Física teórica
MECÁNICA

Cinemática tensorial

Tema 13

Teoría de matrices reales

Tema 13... Teoría de matrices reales.

Índice.

Submatriz fila. Submatriz columna. Combinación lineal submatricial. Submatriz fila (o columna) linealmente dependiente (o independiente). Teoremas 20 y 21. Rango matricial. Teorema 22.

Apartado-4 (15).

Submatriz que es combinación lineal de otra u otras submatrices en $A \in \mathcal{M}_{mn}$. Teoremas 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 y 31.

Matrices escalonadas (17).

Apartado-1 (17).

Operaciones o transformaciones matriciales elementales. Teoremas 32, 33 y 34. Matrices equivalentes.

Apartado-2 (18).

Matriz escalonada. Teorema-35. Método de Gauss. Teorema-36.

Apartado-3 (19).

Matriz escalonada reducida. Teorema 37. Método Gauss-Jordan. Teorema 38.

Matrices invertibles (20).

Apartado-1 (20).

Matriz inversa. Teoremas 39 y 40. Método de Gauss-Jordan.

Tema 13 (Teoría de matrices reales).

(Introducción.)

Apartado-1.

Una MATRIZ REAL es un conjunto finito de números reales dispuestos en filas y columnas, llamándose ORDEN MATRICIAL al producto no conmutativo $m \times n$ que expresa el número de filas (m) por el número de columnas (n) de una matriz $A = ((a_{ij}))$:

$$A = ((a_{ij})) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El orden de A se denota $ord(A) = m \cdot n$, de donde si $ord(B) = n \cdot m$, con $B = ((b_{ij}))$, entonces evidentemente $ord(A) \neq ord(B)$. No obstante, definiendo el CARDINAL o DIMENSIÓN de A como el número total de sus componentes, denotaremos:

$$card(A) = dim(A) = m \cdot n$$

De donde, a pesar de que $ord(A) \neq ord(B)$, se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} ord(A) = m \cdot n \\ ord(B) = n \cdot m \end{array} \right\} \Rightarrow dim(A) = dim(B).$$

El conjunto de todas las matrices reales será denominado $\mathcal{M}$, y el subconjunto de $\mathcal{M}$ formado por todas las matrices de orden $m \cdot n$ será denotado por $\mathcal{M}_{mn}$. Cuando $m = n$, tendremos:

$$\mathcal{M}_{nn} \equiv \mathcal{M}_{n^2} \equiv \mathcal{M}_n$$

Se llama MATRIZ FILA a toda matriz $A \in \mathcal{M}_{1n}$, tal que $ord(A) = 1 \cdot n$:

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \ldots \ a_{1n})$$

Se llama MATRIZ COLUMNA a toda matriz $B \in \mathcal{M}_{m1}$, tal que $ord(B) = m \cdot 1$:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ --- \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

Se llama MATRIZ NULA a toda matriz $O \in \mathcal{M}_{mn}$ tal que todas sus componentes son nulas ($0 \in R$).

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Dada una matriz $A=((a_{ij}))\in\mathcal{M}_{mn}$, se llama MATRIZ OPUESTA de A a otra matriz $-A=((-a_{ij}))\in\mathcal{M}_{mn}$ tal que:

$$A\oplus(-A)=0$$

(Ver tema anterior: Suma matricial).

Se llama MATRIZ CUADRADA a toda matriz $A\in\mathcal{M}_m$ que posee el mismo número de filas que de columnas, en cuyo caso:

$$\forall A\in\mathcal{M}_m \Rightarrow \begin{array}{l} ord(A)=m\cdot m=m^2 \Rightarrow ord(A)=m \\ dim(A)=m^2. \end{array}$$

Se llama MATRIZ RECTANGULAR a toda matriz $A\in\mathcal{M}_{mn}$, tal que $ord(A)=m\cdot n$, con $m\neq n$.

Apartado-2.

En una matriz cuadrada $A\in\mathcal{M}_n$, se llama DIAGONAL PRINCIPAL a la línea de componentes de A cuyos dos subíndices coinciden:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \hdashline \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

Se llama MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR a toda matriz cuadrada $A\in\mathcal{M}_n$ tal que todas sus componentes situadas bajo la diagonal principal son nulas ($0\in R$):

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \hdashline \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

Se llama MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR a toda matriz cuadrada $A\in\mathcal{M}_n$ tal que todas sus componentes situadas sobre la diagonal principal son nulas:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0\\ \hdashline \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

Se llama MATRIZ DIAGONAL a toda matriz cuadrada $A\in\mathcal{M}_n$ tal que todas sus componentes son nulas, salvo las que están situa das en la diagonal principal:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se llama MATRIZ IDENTIDAD a toda matriz $I \in \mathcal{M}_n$, cuadrada y diagonal, tal que todas sus componentes no nulas son iguales a la unidad ($1 \in R$):

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Dadas dos matrices A y B tales que $ord(A) = ord(B)$, se llaman MATRICES EQUIMORFAS, y se denota: $A \sim B$:

$$A \sim B \Leftrightarrow ord(A) = ord(B).$$

Si A y B son matrices equimorfas, se dirá que dos componentes $a_{ij} \in A$ y $b_{ij} \in B$ son COMPONENTES HOMÓLOGAS si sucede que a_{ij} pertenece a la misma fila y la misma columna en A que b_{ij} en B. Esto se denota:

$$a_{ij} = hom(b_{ij})$$
$$b_{ij} = hom(a_{ij})$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = hom(b_{11}),\ a_{12} = hom(b_{12}),\ \dots,\ a_{23} = hom(b_{23}).$$

Dadas 2 matrices $A, B \in \mathcal{M}_{mn}$, equimorfas, se dirá que ambas son MATRICES IGUALES, $A = B$, si sus componentes homólogas son iguales.

Dada una matriz $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{mn}$, se llama MATRIZ TRASPUESTA de A a otra matriz $A^t = ((a_{ji})) \in \mathcal{M}_{nm}$ que se obtiene convirtiendo las filas de A en columnas en A^t:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{m3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

TEOREMA-1.

Siendo $A \in \mathcal{M}_{mn}$ y $A^t \in \mathcal{M}_{nm}$, se cumple: $(A^t)^t = A$.

DEMOSTRACIÓN:

Trivial.

Siendo $A \in \mathcal{M}_n$, se dirá que A es una MATRIZ SIMÉTRICA si sucede que $A = A^t$; y de esta definición se infiere que no pueden existir matrices simétricas rectangulares (no cuadradas).

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = A^t \in \mathcal{M}_2$$

Siendo $A \in \mathcal{M}_n$, se dirá que A es una MATRIZ ANTISIMÉTRICA si sucede que $A^t = -A$.

TEOREMA-2.

Las componentes de la diagonal principal de toda matriz antisimétrica son nulas ($0 \in R$).

DEMOSTRACIÓN:

Se omite.

Operaciones matriciales.

Apartado-1.

Dadas 2 matrices equimorfas, A y B, se define la SUMA MATRICIAL de ambas, y se denota $A \oplus B$, como la matriz C, equimorfa a las anteriores, formada por la suma de las componentes homólogas de A y B: $\forall A, B \in \mathcal{M}_{mn} \left| \begin{matrix} A = ((a_{ij})) \\ B = ((b_{ij})) \end{matrix} \right\} \Rightarrow A \oplus B = C \in \mathcal{M}_{mn}$

Tal que:

$$C = ((c_{ij})) \mid c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} \cdots b_{mn} \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \cdots c_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} \cdots c_{mn} \end{pmatrix}$$

Tal que:

$$c_{11} = a_{11} + b_{11}; \quad c_{12} = a_{12} + b_{12}; \ldots; \; c_{mn} = a_{mn} + b_{mn}.$$

Dadas 2 matrices $A, B \in \mathcal{M}_{mn}$, se define la RESTA MATRICIAL de ambas, $A \ominus B$, como la matriz $C \in \mathcal{M}_{mn}$ formada por la resta de las componentes homólogas de A y B:

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{mn} \mid A = ((a_{ij})); \; B = ((b_{ij})) \Rightarrow A \ominus B = C \in \mathcal{M}_{mn}$$

Con:

$$C = ((c_{ij})) \mid c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

Donde, también:

$$A \ominus B = A \oplus (-B).$$

Dado un número real $r \in R$ y una matriz cualquiera $A \in \mathcal{M}_{mn}$, se define el producto de $r \in R$ por $A \in \mathcal{M}_{mn}$ (PRODUCTO ESCALOMATRICIAL) como la matriz $C \in \mathcal{M}_{mn}$ cuyas componentes son las de A multiplicadas por $r \in R$:

$$\left.\begin{array}{l}\forall r \in R \\ \forall A \in \mathcal{M}_{mn}\end{array}\right| A = ((a_{ij})) \Rightarrow r \odot A = rA = ((r\,a_{ij})) = C \in \mathcal{M}_{mn}$$

Donde:

$$rA = r\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2n} \\ - & - & - & - \\ ra_{1m} & ra_{2m} & \cdots & ra_{mn}\end{pmatrix} = C.$$

Por consiguiente:

$$A \ominus B = A \oplus (-1)B = A \oplus (-B).$$
$$(-1)A = -A.$$

Apartado-2.

Dadas 2 tuplas $x, y \in R^n$, tal que:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Se llama COMBINACIÓN LINEAL TUPLANA de $x \in R^n$ por $y \in R^n$ al escalar real $r \in R$ que se obtiene así:

$$r = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathcal{E}(xy)$$

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}$, se llama SUBMATRIZ FILA de A a cualquiera de sus filas y se llama SUBMATRIZ COLUMNA de A a una cualquiera de sus columnas. Una submatriz fila de A se denota por F_i (con $i = 1, 2, \ldots, m$) y una submatriz columna de A se denota por C_j (con $j = 1, 2, 3, \ldots, n$). Por lo tanto, tendremos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdots \\ F_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$$

tal que:

$$F_1 = (a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n})\,;\ F_2 = (a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n})\,;\ \cdots;\ F_m = (a_{m1}\ a_{m2} \cdots a_{mn})$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ --- \\ a_{m1}\end{pmatrix};\quad C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ --- \\ a_{m2}\end{pmatrix};\quad \cdots;\quad C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ --- \\ a_{mn}\end{pmatrix}$$

Dadas 2 matrices $A \in \mathcal{M}_{mn}$ y $B \in \mathcal{M}_{np}$, se define el PRODUCTO MATRICIAL de A por B, y se denota $A \otimes B$, a la matriz $C \in \mathcal{M}_{mp}$ que se obtiene al combinar linealmente las submatrices filas de A con las submatrices columnas de B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_m \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_p \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} \mathcal{E}F_1C_1 & \mathcal{E}F_1C_2 & \dots & \mathcal{E}F_1C_p \\ \mathcal{E}F_2C_1 & \mathcal{E}F_2C_2 & \dots & \mathcal{E}F_2C_p \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \mathcal{E}F_mC_1 & \mathcal{E}F_mC_2 & \dots & \mathcal{E}F_mC_p \end{pmatrix}$$

Tal que:

$$\mathcal{E}F_1C_1 = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1}$$

$$\mathcal{E}F_2C_1 = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathcal{E}F_mC_p = a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \dots + a_{mn}b_{np} = \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{ip}$$

O sea:

$$A \otimes B = C.$$

TEOREMA-3:

Siendo $A \in \mathcal{M}_{mn}$ y $B \in \mathcal{M}_{np}$, se tiene:

$$A \otimes B = C \not\Rightarrow C = B \otimes A.$$

DEMOSTRACIÓN: Basta poner un contraejemplo.

TEOREMA-4:

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{mn} \Rightarrow (A \oplus B)^t = A^t \oplus B^t$$

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-5:

$$\left.\begin{array}{l} \forall r \in R \\ \forall A \in \mathcal{M}_{mn} \end{array}\right\} \Rightarrow (rA)^t = r\,(A^t).$$

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-6:

$$\left.\begin{array}{l} \forall A \in \mathcal{M}_{mn} \\ \forall B \in \mathcal{M}_{np} \end{array}\right\} \Rightarrow (A \otimes B)^t = B^t \otimes A^t$$

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$, se dirá que A es una MATRIZ IDEMPOTENTE cuando $A \otimes A = A$. Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = A \otimes A = A^2.$$

Determinantes.

Apartado-1.

Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_2$, se llama Determinante de A a un número real $det(A) = r \in R$ tal que:

$$\forall A \in \mathcal{M}_2 \mid A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = r \in R.$$

Al determinante de una matriz $A \in \mathcal{M}_2$ se le llama genéricamente DETERMINANTE DE SEGUNDO ORDEN (o de orden 2).

Apartado-2.

Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_3$, se llama Determinante de A a un número real $det(A) = r \in R$ tal que:

$$\forall A \in \mathcal{M}_3 \mid A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{21} a_{32} a_{13} - (a_{13} a_{22} a_{31} + a_{12} a_{21} a_{33} + a_{11} a_{23} a_{32}) =$$

$$= r \in R.$$

Al determinante de una matriz $A \in \mathcal{M}_3$ se le llama genéricamente DETERMINANTE DE TERCER ORDEN (o de orden 3).

Apartado-3.

Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_4$, se llama Determinante de A a un número real $det(A) = r \in R$ tal que:

$$\forall A \in \mathcal{M}_4 \mid A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\left(a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44}\end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44}\end{vmatrix} + a_{24}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43}\end{vmatrix}\right) -$$

$$- a_{12}\left(a_{21}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44}\end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44}\end{vmatrix} + a_{24}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43}\end{vmatrix}\right) +$$

$$+ a_{13}\left(a_{21}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44}\end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44}\end{vmatrix} + a_{24}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42}\end{vmatrix}\right) -$$

$$- a_{14}\left(a_{21}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43}\end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43}\end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42}\end{vmatrix}\right) =$$

$$= a_{11}\Big[a_{22}(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}) - a_{23}(a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42}) +$$

$$+ a_{24}(a_{32}a_{43} - a_{33}a_{42})\Big] - a_{12}\Big[a_{21}(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}) -$$

$$- a_{23}(a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41}) + a_{24}(a_{31}a_{43} - a_{33}a_{41})\Big] +$$

$$+ a_{13}\Big[a_{21}(a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42}) - a_{22}(a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41}) +$$

$$+ a_{24}(a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41})\Big] - a_{14}\Big[a_{21}(a_{32}a_{43} - a_{33}a_{42}) -$$

$$- a_{22}(a_{31}a_{43} - a_{33}a_{41}) + a_{23}(a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41})\Big] =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} +$$

$$+ a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} +$$

$$+ a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} -$$

$$-\big(a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{21}a_{24}a_{33}a_{42} +$$

$$+ a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} + a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} +$$

$$+ a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}\big).$$

Al determinante de una matriz $A \in \mathcal{M}_4$ se le llama genéricamente

Apartado-4.

Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$, se llama MENOR COMPLEMENTARIO de una componente cualquiera $a_{km} \in A$, con $k \leq n$ y $m \leq n$, y se denota α_{km}, al determinante que resulta de suprimir en det(A) la k-ésima fila y la m-ésima columna. Verbigracia:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \; ; \quad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Y se llama ADJUNTO de una componente $a_{km} \in A$ al producto que se obtiene multiplicando $(-1)^{k+m}$ por α_{km}, y a tal producto se denota $adj(a_{km})$:

$$adj(a_{km}) = (-1)^{k+m} \cdot \alpha_{km}$$

El determinante de una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ se llama genéricamente DETERMINANTE DE N-ÉSIMO ORDEN (o de orden n).

TEOREMA-7.

Siendo $A \in \mathcal{M}_n$, det(A) es igual a la combinación lineal de la tupla formada por las componentes de una fila cualquiera $F_k = (a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \dots, a_{kn})$, con $1 \leq k \leq n$, por la tupla formada por los correspondientes adjuntos de las componentes de F_k, $Adj(F_k) = [adj(a_{k1}), adj(a_{k2}), adj(a_{k3}), \dots, adj(a_{kn})]$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \hdashline a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \\ \hdashline a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{k+1} a_{k1}\alpha_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k2}\alpha_{k2} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{k+n} a_{kn}\alpha_{kn} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ki}\alpha_{ki}$$

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-8.

Siendo $A \in \mathcal{M}_n$, det(A) es igual a la combinación lineal de la tupla formada por las componentes de una columna cualquiera $C_k = (a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, \dots, a_{nk})$, con $1 \leq k \leq n$, por la tupla formada por los correspondientes adjuntos de las componentes de C_k, a saber $Adj(C_k) = [adj.(a_{1k}), adj(a_{2k}), adj(a_{3k}), \dots, adj(a_{nk})]$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3k} & \cdots & a_{3n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+k} a_{1k}\,\alpha_{1k} + (-1)^{2+k} a_{2k}\,\alpha_{2k} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+k} a_{nk}\,\alpha_{nk} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}\,\alpha_{ik}.$$

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-9.

$\forall A \in \mathcal{M}_n \Rightarrow \det(A) = \det(A^t)$.

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-10.

$\forall A \in \mathcal{M}_n$, si se permutan en A dos filas o dos columnas entonces el $\det(A)$ cambia de signo:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & - & - \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ - & - & - & - \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} ; \quad \det(A') = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & - & - \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ - & - & - & - \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\det(A)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2l} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2l} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-11:

Si en $\det(A)$ existen 2 filas, o 2 columnas, con las respectivas componentes iguales, entonces $\det(A) = 0$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & - & - \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ - & - & - & - \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{kn} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-12.

Si $\det(A)$ se multiplica por $r \in R$, ello equivale a multiplicar por $r \in \mathbb{R}$ todas las componentes de una fila o una columna cualquiera de $\det(A)$:

$$r \cdot \det(A) = r \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2k} & \cdots & ra_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & ra_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & ra_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & ra_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-13.

Si $\det(A)$ contiene una fila cuyas componentes son todas iguales a $0 \in \mathbb{R}$, o una columna cuyas componentes son todas iguales a $0 \in \mathbb{R}$, entonces $\det(A) = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Corolario del teorema anterior.

TEOREMA-14.

Si $\det(A)$ consta de una fila o columna cuyas componentes son sumas de 2 sumandos reales, $\det(A)$ es descomponible en la suma de 2 determinantes así:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k}+b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k}+b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk}+b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1}+b_1 & \cdots & a_{lk}+b_k & \cdots & a_{ln}+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{lk} & \cdots & a_{ln} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & \cdots & b_k & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

Apartado-5.

TEOREMA-15.

El valor numérico de un determinante no varía si a una de sus filas (o columnas) se le suma otra fila (o columna) paralela a ella y multiplicada por un número real:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1k} \cdots a_{1m} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{h1} \cdots a_{hk} \cdots a_{hm} \cdots a_{hn} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{L1} \cdots a_{Lk} \cdots a_{Lm} \cdots a_{Ln} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nk} \cdots a_{nm} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1k} \cdots a_{1m} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ (a_{h1}+ra_{L1}) \cdots (a_{hk}+ra_{Lk}) \cdots (a_{hm}+ra_{Lm}) \cdots (a_{hn}+ra_{Ln}) \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{L1} \cdots a_{Lk} \cdots a_{Lm} \cdots a_{Ln} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nk} \cdots a_{nm} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1k} \cdots (a_{1m}+ra_{1k}) \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{h1} \cdots a_{hk} \cdots (a_{hm}+ra_{hk}) \cdots a_{hm} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{L1} \cdots a_{Lk} \cdots (a_{Lm}+ra_{Lk}) \cdots a_{Ln} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nk} \cdots (a_{nm}+ra_{nk}) \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

DEMOSTRACIÓN: Es colorario de los teoremas 11, 12 y 14 anteriores.

Aplicando sistemáticamente este teorema 15, se puede conseguir en cualquier determinante que se anule una fila o columna salvo una sólo de las componentes, con lo cual se obtiene un DETERMINANTE EQUIVALENTE (de igual valor numérico) pero mucho más sencillo de calcular. Por ejemplo:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & (2-2) & 4 \\ 0 & 1 & (3-0) & 1 \\ 4 & 1 & (7-4) & 1 \\ 3 & 3 & (1-3) & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & (4-2\cdot 2) \\ 0 & 1 & 3 & (1-2\cdot 0) \\ 4 & 1 & 3 & (1-2\cdot 4) \\ 3 & 3 & -2 & (2-2\cdot 3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & -7 \\ 3 & 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,(-12-2-63-9-14+12) = -176.$$

Rango matricial.

Apartado-1.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$, se llama MATRIZ ADJUNTA de A a la matriz $adj(A) \in \mathcal{M}_n$ tal que:

$$\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow adj(A) = \begin{pmatrix} adj(a_{11}) & adj(a_{12}) & \dots & adj(a_{1n}) \\ adj(21) & adj(a_{22}) & \dots & adj(a_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ adj(a_{n1}) & adj(a_{n2}) & \dots & adj(a_{nn}) \end{pmatrix}$$

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ tal que $det(A) \neq 0$, $\exists A^{-1} \in \mathcal{M}_n$, llamada MATRIZ INVERSA de $A \in \mathcal{M}_n$, tal que: $A \otimes A^{-1} = I \in \mathcal{M}_n$

donde $I \in \mathcal{M}_n$ es la matriz identidad.

TEOREMA-16.

Si $A \in \mathcal{M}_n$ y $\exists A^{-1} \in \mathcal{M}_n$, entonces $A^{-1} \in \mathcal{M}_n$ es única.

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-17.

$$\forall A \in \mathcal{M}_n \mid det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \odot Adj(A^t).$$

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

Apartado-2.

Se dice que una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ es una MATRIZ ORTOGONAL si se cumple: $A \otimes A^{-1} = I$

TEOREMA-18.

Si $A \in \mathcal{M}_n$ es una matriz ortogonal, entonces $A^t = A^{-1}$.

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-19.

$\forall I \in \mathcal{M}_n$ se tiene que I es una matriz ortogonal.

DEMOSTRACIÓN: Corolario del teorema anterior.

Se dice que $A \in \mathcal{M}_n$ es MATRIZ REGULAR si $det(A) \neq 0$, pero se dirá que es MATRIZ SINGULAR si $det(A) = 0$.

Apartado-3.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}$, se dirá que toda fila $F_i \in A$ es una SUBMATRIZ FILA de A; y como $ord(A) = mn$, entonces el número total de filas de A es $m \in N$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_m \end{pmatrix} \quad \begin{array}{|l} F_1 = (a_{11} \ a_{12} \dots a_{1n}) \\ F_2 = (a_{21} \ a_{22} \dots a_{2n}) \\ \dots \\ F_m = (a_{m1} \ a_{m2} \dots a_{mn}). \end{array}$$

y se dirá que toda columna de $A \in \mathcal{M}_{mn}$, $C_i \in A$, es una SUBMATRIZ COLUMNA de A; y como $ord(A) = mn$, entonces el número total de columnas de A es $n \in N$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix} \Bigg| \; C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \; C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se dirá que una submatriz fila $F_k \in A \in \mathcal{M}_{mn}$, con $1 \leq k \leq m$, es COMBINACIÓN LINEAL SUBMATRICIAL en A si existen $r_i \in R$, con $i = 1, 2, \dots, m$, con $i \neq k$, tal que:

$$F_k = r_1 F_1 \oplus r_2 F_2 \oplus \dots \oplus r_{k-1} F_{k-1} \oplus r_{k+1} F_{k+1} \oplus \dots \oplus r_m F_m = \bigoplus_{i=1}^{m} r_i F_i \mid i \neq k.$$

Se dirá que $F_k \in A \in \mathcal{M}_{mn}$, con $1 \leq k \leq m$, es LINEALMENTE DEPENDIENTE en $A \in \mathcal{M}_{mn}$ si es posible encontrar una combinación lineal submatricial de F_k en A tal que:

$$F_k = \bigoplus_{i=1}^{m} r_i F_i = 0 \in \mathcal{M}_{1n} \mid i \neq k \mid \exists r_l \neq 0 \mid 1 \leq l \leq m \mid l \neq k.$$

Se dirá que $F_k \in A \in \mathcal{M}_{mn}$, con $1 \leq k \leq m$, es LINEALMENTE INDEPENDIENTE en $A \in \mathcal{M}_{mn}$ si F_k en A no es linealmente dependiente, es decir, si no es posible encontrar una combinación lineal submatricial de F_k en A tal que:

$$F_k = \bigoplus_{i=1}^{m} r_i F_i = 0 \in \mathcal{M}_{1n} \mid i \neq k \mid \exists r_l \neq 0 \mid 1 \leq l \leq m \mid l \neq k$$

TEOREMA-20:

Siendo F_k una submatriz fila de $A \in \mathcal{M}_{mn}$, es F_k linealmente independiente en A si y sólo si se cumple:

$$F_k = \bigoplus_{i=1}^{m} r_i F_i = 0 \in \mathcal{M}_{1n} \mid i \neq k \mid r_i \in R \quad \Rightarrow \quad r_i = 0$$

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

Se dirá que una submatriz columna $C_k \in A \in \mathcal{M}_{mn}$, con $1 \leq k \leq n$, es COMBINACIÓN LINEAL SUBMATRICIAL en A si existen $r_i \in R$, con $i \neq k$, con $i = 1, 2, \dots, n$, tal que:

$$C_k = \bigoplus_{i=1}^{n} r_i C_i \mid i \neq k.$$

Se dirá que una submatriz columna $C_k \in A \in \mathcal{M}_{mn}$, con $1 \leq k \leq n$, es LINEALMENTE DEPENDIENTE en A si es posible encontrar una combinación lineal de C_k en A tal que:

$$C_k = \bigoplus_{i=1}^{n} r_i C_i = 0 \in \mathcal{M}_{m1} \mid i \neq k \mid \exists r_l \neq 0 \mid 1 \leq l \leq n \mid l \neq k.$$

Se dirá que $C_k \in A \in \mathcal{M}_{mn}$, con $1 \leq k \leq n$, es LINEALMENTE INDEPENDIENTE en A si C_k no es linealmente dependiente en A, es decir, si no es posible encontrar una combinación lineal submatricial de C_k en A tal que:

$$C_k = \bigoplus_{i=1}^{n} r_i C_i = 0 \in \mathcal{M}_{m1} \,\big|\, i \neq k \,\big|\, \exists r_L \neq 0 \,\big|\, 1 \leq L \leq n \,\big|\, L \neq k.$$

TEOREMA-21:

Siendo C_k una submatriz columna de $A \in \mathcal{M}_{mn}$, es C_k linealmente independiente en A si y sólo si se cumple:

$$C_k = \bigoplus_{i=1}^{n} r_i C_i = 0 \in \mathcal{M}_{m1} \,\big|\, i \neq k \,\big|\, r_i \in R \quad \Rightarrow \quad r_i = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

Se llama RANGO MATRICIAL de $A \in \mathcal{M}_{mn}$ al número total de submatrices filas de A que son linealmente independientes en A, y tal número se denota por rang(A). Obviamente $\mathrm{rang}(A) \in N$; por otra parte, siendo $\min(m,n) \in N$ el menor número natural perteneciente al conjunto binario $\{m,n\}$, igual a m si sucede que $m = n$, o igual a n si $m > n$, es cierto entonces que se cumple (como corolario del próximo teorema):

$$\mathrm{rang}(A) \leq \min(m,n)$$

TEOREMA-22.

En toda matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}$ se cumple que el número total de submatrices filas de A que son linealmente independientes en A coincide con el número total de submatrices columnas de A que son linealmente independientes en A.

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

Apartado-4.

En toda matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}$, se dirá que una de sus submatrices fila F_k es combinación lineal de otra u otras submatrices fila $F_i \in A$, con $i \neq k$, si $\exists r_i \in R$ $(i \neq k)$, tales que

$$F_k = \bigoplus_{i=1}^{n} r_i F_i \,\big|\, i \neq k$$

Si $n = 1$, F_k es combinación lineal de F_1 sólo; si $n=2$, entonces F_k es combinación lineal de F_1 y F_2; y así sucesivamente. Si $n = n$, entonces F_k es combinación lineal de todas las submatrices fila de A, salvo F_k, esto es, combinación lineal submatricial en A.

De manera similar, si la submatriz columna C_k de A es tal que: $$C_k = \bigoplus_{i=1}^{m} r_i C_i \quad (i \neq k)$$

entonces se dice que C_k es combinación lineal de al menos una $C_i \in A$ $(i \neq k)$; y si $m=m$, entonces es C_k una combinación lineal submatricial en A.

TEOREMA-23.

Toda submatriz fila nula (o submatriz columna nula) de A es combinación lineal de una o de todas las submatrices filas (o columnas) de $A \in \mathcal{M}_{mn}$.

DEMOSTRACIÓN:

$$\bigoplus_{i=1}^{m} 0C_i = 0 \in \mathcal{M}_{m1} \;;\quad \bigoplus_{i=1}^{n} 0F_i = 0 \in \mathcal{M}_{1n}$$

TEOREMA-24.

El rango de toda matriz nula es cero.

DEMOSTRACIÓN: Corolario del teorema anterior.

TEOREMA-25.

Si en $A \in \mathcal{M}_{mn}$ se permutan 2 submatrices fila (o 2 submatrices columna) se obtiene una matriz transformada $B \in \mathcal{M}_{mn}$ tal que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$.

DEMOSTRACIÓN: Se omite, pero es trivial.

TEOREMA-26.

Si se multiplica (en producto escalomatricial) un número real no nulo $r \in (R-\{0\})$ por una submatriz fila (o columna) de $A \in \mathcal{M}_{mn}$ dando como resultado $B \in \mathcal{M}_{mn}$, se cumple lo siguiente: $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$.

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-27.

Si a una submatriz fila (o columna) de $A \in \mathcal{M}_{mn}$ se le suma otra submatriz fila (o columna) multiplicada por un número real no nulo $r \in (R-\{0\})$ se obtiene como resultado la matriz $B \in \mathcal{M}_{mn}$ y se cumple que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$.

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-28.

Si en $A \in \mathcal{M}_{mn}$ se elimina una submatriz fila (o columna) que es

combinación lineal de una o más submatrices fila
(o columna) de A se obtiene $B \in \mathcal{M}_{hk}$, con $h = m-1$ (ó $k = n-1$), tal que rang (A) = rang (B).

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-29.

Si en $A \in \mathcal{M}_{mn}$ se eliminan todas las submatrices fila (o columna) nulas se obtiene $B \in \mathcal{M}_{hk}$, con $1 \leq h \leq m$ y $1 \leq k \leq n$, tal que rang (A) = rang (B).

DEMOSTRACIÓN: Corolario del teorema anterior.

TEOREMA-30.

Toda matriz cuadrada triangular (superior o inferior) $A \in \mathcal{M}_n$, tal que toda componente de su diagonal principal es no nula, cumple: rang (A) = ord $(A) = n$.

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-31.

El rango de la matriz unidad $I \in \mathcal{M}_n$ es igual a su orden.

DEMOSTRACIÓN: Corolario del teorema anterior.

Matrices escalonadas.

Apartado-1.

Se llaman OPERACIONES o TRANSFORMACIONES MATRICIALES ELEMENTALES a las 3 siguientes:

1).- La Permutación de 2 submatrices filas (o columnas) en $A \in \mathcal{M}_{mn}$.

2).- El Producto Escalomatricial ($\odot$) de un $r \in R$ por una submatriz fila (o columna) en $A \in \mathcal{M}_{mn}$.

3).- La suma matricial ($\oplus$) de 2 submatrizes filas (o columnas) en $A \in \mathcal{M}_{mn}$.

TEOREMA-32.

La suma de una submatriz fila (o columna) con otra fila (o columna) multiplicada por un escalar $r \in R$, en $A \in \mathcal{M}_{mn}$, es una operación elemental en $A \in \mathcal{M}_{mn}$.

DEMOSTRACIÓN: trivial.

TEOREMA-33.

Siendo $A \in \mathcal{M}_{mn}$, y siendo $B \in \mathcal{M}_{mn}$ la matriz A ya transformaformada mediante una cantidad finita de operaciones elementales, se cumple: rang(A) = rang(B).

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-34.

Siendo $A \in \mathcal{M}_{mn}$ y siendo $A^t \in \mathcal{M}_{nm}$ su traspuesta, se cumple: $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^t)$.

DEMOSTRACIÓN: Corolario del teorema-22 anterior.

Cuando $\forall A, B \in \mathcal{M}$ se cumple que $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ se dirá que A y B son MATRICES EQUIVALENTES, y se denotará por $A \approx B$. Es decir:

$$A \approx B \iff \text{rang}(A) = \text{rang}(B).$$

Apartado-2.

Se llama MATRIZ ESCALONADA a toda matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}$ tal que cumple:

1).- Todas las filas (submatrices filas) de A que sean nulas estarán colocadas debajo de las no nulas.

2).- Toda fila no nula poseerá evidentemente una primera componente no nula al ser recorrida (la fila) de izquierda a derecha, y a tal componente no nula se le llamará PIVOTE de la fila en cuestión.

3).- El pivote de una fila no nula F_k^A de A cualquiera, deberá estar situado a la izquierda del pivote de la siguiente F_{k+1}^A no nula.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TEOREMA-35. (MÉTODO DE GAUSS).

Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}$ puede ser transformada en otra matriz $B \in \mathcal{M}_{hk}$, escalonada, aplicadole a A un número finito $p \in \mathbb{N}$ de operaciones elementales.

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-36.

El rango de una matriz escalonada $A \in \mathcal{M}_{mn}$ es igual al

$k \in N$, con $k \leq m$, de submatrices filas no nulas de A.

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -7 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 8 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -23 & 16 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -17/3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -27 & 16 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Tal que:

$$F_1^B = F_1^A; \; F_2^B = \frac{1}{3}F_1^A + F_2^A; \; F_3^B = F_3^A - \frac{5}{3}F_1^A; \; F_4^B = F_4^A - F_1^A.$$

Seguimos:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -17/3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -27 & 16 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -17/3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -85/3 & 15 & 0 \end{pmatrix} = C$$

Tal que:

$$F_1^C = F_1^B; \; F_2^C = F_3^B; \; F_3^C = F_2^B; \; F_4^C = F_4^B - F_3^B.$$

Finalmente:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -17/3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -85/3 & 15 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -17/3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

Tal que:

$$F_1^D = F_1^C; \; F_2^D = F_2^C; \; F_3^D = F_3^C; \; F_4^D = F_4^C - 5F_3^C.$$

De donde:

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(D) = 3.$$

En virtud del teorema-33 anterior.

<u>Apartado-3.</u>

Se llama MATRIZ ESCALONADA REDUCIDA (MER) a toda matriz escalonada $A \in \mathcal{M}_{mn}$ que adicionalmente cumple:

1).- Cada pivote de A es igual a $1 \in R$.

2).- Todas las componentes de submatrices filas que se encuentran formando columna encima de un pivote cualquiera, son iguales a $0 \in R$.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TEOREMA-37 (MÉTODO DE GAUSS-JORDAN).

Toda matriz escalonada $A \in \mathcal{M}_{mn}$ puede ser transformada, mediante operaciones elementales en cantidad finita, en otra matriz $B \in \mathcal{M}_{mn}$ escalonada reducida.

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-38.

Cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}$ puede ser transformada, mediante operaciones elementales en cantidad finita, en otra matriz $B \in \mathcal{M}_{mn}$ escalonada reducida.

DEMOSTRACIÓN:

Corolario de los teoremas 35 y 37.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -7 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 8 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -23 & 16 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -17/3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

Por su parte:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -17/3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{48}{17} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 12/17 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9/17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

A su vez:

$$E \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 48/17 \\ 0 & 1 & 0 & 12/17 \\ 0 & 0 & 1 & -9/17 \end{pmatrix} = F$$

Y por teorema-29:

$$A, E \in \mathcal{M}_{4.5} \; ; \quad F \in \mathcal{M}_{3.4}$$

Matrices invertibles.

Apartado-1.

Como ya hemos visto anteriormente, se llama MATRIZ INVERSA de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$ a otra matriz $A^{-1} \in \mathcal{M}_n$, si es que existe, tal que: $A \otimes A^{-1} = I \in \mathcal{M}_n$

Por teorema 17 anterior, sabemos que si $\exists A^{-1} \in \mathcal{M}_n$, entonces tiene que cumplirse: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \odot adj(A^t)$

Lo cual significa que si $det(A) = 0$, entonces $\nexists A^{-1}$; pero si $det(A) \neq 0$ entonces $\exists A^{-1}$!

TEOREMA-39.

$\forall A \in \mathcal{M}_n$ tal que $\det(A) \neq 0$, entonces $\exists A^{-1} \in \mathcal{M}_n$ tal que $A \otimes A^{-1} = I \in \mathcal{M}_n$. Además, sucede que A^{-1} es única para A y también:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$
$$(A \otimes B)^{-1} = B^{-1} \otimes A^{-1}$$
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

TEOREMA-40. (MÉTODO DE GAUSS-JORDAN).

Siendo $A \in \mathcal{M}_n$ y $\det(A) \neq 0$, para calcular $A^{-1} \in \mathcal{M}_n$ se procederá construyendo la matriz $A \cup I \in \mathcal{M}_{n \cdot 2n}$ (formada por las componentes de A y las de I, de $\mathcal{M}_n$), así:

$$A \cup I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Seguidamente, se aplican operaciones elementales convenientes a $A \cup I$, hasta obtener la matriz $I \cup A^{-1} \in \mathcal{M}_{n \cdot 2n}$:

$$I \cup A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Tal que:

$$A \otimes A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

DEMOSTRACIÓN: Se omite.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \det(A) = -5 \neq 0.$$

$$A \cup I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0'4 & 0'8 & -0'6 \\ 0 & 1 & 0 & 0'4 & -0'2 & -0'6 \\ 0 & 0 & 1 & 0'2 & -0'6 & 0'2 \end{pmatrix} = I \cup A^{-1}$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0'4 & 0'8 & -0'6 \\ 0'4 & -0'2 & -0'6 \\ 0'2 & -0'6 & 0'2 \end{pmatrix}.$$