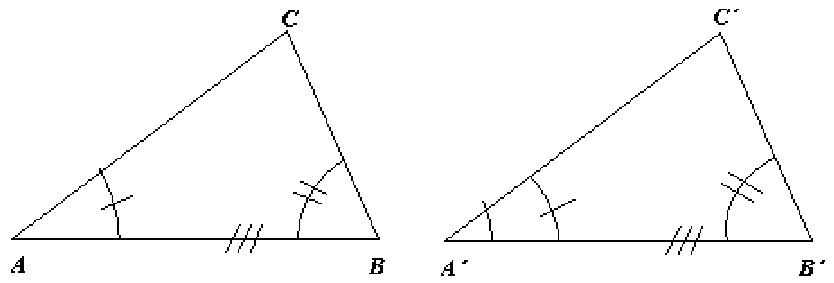
Postulados

1) Dos triángulos son congruentes si y sólo si, son respectivamente congruentes sus dos lados; el ángulo comprendido entre ellos. A este postulado se le conoce como criterio de congruencia lado, ángulo, lado que se representa como: L.A.L.



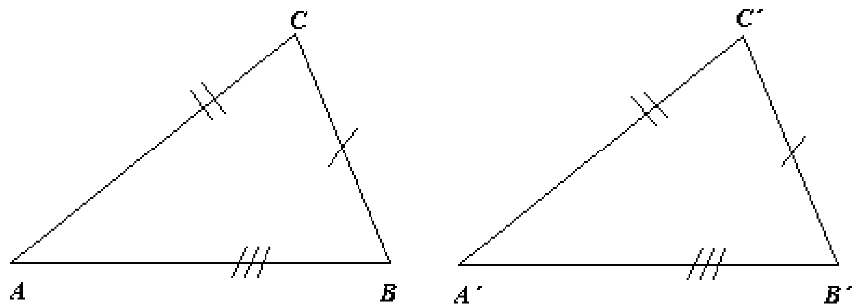
ΔABC ≅ ΔA´B´C´(L.A.L)

2) Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente congruentes un lado y los ángulos adyacentes a éste. A este postulado se le conoce como criterio de congruencia ángulo, lado, ángulo que se representa como A.L.A.



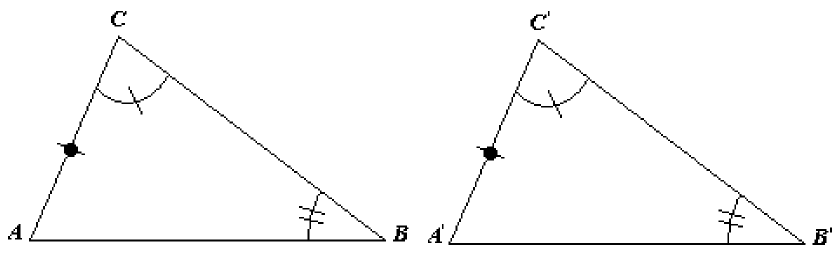
$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$(A.L.A)

3) Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los lados correspondientes de otro, entonces los dos triángulos son congruentes. A este criterio se le conoce como lado, lado, lado, que se abrevia como L.L.L.



$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$(L.L.L.)

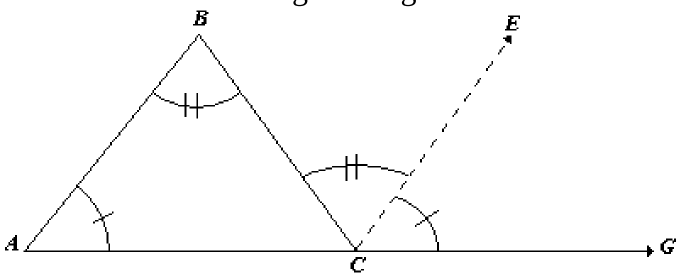
4) Si dos triángulos tienen respectivamente congruentes dos ángulos y un lado homólogo cualquiera entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo, ángulo, lado que se representa como A.A.L.



$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$(A.A.L)

Teoremas

1) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º.

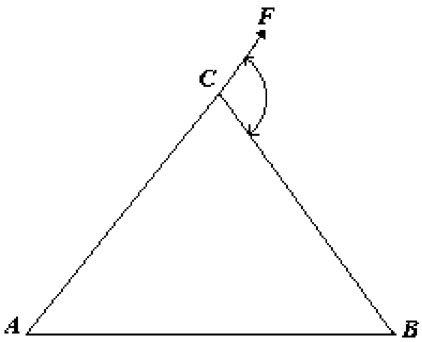


H) ABC Triángulo

T) $m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C = 180º$

D) $\overline{CE} \parallel \overline{AB}$	Por construcción.
$m\measuredangle ECG = m\measuredangle A$	Correspondientes.
$m\measuredangle ECB = m\measuredangle B$	Alternos internos.
$m\measuredangle GCE + m\measuredangle ECB + m\measuredangle C = 180º$	Suma de ángulos a un mismo lado de una recta.
$m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C = 180º$	Sustitución.

2) El ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.

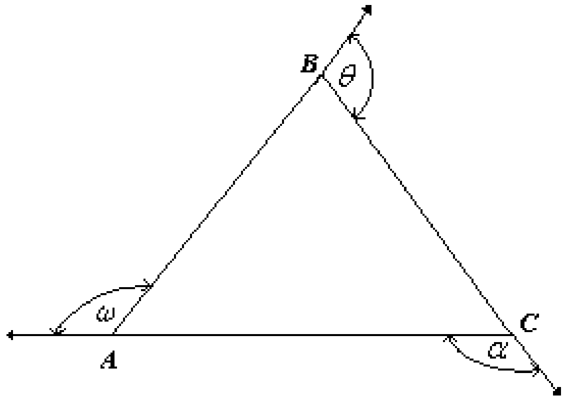


H) $\measuredangle BCF$ es exterior al ΔABC

T) $m\measuredangle BCF = m\measuredangle A + m\measuredangle B$

D) $m\measuredangle BCF + m\measuredangle C = 180º$	Suplementarios.
$m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C = 180º$	Teorema.
$m\measuredangle BCF + m\measuredangle C = m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C$	Axioma transitivo.
$m\measuredangle BCF = m\measuredangle A + m\measuredangle B$	Axioma cancelativo.

3) En todo triángulo; la suma de los ángulos exteriores es 360º.



H) $\measuredangle\,\omega$, $\measuredangle\,\theta$, $\measuredangle\,\alpha$ ángulos exteriores al ΔABC

T) $\measuredangle\,\omega + \measuredangle\,\theta + \measuredangle\,\alpha = 360^\circ$

D) $m\measuredangle B + m\measuredangle\,\theta = 180^\circ$ Suplementarios.

$m\measuredangle A + m\measuredangle\,\omega = 180^\circ$ Suplementarios.

$m\measuredangle C + m\measuredangle\,\alpha = 180^\circ$ Suplementarios.

$(m\measuredangle B + m\measuredangle A + m\measuredangle C) + m\measuredangle\,\theta + m\measuredangle\,\omega + m\measuredangle\,\alpha = 540^\circ$

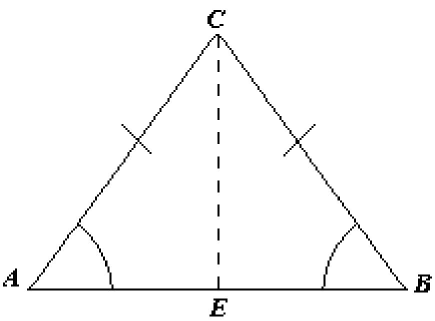
Suma de igualdades y propiedad asociativa.

$180^\circ + m\measuredangle\,\theta + m\measuredangle\,\omega + m\measuredangle\,\alpha = 540^\circ$

Teorema 1

$m\measuredangle\,\theta + m\measuredangle\,\omega + m\measuredangle\,\alpha = 360^\circ$ Axioma aditivo

4) En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a lados congruentes son congruentes.



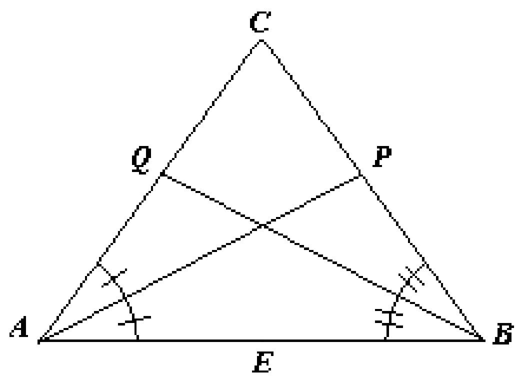
H) ΔABC Isósceles

$\overline{AC} \cong \overline{BC}$

T) $\measuredangle A \cong \measuredangle B$

D) CE bisectriz $\measuredangle$C	Por construcción.
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$	Hipótesis.
m$\measuredangle$ACE = m$\measuredangle$BCE	$\overline{CE}$ bisectriz de $\measuredangle$C.
$\overline{CE} \cong \overline{CE}$	Lado común.
ΔACE $\cong$ ΔBCE	Postulado(LAL)
m $\measuredangle$A = m$\measuredangle$B	Partes homólogas.
$\measuredangle$A $\cong$ $\measuredangle$B	Definición de congruencia.

5) Todo triángulo isósceles tiene dos bisectrices laterales congruentes.

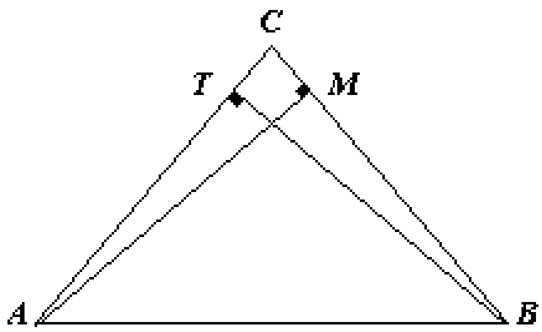


H) ΔABC Isósceles
$\overline{BQ}$ *bisectriz* $\measuredangle$B
$\overline{AP}$ *bisectriz* $\measuredangle$A

T) $\overline{AP} \cong \overline{BQ}$

D) $\measuredangle$A$\cong$ $\measuredangle$B	Teorema.
$\measuredangle$1$\cong$ $\measuredangle$2	Bisectrices de ángulos congruentes
$\overline{AB} \cong \overline{AB}$	Lado común
ΔBAQ $\cong$ ΔABP	Postulado(A.L.A.)
$\overline{BQ} \cong \overline{AP}$	Partes homólogas.

6) Todo triángulo isósceles tiene dos alturas laterales congruentes.

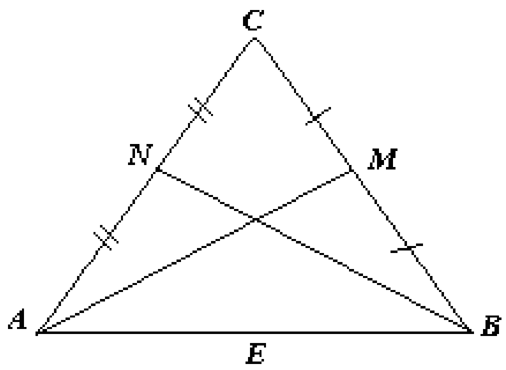


H) ∆ABC Isósceles
AM altura.
BT altura.

T) $\overline{AM} \cong \overline{BT}$

D) $\measuredangle$ ATB ≅ $\measuredangle$ BMA — Hipótesis.
$\measuredangle$ A ≅ $\measuredangle$ B — Teorema.
$\overline{AB} \cong \overline{AB}$ — Lado común
∆BAT ≅ ∆ABM — Postulado(A.A.L.)
$\overline{BT} \cong \overline{AM}$ — Partes homólogas.

7) Todo triángulo isósceles tiene dos medianas laterales congruentes.



H) ∆ABC Isósceles
AM Mediana
BN Mediana

T) $\overline{AM} \cong \overline{BN}$

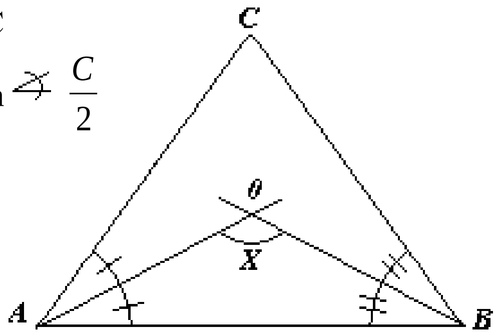
D) AN = $\frac{AC}{2}$ — Axioma.
BM = $\frac{BC}{2}$ — Axioma.

Como $\overline{AC} \cong \overline{BC}$	Lados de un triángulo isósceles.
$\overline{AN} \cong \overline{BM}$	Axioma transitivo.
$\measuredangle A \cong \measuredangle B$	Teorema
$\overline{AB} \cong \overline{AB}$	Lado común
$\Delta NAB \cong \Delta MBA$	Postulado L.A.L.
$\therefore \overline{BN} \cong AM$	Partes homólogas.

8) El ángulo formado por dos bisectrices internas de un triángulo es igual a 90º más la mitad de la medida del ángulo no bisecado.

H) O incentro ΔABC

T) $m\measuredangle X = 90^{\circ} + m\measuredangle \dfrac{C}{2}$



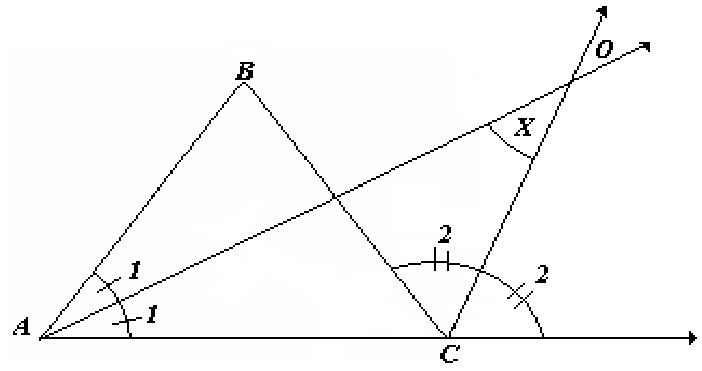
D) En el ΔABC

$m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C = 180^{\circ}$	Suma de ángulos internos de un triángulo.
$m\measuredangle \dfrac{A}{2} + m\measuredangle \dfrac{B}{2} + m\measuredangle \dfrac{C}{2} = 90^{\circ}$ **(1)**	Axioma multiplicativo.

En el $\Delta AB0$

$m\measuredangle \dfrac{A}{2} + m\measuredangle \dfrac{B}{2} + m\measuredangle X = 180^{\circ}$ **(2)**	Suma de ángulos internos de un triángulo.
$m\measuredangle \dfrac{A}{2} + m\measuredangle \dfrac{B}{2} + m\measuredangle X = 180^{\circ}$ **(2)**	
$m\measuredangle \dfrac{A}{2} + m\measuredangle \dfrac{B}{2} + m\measuredangle \dfrac{C}{2} = 90^{\circ}$ **(1)**	
$m\measuredangle X - m\measuredangle \dfrac{C}{2} = 90^{\circ}$	Restando las ecuaciones (2) y (1).
$m\measuredangle X = 90^{\circ} + m\measuredangle \dfrac{C}{2}$	Axioma aditivo.

9) El ángulo formado por las bisectrices interna y externa de vértices diferentes de un triángulo; es igual a la mitad de la medida del ángulo interno en el tercer vértice.



H) O ex-centro ΔABC

T) $m\measuredangle X = m\measuredangle \frac{B}{2}$

D) En el ΔACO

$m\measuredangle 2 = m\measuredangle X + m\measuredangle 1$ **(1)** — Ángulo exterior a un triángulo.

En el ΔABC

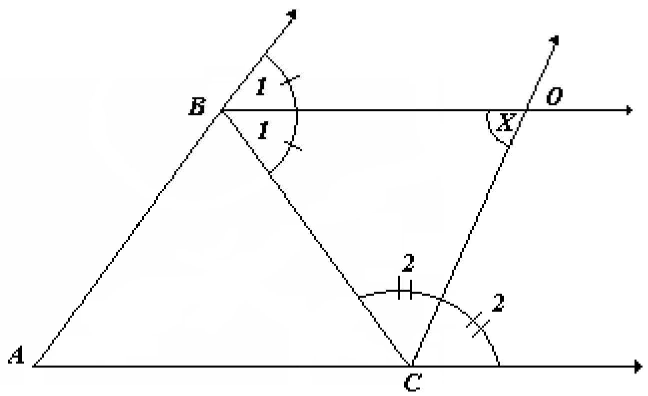
$2m\measuredangle 2 = 2m\measuredangle 1 + m\measuredangle B$ — Ángulo exterior a un triángulo.

$m\measuredangle 2 = m\measuredangle 1 + m\measuredangle \frac{B}{2}$ **(2)** — Axioma multiplicativo.

$m\measuredangle X + m\measuredangle 1 = m\measuredangle 1 + m\measuredangle \frac{B}{2}$ — Axioma transitivo (1)=(2).

$m\measuredangle X = m\measuredangle \frac{B}{2}$ — Axioma cancelativo.

10) El ángulo formado por dos bisectrices externas de un triángulo; es igual a 90º disminuido en la mitad del ángulo interno en el tercer vértice.



H) O ex-centro ΔABC

T) $m\measuredangle X = 90^{o} - m\measuredangle \frac{A}{2}$

D) En el ΔBOC

$m\measuredangle 1 + m\measuredangle 2 + m\measuredangle X = 180^{o}$ — Suma de ángulos internos de un triángulo.

$m\measuredangle X = 180^{o} - m\measuredangle 1 - m\measuredangle 2$ **(1)** — Axioma aditivo.

En el ΔABC

$2m\measuredangle 2 = m\measuredangle A + m\measuredangle B$ — Ángulo exterior a un triángulo.

$m\measuredangle 2 = m\measuredangle \frac{A}{2} + m\measuredangle \frac{B}{2}$ **(2)** — Axioma multiplicativo.

$2m\measuredangle 1 = m\measuredangle A + m\measuredangle C$ — Ángulo exterior a un triángulo.

$m\measuredangle 1 = m\measuredangle \frac{A}{2} + m\measuredangle \frac{C}{2}$ **(3)** — Axioma multiplicativo.

$m\measuredangle X = 180^{o} - (m\measuredangle \frac{A}{2} + m\measuredangle \frac{C}{2}) - (m\measuredangle \frac{A}{2} + m\measuredangle \frac{B}{2})$

Sustituyendo (3) y (2) en (1)

$m\measuredangle X = 180^{o} - m\measuredangle \frac{A}{2} - m\measuredangle \frac{C}{2} - m\measuredangle \frac{A}{2} - m\measuredangle \frac{B}{2})$

Destruyendo paréntesis.

$m\measuredangle X = 180^{o} - (m\measuredangle \frac{A}{2} + m\measuredangle \frac{B}{2} + m\measuredangle \frac{C}{2}) - m\measuredangle \frac{A}{2}$

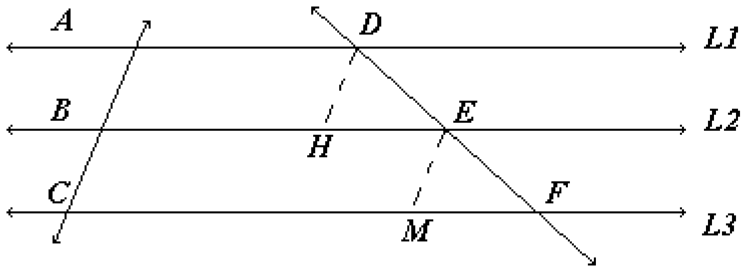
Propiedad conmutativa y asociativa.

$m\measuredangle X = 180^{o} - 90^{o} - m\measuredangle \frac{A}{2}$ — Semisuma de ángulos internos de un triángulo.

$m\measuredangle X = 90^{o} - m\measuredangle \frac{A}{2}$ — Propiedad clausurativa.

Teorema de Thales.

11) Si tres o más rectas paralelas determinan segmentos congruentes sobre una transversal, determinan segmentos congruentes sobre cualquier otra transversal.

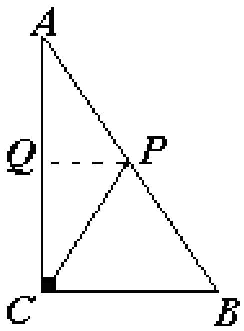


H) $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$
$\overline{AB} \cong \overline{BC}$

T) $\overline{DE} \cong \overline{EF}$

D) $\overline{DH} \wedge \overline{EM} \parallel \overline{AC}$	Por construcción.
$\overline{AB} \cong \overline{DH}$	Lados opuestos de un paralelogramo.
$\overline{BC} \cong \overline{EM}$	Lados opuestos de un paralelogramo.
$\overline{AB} \cong \overline{BC}$	Hipótesis.
$\overline{DH} \cong \overline{EM}$	Axioma transitivo.
$m\measuredangle HDE = m\measuredangle MEF$	Correspondientes.
$m\measuredangle DHE = m\measuredangle HEM$	Alternos internos.
$m\measuredangle HEM = m\measuredangle EMF$	Alternos internos.
$m\measuredangle DHE = m\measuredangle EMF$	Axioma transitivo.
$\Delta HDE \cong \Delta MEF$	Postulado (A.L.A.)
$\overline{DE} \cong \overline{EF}$	Partes homólogas

12) El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de sus vértices.



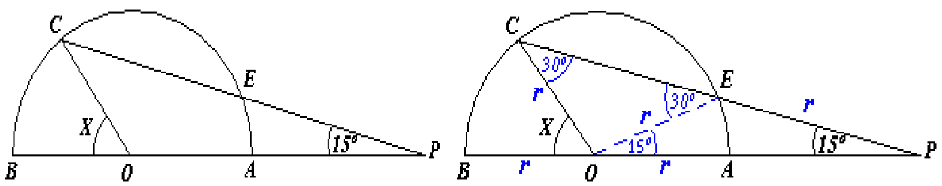
H) P punto medio de $\overline{AB}$

T) $\overline{AP} \cong \overline{PB} \cong \overline{PC}$

D) $\overline{PQ} // \overline{CB}$	Por construcción.
$m\overline{QP} = m\overline{QP}$	Lado común.
m $\measuredangle$ PQA = m $\measuredangle$ PQC = 90º	$\overline{PQ} // \overline{CB}$
$m\overline{AQ} = m\overline{QC}$	Si una recta biseca a un lado de un triángulo y es paralelo a otro lado, biseca también al tercer lado.
Δ APQ ≅ Δ CQP	Postulado (L.A.L.)
$\overline{AP} \cong \overline{PC}$	Partes homólogas.
$\overline{AP} \cong \overline{PB}$	Hipótesis.
$\overline{AP} \cong \overline{PB} \cong \overline{PC}$	Axioma transitivo.

Ejemplos ilustrativos

1)



H) O Centro del semicírculo.

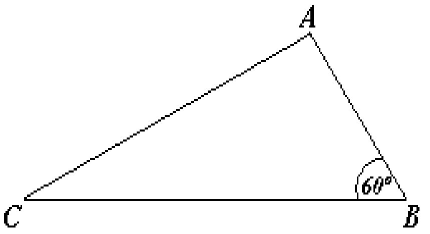
$$EP = \frac{\overline{AB}}{2}$$

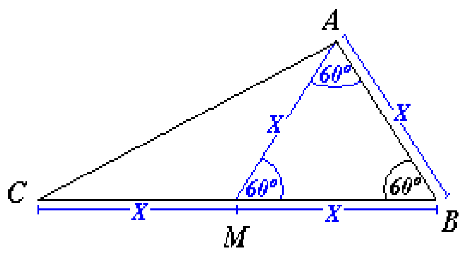
T) m $\measuredangle$ X = ?

Resolución

$\overline{OB} = \overline{OA} = r$	Hipótesis.
$EP = \frac{AB}{2}$	Hipótesis.
$EP = \frac{2r}{2} = r$	Sustitución.
$\overline{OE}$:radio	Por construcción.
m $\measuredangle$ EOA = 15º	A lados iguales, se oponen ángulos iguales.
m $\measuredangle$ CEO = 30º	Ángulo exterior a Δ OEP.
m $\measuredangle$ ECO = 30º	A lados iguales, se oponen ángulos iguales.
m $\measuredangle$ X = 45º	Ángulo exterior a Δ COP.

2)





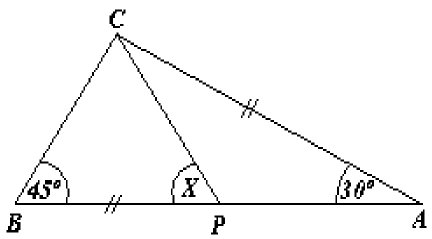
H) $\overline{BC} = 2\overline{AB}$

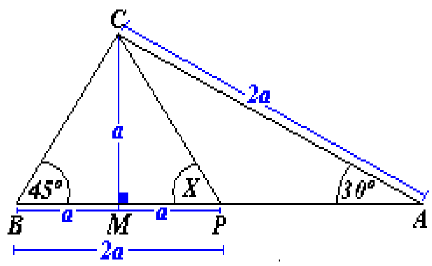
T) m $\measuredangle$C = ?

Resolución

$\overline{AM}$ Por construcción	
m $\measuredangle$AMB = m $\measuredangle$MAB = 60º	Δ ABM Isósceles y equilátero.
60º = m $\measuredangle$C + m $\measuredangle$CAM	Ángulo exterior a Δ CMA.
60º = m $\measuredangle$C + m $\measuredangle$C	Δ CMA Isósceles
60º = 2 m $\measuredangle$C	Reducción de términos semejantes.
m $\measuredangle$C = 30º	Axioma multiplicativo.

3)





H) $\overline{BP} \cong \overline{AC}$

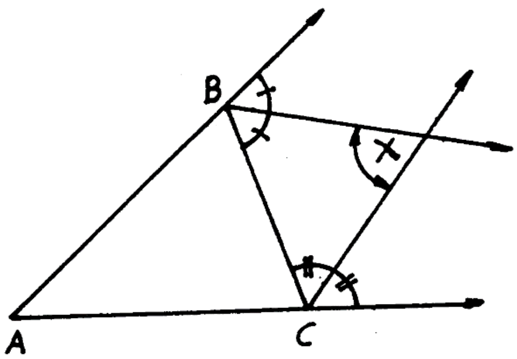
T) m $\measuredangle$X = ?

Resolución

$\overline{CM}$ altura	Por construcción.
$\overline{CM} = a$	Lado opuesto al ángulo de 30º en el ⊿ AMC.
m $\measuredangle$BCM = 45º	Ángulo complementario.
$\overline{BM} = \overline{CM} = a$	A ángulos iguales, se oponen lados iguales.
$\overline{MP} = a$	EL todo es igual a la suma de sus partes.
m $\measuredangle$X = 45º	Δ PMC rectángulo e Isósceles.

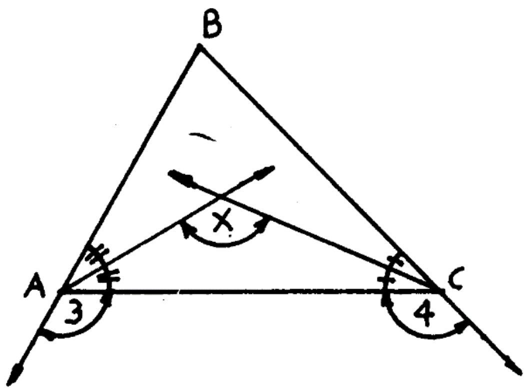
TAREA

1) Consultar la clasificación de los triángulos de acuerdo a sus lados, a sus ángulos y a sus líneas notables.
2) Realice un organizador gráfico de los postulados de congruencia de los triángulos presentados en este documento.
3) Realice un organizador gráfico de los teoremas de los triángulos presentados en este documento
4)



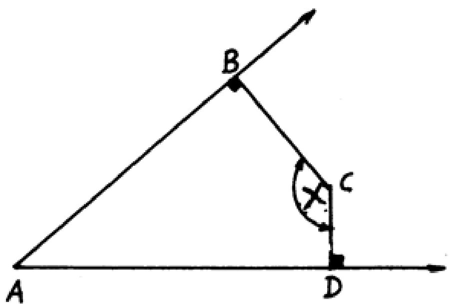
T) $m\,\hat{X} = \dfrac{m\,\hat{B} + m\,\hat{C}}{2}$

5)



T) $m\,\hat{X} = \dfrac{m\,\hat{3} + m\,\hat{4}}{2}$

6)

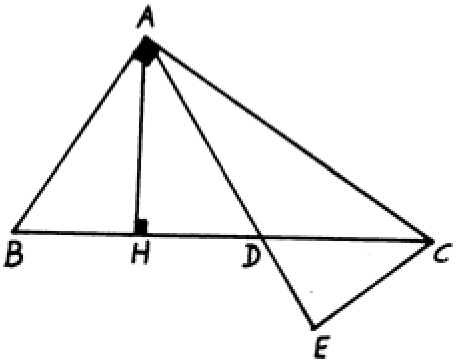


H) $m\,\hat{A} = \pi/9$

T) $m\,\hat{X} = ?$

Resp. 160°

7)



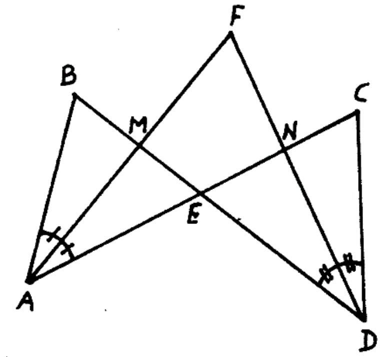
H) $\overline{BH} \cong \overline{HD}$

· $\widehat{ACD} \cong \widehat{ECD}$

T) m $\hat{E}$ = ?

Resp. 90°

8)



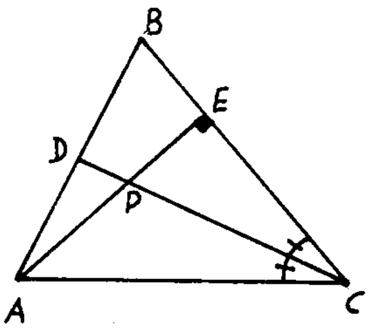
H) m $\hat{B}$ = 22 π/45 rad

m $\hat{C}$ = 4 π/9 rad

T) m $\hat{F}$ = ?

Resp. 84°

9)



H) m $\hat{A}$ = 16 π/45 rad

m $\hat{B}$ = 21 π/90 rad

T) m $\widehat{APC}$ = ?

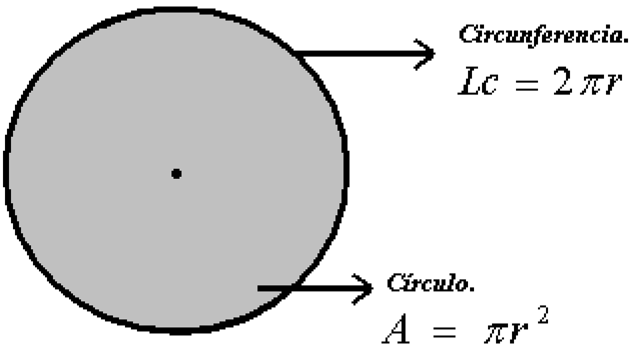
Resp. 127°

10) Consulte y resuelva un ejercicio similar a los anteriores

CIRCUNFERENCIA

Circunferencia.-
Es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de otro punto de dicho plano llamado centro.

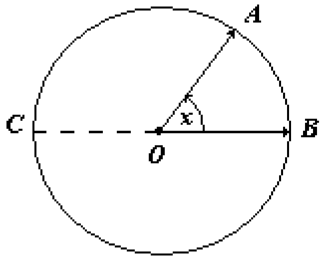
Circulo.-
Es la porción de plano que comprende la circunferencia y su interior.



Ángulos en la circunferencia y su medida.

Ángulo Central.-
Es el ángulo que tiene como vértice el centro de la circunferencia y como lados dos radios.

Teorema
La medida del ángulo central es igual a la medida del arco que subtiende sus lados.



H) $\measuredangle X$ Ángulo central.
$\overset{\frown}{AB}$ Arco que subtiende sus lados.

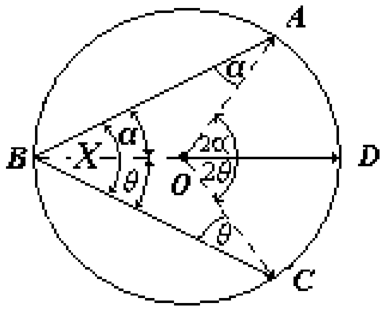
T) $m\measuredangle X = m\overset{\frown}{AB}$

D) CB :	Diámetro por construcción.
$m\overset{\frown}{CAB} = 180^{\circ}$	Longitud de arco de una semicircunferencia.
$m\measuredangle BOC = 180^{\circ}$	Ángulo llano.
$m\measuredangle BOC = m\overset{\frown}{CAB}$	Axioma transitivo.

$m\measuredangle X = m\,\widehat{AB}$ En forma proporcional.

<u>Ángulo Inscrito.-</u>
Es el ángulo que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son dos cuerdas.

Teorema
La medida del ángulo inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.



H) $\measuredangle X$ Ángulo inscrito.

$\widehat{AC}$ Arco que subtiende sus lados.

T) $m\measuredangle X = \dfrac{m\widehat{AC}}{2}$

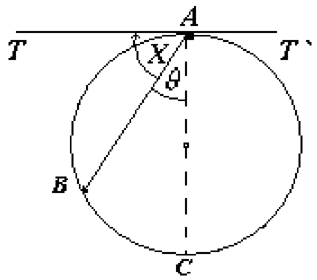
D) BD:	Diámetro por construcción.
OA y OC	Radios por construcción.
$m\measuredangle ABO = m\measuredangle BAO = m\measuredangle \alpha$	Δ BOA Isósceles.
$m\measuredangle CBO = m\measuredangle BCO = m\measuredangle \theta$	Δ BOC Isósceles.
$m\measuredangle AOD = 2\,m\measuredangle \alpha$	Ángulo exterior a un triángulo.
$m\measuredangle DOC = 2\,m\measuredangle \theta$	Ángulo exterior a un triángulo.
$2m\measuredangle \alpha = m\,\widehat{AD}$	Ángulo central.
$2m\measuredangle \theta = m\,\widehat{DC}$	Ángulo central.
$2m\measuredangle \alpha + 2m\measuredangle \theta = m\,\widehat{AD} + m\,\widehat{DC}$	Suma de igualdades
$2(m\measuredangle \alpha + m\measuredangle \theta) = m\,\widehat{AD} + m\,\widehat{DC}$	Factorando.
$m\measuredangle X = \dfrac{m\widehat{AC}}{2}$	La suma de las partes es igual al todo.

Ángulo Semi -inscrito.-

Es el ángulo que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son una cuerda y una tangente.

Teorema

La medida del ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del arco comprendida entre sus lados.



H) $\measuredangle$ X Ángulo semi - inscrito.

$\overset{\frown}{AB}$ Arco que subtiende sus lados.

T) $m\measuredangle X = \dfrac{m\overset{\frown}{AB}}{2}$

D) AC: Diámetro por construcción.

$m\measuredangle TAC = 90º$ — $TT` \perp AC$

$m\measuredangle X = 90º - m\measuredangle\,\theta$ **(1)** — El todo es igual a la suma de sus partes.

$m\measuredangle\,\theta = \dfrac{m\overset{\frown}{BC}}{2}$ **(2)** — Ángulo inscrito.

$m\measuredangle X = 90º - \dfrac{m\overset{\frown}{BC}}{2}$ — Sustitución (2) en (1).

$m\measuredangle X = \dfrac{180º - m\overset{\frown}{BC}}{2}$ — Sumando.

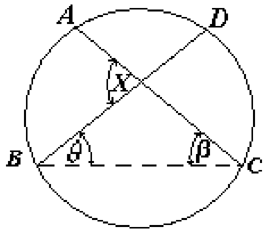
$m\measuredangle X = \dfrac{m\overset{\frown}{AB}}{2}$ — El todo es igual a la suma de sus partes.

Ángulo Interior.-

Es el ángulo que tiene su vértice dentro de la circunferencia y sus lados son dos cuerdas que se cortan.

Teorema

La medida del ángulo interior es igual a la semisuma de los arcos correspondientes.



H) $\measuredangle$ X Ángulo interior.

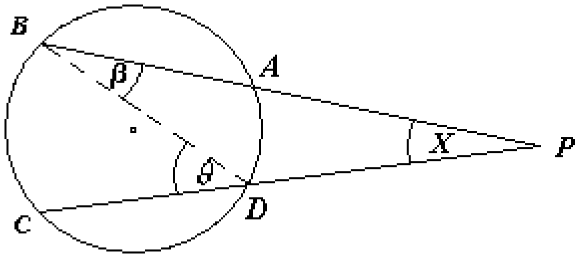
$\overset{\frown}{AB} \wedge \overset{\frown}{DC}$ Arcos que subtienden sus lados.

T) $m\measuredangle X = \dfrac{m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{DC}}{2}$

D) $\overline{BC}$	Cuerda por construcción.
$m\measuredangle X = m\measuredangle \Theta + m\measuredangle \beta$	Ángulo exterior a un triángulo.
$m\measuredangle X = \dfrac{m\overset{\frown}{DC}}{2} + \dfrac{m\overset{\frown}{AB}}{2}$	Ángulo inscrito.
$m\measuredangle X = \dfrac{m\overset{\frown}{DC} + m\overset{\frown}{AB}}{2}$	Sumando.

<u>Ángulo Exterior.-</u>
Es el ángulo que tiene su vértice fuera de la circunferencia y sus lados son dos secantes o dos tangentes, o una secante y una tangente.

Teorema
La medida del ángulo exterior es igual a la semidiferencia de los arcos interceptados.



H) $\measuredangle X$ Ángulo exterior.

$\overset{\frown}{AB} \wedge \overset{\frown}{AD}$ Arcos que determinan sus lados.

T) $m\measuredangle X = \dfrac{m\overset{\frown}{BC} - m\overset{\frown}{AD}}{2}$

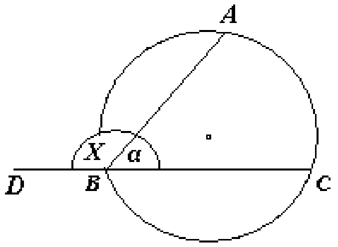
D) $m\measuredangle \Theta = m\measuredangle \beta + m\measuredangle X$	Ángulo exterior a un triángulo.
$m\measuredangle X = m\measuredangle \Theta - m\measuredangle \beta$	Axioma aditivo.
$m\measuredangle X = \dfrac{m\overset{\frown}{BC}}{2} - \dfrac{m\overset{\frown}{AD}}{2}$	Ángulo inscrito.
$m\measuredangle X = \dfrac{m\overset{\frown}{BC} - m\overset{\frown}{AD}}{2}$	Sumando.

<u>Ángulo Ex-inscrito.-</u>

Es el ángulo que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son una cuerda y una secante.

Teorema

La medida del ángulo ex-inscrito es igual a la semisuma de los arcos comprendidos entre los lados del ángulo y entre los lados del ángulo opuesto por el vértice.



H) $\measuredangle$ X   Ángulo ex-inscrito.

$\overset{\frown}{AB}$ ∧ $\overset{\frown}{BC}$ Arcos que determinan sus lados.

T) $m\measuredangle X = \dfrac{m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BC}}{2}$

D) $m\measuredangle \alpha = m\dfrac{m\overset{\frown}{AC}}{2}$ Ángulo inscrito.

$m\measuredangle X = 180^{o} - m\measuredangle \alpha$ Suplementarios.

$m\measuredangle X = 180^{o} - \dfrac{m\overset{\frown}{AC}}{2}$ Sustitución.

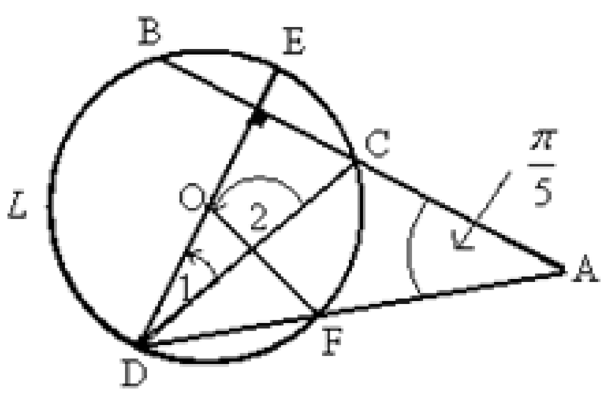
$m\measuredangle X = \dfrac{360^{o} - m\overset{\frown}{AC}}{2}$ Sumando.

$m\measuredangle X = \dfrac{m\overset{\frown}{ABC}}{2}$ El todo es igual a la suma de sus partes.

T) $m\measuredangle X = \dfrac{m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BC}}{2}$ El todo es igual a la suma de sus partes.

TAREA

1) Realice un organizador gráfico sobre ángulos en la circunferencia y su medida

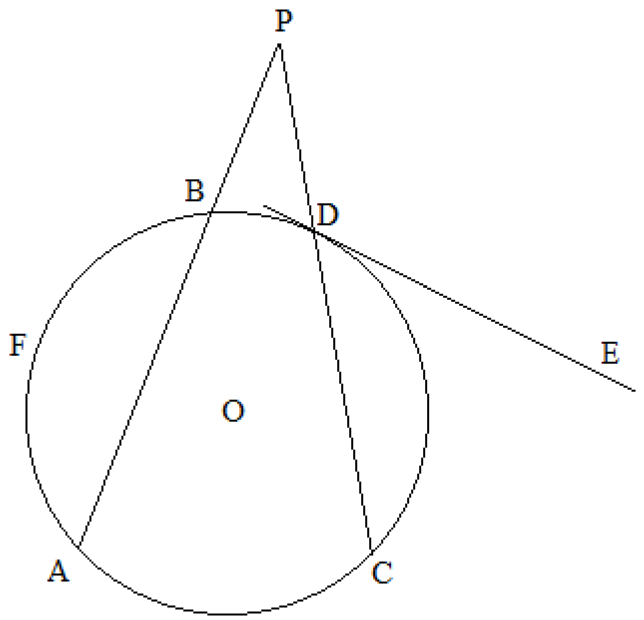


T) $m\overset{\frown}{BLD} = \dfrac{32\pi}{45}$

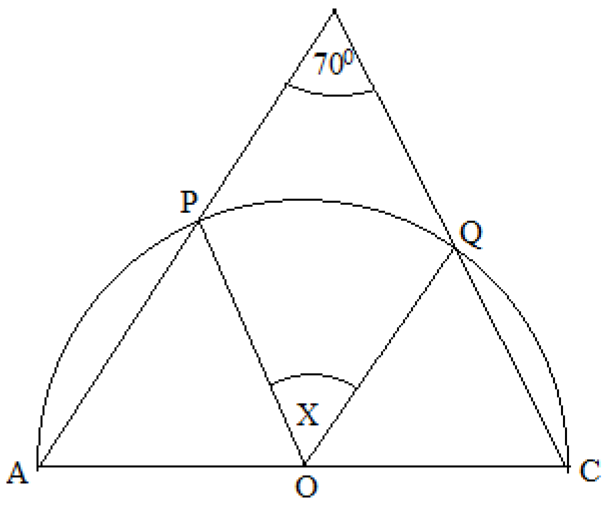
O = Centro

H) $m\angle\ 1 = 26^{0}$

$m\angle\ 2 = 98^{0}$



$H)\ \overline{DE} = tangente$
$\measuredangle EDC = \pi/3$
$\measuredangle APC = \pi/9$
$O = Centro$
$\widehat{AFB} = 2\pi/3$
$T)\ \widehat{AC} = ?$
Resp. 80^0



$T)\ \measuredangle X = 40^0$