Ecuaciones en derivadas parciales

Ecuaciones en derivadas parciales

$$F\left(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots, u_{xxx}, \ldots\right) = 0$$

Tanto para EDPs como para sistemas de EDPs, el **orden** será el mayor orden de derivación presente.

u(x,y) será **solución** de la ecuación en derivadas parciales (EDP) si cumple idénticamente la relación anterior en una cierta región $D \subset \Re^n$.

Recordatorio: Fórmulas de integración en derivadas parciales

El proceso de resolución de una EDP se llama también **integración** de la EDP. En algunos casos la resolución de la ecuación en derivadas parciales es directa entendiendo por ello que se realiza mediante una integración directa. Recordemos, para ello, las fórmulas de integración para derivadas parciales que vienen dadas por

$$\boxed{\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx = f(x,y) + \phi(y), \qquad \int \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy = f(x,y) + \psi(x)}$$

siendo $\phi(y)$, $\psi(x)$ funciones derivables arbitrarias. Las fórmulas anteriores se aplican en la integración indefinida. Por ejemplo, si conocemos la derivada parcial primera de una función, digamos $f_x(x,y) = 2xy$, entonces considerando y como constante e integrando en x se tiene

$$\int 2xy dx = 2y \int x dx = yx^2 + \phi(y)$$

luego $f(x,y) = yx^2 + \phi(y)$. Nótese que cualquier función del tipo $f(x,y) = yx^2 + \phi(y)$ satisface $f_x = 2xy$, independientemente de la función ϕ elegida. Es una generalización del concepto de primitivas para funciones de una variable real.

Para la integración definida (es decir especificando los extremos de integración) se tiene

$$\boxed{\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx = [f(x,y)+\phi(y)]_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} = f(h_2(y),y) - f(h_1(y),y)}$$

Por ejemplo, si $h_1(y) = 1$, $h_2(y) = 2y$ la integración definida de $f_x(x,y) = 2xy$ nos dará

$$\int_1^{2y} 2xy dx = y \int_1^{2y} 2x dx = [yx^2 + \phi(y)]_{x=1}^{x=2y} = 4y^3 - y = f(2y,y) - f(1,y)$$

siendo $f(x,y) = yx^2 + \phi(y)$. Es una generalización de la Regla de Barrow para funciones de una variable. De forma análoga se tiene la fórmula

$$\boxed{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy = [f(x,y)+\psi(x)]_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(x,g_2(x)) - f(x,g_1(x))}$$

Nótese que la variable de integración no puede aparecer en los límites de integración. Por ejemplo, no tiene sentido escribir $\int_0^x y dx$. Simplemente se introduce una variable *muda* en la forma $\int_0^x y ds$ lo que indica claramente que el resultado de la integración es una función de x (el extremo superior del intervalo de integración)

Ejemplo 1.3. *Resolver la ecuación*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = y + x$$

$$\int \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx = \int (y+x)dx; \qquad u(x,y) + \tilde{\phi}(y) = xy + \frac{x^2}{2} + k$$

Buscamos una solución del tipo $z = u(x,y)$ (dependiente de dos variables) que sea de clase C^1. Integrando directamente (y de manera indefinida) respecto a x, obtenemos

$$\boxed{u(x,y) = xy + \frac{x^2}{2} + \phi(y)}$$

donde $\phi(y)$ es una función derivable arbitraria de y. Para cada elección concreta de $\phi(y)$ tendremos una única solución, es decir una función $u = z(x,y)$ tal que $u_x = y + x$.

Por ser $\phi(y)$ arbitraria hemos obtenido infinitas soluciones de la EDP que dependen de *una* función arbitraria. La expresión anterior es por tanto la **solución general** de la EDP en cuestión. Nótese que la gráfica de una solución del tipo $z = u(x,y)$ es una superficie. En el caso bidimensional, las superficies que son soluciones de una EDP de primer orden se llamarán **superficies integrales** de la EDP.

La solución general consiste en un conjunto infinito de superficies.

Ejemplo 2.9. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$u_{xy} = 0, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.22}$$

$$\int \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right) dy = \int 0 dy; \qquad u_x(x,y) + \tilde{\phi}(x) = k$$

Para resolver la ecuación fijamos x e integramos en relación a la variable y. Así obtenemos que

$$u_x = \widetilde{\psi}(x),$$

donde $\widetilde{\psi}$ es una función arbitraria de clase $C^1(\mathbb{R})$. Fijando la variable y e integrando en relación a x, obtenemos

$$u(x,y) = \int \widetilde{\psi}(x) + \phi(y) = \psi(x) + \phi(y),$$

donde ψ es una primitiva de la función $\widetilde{\psi}$ y ϕ es una función arbitraria de clase $C^2(\mathbb{R})$.
Note que como $\widetilde{\psi}(x)$ es arbitraria la función $\psi(x)$ también lo es.
Consecuentemente el espacio de las soluciones clásicas de la ecuación diferencial $u_{xy} = 0$ es precisamente el conjunto

$$\{u \in C^2(\mathbb{R}^2) : u(x,y) = \psi(x) + \phi(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \psi, \phi \in C^2(\mathbb{R}^2)\}. \tag{2.23}$$

Notemos que el espacio solución es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Ecuaciones lineales

Lineal de primer orden:

$$\boxed{A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = C(x,y)u + D(x,y)}$$

Si ***D(x,y) = 0*** estamos frente a una ecuación **homogénea**.

Lineal de segundo orden:

$$\boxed{\begin{aligned} &A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} \\ &= D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u + G(x,y) \end{aligned}}$$

Si ***G(x,y) = 0*** estamos frente a una ecuación **homogénea**.

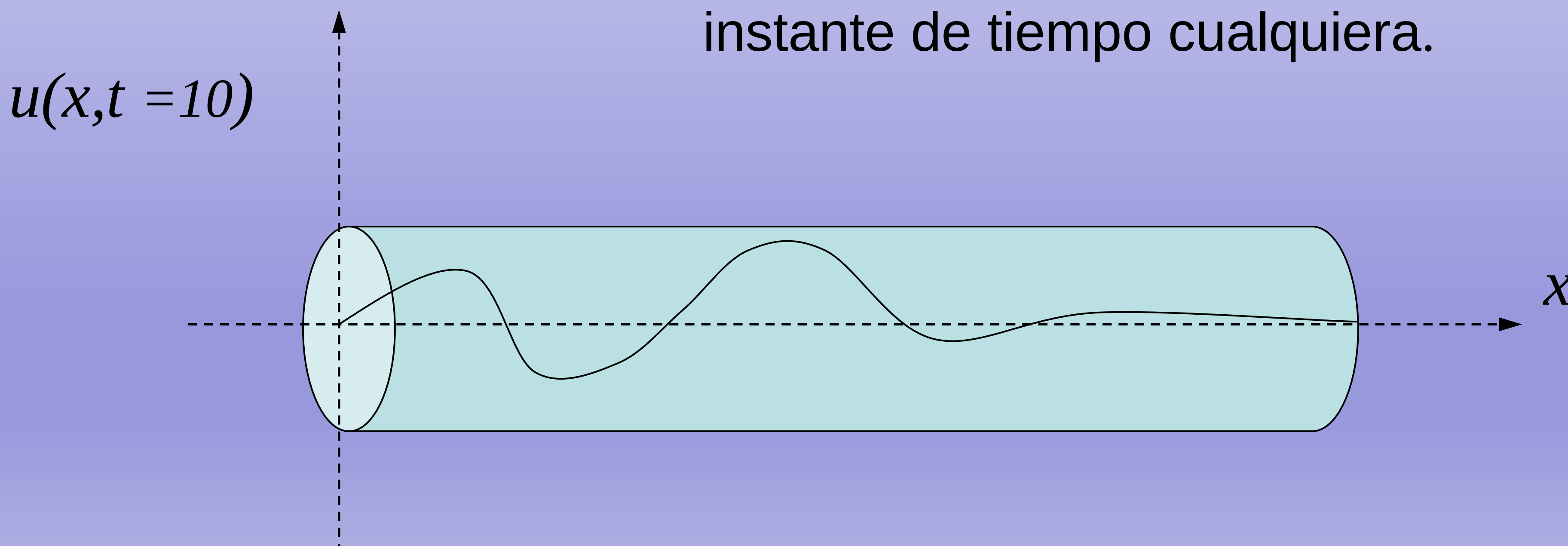
Note que la ecuación no contiene el término u_{yx} ; la razón es que debido a que estamos interesados en las llamadas *Soluciones clásicas* de la ecuación , esto es, soluciones u que son dos veces continuamente diferenciables en la región Ω (esto es funciones de clase $C^2(\Omega)$). Para tales funciones se tiene que $u_{xy} = u_{yx}$. En el cálculo diferencial este último resultado se conoce como *Teorema de Clariaut.*

Algunos ejemplos de EDPs clásicas:

Ecuación del calor.

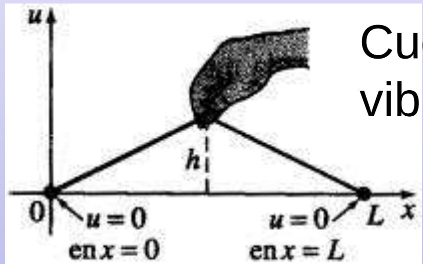
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u = u(t,x),\ t > 0,\quad x \in \mathbb{R} \quad \alpha^2 > 0.$$

Distribución de temperatura u(x,t) a lo largo de la barra en un instante de tiempo cualquiera.



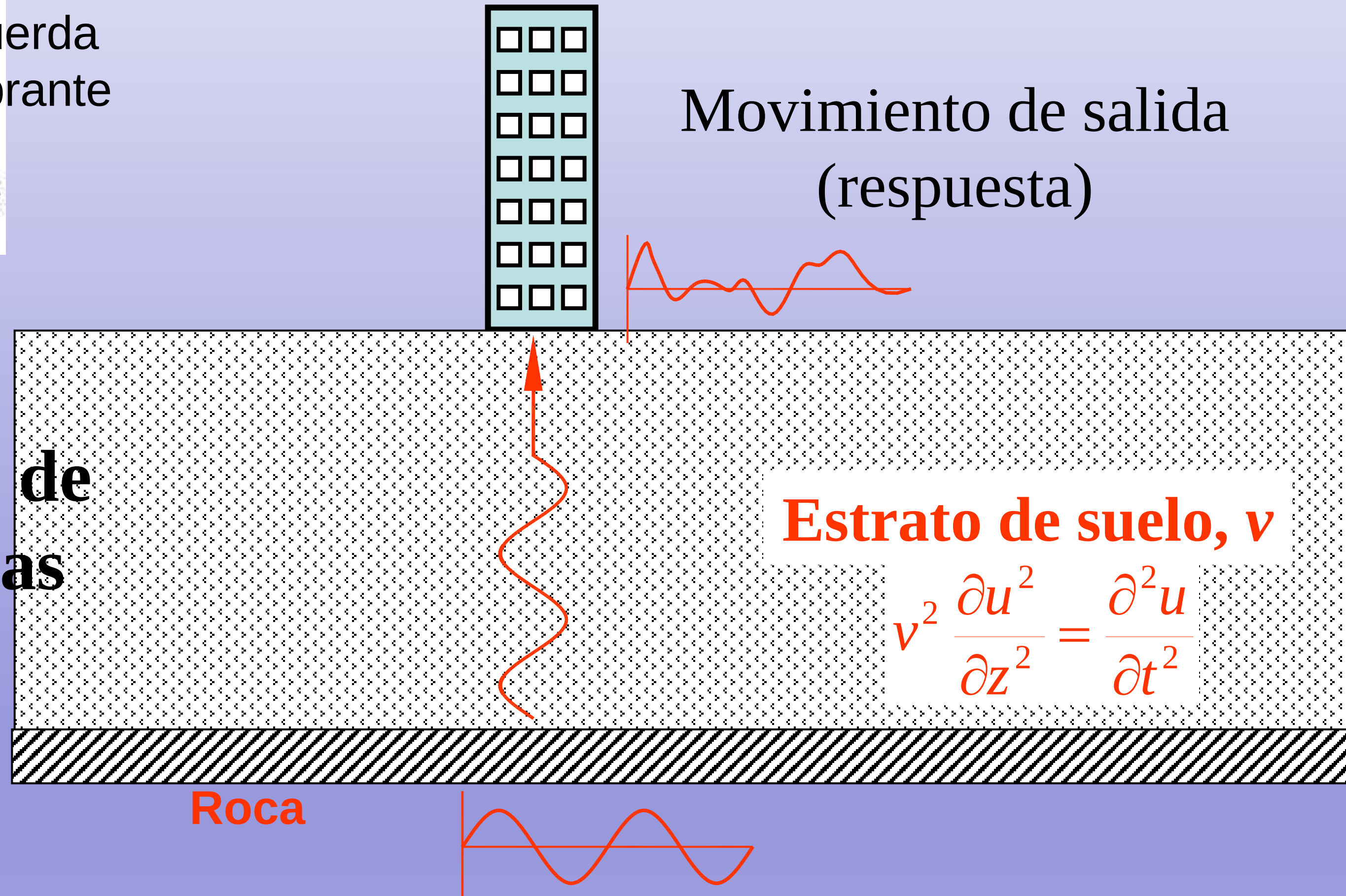
Ecuación de la onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u = u(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c > 0.$$



Cuerda vibrante

Propagación de ondas sísmicas



Ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Este modelo se presenta en problemas independientes del tiempo relacionados con potenciales electrostáticos, gravitacionales,...

Ecuación de Poisson. Esta ecuación es dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x,y), \quad u = u(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Sea la EDP:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

Vamos a resolverla mediante el cambio de variable:

$$y_1 = t + x, \quad y_2 = t - x.$$

$$t = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad x = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$$

Inmediatamente se obtiene:

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{y_1}\frac{\partial y_1}{\partial t} + u_{y_2}\frac{\partial y_2}{\partial t} = u_{y_1} + u_{y_2},\\
u_x &= u_{y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x} + u_{y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x} = u_{y_1} - u_{y_2},\\
u_{tt} &= \Big(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2}\Big)(u_{y_1} + u_{y_2}) = u_{y_1y_1} + u_{y_2y_2} + 2u_{y_1y_2},\\
u_{xx} &= \Big(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2}\Big)(u_{y_1} - u_{y_2}) = u_{y_1y_1} + u_{y_2y_2} - 2u_{y_1y_2}.
\end{aligned}$$

Como consecuencia la EDP se escribe:

$$4u_{y_1y_2} = 0.$$

En su nueva forma la EDP puede integrarse y se obtiene la solución:

$$u = f(y_1) + g(y_2) = f(x + t) + g(t - x),$$

donde f y g son funciones arbitrarias.

Reducción de EDP o sistemas de EDPs de orden superior a uno a sistemas de EDPs de primer orden

Siempre es posible la reducción mediante un adecuado **cambio de variable**. Por ejemplo:

$$\boxed{u_{xx} - u_{yy} = 0}$$

EDP de segundo orden

$$\begin{aligned} u_x &= v \\ u_y &= w \end{aligned}$$

cambio de variable

$$v_x - w_y = 0$$

EDP transformada

Si suponemos que la solución es de al menos clase C^2, las derivadas cruzadas son iguales:

$$u_{xy} = v_y = w_x = u_{yx}$$

La EDP se convierte finalmente en el sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} v_x - w_y &= 0 \\ v_y - w_x &= 0 \end{aligned}}$$

Principio de superposición

El conjunto de **soluciones** de una ecuación lineal **homogénea** es un **espacio vectorial** y las soluciones de la ecuación **completa** asociada con ella forman un **espacio afín** definido sobre tal espacio vectorial.

Bibliografía:

Ecuaciones en derivadas parciales, Ignacio Parra et al.
García-Maroto Editores

Ecuaciones diferenciales II
Manuel Mañas Baena y Luis Martínez Alonso

Introducción a las EDPs
C. Conde (UPM), E. Schiavi (URJC) y A. I. Muñoz (URJC)

Ecuación casi-lineal

Casi-lineal de primer orden:

$$\boxed{A(x,y,u)u_x + B(x,y,u)u_y = C(x,y,u)}$$

Si *C(x,y,u) = 0* estamos frente a una ecuación homogénea.

Casi-lineal de segundo orden:

$$\boxed{\begin{gathered}A(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx} + B(x,y,u,u_x,u_y)u_{xy} \\ + C(x,y,u,u_x,u_y)u_{yy} = D(x,y,u,u_x,u_y)\end{gathered}}$$

Si *D(x,y, u,...) = 0* estamos frente a una ecuación homogénea.

Ecuación semi-lineal de primer y segundo orden en dos variables

$$\boxed{A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = C(x,y,{\color{red}u})}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy}\\&= D\left(x,y,{\color{red}u,u_x,u_y}\right)\end{aligned}}$$

La **parte principal** (las derivadas de orden más alto que determinan el orden de la EDP) es **lineal**.

Ejemplo 2.6. *La ecuación*

$$u_t = u_{xxx} + uu_x, \qquad u = u(x,t), \;\; x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.16}$$

es una ecuación diferencial de tercer orden, semi-lineal, ya que a pesar de no ser lineal por el término uu_x la parte principal que es u_{xxx}, es lineal. Esta ecuación es conocida como ecuación de Korteweg- de Vries *(KdV) y ella describe la propagación de ondas no lineales en medios dispersivos no disipativos.*

Ejemplo 2.7. *La ecuación*

$$u_t + uu_x = ku_{xx}, \qquad k \;\; constante, \qquad u = u(x,t), \;\; x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \tag{2.17}$$

es una ecuación diferencial de segundo orden, semi-lineal y conocida como Ecuación de Burger. Esta ecuación es no lineal por causa del sumando uu_x; sin embargo es semi-lineal por que la parte principal de la ecuación, que es ku_{xx}, es lineal.

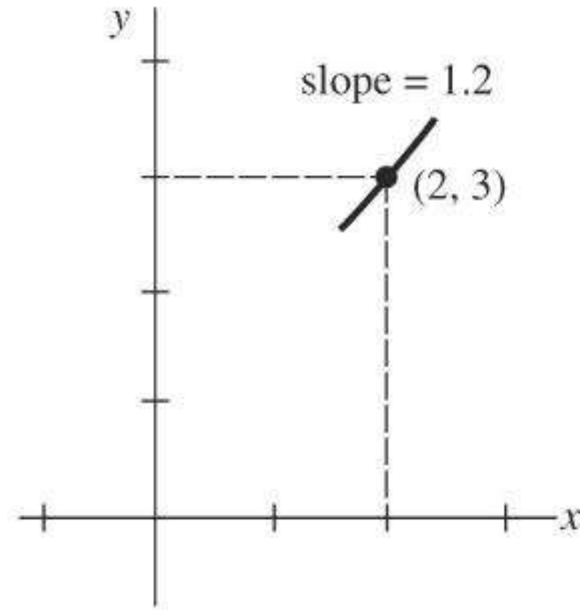
Ejemplo 2.8. *La ecuación de Schrodinger*

$$\imath\partial_t\psi = -\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi, \quad donde \quad \psi = \psi(x,t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.18}$$

donde $V(x)$ es una función con valores reales, h es constante de Plank, *$m > 0$, $\imath = \sqrt{-1}$, es una E.D.P de segundo orden semi-lineal. Ella describe la interacción de una partícula cuántica de masa m con potencial $V(x)$. Ejemplo clásico del potencial $V(x)$ es $V(x) = |u(x,t)|^k$, $k > 0$.*

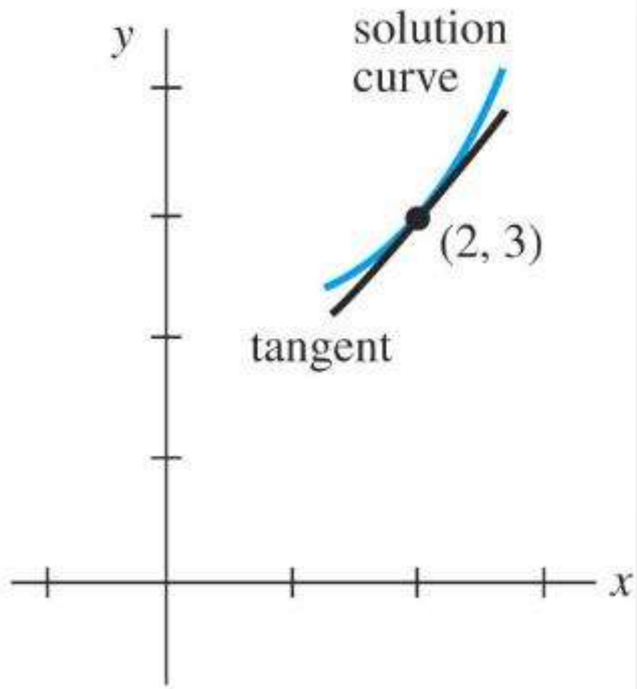
Curvas solución: una visión geométrica de las EDOs

Podemos estudiar EDOs de primer orden analizándolas **cualitativamente**.



(a) $f(2, 3) = 1.2$ is slope of lineal element at (2, 3)

$$\boxed{dy/dx = 0.2\,xy = f(x, y)}$$



(b) a solution curve passing through (2, 3)

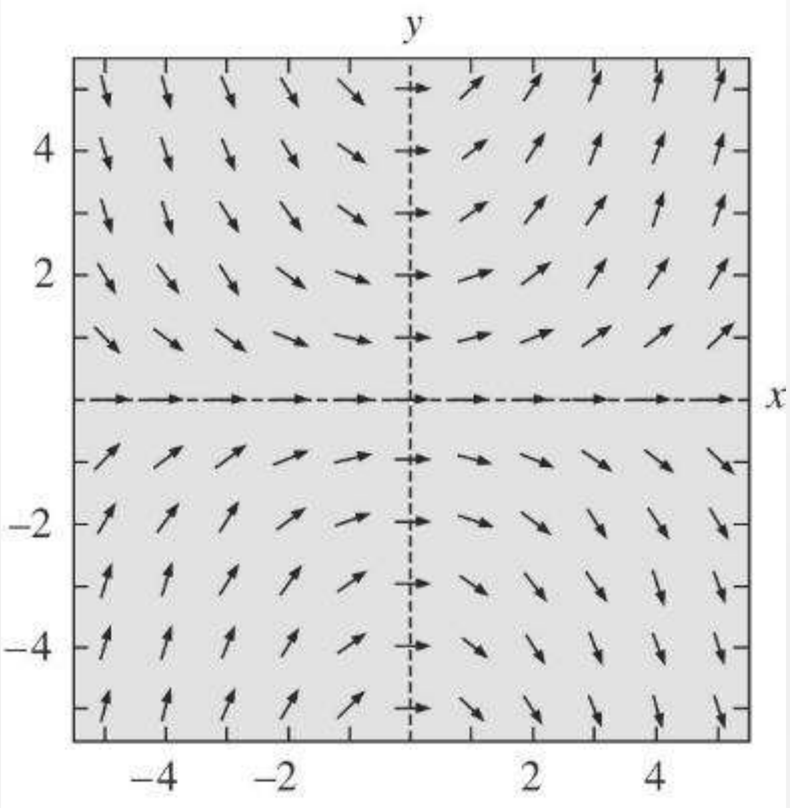
(a) Pendientes: Debido a que la solución $y(x)$ de $dy/dx = f(x,y)$ es necesariamente una función diferenciable en I, también es continua. Así, la derivada $dy/dx= f(x,y)$ proporciona las pendientes de las rectas tangentes a las curvas solución en los puntos (x,y).

(b) Elementos lineales: Suponemos que $dy/dx = f(x, y(x))$. El valor $f(x, y)$ representa la pendiente de una recta, o un segmento de recta que llamaremos **elemento lineal**.

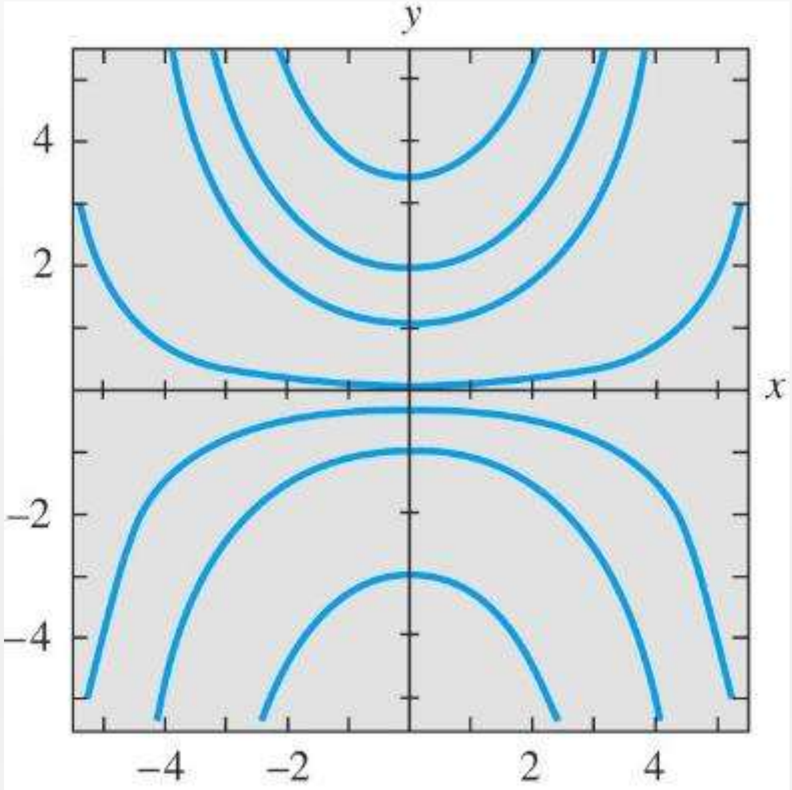
Campo de direcciones

Si para la EDO $dy/dx = f(x, y)$ se evalúa f en una red o malla de puntos rectangular en el plano *xy*, y se dibuja un elemento lineal en cada nodo (x, y) de la malla con pendiente $f(x, y)$, obtenemos el ***campo de direcciones*** o campo de pendientes.

Ejemplo: El campo de direcciones de *dy/dx* = 0.2 *xy* está representado en la figura (a). Compárese con la figura (b) donde se han representado unas curvas de la familia de soluciones.



(a) Direction field for $dy/dx = 0.2xy$

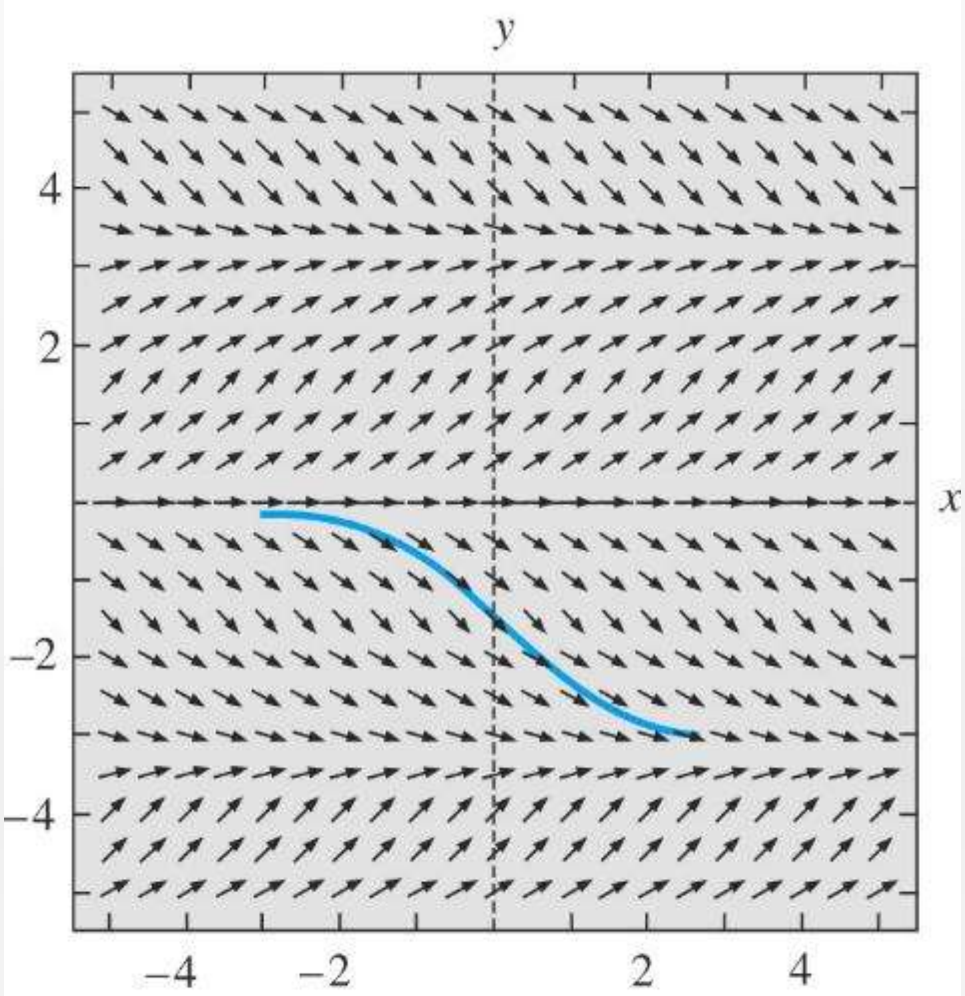


(b) Some solution curves in the family $y = ce^{0.1x^2}$

Ejemplo: Use un campo de direcciones para dibujar una curva solución aproximada para *dy/dx* = sin(*y*), con *y*(0) = −3/2.

Solución:

Apelando a la continuidad de $f(x, y) = \sin(y)$ y $\partial f/\partial y = \cos(y)$, el teorema de existencia y unicidad garantiza la existencia de una única curva solución que pasa por algún punto especificado en el plano. Ahora dividimos la región que contiene a (-3/2, 0) en una malla rectangular. Calculamos el elemento lineal de cada nodo para obtener la siguiente figura:



Ecuación semi-lineal de primer orden en dos variables

$$\boxed{A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = C(x,y,u)}$$

Veamos un ejemplo concreto: obtener la solución general de la **familia** de EDPs:

Para cada valor de α tendremos una EDP

$$\boxed{u_x + u_y = \alpha u}$$

Donde α **es un parámetro real** y las funciones correspondientes a la forma general son:

$$A(x,y) = 1, \qquad B(x,y) = 1,$$
$$C(x,y,u) = \alpha u$$

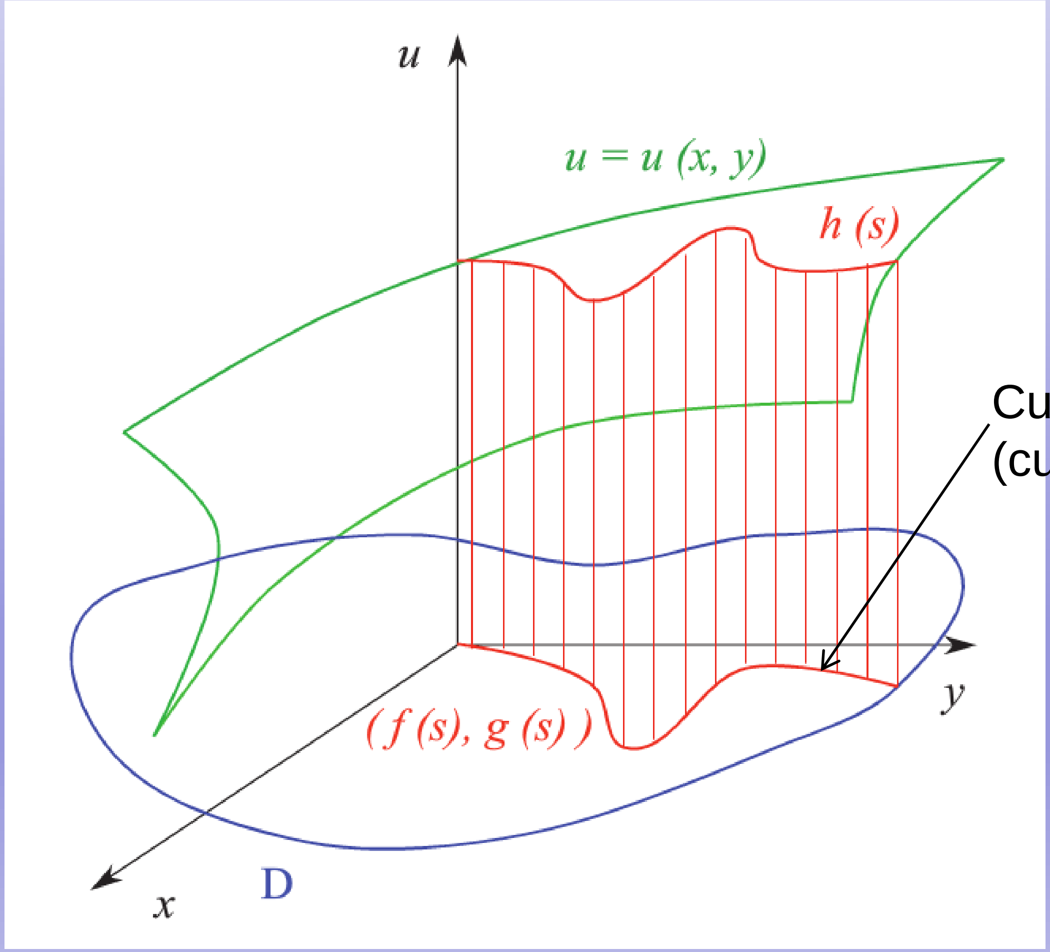
Constantes arbitrarias (EDOs) *vs* funciones arbitrarias (EDPs)

Una diferencia importante entre una ecuación diferencial parcial y una ecuación diferencial ordinaria es la información adicional necesaria para determinar la unicidad de la solución.
Recordemos que cuando trabajamos con ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, aparecen constantes arbitrarias las cuales pueden ser determinadas colocando condiciones iniciales, esto es, fijando valores de la solución y de sus derivadas hasta cierto orden en un determinado punto. Podemos tener también la unicidad de la solución, en el caso de intervalos finitos, llamadas condiciones de frontera.
Cuando se trata de una ecuación en derivadas parciales, la situación es un tanto diferente; así sea en el caso lineal, la solución general, cuando es posible encontrarla, envuelve funciones arbitarias de las variables dependientes, como vimos en el ejemplo , de manera que existe un grado de generalidad mucho mayor con relación a la forma de la solución. En el caso de una E.D.P, el espacio de las variables independientes es multi-dimensional; buscamos soluciones definidas en un conjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^n$. Es natural reemplazar los extremos del intervalo, en el caso $n = 1$ (E.D.O), por la frontera $\partial\Omega$ del conjunto Ω.

Problemas de condiciones iniciales o de Cauchy

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = C(x,y,u)$$

con condiciones iniciales: $u\big(f(s), g(s)\big) = h(s)$



Las condiciones iniciales en este caso son los valores h(s) que toma la función u(x,y) a lo largo de una curva parametrizada: x = f(s), y = g(s) de parámetro s.

Curva parametrizada (curva inicial).

Problemas de condiciones iniciales o de Cauchy

Una pregunta interesante es como generalizar el concepto de condiciones iniciales de una E.D.O para una E.D.P.
Nuevamente recordemos que en el caso una E.D.P. el espacio de las variables independientes es multidimensional. Al tener mas de una variable $x_1, x_2, .., x_n$, es natural fijar una de las variables e imponer el valor de la solución u y de sus derivadas parciales en relación a la variable fija como función de las otras variables. Por ejemplo, si las variables independientes son t y x, podemos considerar $t = 0$ y colocar condiciones como:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = g(x), \end{cases}$$

siendo f y g funciones dadas.
El hecho de asumir en el ejemplo $t = 0$, significa que estamos colocando condiciones sobre el valor de la solución y de sus derivadas a lo largo de la curva $t = 0$.
Si en lugar de 2 variables, tenemos 3 variables t, x, y y asumimos $t = 0$, estamos imponiendo condiciones sobre el valor de la solución u y sus derivadas ya no a lo largo de la curva $t = 0$ sino a lo largo de la superficie $t = 0$. Con esta introducción podemos generalizar el concepto de condiciones iniciales de una E.D.O para una E.D.P, diciendo que una condición inicial para una E.D.P es una condición en la cual imponemos el valor de la solución y de sus derivadas normales a lo largo de una curva inicial $(n = 2)$, una superficie inicial $(n = 3)$ o una "hipersuperficie" inicial $(n > 3)$. En este caso el problema se le dice *problema de Cauchy o problema de valor inicial.*

Ejemplo:

$$\begin{cases} u_y(x,y) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,g(x)) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad (3.2)$$

Curva inicial:
y = g(x)

donde $g(x)$, $f(x)$ son funciones de clase $C^1(\mathbb{R})$ dadas. Como vimos en el Capítulo 2, este problema corresponde a un problema de Cauchy. La condición inicial es dada por $u(x,g(x)) = f(x), x \in \mathbb{R}$, lo que indica que la función u que deseamos encontrar es conocida a lo largo de al curva $y = g(x)$. Esta curva $y = g(x)$ es conocida como la curva inicial.

Integrando la EDP:

$$\int \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} dy = \int 0 dx; \quad u(x,y) = \phi(x)$$

Obtenemos un conjunto infinito de posibles curvas solución dependientes solo de x.
Al aplicar las condiciones iniciales:

$$u(x,g(x)) = f(x)$$
$$u(x,g(x)) = \phi(x) \longrightarrow \phi(x) = f(x) \longrightarrow u(x,y) = f(x)$$

Y el problema tiene **solución única**.

Consideremos ahora el problema

Cambiamos la curva inicial a: x = 0 (el eje y).

$$\begin{cases} u_y(x,y) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0,y) = f(y), & y \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.5}$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ es dada. La única diferencia entre el problema (3.2) y (3.5) es la curva inicial. De hecho, la curva inicial en (3.2) es el gráfico de una función de x, en tanto que en (3.5) la curva inicial es el eje y. Sin embargo esta diferencia lleva a que el problema (3.2) sea un problema bien puesto en tanto que el problema (3.5) no lo es. De hecho, si derivamos la condición inicial:

$$u(0,y) = f(y)$$
$$u_y(0,y) = f'(y)$$

como: $u_y(x,y) = 0, \quad u_y(0,y) = f'(y) = 0, \quad f(y) = k$

Sabemos que la solución general es: $u(x,y) = \phi(x)$

Aplicando la condición inicial: $u(0,y) = f(y) = k = \phi(0)$

De modo que si f(y) es una función constante tenemos **infinitas soluciones** y si no lo es, el problema **no tiene solución**.

Cambiamos la curva inicial a: $x = x_0$ (rectas verticales).

Consideremos ahora el problema

$$\begin{cases} u_y(x,y) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x_0, y) = f(y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.6}$$

En este caso la curva inicial es una recta vertical. Análogamente a (3.5), el problema (3.6) no tiene solución si f no es una constante y tiene infinitas soluciones si f es constante.

derivamos la condición inicial:

$$u(x_0, y) = f(y)$$
$$u_y(x_0, y) = f'(y)$$

como: $u_y(x,y) = 0, \quad u_y(x_0, y) = f'(y) = 0, \quad f(y) = k$

Sabemos que la solución general es: $u(x,y) = \phi(x)$

Aplicando la condición inicial: $u(x_0, y) = f(y) = k = \phi(x_0)$

De modo que, de nuevo, si f(y) es una función constante tenemos **infinitas soluciones** y si no lo es, el problema **no tiene solución**.

Qué sucede para curvas mas generales? Para tratar de responder a esa pregunta veamos el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} u_y(x,y) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(1-y^2, y) = f(y), \end{cases} \tag{3.7}$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$

La curva inicial es ahora:

$x = 1 - y^2, \quad y = \pm\sqrt{1-x}$. Observemos que:

$$f(y_0) = u(x_0, y_0) = u(1 - {y_0}^2, y_0) = u(x_0, -y_0) = f(-y_0)$$

Y en consecuencia para que el problema tenga solución necesitamos que **f(y) sea par.**

Integrando la EDP: $u(x,y) = \phi(x)$

$$u(1-y^2, y) = \phi(1-y^2) = f(y); \;\; \phi(x) = \boldsymbol{f(\sqrt{1-x}) = u(x,y)}$$

si |x| ≤ 1 (para que la raíz sea real). Como queremos que la solución sea C^1, impondremos además a f que exista su derivada.

Si |x| > 1 la curva inicial no rige y **u(x,y) =** $\boldsymbol{\phi(x)}$.

Curvas características

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = C(x,y,u)$$

Podemos definir un **campo vectorial** que asigna a cada punto *(x,y)* del plano un vector *v* de coordenadas *(A(x,y), B(x,y)).*

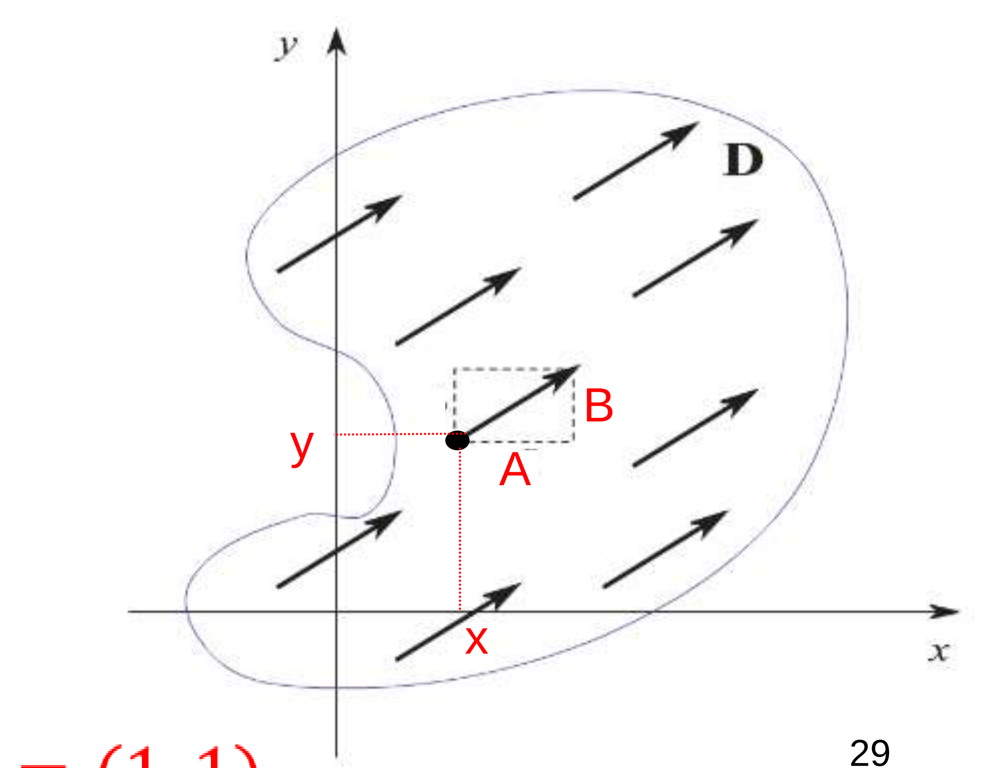
En nuestro ejemplo:

$$u_x + u_y = \alpha u$$

Puesto que:

$$A(x,y) = 1 \text{ y } B(x,y) = 1$$

El campo vectorial es constante en este caso:



$$\vec{v}(x,y) = (A(x,y), B(x,y)) = (1,1)$$

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = C(x,y,u)$$

Observa que podemos entender la parte izquierda de la EDP como un **producto escalar**:

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = (A,B)\cdot \underbrace{(u_x,u_y)}$$

$$\nabla u = (u_x,u_y) \longleftarrow$$

Gradiente de la función escalar *u(x,y)*

En nuestro ejemplo:

$$u_x + u_y = (1,1)\cdot(u_x,u_y)$$

Recordemos que este producto representa en cada punto (*x*,*y*) la derivada de *u(x,y)* en la dirección del vector *v* = (*A*,*B*). De modo que una manera equivalente de escribir nuestra EDP es:

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = (A,B)\cdot\left(u_x,u_y\right) =$$

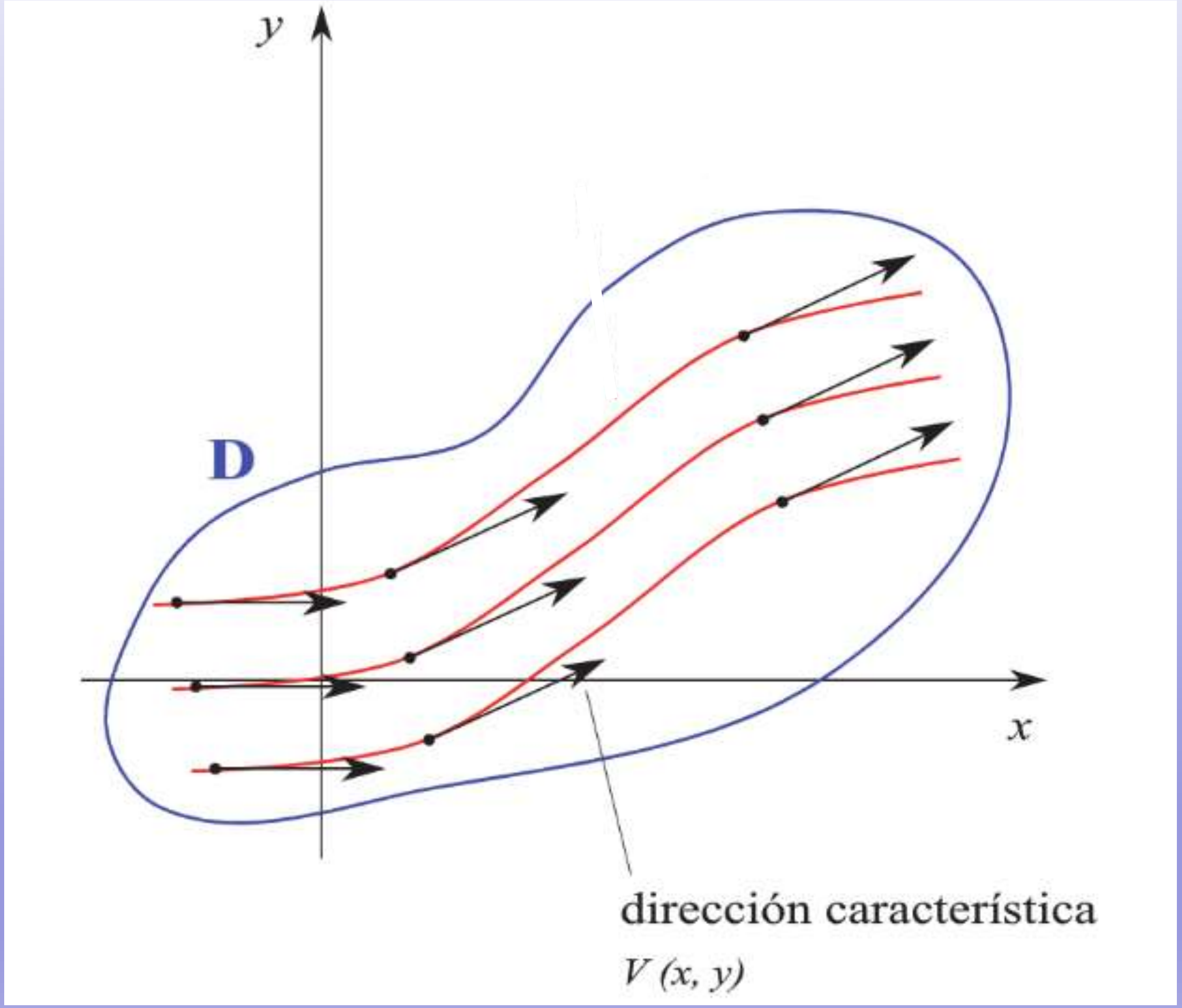
$$\vec{v}\,\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \vec{v}} = C(x,y,u)$$

En nuestro ejemplo:

$$u_x + u_y = (1,1)\cdot(u_x,u_y) = (1,1)\cdot\nabla u = \alpha u$$

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = \vec{v} \cdot \nabla u = C(x,y,u)$$

Así que la EDP determina en cada punto del plano (*x*,*y*) la derivada parcial de u en la dirección del vector *v*(x,y) = (*A(x,y)*,*B(x,y)*), en la dirección que marca el campo vectorial, que se llama **dirección característica**.

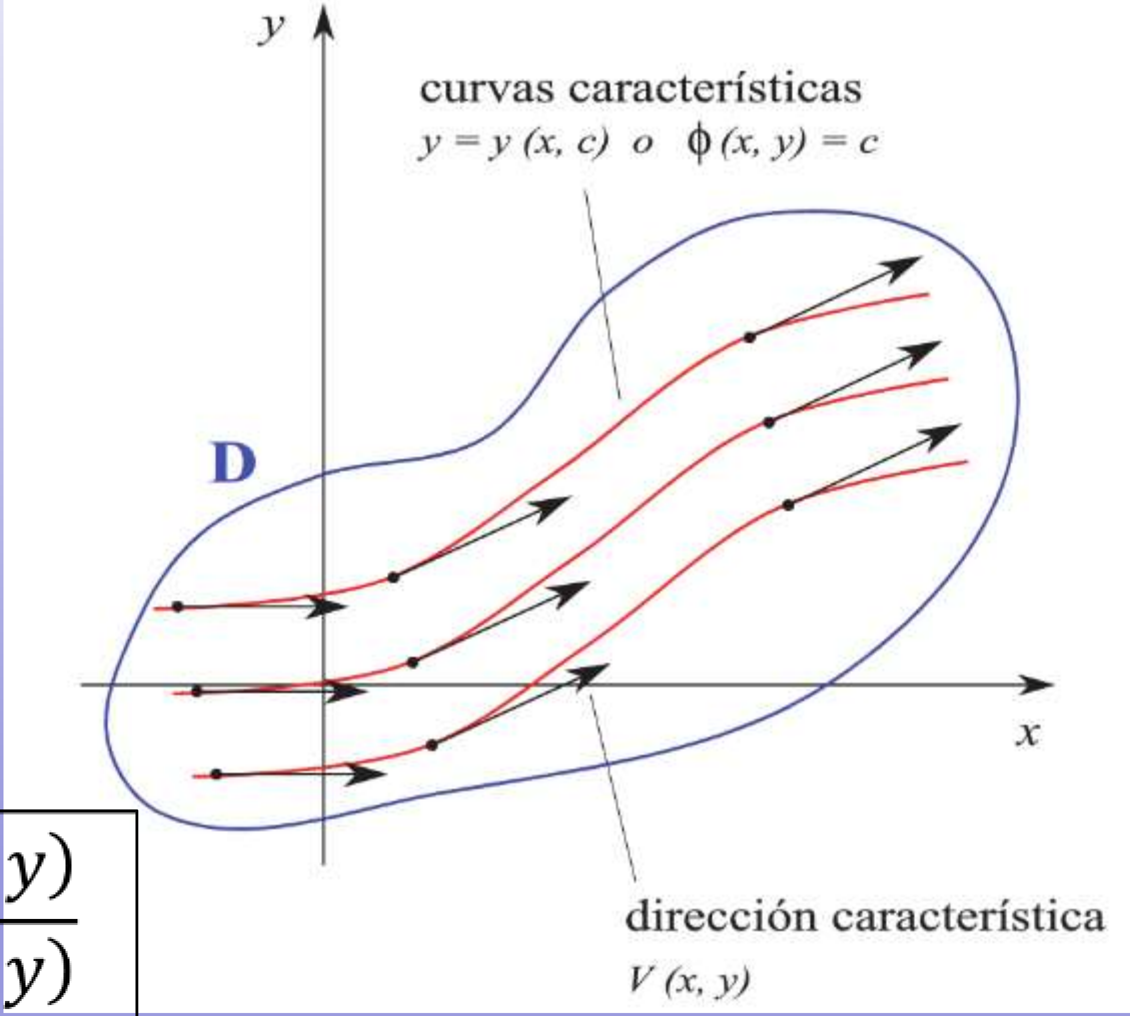


A las curvas integrales de ese campo (curvas que tienen como tangentes en (x,y) las direcciones marcadas por v) se las denomina **curvas características**

ϕ(x,y) = k o

y = y(x, k), que serán solución (familia uniparamétrica) de la EDO:

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = \vec{v}\cdot\nabla u = C(x,y,u)$$



$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y)}{A(x,y)}}$$

La pendiente del vector en cada punto (x,y).

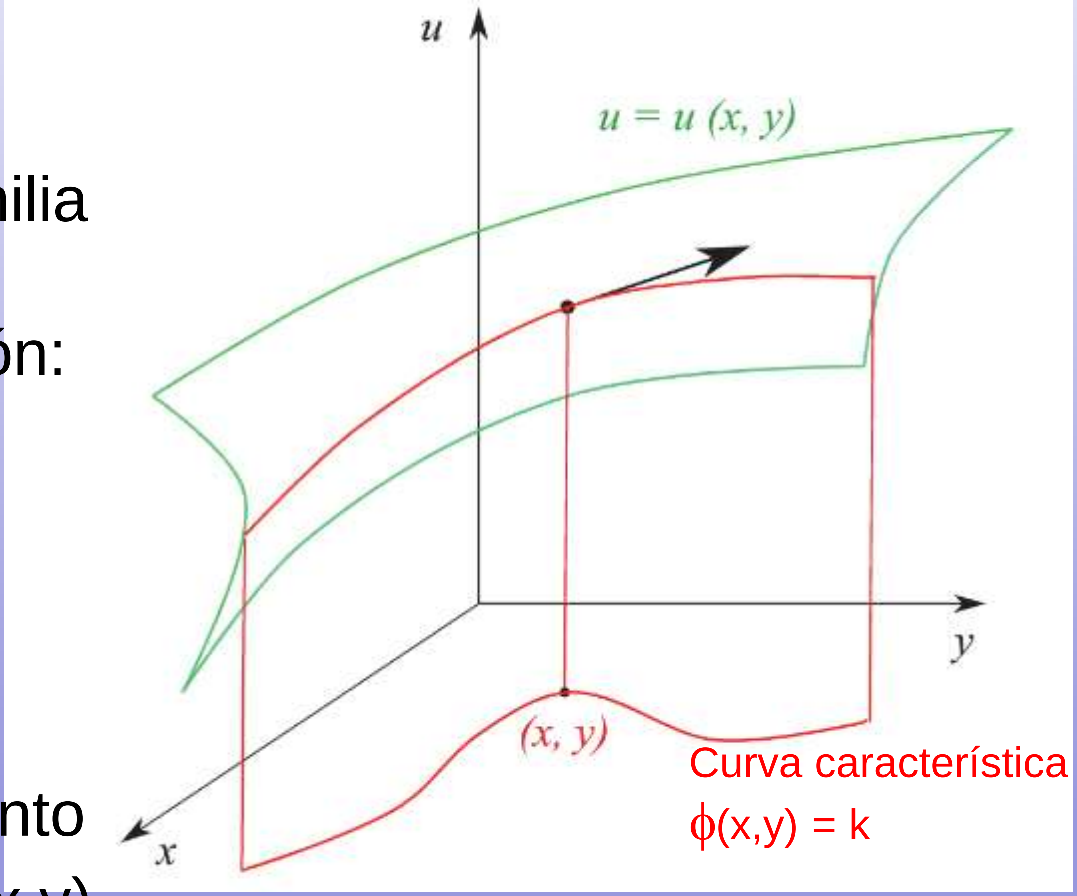
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y)}{A(x,y)}}$$

Solución: familia uniparamétrica de curvas características $\phi(x,y) = k$, o explícitamente, $y = y(x,k)$

Sobre cada curva característica de esta familia uniparamétrica de curvas características, la ecuación:

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = \vec{v} \cdot \nabla u = C(x,y,u)$$

prescribe el comportamiento de la función incógnita u(x,y).



Ejercicios

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = C(x,y,u)$$

$\boxed{\mathbf{1.1}}$ Hallar las curvas características del problema:

$$u_x + cu_y = x + u.$$

Respuesta: De la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} = \frac{c}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = c$$

de donde

$$\boxed{y - cx = \text{cte}}$$

$$xu_x + yu_y + u = 0,$$

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = C(x,y,u)$$

se tiene que

$$a = x, \quad b = y,$$

luego la ecuación (1.20) de las características es

$$y'(x) = \frac{y}{x},$$

cuya integración conduce a las siguientes curvas características

$$y = cx.$$

$$\operatorname{sen} y \; u_x + \cos x \; u_y + u^3 = 0,$$

$$a = \operatorname{sen} y, \quad b = \cos x,$$

la ecuación (1.20) de las características es

$$y'(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} y}.$$

Luego las características son las curvas

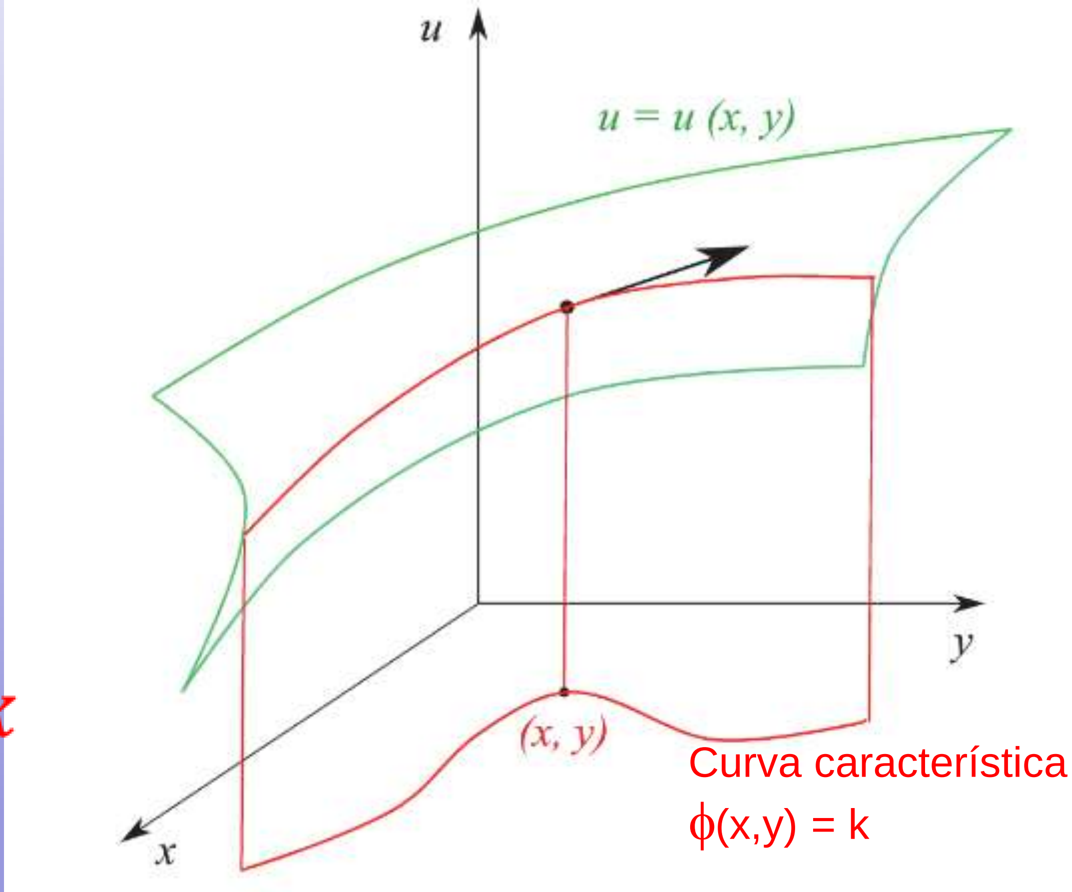
$$y = \arccos(-\operatorname{sen} x + c).$$

En nuestro ejemplo: $u_x + u_y = (1,1)\cdot\nabla u = \alpha u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y)}{A(x,y)} = 1;$$

$$y(x) = x + k \quad \text{ó}$$

$$\phi(x,y) = y - x = k$$



A lo largo de estas curvas características, en este caso rectas, la solución crece como αu.

Realicemos ahora el siguiente cambio de variable:

$$\phi \equiv \phi(x,y) = y - x \longrightarrow$$

Curvas características cuando ϕ es constante.

$$\psi \equiv \psi(x,y) = y \longrightarrow$$

La función ψ(x,y) debe cumplir en el dominio de solución D:

$$\begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\forall (x,y) \in D$$

Usando la regla de la cadena, las derivadas parciales de u se convierten en:

$$u_x = u_\phi \phi_x + u_\psi \psi_x = -u_\phi$$

$$u_y = u_\phi \phi_y + u_\psi \psi_y = u_\phi + u_\psi$$

$$\begin{cases} u_x = -u_\phi \\ u_y = u_\phi + u_\psi \end{cases} \qquad \begin{array}{c} u_x + u_y = \alpha u \\ (-u_\phi + u_\psi) + u_\phi = \alpha u \end{array}$$

$$\boxed{u_\psi = \alpha u}$$

Desaparece la parte en ϕ.

Hemos conseguido una EDP directamente integrable:

$$\int \frac{du}{\alpha u} = \int d\psi + f(\phi)$$

$$u(\phi, \psi) = f(\phi)e^{\alpha\psi}$$

Deshaciendo el cambio:

$$\phi = y - x$$
$$\psi = y$$

$$\boxed{u(x, y) = f(y - x)e^{\alpha y}}$$

En contraste con las EDOs, la solución general de una EDP en vez de constantes arbitrarias contiene **funciones arbitrarias en las que el argumento es la expresión de la curvas características en forma implícita.**

En general, el cambio de variable será:

$$\phi = \phi(x, y)$$
$$\psi = \psi(x, y)$$

Curvas características cuando ϕ es constante.

La función $\psi(x,y)$ debe cumplir en el dominio de solución D:

$$\begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0, \forall (x, y) \in D$$

Usando la regla de la cadena las derivadas parciales de u se convierten en:

$$u_x = u_\phi \phi_x + u_\psi \psi_x$$
$$u_y = u_\phi \phi_y + u_\psi \psi_y$$

$$A \cdot u_x + B \cdot u_y = C$$

Aplicando el cambio de variable a nuestra EDP general, se convierte en:

$$A \cdot (u_\phi \phi_x + u_\psi \psi_x) + B \cdot (u_\phi \phi_y + u_\psi \psi_y) = C$$

$$A \cdot (u_\phi \, \phi_x + u_\psi \, \psi_x) + B \cdot (u_\phi \phi_y + u_\psi \, \psi_y) = C$$

$$\boxed{(A\phi_x + B\phi_y)u_\phi + (A\psi_x + B\psi_y)u_\psi = C}$$

Ahora, recordemos que $\phi(x, y)$ es curva característica:

$$\phi(x, y) = k$$

$$d\phi = \phi_x dx + \phi_y dy = 0$$

Dividiendo entre dx:

$$\phi_x + \phi_y \frac{dy}{dx} = 0$$

Y usando que: $\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}$

$$\boxed{A\phi_x + B\phi_y = 0}$$

$$(A\psi_x + B\psi_y)u_\psi = C$$

Y esta ecuación ahora es directamente integrable.

$$u_\psi = \frac{C}{A\psi_x + B\psi_y}$$

Sigamos con nuestro ejemplo, poniendo ahora c.i.:

$$u_x + u_y = \alpha u$$

$$u(x,y) = f(y-x)e^{\alpha y}$$

Supongamos las c.i.: $u(s,0) = e^{-s}$

La solución para

(s,0) será: $u(s,0) = f(-s)e^{\alpha 0} = f(-s)$

Igualando a la c.i.:

$$f(-s) = e^{-s};$$

$$f(y-x) = e^{y-x}$$

De modo que la única solución particular posible es:

$$u(x,y) = e^{y-x}e^{\alpha y} = e^{(\alpha+1)y-x}$$

Cambiemos la c.i. para ver que no es siempre posible determinar una solución particular imponiendo condiciones sobre cualquier curva inicial:

$$u_x + u_y = \alpha u$$

$$u(x,y) = f(y-x)e^{\alpha y}$$

$$u(s,s) = e^s$$

La solución para (s,s) es: $u(s,s) = f(0)e^{\alpha s}$

Igualando a la c.i.: $f(0)e^{\alpha s} = e^s; \quad f(0) = e^{s(1-\alpha)}$

Observemos que ahora tendremos solución particular solo si α = 1 (en otro caso el problema resulta incompatible):

$$f(0) = e^{s(1-1)} = 1$$

$$u_x + u_y = \alpha u \qquad u(s,s) = e^s \qquad u(x,y) = f(y-x)e^{\alpha y}$$

De modo que cualquier función $f(z)$ tal que $f(0) = 1$ es válida.

Como por ejemplo: $f(z) = \frac{1}{1+z^2}, \cos(z), \cosh(z)$, ... que determinan soluciones particulares como:

$$u(x,y) = \frac{e^y}{1+(y-x)2}, \qquad u(x,y) = e^y \cos(y-x),$$

$$u(x,y) = e^y \cosh(y-x), \ldots$$

Así que para α = 1 el problema tiene infinitas soluciones: es compatible e indeterminado.

Método de las características

Casi-lineal de primer orden:

$$\boxed{A(x,y,u)u_x + B(x,y,u)u_y = C(x,y,u)}$$

Vimos que las curvas características y = y(x) o $\phi(x,y) = k$ asociadas son las curvas integrales de:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y,u)}{A(x,y,u)}} \quad \text{o} \quad \boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{A(x,y,u)}{B(x,y,u)}}$$

Podemos expresar las curvas características en forma paramétrica con x(t) e y(t). Pero para resolver el sistema necesitaríamos conocer u(x(t),y(t)) = u(t), que es justamente la solución que queremos encontrar.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(x,y,u) \\ \dfrac{dy}{dt} = B(x,y,u) \end{cases}$$

Método de las características

$$A(x,y,u)u_x + B(x,y,u)u_y = C(x,y,u)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(x,y,u) \\ \dfrac{dy}{dt} = B(x,y,u) \end{cases}$$

Recurriendo a la propia EDP:

$$u_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt} = C(x,y,u)$$

Obtenemos una tercera ecuación para u(t).

Sistema característico:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(x,y,u) \\ \dfrac{dy}{dt} = B(x,y,u) \\ \dfrac{du}{dt} = C(x,y,u) \end{cases}}$$

Este sistema describe tanto las curvas características como el comportamiento de la solución a lo largo de ellas.

Método de las características

$$A(x,y,u)u_x + B(x,y,u)u_y = C(x,y,u)$$

Si estamos frente a un problema de Cauchy, tendremos además:

$$u\big(f(s),g(s)\big) = h(s)$$

Para resolverlo, observemos que **para cada s** deberemos resolver el problema de Cauchy del sistema de EDOs:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(x,y,u) \\ \dfrac{dy}{dt} = B(x,y,u) \\ \dfrac{du}{dt} = C(x,y,u) \end{cases} \qquad \begin{aligned} x(0) &= f(s) \\ y(0) &= g(s) \\ u(0) &= h(s) \end{aligned}$$

Cuya solución tendrá la forma general:

$$x = x(s,t) \qquad y = y(s,t)$$

$$u = h(s,t)$$

Resolvamos un ejemplo:

$$u_x + u_y + u = 1$$
$$u(s, s+s^2) = 2$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1, & x(t) = t + k_1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 1, & y(t) = t + k_2 \\ \dfrac{du}{dt} = 1 - u, & u(t) = 1 + k_3 e^{-t} \end{cases}$$

Fijamos s para aplicar las c.i.:

$$u(0) = 2, \qquad x(0) = s, \qquad y(0) = s + s^2$$

$$x(0) = 0 + k_1 = s, \qquad \boxed{\begin{aligned} x(t) &= t + s \\ y(t) &= t + s + s^2 \end{aligned}}$$
$$y(0) = 0 + k_2 = s + s^2,$$

$$u(0) = 1 + k_3 e^{-0} = 2; \quad k_3 = 1$$

$$\boxed{u(t) = 1 + e^{-t}}$$

$$y(t) = t + s + s^2$$

$$x(t) = t + s$$

$$t = x(t) - s$$

$$y(t) - x(t) = s^2$$

$$s = \pm\sqrt{y(t) - x(t)}$$

$$t = x(t) \mp \sqrt{y(t) - x(t)}$$

$$u(t) = 1 + e^{-t} = \boxed{1 + e^{-x \pm \sqrt{y - x}} = u(x, y)}$$

Demuestra que si la condición inicial hubiera sido:

$$u(s, s + s^2) = 1$$

entonces la solución sería: $u(x, y) = 1$

Método de Lagrange

Se trata del método de las características pero en coordenadas cartesianas, en vez de paramétricas:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(x, y, u) \\ \dfrac{dy}{dt} = B(x, y, u) \\ \dfrac{du}{dt} = C(x, y, u) \end{cases}$$

Las tres ecuaciones se pueden combinar para obtener:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{A}{B}, \quad \frac{dy}{du} = \frac{B}{C}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{C}{A}$$

y sus inversas.

$$\boxed{\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{du}{C}}$$

Si se pueden integrar directamente, el método nos proporciona la solución de manera muy sencilla.

Ejemplo: $(x+y)(u_x - u_y) = u$

$$\boxed{\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{du}{C}} \qquad \frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{-(x+y)} = \frac{du}{u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x+y)}{x+y} = -1; \quad x+y=k$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x+y} = \frac{dx}{k} \qquad \int \frac{du}{u} = \frac{1}{k}\int dx$$

$$\log|u| = \frac{x}{x+y} + C$$

$$u(x,y) = Ce^{\frac{x}{x+y}}$$

Ecuaciones semi-lineales de segundo orden en dos variables

$$u_{xy} + u_y = 0 \qquad \frac{\partial u_y}{\partial x} = -u_y$$

Integrando: $$u_y = g(y)e^{-x}$$

Y volviendo a integrar: $$u(x,y) = f(y)e^{-x} + h(x)$$

Nota: Comprueba que obtenemos el mismo resultado si comenzamos a integrar respecto a y en vez de x.

Añadamos ahora una condición inicial: $u(s,s) = 1$

$$u(x,y) = f(y)e^{-x} + h(x)$$

$$u(s,s) = f(s)e^{-s} + h(s) = 1$$

$$h(s) = 1 - f(s)e^{-s}$$

$$u(x,y) = f(y)e^{-x} + 1 - f(x)e^{-x}$$

$$\boxed{u(x,y) = 1 + \big(f(y) - f(x)\big)\, e^{-x}}$$

Necesitamos otra condición no redundante con la anterior para conseguir una solución particular...

$$u_{xy} + u_y = 0 \qquad u(s,s) = 1$$

$$u_x(s,s) - u_y(s,s) = 2e^{-s}$$

$$\boxed{u(x,y) = 1 + \big(f(y) - f(x)\big)\, e^{-x}}$$

$$u_x = -f'(x)e^{-x} - \big(f(y) - f(x)\big)\, e^{-x}$$

$$u_y = f'(y)e^{-x}$$

$$u_x(s,s) - u_y(s,s) = -2f'(s)e^{-s} - \big(f(s) - f(s)\big)\, e^{-s}$$

$$-2f'(s)e^{-s} = 2e^{-s}; \;\; f'(s) = -1; \;\; f(s) = -s + k$$

$$\boxed{u(x,y) = 1 - (y - x)\, e^{-x}}$$

$$u_{xy} + u_y = 0 \qquad u(s,s) = 1$$

$$\cancel{u_x(s,s) - u_y(s,s) = 2e^{-s}}$$

$$u_x(s,s) + u_y(s,s) = 1$$

$$\boxed{u(x,y) = 1 + \big(f(y) - f(x)\big)\, e^{-x}}$$

$$u_x = -f'(x)e^{-x} - \big(f(y) - f(x)\big)\, e^{-x}$$

$$u_y = f'(y)e^{-x}$$

$$u_x(s,s) + u_y(s,s) = 0 \neq 1$$ Incompatible

El motivo es la incompatibilidad de las c.i.
Si derivamos la primera:

$$u(s,s) = 1$$
$$u_x(s,s) + u_y(s,s) = 1$$

$$\frac{du(s,s)}{ds} = u_x(s,s) + u_y(s,s) = 0$$

Características en ecuaciones semi-lineales de segundo orden en dos variables

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} = D\left(x, y, u, u_x, u_y\right)$$

$$\boxed{\begin{gathered} A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0 \\ \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \end{gathered}}$$

Ecuación diferencial para las curvas características

$(B^2 - AC) > 0$ **Ecuación hiperbólica**: existirán dos ($\pm$) familias uniparamétricas de características.

$(B^2 - AC) = 0$ **Ecuación parabólica**: existirá una familia uniparamétrica de características.

$(B^2 - AC) < 0$ **Ecuación elíptica**: no existirán curvas características.

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} = D\big(x, y, u, u_x, u_y\big)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

Dada la ecuación en derivadas parciales

$$y u_{xx} + 2x u_{xy} + u_y^2 = 0$$

determinar cual de las curvas siguientes es característica

(a) $y^2 = 2x^2$

(b) $y^2 = 4x^2$

(c) $y = 2x$

(d) $y = x^2$

(e) $y = -2x$

Resolución En esta EDP de segundo orden se tiene $a(x,y) = y$, $b(x,y) = x$, $c(x,y) = 0$. Por tanto, la EDO que determina las características es $y' = (x \pm \sqrt{x^2})/y$; esto es, bien $y' = 0$ o $yy' = 2x$. Así, integrando estas ecuaciones obtenemos dos familias de características $y =$ constante, $y^2/2 = x^2 +$constante.

Ejemplos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

1. La ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1,$$

luego $b - ac = -1 < 0$. Es elíptica en todo el plano. No tiene características.

2. La ecuación de ondas

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -1,$$

luego $b - ac = 1 > 0$. Es hiperbólica en todo el plano. Sus características vienen descritas por las ecuaciones

$$x'(t) = \pm 1,$$

son por tanto las dos familias de rectas

$$x = \pm t + k.$$

3. La ecuación del calor

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

$$u_t - u_{xx} = 0,$$

$$a = -1, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

luego $b - ac = 0$. Es parabólica en todo el plano. Sus características verifican

$$t'(x) = 0.$$

Luego son la familia de rectas $t = k$.

4. Para la ecuación de Tricomi

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0,$$

$$a(x, y) = y, \quad b = 0, \quad c = 1.$$

Así,

$$b^2 - ac = -y.$$

Por tanto, la ecuación es

$$\begin{cases} \text{elíptica en} & y > 0, \\ \text{parabólica en} & y = 0, \\ \text{hiperbólica en} & y < 0. \end{cases}$$

En el caso hiperbólico, $y < 0$, la ecuación diferencial de las características es

$$y' = \pm\sqrt{-\frac{1}{y}}$$

luego las curvas características son

$$y(x) = -\left(\mp\frac{3}{2}x + c\right)^{2/3}$$

con $c \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria.[§]

[§]Observemos que $y = 0$ no es curva característica. Qué la ecuación sea parabólica para $y = 0$ significa que en esos puntos tan sólo existe una dirección característica, en este caso de pendiente infinita $y' = \pm\infty$.

La ecuación de Tricomi aparece en la descripción del movimiento de un cuerpo en un gas, siendo su velocidad aproximadamente la del sonido. El caso elíptico ($y > 0$) corresponde a movimiento subsónico y el hiperbólico ($y < 0$) a movimiento supersónico.

Dada la ecuación en derivadas parciales

$$x^2 u_{xx} - xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = \exp u$$

cual de las siguientes afirmaciones es cierta

(a) Es parabólica para $xy > 0$

(b) Es hiperbólica para $xy \neq 0$

(c) Es elíptica para $xy \neq 0$

(d) Es hiperbólica para $x > y$

(e) Es elíptica para todo (x, y)

Resolución En esta EDP de segundo orden se tiene $a(x,y) = x^2$, $b(x,y) = -xy/2$, $c(x,y) = y^2$. Por tanto, $b^2 - ac = -3/4x^2y^2$ y siempre que $xy \neq 0$ la ecuación será elíptica.

¿Qué ocurre cuando se dan condiciones sobre una curva característica?

$$u_{xy} + u_y = 0 \qquad u(s,0) = e^{-s}$$

$$u_y(s,0) = 0$$

$k = 0$

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = D$$

$$\boxed{\begin{gathered} A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0 \\ \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \end{gathered}}$$

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ 2B &= 1 \\ C &= 0 \end{aligned} \qquad -\frac{dy}{dx} = 0; \qquad y(x) = k$$

$$u(x,y) = f(y)e^{-x} + h(x)$$

$$u(s,0) = f(0)e^{-s} + h(s) = e^{-s}$$

$$h(s) = (1 - f(0))e^{-s}$$

$$u(x,y) = (1 + f(y) - f(0))e^{-x}$$

$$u_{xy} + u_y = 0 \qquad u(x, y) = (1 + f(y) - f(0))e^{-x}$$

$$u_y(s, 0) = 0 \qquad u_y(x, y) = f'(y)e^x$$

$$u_y(s, 0) = f'(0)e^s = 0$$

$$f'(0) = 0$$

La solución será:

$$u(x, y) = (1 + f(y) - f(0))e^{-x}$$

donde $f(y)$ es una función arbitraria tal que $f'(0) = 0$.
El problema tiene infinitas soluciones y queda indeterminado.

$\boxed{\mathbf{1.2}}$ Hallar las curvas características del problema:

$$u_{xx} + c^2 u_{yy} = u_x + u.$$

Respuesta: De la ecuación (1.22)

$$\phi_x^2 + c^2 \phi_y^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -c^2,$$

que da lugar a

$$\frac{dy}{dx} = \pm ic,$$

cuyas soluciones pueden ponerse como

$$y + icx = \text{cte}$$
$$y - icx = \text{cte}$$

Por tanto, no existen curvas características reales. Con el cambio de variable:

$$\xi = cx,$$
$$\eta = y,$$

se obtiene la forma canónica de la ecuación, que es de tipo elíptico:

$$c^2 u_{\xi\xi} + c^2 u_{\eta\eta} = c u_\xi + u \quad \Longrightarrow \quad u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \frac{1}{c} u_\xi + \frac{1}{c^2} u.$$

Características en sistemas de ecuaciones semi-lineales de primer orden y dos variables

$$u_{xx} - c^2 u_{yy} = 0$$

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} = D$$

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - c^2 = 0$$

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} y + cx = cte \\ y - cx = cte \end{cases}}$$

$$u_x \equiv p$$
$$u_y \equiv q$$

$$u_{xx} - c^2 u_{yy} = 0$$

$$\begin{cases} p_y - q_x = 0 \\ p_x - c^2 q_y = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ q_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_y \\ q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_x\\ q_x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_y\\ q_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}}$$

$$A_1 v_x \quad + \quad A_2 v_y = \vec{0}$$

Ecuación de las características: $$\det\left(A_1\frac{dy}{dx}-A_2\right)=0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{dy}{dx}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -c^2\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}-1 & -\frac{dy}{dx}\\ \frac{dy}{dx} & c^2\end{vmatrix}=0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-c^2=0 \qquad \boxed{y(x)=\begin{cases}y+cx=cte\\ y-cx=cte\end{cases}}$$

que coincide con nuestro resultado anterior.