Universidad de Guanajuato

FIMEE
Facultad de Ingeniería Mecánica Eléctrica y Electrónica

Materia: Circuitos Eléctricos

Tema: Circuito RL

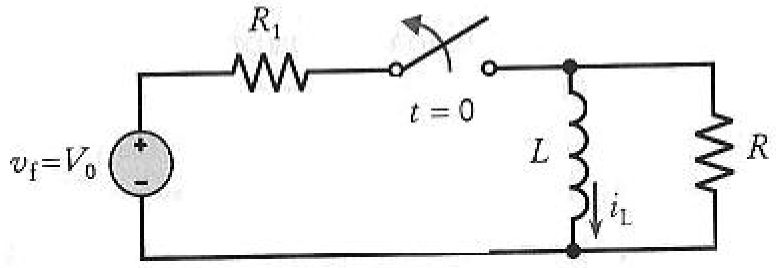
Alumnos:
Casanova Arteaga Ramses
Trovamala Jandette Miguel

30 de Agosto de 2007, Salamanca Gto.

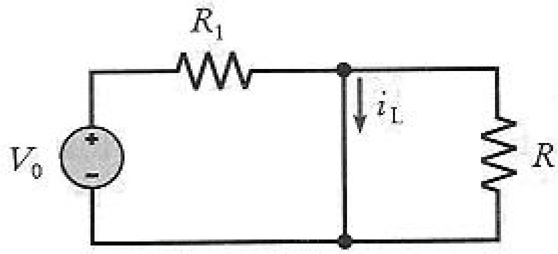
Circuito RL simple

El objetivo es obtener la respuesta de un circuito resistor-inductor libre de fuentes; es decir, la respuesta natural.

La respuesta natural de un circuito depende únicamente del almacenamiento interno de energía del circuito, y no de fuentes externas.



Por ejemplo el circuito anterior, cuando el interruptor esta cerrado el inductor conduce una corriente constante y equivale a un corto circuito.

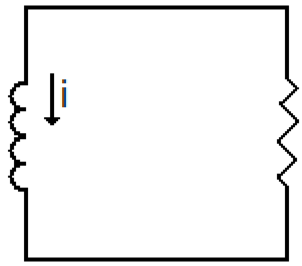


Por lo tanto

$$i_L(0\ ) = \frac{V_o}{R_1}$$

Cuando el interruptor se abre es cuando se da la respuesta natural del circuito por el hecho de que a partir de ese momento la fuente no tiene ninguna repercusión en el desarrollo del circuito y es cuando se ve el efecto de la energía almacenada en el circuito.

Ahora para el circuito; después de simplificar el circuito y planteando LKV para $t \geq 0$



$$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=0$$

$$\frac{di_L}{dt}+\frac{R}{L}i_L=0$$

Esta última es una ecuación diferencial de primer orden con coeficientes constantes y su forma general es:

$$\frac{dx}{dt}+ax=0$$

Donde: $a=\frac{R}{L}$; $x=i_L$

En ingeniería Eléctrica a esta ecuación se le conoce como ecuación sin fuentes

Para determinar la variable dependiente i en función del tiempo contamos cos tres métodos básicos:

Separación de variables
Solución exponencial supuesta
Operadores diferenciales

Estos métodos no son los únicos pero si los que simplifican mas el desarrollo de estas ecuaciones.

<u>Separación de variables</u>

Empezando con la ecuación general

$$\frac{dx}{dt} + ax = 0$$

Y reacomodando

$$\frac{dx}{dt} = \quad ax$$

$$\frac{dx}{x} = \quad a\,dt$$

E integrando

$$\int \frac{dx}{x} = \quad a \int dt$$

$$\ln x = \quad at + k$$

Donde k es una constante de integración que se determinara con las condiciones iníciales de i y por comodidad para resolver la ecuación se pone k como

$$i_L(0\ \ ) = \frac{V_o}{R} = I_o \qquad ; k = \ln I_o$$

$$\ln i_L = \quad at + \ln I_o$$

$$\ln i_L \quad \ln I_o = \quad at$$

$$\ln \frac{i_L}{I_o} = \ at$$

$$\frac{i_L}{I_o} = e^{\ at}$$

$$i_L = I_O e^{\ at}$$

$$i_L = I_O e^{\ Rt/L}$$

<u>Solución exponencial</u>

$$\frac{dx}{dt} + ax = 0$$

Solución supuesta: $x = Ae^{st}$

$$\frac{d(Ae^{st})}{dt} + aAe^{st} = 0$$

$$sAe^{st} + aAe^{st} = 0$$

$$(s+a)Ae^{st} = 0$$

Para que se cumpla la ecuación se tiene que $(s+a)=0$ ya que de otra manera el término Ae^{st} tendría que ser igual a 0, que es la solución trivial, y se obtendría $x=0$ para todo tiempo; por lo tanto:

$$s = \ a$$

De la solución propuesta $x = Ae^{st}$, tenemos que $x = Ae^{\ at}$

Retomando

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0$$

Para la solución: $i=Ae^{st}$

$$\frac{di}{dt}=sAe^{st}$$

$$sAe^{st}+\frac{R}{L}Ae^{st}=0$$

Aplicando la ecuación $s \quad a=0$

$$s+\frac{R}{L}=0 \quad ; s= \quad \frac{R}{L}$$

$i=Ae^{\quad Rt/L}$ donde A corresponde a las condiciones iníciales; por lo que, para inductores $A=i(0)$.

$$A=\frac{V_o}{R_1}$$

Por lo tanto, obtendremos

$$i=\frac{V_o}{R_1}e^{\quad Rt/L}$$

De lo anterior podemos concluir que ambos métodos llegan a la misma ecuación, y que la elección de uno u otro, en circuitos RL simple dependerá del criterio personal.

Respuesta de un circuito RL

El circuito RL se puede describirse con la ecuación

$$\frac{dx}{dt}+ax=0 \quad \text{con solución;} \quad x=Ae^{at}$$

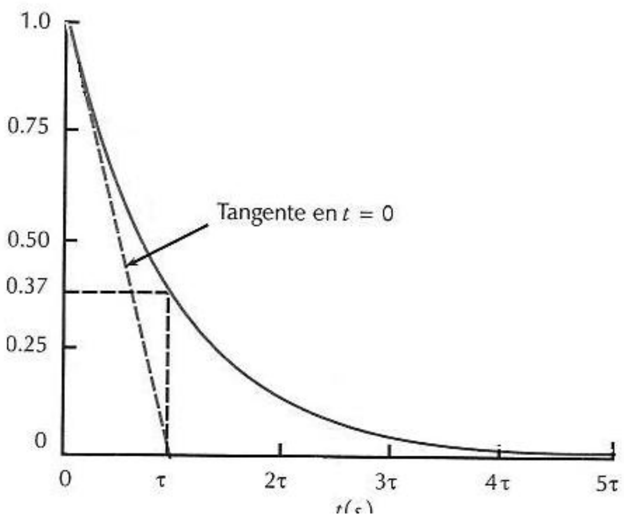
Pero esta solución tan bien se puede escribir de la forma:

$$x=Ae^{t/\tau} \qquad \text{Siendo: } \tau=\frac{1}{a}$$

La constante τ se llama constante de tiempo del circuito con unidades en segundos. También se puede ver que:

$$\tau=\frac{L}{R}$$

Si se grafica la solución del circuito se ve que tendrá una grafica exponencial decreciente donde tendrá los valores $e^{t/\tau}$ para $t=n\tau$ como se muestra en la figura.



Se ve en la figura que la respuesta del circuito estará en funciona de la magnitud R/L y que después de $t = 5\tau$ la respuesta es menor del 1% de su valor inicial, donde podemos decir que a alcanzado su valor final. Como la respuesta es breve y transitoria se le suele llamar “respuesta transitoria”
La respuesta transitoria es una respuesta temporal que desaparece con el tiempo.

Bibliografía:

Hayt – Kemmerly
Análisis de Circuitos en Ingeniería
Quinta Edición, McGraw Hill

Dorf / Svoboda
Circuitos Eléctricos
Tercera Edición, Alfaomega Grupo Editor

Dennos G. Zill
Ecuaciones Diferenciales
Sexta Edición, Thomson Editores