

Coordenada Radial Comóvil para una Membrana

A. Moreno. S

Universidad Nacional de Colombia
Observatorio Astronómico Nacional
Bogotá D. C, Colombia.
amorenosa@unal.edu.co

J. M. Tejeiro. S

Universidad Nacional de Colombia
Observatorio Astronómico Nacional
Bogotá D. C, Colombia.
jmtejeiros@unal.edu.co

16th June 2008

Abstract

We study the cosmology on one brane, in the frame the model of Randall-Sundrum, show relations for comoving radial distance coordinate, in this relations we make changes of parameters for obtain diferents curves.

1 Introducción

Dentro del marco de las teorías convencionales permanecen muchos interrogantes sin respuesta. Por qué existen tres dimensiones espaciales y no 4, 5 o 15?, por qué el valor de la constante cosmológica es tan pequeño?, que sucedió realmente en el Big-Bang?, estas y muchas otras cuestiones surgen de la observación y del análisis de los datos recolectados en los últimos tiempos. Vivimos en un universo de, aparentemente, una dimensión temporal y tres dimensiones espaciales. Puede ser, sin embargo, que el universo tenga realmente, un espacio de alta dimensionalidad, solamente que nos encontramos limitados en nuestra capacidad para experimentar y comprender todas estas dimensiones.

El modelo de universo membrana es una construcción que involucra dimensiones extras, bajo algunas consideraciones físicas, estos modelos ofrecen algunas novedosas e interesantes perspectivas en la explicación de algunos aspectos del universo observable. Varios autores con-

sideran la posibilidad de que almenos una de las dimensiones extras pueda ser extendida, contrario a lo que se interpretaba antes, en la cual la interacción gravitacional tiene lugar en todo es espacio en tanto que las otras interacciones quedan restringidas a las dimensiones convencionales, ello permitiría probar en los colisionadores de partículas a energías de 1 TeV, posibles evidencias de las dimensiones extras.

Recientemente, varios autores e investigadores han mostrado que para geometrías no factorizables en cinco-dimensiones¹, allí existen estados simples, acotados sin masa, en paredes de dominio o tre-branes. Estos, estados acotados son el modo cero de la reducción dimensional de Kaluza-Klein y corresponden al graviton cuadrimensional. El marco de este escenario es un espacio cinco-dimensional Anti-d' Sitter (bulk) con una tri-brane, donde los campos de materia están confinados y la gravedad Newtoniana se recupera a grandes distancias[1].

Basicamente, los modelos de membranas o brane-word, consideran un espaciotiempo de altas dimensiones, con una topología particular, llamado el bulk (volumen), en el cual las hipersuperficies (subvariedades) constituyen las brane o membranas, de tal forma que, en los modelos de brane, el universo observable descrito en

¹Geometrías en las cuales se considera que la métrica depende de todas las coordenadas de las dimensiones adicionales.

buena aproximación por el modelo estándar de la cosmología, queda restringido a la brane, en la cual las interacciones gauge actúan, en tanto que la interacción gravitacional se hace presente en todo el espaciotiempo.

Dentro de los varios modelos de brane o membranas, tenemos uno en particular, el modelo Randall-Sundrum, el cual consiste en un espaciotiempo Anti-de Sitter de cinco-dimensiones, de máxima simetría espacial, con constante cosmológica negativa; el cual en principio no parece un modelo prometedor, pero ha tenido un gran impacto en teoría de cuerdas y cosmología, asumiendo que la gravedad actúa sobre una brane de tensión constante sumergida en un espaciotiempo anti-de Sitter de cinco dimensiones. La motivación original para Randall-Sundrum fue la solución del problema de jerarquías de la física de altas energías, mediante una consideración distinta. En el primer modelo introdujeron dos branes con tensión opuesta, sumergidas en un espaciotiempo cinco-dimensional con constante cosmológica negativa. Debido a un factor en el tensor métrico, las partículas se localizan en la brane de tensión negativa, adquiriendo una gran masa, en comparación a la escala fundamental de masas, pero la cosmología sobre esta brane, es insatisfactoria, porque la densidad de energía de la materia presente en la brane debe ser negativa, violando la condición de energía débil. En el segundo modelo propuesto, únicamente se considera una brane, de tensión positiva y la dimensión extra se hace infinita, siendo consistente este modelo con experimentos gravitacionales actuales, prediciendo correcciones al potencial gravitacional Newtoniano a cortas distancias, como también algunas desviaciones de la evolución estándar del Universo, como por ejemplo, edad del Universo o, abundancia de elementos livianos, por ello el interés de investigar y desarrollar estos modelos[2,3]

En el paradigma braneworld, se muestra las expresiones correspondientes para la coordenada de distancia radial comóvil, de igual forma se muestran las correspondientes gráficas y su com-

paración con los resultados obtenidos de la cosmología estándar.

2 Marco Teórico

En esta sección se mostrara el fundamento teórico que subyace a la teoría de brane-world, se muestra la ecuación de campo efectiva sobre una membrana, por simplicidad el volumen espaciotemporal se asume que tiene cinco dimensiones, sin asumir ninguna condición especial sobre el bulk. Posteriormente, se asumirá la simetría Z_2 y se confinara el tensor momentum-energía de la materia sobre la brane. En el escenario brane-world, nuestro mundo 4-dimensional es descrito por una pared de dominio 3 – *brane* $(M, e_{\mu\nu})$, en un espaciotiempo de cinco dimensiones *bulk* (V, g_{uv}) , se denota el vector normal unitario a la brane M por n^α , el vector tangente a curvas contenidas en la hipersuperficie por $e_\alpha^a = \left(\frac{\partial x^a}{\partial x^\alpha}\right)$, y la métrica inducida sobre M por $e_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$. El punto de partida formal es la ecuación de Gauss:

$$R_{uvps}e_\alpha^u e_\beta^v e_\gamma^p e_\delta^s = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + K_{\alpha\gamma}K_{\beta\delta} - K_{\alpha\delta}K_{\beta\gamma} \quad (1)$$

y para obtener las consideraciones dinámicas del modelo se hace uso de la ecuación de Codazzi:

$$R_{ab}n^b e_\alpha^a = \partial_\nu K_\alpha^\nu - \partial_\alpha K \quad (2)$$

Realizando un proceso algebraico de contracción de índices se obtiene:

$$R_{\beta\delta} = R_{vps}^u e_u^p e_\beta^v e_\delta^s + K K_{\beta\delta} - K_\delta^\alpha K_{\beta\alpha} \quad (3)$$

Considerando la métrica inducida, sobre la hipersuperficie, se puede obtener $e_u^p = g_u^p - n^p n_u$, donde se puede identificar e_u^p como la métrica inducida, para obtener:

$$R_{\beta\delta} = R_{vs}e_\beta^v e_\delta^s - R_{vps}^u n_u n^p e_\beta^v e_\delta^s + K K_{\beta\delta} - K_\delta^\alpha K_{\beta\alpha} \quad (4)$$

Tomando el tensor de Einstein en cuatro dimensiones, tenemos:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}e_{\alpha\beta}R \quad (5)$$

De tal manera que a partir de la ecuación de Gauss contraída, se puede obtener el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, obteniéndose la siguiente expresión para el tensor de Einstein:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} = & G_{ab}e_{\alpha}^ae_{\beta}^b + \frac{e_{\alpha\beta}}{2}R_{\nu}^un_{\nu}n^{\nu} + \\ & KK_{\alpha\beta} - K_{\beta}^{\delta}K_{\alpha\delta} - \\ & \frac{e_{\alpha\beta}}{2}(K^2 - K^{\beta\delta}K_{\beta\delta}) - E'_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (6)$$

Donde $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$, $E'_{\alpha\beta} = R_{\rho\nu\gamma}^{\mu}n_{\mu}n^{\nu}e_{\alpha}^{\rho}e_{\beta}^{\gamma}$

Haciendo uso de la ecuación de campo de Einstein en cinco dimensiones:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \kappa^2 T_{ab} \quad (7)$$

y descomponiendo el tensor de Riemann en el tensor de curvatura de Weyl, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, podemos obtener la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} = & \frac{2\kappa^2}{3} \left[T_{ab}e_{\alpha}^ae_{\beta}^b + \left(T_{uv}n^un^v - \frac{T}{4} \right) e_{\alpha\beta} \right] \\ & + KK_{\alpha\beta} - K_{\beta}^{\delta}K_{\alpha\delta} - \\ & \frac{e_{\alpha\beta}}{2}(K^2 - K^{\beta\delta}K_{\beta\delta}) - E_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (8)$$

donde $E_{\alpha\beta} = C_{avb}^un_{\nu}n^ve_{\alpha}^ae_{\beta}^b$,

De la ecuación de Codacci y con la ecuación de Einstein 5-dimensional, se encuentra:

$$\partial^{\nu}K_{\nu}^u - \partial^uK = \kappa^2 T_{ab}n^be_{\nu}^a \quad (9)$$

Hasta el momento no se ha asumido ninguna simetría ni forma particular del tensor momentum-energía. Asumiendo, desde ahora el escenario brane-world, tomamos por conveniencia una coordenada y adicional, de tal forma que la hipersuperficie $y = 0$ coincide con la brane-world y además se tiene la siguiente condición

$n_{\nu}dx^{\nu} = dy$, lo cual implica que $a^u = n^{\nu}\partial_{\nu}n^u = 0$, que es una condición sobre la coordenada en la dirección de la dimensión extra.

En forma genérica asumiendo, una métrica 5-dimensional, tenemos:

$$ds^2 = e_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} + dy^2 \quad (10)$$

Manteniendo el espíritu del brane-word en mente, tenemos que el tensor momentum-energía 5-dimensional, se puede escribir de la siguiente forma:

$$T_{uv} = -\Lambda g_{uv} + (\tau_{uv} - \lambda h_{uv})\delta(y) \quad (11)$$

donde, Λ es la constante cosmológica del espaciotiempo cinco-dimensional o volumétrico, λ es la energía del vacío de la brane, $\tau_{\mu\nu}$ es el tensor momentum-energía del universo sobre la brane. El parámetro λ se puede asociar con la tensión de la brane en 5-dimensiones.

Dentro del marco del brane-word, el tensor momentum-energía, solamente se manifiesta sobre la brane, por ello su carácter singular, el cual se representa mediante la función delta que aparece en la expresión anterior, en consideración de lo anterior, se encuentra la condición de frontera sobre la brane, que debe de cumplir la métrica inducida y la curvatura extrínseca, $[h_{\mu\nu}] = \text{Lim}_{y \rightarrow +0} e_{uv} - \text{Lim}_{y \rightarrow -0} e_{uv} = 0$, $[K_{uv}] = -\kappa^2 ((\tau_{uv} - \lambda e_{uv}) - \frac{1}{3}e_{uv}(\tau - \lambda))$.

Imponiendo la simetría Z_2 , con la brane como punto fijo, la simetría únicamente determina la curvatura extrínseca de la brane en términos del tensor momentum-energía:

$$\begin{aligned} K_{uv}^+ &= -K_{uv}^- = -\frac{1}{2}\kappa^2 [(\tau_{uv} - \lambda e_{uv}) \\ & - \frac{1}{3}e_{uv}(\tau - \lambda)] \end{aligned} \quad (12)$$

Sustituyendo esta ecuación en la expresión del tensor de Einstein, se obtiene la ecuación gravitacional 4D sobre la brane, y considerando la simetría Z_2 , la forma particular del tensor momentum-energía y las condiciones de frontera:

$$G_{\alpha\beta} = -\Lambda_4 e_{\alpha\beta} + 8\pi G_N \tau_{\alpha\beta} + \kappa^4 \Pi_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta} \quad (13)$$

donde $\Lambda_4 = \frac{1}{2}\kappa^2 (\Lambda + \frac{1}{6}\kappa^2 \lambda^2)$, $G_N = \frac{\kappa^4 \lambda}{48\pi}$, $\Pi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}\tau_{\alpha\gamma}\tau_{\beta\gamma} + \frac{1}{12}\tau\tau_{\alpha\beta} + \frac{1}{8}h_{\alpha\beta}\tau_{\gamma\delta}\tau^{\gamma\delta} - \frac{1}{24}e_{\alpha\beta}\tau^2$

La ecuación gravitacional de la brane describe la curvatura de ella en términos de su contenido de materia-energía, su energía de vacío, la constante cosmológica 5-dimensional, y de la curvatura extrínseca de la brane en el espacio 5-dimensional, este es el usual modelo de Brane-World Randall-Sundrum, desde el punto de vista covariante de las ecuaciones de campo. La anterior relación se puede reducir a la descripción estándar tomando el límite $\kappa \rightarrow 0$. Es importante notar que el hecho de haber introducido una dimensión adicional, nos conduce a una ecuación de campo modificada, en la cual aparecen dos términos adicionales, conocidos en la literatura como, el término de energía del vacío y de radiación oscura[4].

Para la condición de conservación de la energía tenemos $\partial^v T_{uv} = 0$, cuando tengamos campos escalares u otra clase de campos en el volumen, la afirmación anterior en general no es cierta, es decir que T_{uv} no se conserva, produciéndose un intercambio de energía-momentum entre la brane y el volumen. En el caso de que exista sólo una constante cosmológica en el volumen, no se daría tal intercambio de energía, Considerando la anterior expresión, encontramos que la identidad de Bianchi contraída $\partial^v G_{uv} = 0$, conduce nuevamente a que la proyección del tensor de Weyl, obedece la restricción $\partial^\nu E_{\mu\nu} = \frac{6\kappa^2}{\lambda}\partial^\nu \Pi_{\mu\nu}$, esto muestra que $E_{\mu\nu}$, se comporta como una fuente del tensor momentum-energía volumétrico.

3 Ecuación de Friedmann modificada

En cosmología las ecuaciones que permiten una interpretación y asociación directa con los parámetros observables, son las ecuaciones de Fried-

mann, de tal forma que en el marco del brane-world, es posible obtener tales ecuaciones, las cuales nos permitiran modelar e interpretar fenómenos y parámetros del universo observable. Tomando en consideración la isotropía y homogeneidad de nuestro universo, requerimos que (M^5, g_{ab}) contenga un subespacio 3-dimensional de máxima simetría $(V, \gamma_{\alpha\beta})$, de tal forma que se puedan obtener soluciones cosmológicas, por lo cual se formula el siguiente *ansatz*²:

$$ds_5^2 = -n^2(t, y)dt^2 + a^2(t, y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + b^2(t, y)dy^2 \quad (14)$$

donde, como se ha dicho anteriormente y es la dimensión extra, sin especificar cuando es compacta o extensa. Además, si nuestro universo es tomado para ser la hipersuperficie en $y = 0$, el factor de escala es simplemente dado por $a(t, y = 0)$, como en el modelo RS esta métrica no es factorizable.

De la ecuación de Einstein 4D, inducida sobre la brane $G_{\alpha\beta} = -\Lambda_4 e_{\alpha\beta} + 8\pi G_N T_{\alpha\beta} + \kappa^4 \Pi_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta}$, donde $\Pi_{\alpha\beta}$ se relaciona con el tensor momentum-energía, y $E_{\alpha\beta}$ es la corrección que aparece del tensor de Weyl en el volumen, que introduce una densidad de energía no local U , la cual surge del campo gravitacional en el volumen y en consideración del modelo Randall-Sundrum, con una brane localizada en $y = 0$, conduce a un formalismo en el cual se pueden obtener cantidades observables. Para determinar la ecuación de Friedmann se procede según lo anterior y considerando una métrica reparametrizada

$$ds^2 = -e^{2\beta(y,t)}dt^2 + e^{2\beta(y,t)}dy^2 + e^{2\alpha(y,t)}\gamma_{ij}dx^i dx^j \quad (15)$$

La métrica solo depende de t, y y es plana en el espacio 3D. Por simplicidad también se restringe α, β al caso de funciones pares de y , para esta métrica las componentes no-cero del tensor de Einstein son:

²Este *ansatz* corresponde al mismo que se consideró en el modelo Randall-Sundrum, y como ya se mencionó anteriormente permite obtener soluciones cosmológicas coherentes con el modelo estándar de la cosmología.

$$G_{00} = 3 \left[\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} - \alpha'' - 2\alpha'^2 + \alpha'\beta' \right] \quad (16)$$

$$G_{ij} = \delta_{ij} e^{2(\alpha-\beta)} [-2\ddot{\alpha} - 3\dot{\alpha}^2 - \ddot{\beta} + 2\alpha'' + 3\alpha'^2 + \beta''] \quad (17)$$

$$G_{44} = 3 \left[-\ddot{\alpha} - 2\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} + \alpha'^2 + \alpha'\beta' \right] \quad (18)$$

$$G_{04} = 3 \left[\beta'\dot{\alpha} + \alpha'\dot{\beta} - \dot{\alpha}' - \dot{\alpha}\alpha' \right] \quad (19)$$

Asumiendo que α, β son funciones suaves de $|y|$ y de t , se puede considerar $\alpha(y, t) = \hat{\alpha}(|y|, t)$ y $\beta(y, t) = \hat{\beta}(|y|, t)$, que representan funciones suaves en una vecindad de $|y|$, de tal forma que se puede demostrar lo siguiente:

$$\alpha_1(t) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\partial \alpha(y, t)}{\partial y} = \left[\frac{\partial \hat{\alpha}(|y|, t)}{\partial |y|} \right]_{|y|=0}, \quad \beta_1(t) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\partial \beta(y, t)}{\partial y} = \left[\frac{\partial \hat{\beta}(|y|, t)}{\partial |y|} \right]_{|y|=0}$$

Sustituyendo en $G_{00}, G_{04}, G_{ij}, G_{44}$, e introduciendo adecuadamente el tensor momentum-energía en la siguiente forma:

$$T_{\beta}^{\alpha} = \text{diag}[(-\rho, p, p, p, 0)e^{-\beta}\delta(y) + (\Lambda_B, \Lambda_B, \Lambda_B, \Lambda_B, \Lambda_B)] \quad (20)$$

donde ρ y p es la densidad de energía y presión de materia sobre la brane, Λ_B es la constante cosmológica volumétrica.

De tal forma que se puede encontrar una serie de ecuaciones que definen el acople dinámico entre los grados de libertad de la brane y el volumen.

Para $y = 0$, es decir sobre la brane, tenemos: $\alpha_1 = -\frac{\kappa^2 \rho}{6} e^{\beta(0, t)}$, $\beta_1 = \frac{\kappa^2 (2\rho + 3p)}{6} e^{\beta(0, t)}$. Para $y > 0$, es decir en el volumen o espacio 5D, tenemos:

$$\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} - \alpha'' - 2\alpha'^2 + \alpha'\beta' = -\frac{\kappa^2}{3} \Lambda_B e^{2\beta} \quad (21)$$

$$-2\ddot{\alpha} - 3\dot{\alpha}^2 - \ddot{\beta} + 2\alpha'' + 3\alpha'^2 + \beta'' = \kappa^2 \Lambda_B e^{2\beta} \quad (22)$$

$$-\ddot{\alpha} - 2\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} + \alpha'^2 + \alpha'\beta' = \frac{\kappa^2}{3} \Lambda_B e^{2\beta} \quad (23)$$

$$\beta'\dot{\alpha} + \alpha'\dot{\beta} - \dot{\alpha}' - \dot{\alpha}\alpha' = 0 \quad (24)$$

Debido a la consideración de suavidad de las funciones α, β , se puede realizar una expansión en serie de potencias de las mismas y haciendo uso del sistema acoplado, se logra determinar, a orden cero, la siguiente ecuación:

$$-\ddot{\alpha}_0 - 2\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\alpha}_0\beta_0 = \left(\frac{1}{3} \kappa^2 \Lambda_B + \frac{1}{36} \kappa^2 (\rho + 3p)\rho \right) e^{2\beta_0} \quad (25)$$

definiendo una nueva variable temporal \hat{t} , por $d\hat{t} = e^{\beta_0} dt$, el cual representa el tiempo propio cosmológico convencional, esto es el tiempo propio medido por observadores comóviles sobre la brane, se obtiene:

$$-\frac{d^2 \alpha_0}{d\hat{t}^2} - 2 \left(\frac{d\alpha_0}{d\hat{t}} \right)^2 = \frac{\kappa^2 \Lambda_B}{3} + \frac{\kappa^4 \rho (\rho + 3p)}{36} \quad (26)$$

Asumiendo que $\rho = \lambda + \rho_m$, $p = -\lambda + p_m$, donde λ es la energía del vacío o tensión sobre la brane, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & -\frac{d^2 \alpha_0}{d\hat{t}^2} - 2 \left(\frac{d\alpha_0}{d\hat{t}} \right)^2 \\ &= \frac{\kappa^2 \Lambda_B}{3} - \frac{\kappa^4 \lambda^2}{18} + \frac{\kappa^4 \lambda (3p_m - \rho_m)}{36} + \frac{\kappa^4 \rho_m (\rho_m + 3p_m)}{36} \end{aligned} \quad (27)$$

Con lo cual se puede encontrar una ecuación para H^2 , definida por $H^2 = \left(\frac{d\alpha_0}{dt}\right)^2$, se puede encontrar:

$$\begin{aligned} & \frac{d[H^2 e^{4\alpha_0}]}{d\alpha_0} \\ = & e^{4\alpha_0} \left[\frac{\kappa^4 \lambda^2}{9} - \frac{2\kappa^2 \Lambda_B}{3} + \frac{\kappa^4 \lambda (\rho_m - 3p_m)}{18} + \frac{\kappa^4 \rho_m (\rho_m + 3p_m)}{18} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

La ecuación anterior representa una ecuación lineal a primer orden para H^2 , si se considera el lado derecho como un término fuente que es una función de α_0 . Para solucionar la ecuación anterior, se reescribe la ecuación de conservación de energía, como $\frac{d\rho_m}{d\alpha_0} + 3(\rho_m + p_m) = 0$, lo cual implica

$p_m = -\rho_m - \frac{1}{3} \frac{d\rho_m}{d\alpha_0}$, sustituyendo este resultado en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{d[H^2 e^{4\alpha_0}]}{d\alpha_0} \\ = & e^{4\alpha_0} \left[\frac{\kappa^4 \lambda^2}{9} - \frac{2\kappa^2 \Lambda_B}{3} + \frac{\kappa^2 \lambda}{18} \left(4\rho_m + \frac{d\rho_m}{d\alpha_0} \right) + \frac{\kappa^4}{36} \left(4\rho_m^2 + \frac{d\rho_m^2}{d\alpha_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

Expresión que nos conduce a:

$$H^2 = \frac{\kappa^4 \lambda^2}{36} - \frac{\kappa^2 \Lambda_B}{6} + \frac{\kappa^4 \lambda \rho_m}{18} + \frac{\kappa^4 \rho_m^2}{36} + K e^{-4\alpha_0} \quad (30)$$

Donde K es una constante de integración que puede ser positiva o negativa, la expresión anterior representa la ecuación de Friedmann modificada, en una brane la ecuación para H^2 tiene una estructura diferente por tres razones. Primero existen dos términos adicionales que resultan de la tensión en la brane y de la constante cosmológica negativa en el volumen. Segundo, en adición al término normal proporcional a ρ_m existe un término proporcional a ρ_m^2 ,

llegando a ser despreciable si $\rho_m \ll \lambda$. Tercero, el término $K e^{-4\alpha_0}$ que surge solamente de condiciones iniciales, muestra un nuevo hecho cualitativamente distinto del escenario RS, como consecuencia de la reducción de $5D$ a $4D$ en la cual H^2 puede ser libremente especificado en algún tiempo inicial. Si se consideran las relaciones entre las constantes, se logra obtener una forma más natural para la ecuación de Friedmann:

$$\kappa^2 \lambda^2 = 6\Lambda_B, \quad \kappa^2 \lambda = 48\pi G, \quad \kappa_4^2 = 8\pi G, \\ \Lambda_4 = \frac{1}{2} \kappa^2 (\Lambda_B + \frac{1}{6} \kappa^2 \lambda^2), \quad U = \frac{1}{12} \kappa_4^4 \lambda^3$$

Según, las relaciones anteriores, se obtiene la ecuación de Friedmann modificada[5]:

$$H^2 = \frac{\kappa_4^2}{3} \rho_m + \frac{\kappa_4^2}{6\lambda} \rho_m^2 - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{2U}{\lambda \kappa_4^2} \quad (31)$$

4 Cosmología sobre una membrana con $\Lambda_4 \neq 0$

Si consideramos un modelo de membrana con constante cosmológica no despreciable $\Lambda_4 \neq 0$, obtenemos el siguiente sistema dinámico, análogo al que se encuentra en la cosmología estándar

$$\begin{aligned} \dot{R}^2 &= \frac{8\pi G \rho_m}{3} R^2 + \frac{8\pi G \rho_m^2}{6\lambda} R^2 + \frac{1}{3} \Lambda_4 R^2 \\ &+ \frac{U}{4\pi G \lambda} R^2 - k \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \ddot{R} &= -\frac{4\pi G R}{3} (3p_m + \rho_m) - \frac{8\pi G R \rho_m^2}{3\lambda} \\ &\left(\frac{3p_m}{\rho_m} + 2 \right) - \frac{U}{4\pi G \lambda} R + \frac{1}{3} \Lambda_4 R \end{aligned} \quad (33)$$

Ahora, si consideramos materia no relativista sobre la brane, es decir polvo sobre la brane $\rho_m = \rho_0 R^{-3}$, $p = 0$, se obtiene

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G \rho_0}{3R} + \frac{8\pi G \rho_0^2}{6\lambda R^4} + \frac{1}{3} \Lambda_4 R^2 + \frac{UR^2}{4\pi G \lambda} - k \quad (34)$$

5 Resultados Graficos

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G\rho_0}{3R^2} - \frac{8\pi G\rho_0^2}{3\lambda R^5} - \frac{UR}{4\pi G\lambda} + \frac{\Lambda_4}{3}R \quad (35)$$

en el cual podemos definir $\Omega_\Lambda = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2}$, $\Omega_0 = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2}$, $\Omega_U = \frac{U}{4\pi G\lambda H_0^2}$, $\Omega_\lambda = \frac{4\pi G\rho_0}{3\lambda H_0^2}$, junto con $\Lambda_4 = 3H_0^2\Omega_\Lambda$

obtenemos el sistema en términos de densidades

$$\dot{R}^2 = \frac{H_0^2\Omega_0}{R} + \frac{H_0^2\Omega_\lambda}{R^4} + H_0^2\Omega_\Lambda R^2 + H_0^2\Omega_U R^2 - k \quad (36)$$

$$\ddot{R} = -\frac{1}{2}\frac{H_0^2\Omega_0}{R^2} - \frac{H_0^2\Omega_\lambda}{\lambda R^5} - H_0^2\Omega_U + R H_0^2\Omega_\Lambda \quad (37)$$

considerando que para el tiempo presente se tiene $t = t_0$, $R_0 = 1$, $\dot{R}_0 = H_0$, se obtiene $k = H_0 [(\Omega_0 + \Omega_\lambda + \Omega_\Lambda + \Omega_U) - 1]$

de tal forma que la constante k se puede reemplazar en la expresión general para obtener

$$\dot{R}^2 = H_0^2\left[\Omega_0\left(\frac{1}{R} - 1\right) + \Omega_\Lambda(R^2 - 1) + \Omega_\lambda\left(\frac{1}{R^4} - 1\right) + \Omega_U(R^2 - 1)\right] \quad (38)$$

expresando la relación anterior en términos del corrimiento al rojo z , obtenemos

$$\dot{R}^2 = H_0(1+z)^{-1}[(1+z)^2(\Omega_0 z + 1) - \Omega_\Lambda z(z+2) - \Omega_U z(z+2) + \Omega_\lambda(1+z)^2(4z + 6z^2 + 4z^3 + z^4)]^{1/2} \quad (39)$$

Tenemos que $\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{R^2}\dot{R}$, y para la distancia coordenada radial comóvil tenemos $dr = -(1+z)dt$, se encuentra, la cual es reducible a la forma estándar[6]

$$r = \frac{1}{H_0} \int_0^r [(1+z)^2(\Omega_0 z + 1) - \Omega_\Lambda z(z+2) - \Omega_U z(z+2) + \Omega_\lambda(1+z)^2(4z + 6z^2 + 4z^3 + z^4)]^{-1/2} dz \quad (40)$$

Se muestran graficos comparativos para la distancia coordenada radial comóvil, según la expresión anterior. En cada figura se han dejado algunos parámetros fijos y otros se han variado, como muestra cada figura.

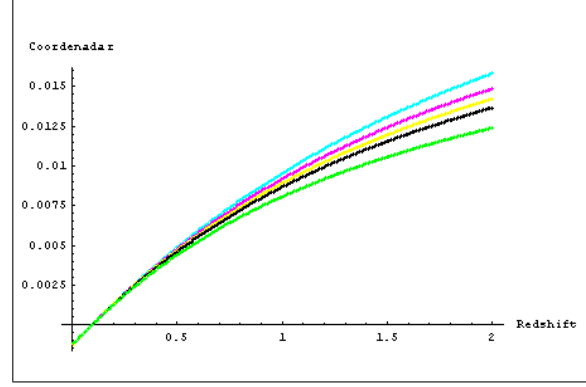


Figure 1: Coordenada radial comóvil estándar para diferentes valores de densidad de materia $\Omega_{m0} = 0.28$, $\Omega_{m0} = 0.40$, $\Omega_{m0} = 0.50$, $\Omega_{m0} = 0.60$, $\Omega_{m0} = 0.90$.

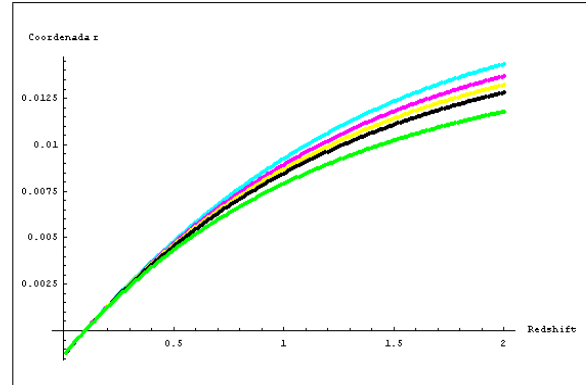


Figura 2: Coordenada radial comóvil con densidad de tensión y radiación oscura fija y diferentes valores de densidad de materia sobre la brana $\Omega_{m0} = 0.28$, $\Omega_{m0} = 0.04$, $\Omega_{m0} = 0.5$, $\Omega_{m0} = 0.6$, $\Omega_{m0} = 0.9$.

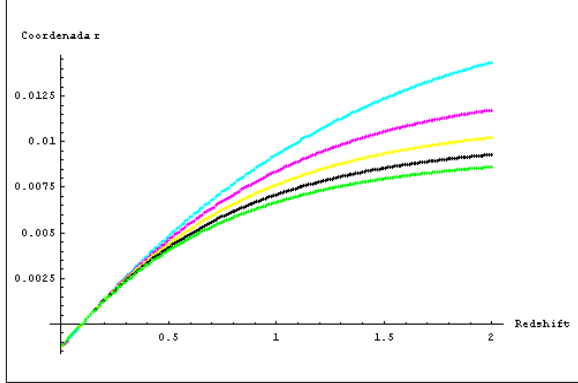


Figura 3: Coordenada radial comóvil con densidad de materia y de radiación oscura fijas y diferentes valores de densidad de tensión sobre la brane $\Omega_{\lambda 0} = 0.01$, $\Omega_{\lambda 0} = 0.05$, $\Omega_{\lambda 0} = 0.10$, $\Omega_{\lambda 0} = 0.15$, $\Omega_{\lambda 0} = 0.20$.

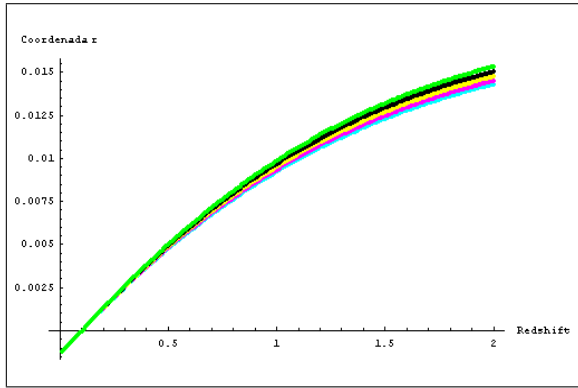


Figura 4: Coordenada radial comóvil con densidad de tensión y de materia fijas y diferentes valores de densidad de radiación oscura sobre la brane $\Omega_{U 0} = 0.01$, $\Omega_{U 0} = 0.05$, $\Omega_{U 0} = 0.10$, $\Omega_{U 0} = 0.15$, $\Omega_{U 0} = 0.20$.

6 Conclusiones

Se puede concluir, que la coordenada radial comóvil se torna más monótona para valores mayores en las densidades de materia, tensión o radiación oscura. Ello produce que para corrimientos al rojo grandes las distancias sean menores a las obtenidas en la cosmología estándar, pero

en el caso donde la densidad de radiación oscura se hace mayor, las distancias se harían mayores y ello suministraría una forma de probar la existencia de interacción de la brane con su bulk o viceversa. Igualmente, para corrimientos al rojo pequeños y diferentes valores de tensión se observa diferencias apreciables en las distancias, lo cual permitiría determinar el efecto de tensión sobre la membrana. También, se observa en la última figura que aumentando el valor del parámetro de densidad de radiación oscura, se hace mayor el valor de la coordenada radial, con poca sensibilidad, mientras que aumentando el valor del parámetro de densidad de tensión se hace menor el valor de la coordenada radial con mucha mayor sensibilidad. Estas diferentes variaciones son las que permiten dar explicaciones alternas a los resultados convencionales.

References

- [1] Martens, R., “Brane-World Gravity”, *Living Reviews in Relativity*, gr-qc/0101059
- [2] Randall, L., and Sundrum, R., “An Alternative to Compactification”, *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 4690-4693, (1999)
- [3] Randall, L., and Sundrum, R., “Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension”, *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 3370-3373, (1999)
- [4] Maeda, K., Mizumo., and Torii, T ., “Effective Gravitational equations on a brane world with indeced gravity”, *Phys. Rev. D*, **68**, 024033-1-8, (2003)
- [5] Éanna, É., S. H. Henry, Tye., and Ira Wasserman, “Cosmological expansion in the Randall-Sundrum brane world scenari”, *Phys. Rev. D*, **62**, 044039, (2000)
- [6] Malcolm S. Longair, “Galaxie Formation”, Springer 1998