# La Conjetura de Poincaré y Grigori Perelman.

Autor: Joaquín González Álvarez - j.gonzalez.a@hotmail.com


## Resumen

*Se presenta una reseña de la historia y fundamento de la Conjetura de Poincaré así como ciertas reflexiones sobre su solución por Grigori Perelman. Ademos se realiza un detallado análisis sobre la ecuación diferencial del Flujo de Ricci.*


## Introducción

La comunidad matemática mundial y en menor medida la física, se conmovió ante la noticia en el 2002, de que un matemático ruso, conocido sólo en un pequeño círculo de especialistas había resuelto uno de los problemas mas famosos de la historia de las matemáticas, planteado en 1904 por el gran matemático, físico y filósofo francés Henri Poincaré, sin que hasta ahora, casi un siglo después, nadie había podido resolver aunque fueron muchos los que lo intentaron.
La Conjetura de Poincaré, como se conoce el famoso problema, ha sido resuelta por el matemático ruso de origen judío Grigori Perelman. Antes que Perelman, se acercaron a la resolución y contribuyeron significativamente a la definitiva, dos eminente matemáticos, R.S, Hamilton y B. Thurston, . Hamilton propició la utilización para el tratamiento del problema, del llamado Flujo de Ricci, del cual se realiza un detenido análisi en el rabajo que aquí se presenta. Perelman en su informe reconoce la contribución de Thurston y de Hamilton, especialmente de este último, la correcta utilización del Flujo de Ricci.
Hamilton fue uno de los mas prodigos en elogios hacia el trabajo de Perelman.
En el trabajo que aquí presentamos además de realizar una bresve alusión a lo que es la Topología, y después de algunos detalles históricos de la Conjetura, de Henri Poincaré y de Grigori Perelma,

se da cuenta de los aspectos teóricos del Flujo de Ricci utilizndo un mínimo de la matemática necesaria para una mejor comprensión de lo que se espone. .

**Desarrollo.**

Grigori Yaklevich Perelman, es uno de los mas prestigiosos matemáticos de la actualidad, pero de tal cosa sólo tienen conocimiento los especialistas en una rama de las menos tratadas de la ciencia en cuestión como es el caso de la Topología.

La Topología, también conocida como Analysis Situs, es una variante de la geometría en la que se consideran como equivalentes dos figuras por el hecho de que los puntos que conforman una de ellas pueden ponerse en correspondencia continua uno a uno con los de la otra aunque una aparezca como reproducción distorsionada de la otra. De figuras así relacionadas se dice que son topológicamente equivalentes u homeomórficas. Esas figuras parecen como si una de ellas hubiera sido dibujada en una lámina de goma y la otra fuera el resultado de deformar arbitrariamente la lámina de goma.

Por lo explicado una circunferencia y un cuadrado son topológicamente equivalentes.

Una circunferencia y cualquier figura topológicamente equivalente con ella divide al espacio en una región interior y una exterior. Un anillo o sea la figura limitada por dos circunferencias concéntricas tiene una región interior (el anillo propiamente dicho) y dos exteriores. A la región exterior que queda dentro del anillo y a espacios similares a éste, en topología se les llama agujeros u orificios. A las figuras sin agujeros se les llama simplemente conexas, a las que tienen agujeros se les llama múltiplemente conexas. Figuras simplemente conexas no pueden ser topológicamente equivalentes con figuras múltiplemente conexas. En tres dimensiones por razones análogas a las expuestas la esfera es simplemente conexa y equivalente a otra figura tridimensional simplemente conexa como pudiera ser un cubo o dado.

Sobre estos temas de gran importancia en física y otras disciplinas, es destacado investigador el matemático ruso Grigori Perelman el cual se ha especializado en transformaciones topológicas conocidas como Flujo de Ricci. Además de sus trabajos en San Petersburgo ha realizado relevantes estudios en universidades norteamericanas. En el 2002 anunció al mundo haber resuelto el quizás mas importante problema matemático del milenio, conocido como Conjetura de Poincaré, según la cual todas las estruturas compactas, simplemente conexas, esto es, que cualquier lazo cerrado, dibujado en ellas puede constreñirse hasta un punto sin abandonar la estructura, son homeomórficas de un ente geométrico llamado triesfera.
Cierta analogía formal aunque no muy precisa que me parece advertir enttre la expresión del Flujo de Ricci :
$R=-1/2\ \partial_t\ g$ (R tensor de curvatura de Ricci relacionado con el lapalaciano $\Delta$ y g tensor métrico. Obvio subíndices de R y g por agilizar procesamiento del texto.) y la ecuación diferencial de onda electromagnética, y el hecho que relacionen campos con curvaturas y espacio-tiempo, me hace pensar que quizás especialistas en el tema pudieran encontrar en ésto, aportes al empeño teórico de unificación de las fuerzas gravitatorias y electromgnéticas soñado por Einstein y Kaluza. También advierto una analogía formal entre la ecuación temporal de Schroedinger y la que he presentado del Flujo de Ricci igualmente una ecuación diferencial no-lineal del tipo parabólico. . Si en ésta realizamos la sustitución que encontrmos en el desarrollo de la Teoría General de la Relatividad:
$R=1/c^2\Delta\varphi$ donde $\varphi=-c^2/2(g+1)$, R tensor de curvatura de Ricci, g componente de tensor métrico, $\varphi$ potencial gravitatorio, tendremos la siguiente expresión para el Flujo: $\Delta g=\partial tg$ que es análoga a la ecuación temporal de Schroedinger lo cual motiva a pensar en una solución para la ecuación del flujo igualmente análoga:g=const.exp1/2m(Et-**pr**) donde E energía y **p** momentum. La solución ondulatoria g quedaría relacionada con la curvatura de Ricci por la expresión: $R=-1/2\Delta g$ y de esa forma también

tendríamos una relación cuántico-relativista en el contexto de geometrización.
Indicaré una forma de demostrar la relación antes utilizada entre el flujo de Ricci y el lapalaciano del potencial. Las ecuaciones de la TGR las mostraré de la forma siguiente. Las ecuaciones de la TGR pueden escibirse así:
$R=8\pi k/c^4(Tik-1/2gT)$ donde T tensor energía impulso que lleva implícita la masa por lo que en esa expresión de R se evidencia la relación curvatura- masa que estipula la TGR.
Realizando la sustitución $T=-\mu c^2$ y $g=1$, además por la relación antes vista de g en función de $\wp$ se llega a
$R=(4\pi k/c^2)\mu$ y aplicando. $R= \Gamma x$ derivada respecto a x del símbolo de Christoffel que representa intensidad de campo de modo que por las igualdades anteriores se tiene $R=1/c^2\Delta\varphi$ que es la relación que queríamos demostrar la cual nos sirvió para llegar a una ecuación que mostrara el carácter de ecuación diferencial no-lineal parcial tipo parabólica del Flujo de Ricci.

**Soy de la opinión al interpretar las conclusiones de Perelman en la solución de la Conjetura, de que la superficie del Universo "aparece" a cierta escala como una estructura la cual en cada punto luce ser un espacio euclideo (en inglés: manifold), pero que en una mas cercana visualización nos mostraría cambios en la topología y la superficie dejaría de ser suave y se presentaría discreta,surgiendo como una espuma lo cual interpretamos debida a las fluctuaciones cuánticas en el espacio-tiempo fundamentada por el Principio de Heisenberg (aspectos no mencionados en estos términos en la literatura sobre la Conjetura a la que he podido acceder) . En su solución de la Conjetura, Perelman maneja el Flujo de Ricii para sortear de forma que pudiera calificarse de "quirúrgica", las singularidades posibles que a la postre muestra a la triesfera y posible forma del Universo, como homeomórfica con toda estructura compacta simplemente conexa. El llamar quirúrgico al procedimiento descrito quizás sea una metáfora para el hecho de que la aparición y aniquilación de partículas y antipartículas producto de las fluctuaciones, Perelman lo muestre como una supresión teórica del impedimento de que en la estructura los lazos cerrados puedan constreñirse hasta puntos. ¿Alguna analogía con la intención de la Teoría de las Cuerdas de ignorar u ocultar las singularidades y posibles desgarramientos del tejido espacio-temporal a nivel subplanckiano representada mediante los modelos de Calabi-Yau?, Una última reflexión al respecto: por lo que he podido conocer mediante lo aparecido en Internet y sobre todo en el magnífico libro "The Poincaré Conjecture", de Donal O´Shea, no se hace mención cuando se trata la forma del Universo, a la expansión y posible futura contracción del mismo.**

La comunidad científica ha reconocido los méritos indiscutibles de Grigori Perelman al que consideran un genio y otorgaron la Medalla Fields en el XXX Congreso de la Unión Matemática Internacional.

Sin embargo, Perelman de 40 años, al que se le conoce un carácter muy especial, , rechazó un premio al que se considera como el

Nobel de las Matemáticas, el cual iba a ser entregado por el Rey de España y anunció que rompía sus relaciones con la comunidad matemática, se supone que por estar disgustado por el hecho de que algunos aún discuten sobre lo acertado o no, de su solución a la Conjetura de Poincaré. Matemáticos destacados como el norteamericano John Ball, trataron de disuadirlo de su drástica decisión, pero sin lograrlo.

Quizás una de las causas de la actitud asumida por Perelman, fue el disgusto de conocer como algunos matemáticos especializados en el tema de la Conjetura, alegaron haber resuelto el famoso problema antes que él. Tal es el caso de Shing-Tung Yau, nacido en Shan-Tuney, China, pero desarrollado gran parte de su trabajo en EstadosUnidos, el cual se le conoce por sus aportes a la Teoría de las Cuerdas. Junto con Eugeno Clabi, es autor de los modelos de espacio-tiempo conocidos como Formas de Calabi-Yau, los cuales sirven como maquetas para visualizar los presupuestos de la Teoría de las Cuerdas, Alegó que el ya había con anterioridad resuelto la Conjetura, pero que tal hallazgo no despejaba la duda sobre la forma del espacio. No obstante  Yau reconoció en una entrevista de prensa el talento de Grigori Perelman.

Desde que en el 2002, Grigori Perelman, dio a conocer que había resuelto el famoso problema de la Conjetura de Poincaré, se ha suscitado entre quienes tienen cierto grado de preparación matemática, gran interés en conocer, detalles de en que consiste el tal problema. Pero es el caso que la literatura , a un nivel como el de los artículos del propio Perelman, disponibles en Internet, resulta muy difícil de entender, para quienes no poseen conocimientos suficientes de las disciplinas implicadas en el tema de la conjetura, tales como Topología y Geometría Difeencial. Pero aspectos fundamentales del tema, como lo es el Flujo de Ricci, éste se presenta como una ecuación diferencial en derivadas parciales análoga a conocidas como la del Calor, la temporal de Schrodinger, y otras del mismo tipo parabólico. Para aquellos que en sus carreras universitarias si bien recibieron cursos hasta de Cálculo III y Ecuaciones Diferenciales, pero no Teoría General de la Relatividad

(TGR), al no conocer sobre el Tensor de Ricci, no advierten una ecuación diferencial en la expresión habitual del Flujo de Ricci. En este trabajo intento en lo posible, mostrar el carácter de ecuación diferencial del Flujo de Ricci a partir de expresiones tomadas de la TGR. Analizo también, en el mismo contexto, la analogía entre la ecuación que nos ocupa con otras importantes en física.
El Flujo de Ricci suele presentarse así:

$$gt = --2R \qquad (1)$$

donde R tensor de Ricci y g componente del tensor geométrico, en los cuales omito los subíndices tensoriales para agilizar el procesamiento del texto.
Tomadas de la TGR, utilizo las siguientes relaciones como ya antes hice y repito por su importancia,

$$R=1/c^2\,\Delta\varphi \quad (2) \qquad y \qquad g=-1-2\varphi/c^2 \quad (3)$$

para llegar a expresar el Flujo en la forma siguiente:

$$\Delta\, g = gt \qquad (4)$$

la cual al aparecer un operador diferencial como el laplaciano, ya muestra la condición de ecuación diferencial del tipo parabólico con lo cual ya obtenemos uno (el principal) de nuestros objetivos.
Por lo general en la literatura al uso, se recalca la analogía del Flujo de Ricci con la ecuación del Calor la cual suele expresarse en la siguiente forma:

$$\Delta T \qquad = c//kTt$$

expresión en la cual se advierte la anlogía con la que hemos encontrado para el Flujo si analogmos c/k con 1. Esta inusual analogía con un número, la utilzaremos en lo que sigue para mostrar otras analogías.

Ahora ya es fácil mostrar la analogía de (4) con ecuaciones como la temporal de Schroedinger:

$$\Delta\psi = -4\pi mi\psi$$

cuya solución es $\psi$ = Cexp (-2$\pi$i/h(Et- **p.r**)). Continuando con la analogía podemos tomar como solución de (4) la análoga a esta última, la cual tendrá esta forma: g = Dexp (-1/2m (Et-**p.r**) donde se ha anlogado -4$\pi$mi con 1.

Para ambas soluciones hemos representado por C y D, las respectivas constantes de integración las cuales se determinarán de las convenientes condiciones iniciales.

El Flujo de Ricci expresado en la forma (4) sólo es analogable con ecuaciones diferenciales parciales del tipo parabólico, lo cual me ha llevado a pensar en buscar una especie de ampliación de (4) que nos permita analogarla con ecuaciones del tipo elíptico.

Primero presentaré una ecuación de tipo elíptico, la conocida ecuación de onda, la cual representaré de esta manera:

$$\Delta y = -1/v^2\ ytt \qquad (5)$$

donde el laplaciano es en este caso unidimensional, y la elongación y v la velocidad de propagación.. Como se sabe, la soluvión de (5) es: y= Aexp(i(wt-kx)) con lo que $\Delta y=-k^2y$ y $ytt=k^2v^2y$ que puestos en (5) confiman lo dicho.

Procedimiento análogo pudo haberse seguido con la ecuación de onda electromagnética tambíen elíptica y no lineal la cual manteniendo la notación utilizada la repeesentamos así:

$$\Delta f = n^2/c^2\ ftt$$

donde se toma como un comodín o joker para representar, según el caso, al campo eléctrico o el magnético. En este caso la analogía con el Flujo lo realizamos analogando el coeficiente en el segundo miembro con 1.

Veamos ahora como puede llegarse a una expresión que pudiera analogarse con (5) como el Flujo de Ricci se analogó co la Ecuación de Schcroedinger. Para ello analogamos y con g y $-1/v^2$ con 1 por lo cual obtenemos la expresión:

$$\Delta g = gtt \qquad (6)$$

Ahora mediantte (2) y (3) llego a $\Delta g=-2R$ que puesto en (6) da:

$$gtt = -2R \qquad (7)$$

muy parecida a (1). A la ecuación (7) a la cual he llegado, sugiero llamarla Extensión del Flujo de Ricci y que debidamente modificada en forma similar a (6), podría generalizarse para los tres tipos de ecuaciones diferenciales parciales. El Flujo Generalizado se presentaría así:

$gti = \Delta ng$ donde i=1 o 2 n= número de dimensiones.

**Conclusiones**

Como ha podido verse además de presentar el componente histórico y conceptual de lo esencial relacionado con la Conjetura de Poincaré, he dedicado especial atención a mostrar el carácter de ecuación diferencial en derivadas parciales no lineal del tipo parabólico de la ecuación que expresa al Flujo de Ricci, motivado por el hecho cierto de que quienes se acercan al tema en cuestión.sin conocimientos especializados en Topología y Geometría Diferencial así como tampoco en TGR, no veían en la sumamente escueta expresión con que suele representarse al Flujo indicios de una ecuación que respondiera a las caracteríticas señaladas no obstante haber cursado en su formación universitaria avanzados cursos de Cálculoy Ecuaciones Difderenciales. En ese contexto introdujimos algunas analogías formales del Flujo con importantes ecuaciones de la fíisica tales con las de Schroedinger, las de las ondas, así como la del calor que es la mas socorrida para comparar con la del Flujo. Por último y sólo como algo curioso sin intención de sugerir su uso científico,aunque si quizás el didáctico, hicimos una digresión acerca de una posible generalización a otros tipos de escuaciones y para otro número de dimensiones, de la expresión del Flujo de Ricci.

**Bibliografia**

Behnke,H., F. Bachmann, et alt.1987.Fundanentals of Mathematics. The MIT Press. London.
Landau, L. y E.Lifshitz. 1968.Teoría Clasica de los Campos..Pergamon Press. New York.
O´Shea, D.2007 The Poincaré Conjecture. Walker and Company. New York.1984.

Duncan, R. y M. Weston-Smith. La Enciclopedia de la Ignorancia. Fondo de Cultura Económica. México. 1996.
Greene, B. The Elegant Universe. Vintage Books. New York. 2000.

Landau, L. y E. Lifshitz.Teoría Clásica de los Campos. Pergmon Press.1962.
O´Shea, D, The Poincaré Conjecture. Walker and Company. New York. 2007

**Autor:**
Joaquín González Álvarez
j.gonzalez.a@hotmail.com

Graduado en Enseñanza Superior de Fícica y de Optometrista en la Universidad de la Habana.
Profesor Universitario de Física (Jubilado).
Autor de varios libros de texto y de divulgación de su especialidad.
Ha publicado multitud de artículos de su especialidad en revistas, periódicos, la radio y la televisión en Cuba, España, México y Nicaragua.
Es Miembro de Mérito de la Sociedad Cubana de Física..