

ECUACIONES DIFERENCIALES EN EL CONTEXTO DEL MATLAB

Carlos Enrique Núñez Rincón¹

Los matemáticos, en lugar de simplemente utilizar un método que parece funcionar, quieren hallar una justificación para el método y una serie de condiciones que garanticen que el método funciona.

Glenn Ledder

El presente artículo de corte divulgativo tiene como propósito hacer una *contrastación* entre la resolución usual de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), es decir la resolución empleando el Álgebra y el Cálculo, y la resolución operando los comandos del Programa de Cálculo Técnico Científico MATLAB.

Está dirigido al lector interesado en el tema, pero sobre todo a los alumnos que cursan la asignatura Matemática IV en las diversas Carreras de Ingeniería que configuran la Oferta Académica de la UNET.

Ecuaciones separables $g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$

Resolver $y' = 4 - y^2$. Es necesario expresar la ecuación en la notación de Leibniz, es decir $\frac{dy}{dx} = 4 - y^2$, ahora se lleva a la forma de variable separada, esto es $\frac{dy}{4 - y^2} = dx$

¹ El autor del artículo es Licenciado en Matemática, egresado de la Universidad de los Andes – ULA - Venezuela. Asimismo, es Magíster, y Doctor en Ciencias. Actualmente es Profesor en la Categoría de Titular, adscrito al Departamento de Matemática y Física de la Universidad Nacional Experimental del Táchira – Venezuela. cnunezr@gmail.com, cnunezr@cantv.net

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

luego

$$\int \frac{dy}{4-y^2} = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{4} \ln|2-y| + \frac{1}{4} \ln|2+y| = x + C \Rightarrow \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+y}{2-y} \right| = x + C$$

entonces, la solución es $\left| \frac{2+y}{2-y} \right| = e^{4x+4C} = e^{4x} e^{4C}$

luego, $\frac{2+y}{2-y} = \pm e^{4x} e^{4C}$, haciendo $A = \pm e^{4C}$, obtenemos $\frac{2+y}{2-y} = A e^{4x}$

por lo tanto, $y = 2 \frac{A e^{4x} - 1}{A e^{4x} + 1}$.

Consideremos, ahora, la condición inicial $y(0) = 1$, obtenemos

$$-\frac{1}{4} \ln|2-1| + \frac{1}{4} \ln|2+1| = 0 + C \Rightarrow C = \frac{1}{4} \ln(3)$$

entonces, la solución particular es $y = \frac{2(3e^{4x} - 1)}{3e^{4x} + 1}$.

Ahora, obtenemos la solución general y particular utilizando los comandos de MatLab, asimismo se representa gráficamente las soluciones (figura 1) y la de solución particular (figura 2).

```
>> pretty(solve('int(1/(4-y^2),y)=int(1,x)'))
      - 1/4 log(y - 2) + 1/4 log(y + 2)

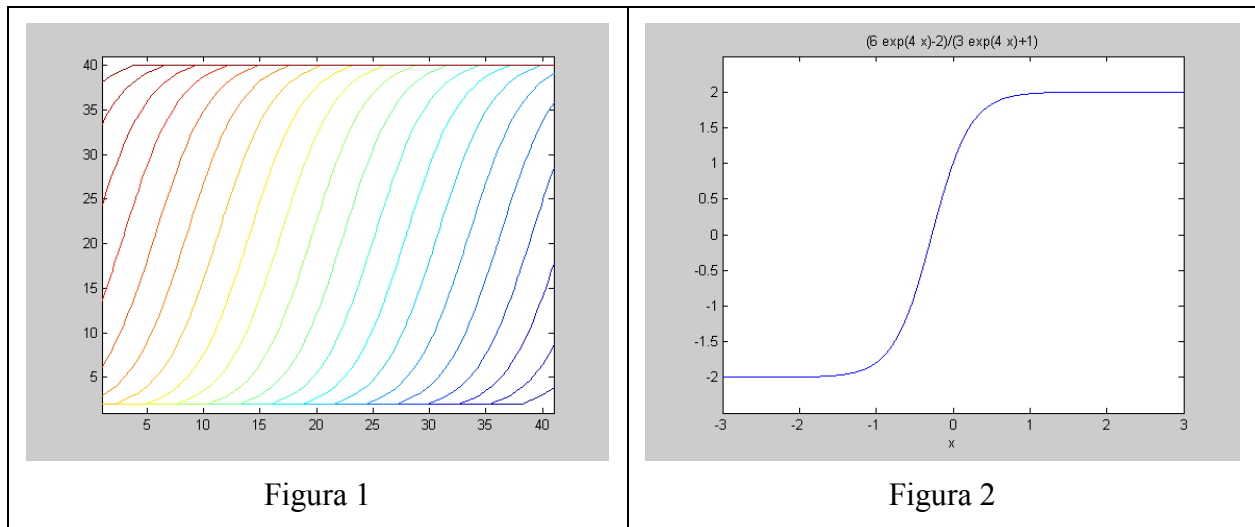
>> C=simple(sym('solve(subs(x=0,y=1,x=-1/4*ln(2-y)+1/4*ln(2+y)-C),C)'))
C = 1/4*log(3)

>> [X,Y]=meshgrid(-2:0.1:2);
```

Carlos Núñez

```
>> Z=-X+(-log(abs(2-Y))+log(abs(2+Y)))./4;  
>> contour(Z,20)  
  
>> fplot('(6*exp(4*x)-2)/(3*exp(4*x)+1)',[-3,3])
```

Cuadro 1



Como es posible observar, es bastante simple hallar la solución general y particular de la ecuación diferencial, así como la solución gráfica.

Ecuaciones homogéneas $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

Consideremos la ecuación diferencial $\sqrt{x^2 + y^2}dx = xdy - ydx$. Expresándola de la forma homogénea, esto es

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} + y\right)dx - xdy = 0$$

probamos que las dos funciones son homogéneas

$$M(tx, ty) = tM(x, y) \quad \text{y} \quad N(tx, ty) = tN(x, y)$$

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

es claro, que ambas tienen el mismo grado de homogeneidad.

Ahora, la expresamos de la forma $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x}$ y dividiendo numerador y denominador por x , obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

tomando la sustitución $v = \frac{y}{x}$, es decir $y = xv$, donde $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$, tenemos

$$v + x \frac{dv}{dx} = \sqrt{1 + v^2} + v \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \sqrt{1 + v^2}$$

la ecuación la hemos convertido en una ecuación diferencial separable, es decir

$$\frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \frac{dx}{x}$$

integramos para obtener la solución general

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(v + \sqrt{1 + v^2}) = \ln(x) + C \Rightarrow v + \sqrt{1 + v^2} = e^{\ln(x)+C} = e^C x = Ax$$

finalmente, sustituimos v por $\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = Ax \Rightarrow \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = Ax \Rightarrow y + \sqrt{x^2 + y^2} = Ax^2.$$

Ahora, obtenemos la solución general utilizando los comandos de MatLab:

Determinamos si la ecuación es homogénea:

Carlos Núñez

```
>> maple('m:=(x,y)->sqrt(x^2+y^2)+y');
>> maple('n:=(x,y)->-x');

>> pretty(sym(maple('collect(m(t*x,t*y),t))))
      2 2 2 2 1/2
      (t x + t y ) + t y

>> pretty(sym(maple('collect(n(t*x,t*y),t))))
      -t x
```

Se carga el la librería *diffforms* y el comando *maple('defform(v=0,x=0,y=0)')*, que permiten utilizar las formas diferenciales y expresar las variables, respectivamente:

```
>> maple('with(diffforms)');
>> maple('defform(v=0,x=0,y=0)');
```

Se hace el cambio de variable $y = xv$ y se expresa la ecuación en forma de variables separadas:

```
>> pretty(simple(sym(maple('subs(y=x*v,m(x,y)*d(x)+n(x,y)*d(y))'))))
      2 1/2
      -x (-d(x) (1 + v ) + x d(v))

>> pretty(sym(maple('collect((x*sqrt(1+v^2)*d(x)-x*x*d(v))/(x),{d(v),d(x)}'))))
      2 1/2
      d(x) (1 + v ) - x d(v)
```

Se resuelve la ecuación separable:

```
>> pretty(simple(sym('int(1/(sqrt(1+v^2)),v)-int(1/x,x))))
      asinh(v) - log(x)
```

Finalmente se sustituye v por y/x :

```
>> pretty(simple(sym('subs(v=y/x,a*sinh(v)-log(x))'))))
      a sinh(y/x) - log(x)
```

Cuadro 2

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

Ecuaciones exactas $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Consideremos la ecuación $(ye^x + 2x)dx + e^x dy = 0$, ésta es de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, aplicando la condición de exactitud, comprobamos que es exacta, esto es $\frac{\partial M}{\partial y} = e^x = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Utilizando el procedimiento de resolución de ecuaciones diferenciales exactas, obtenemos

$$\int \frac{\partial M}{\partial x} dx = \int (ye^x + 2x) dx \Rightarrow f(x, y) = ye^x + x^2 + \phi(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = e^x + \phi'(y)$$

luego

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x + \phi'(y) = e^x = N(x, y) \Rightarrow \phi'(y) = 0 \Rightarrow \int \phi'(y) dy = \int 0 dy \Rightarrow \phi(y) = C_1$$

entonces, $f(x, y) = ye^x + x^2 + C_1$, puesto que $f(x, y) = C$, obtenemos la solución general de la ecuación

$$ye^x + x^2 + C_1 = C \Rightarrow ye^x + x^2 = A \Rightarrow y = \frac{A - x^2}{e^x}, \text{ donde } A = C - C_1.$$

Ahora, obtenemos la solución general, así como la representación gráfica de la familia de soluciones (figura 3), utilizando los comandos del MatLab:

Determinamos si la ecuación es exacta:

```
>> maple('m:=(x,y)->y*exp(x)+2*x');
```

Carlos Núñez

```
>> maple('n:=(x,y)->exp(x)');
>> pretty(simple(diff('m(x,y)', 'y')))
      exp(x)
>> pretty(simple(diff('n(x,y)', 'x')))
      exp(x)
```

Se resuelve la ecuación exacta:

```
>> solucion1:=maple('simplify(int(m(x,y),x)+g(y))')
solucion1 =
y*exp(x)+x^2+g(y)
>> pretty(sym(maple('simplify(int(m(x,y),x)+g(y))')))
      2
      y exp(x) + x  + g(y)
>> pretty(sym(maple('simplify(diff(y*exp(x)+x^2+g(y),y))')))
      /d  \
      exp(x) +|-- g(y)|
      \dy  /
>> pretty(simple(sym('solve(exp(x)+diff(g(y),y)=n(x,y),diff(g(y),y))')))
      0
>> pretty(simple(sym(maple('subs(g(y)=int(0,y),y*exp(x)+x^2+g(y))')))
      2
      y exp(x) + x
```

Representación gráfica de la familia de soluciones:

```
>> [x,y]=meshgrid(-1:.2:1);
>> z=y*exp(x)+x^2;
>> contour(z,100)
```

Cuadro 3

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

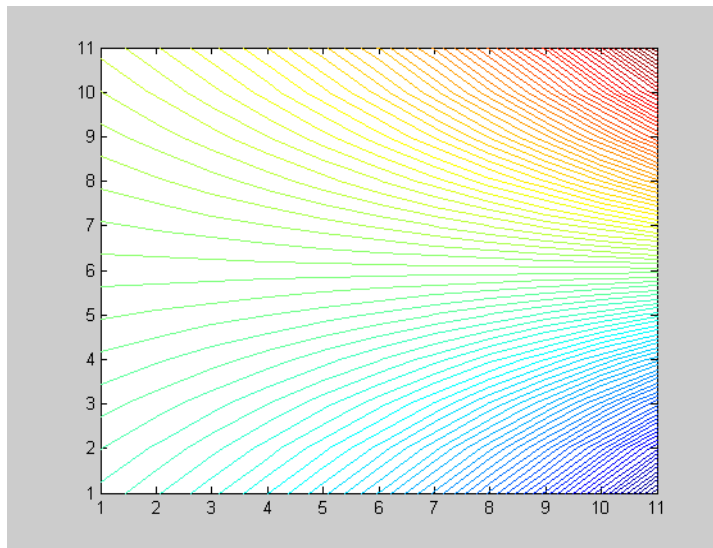


Figura 3

Ecuaciones lineales $y' + P(x)y = Q(x)$

Consideremos la ecuación diferencial lineal $dy = (x - 3xy)dx$. En primer lugar es necesario llevarla a la forma $y' + P(x)y = Q(x)$, es decir $y' + 3xy = x$, ahora, determinamos el factor $e^{\int P(x)dx}$, esto es $\int P(x)dx = \int 3xdx = \frac{3}{2}x^2$, no es necesario incluir la constante de integración, luego $e^{\int P(x)dx} = e^{\frac{3}{2}x^2}$, multiplicando la ecuación por este factor, obtenemos

$$e^{\frac{3}{2}x^2} y' + e^{\frac{3}{2}x^2} 3xy = e^{\frac{3}{2}x^2} x \Rightarrow \left(e^{\frac{3}{2}x^2} y \right)' = e^{\frac{3}{2}x^2} x$$

luego, en el miembro izquierdo de la igualdad aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo y en el derecho integramos, así obtenemos la solución de la ecuación

$$\int \left(e^{\frac{3}{2}x^2} y \right)' dx = \int e^{\frac{3}{2}x^2} x dx \Rightarrow e^{\frac{3}{2}x^2} y = \frac{1}{3} e^{\frac{3}{2}x^2} + C \Rightarrow y = \frac{1}{3} + C e^{-\frac{3}{2}x^2}$$

Carlos Núñez

Como sabemos, para hacer el procedimiento más sencillo, simplemente se sustituye el factor $e^{\int P(x)dx} = e^{\frac{3}{2}x^2}$ en la expresión $y = \frac{\int e^{\int P(x)dx} Q(x) dx + C}{e^{\int P(x)dx}}$ y obtenemos la solución.

Ahora, obtenemos la solución general, utilizando un comando del MatLab:

```
>> pretty(sym(maple('simplify(dsolve(diff(y(x),x)+3*x*y(x)=x,y(x)))'))))  
  
                2  
y(x) = 1/3 + exp(- 3/2 x ) _C1
```

Cuadro 4

Ecuaciones lineales de orden superior $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = f$

Homogéneas con coeficientes constantes $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$

Consideremos las siguientes ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes:

$$a) 2y'' + 5y' - 3y = 0$$

$$b) y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$$

$$c) y'' - 3y' + 4y = 0$$

$$d) y^6 - 9y^5 + 30y^4 - 28y^3 - 88y^2 + 256y' - 192y = 0.$$

Solución:

a) obtengamos la ecuación polinomial asociada (polinomio característico), para ello hacemos $y = e^{rx}$, luego

$$2(e^{rx})'' + 5(e^{rx})' - 3e^{rx} = 0 \Rightarrow 2r^2 e^{rx} + 5r e^{rx} - 3e^{rx} = 0 \Rightarrow (2r^2 + 5r - 3)e^{rx} = 0$$

$$\Rightarrow 2r^2 + 5r - 3 = 0 \Rightarrow (2r - 1)(r + 3) = 0$$

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

entonces, $y_1 = e^{\frac{1}{2}x}$ y $y_2 = e^{-3x}$ constituyen soluciones de la ecuación, por lo tanto la solución general es

$$y = Ae^{\frac{1}{2}x} + Be^{-3x}.$$

b) la ecuación polinomial asociada es

$$r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0 \Rightarrow (r-2)(r-2)(r-2) = 0$$

entonces, usando la reducción de orden es posible determinar otras soluciones linealmente independientes de e^{2x} , esto es xe^{2x} y x^2e^{2x} , por lo tanto la solución general de la ecuación es

$$y = A_1e^{2x} + A_2xe^{2x} + A_3x^2e^{2x}$$

c) la ecuación polinomial asociada es

$$r^2 - 3r + 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

entonces, las soluciones de la ecuación son

$$y_1 = e^{\frac{3+\sqrt{7}i}{2}x} \quad \text{y} \quad y_2 = e^{\frac{3-\sqrt{7}i}{2}x}$$

luego, la solución general de la ecuación es

$$y = Ae^{\frac{3+\sqrt{7}i}{2}x} + Be^{\frac{3-\sqrt{7}i}{2}x}$$

Mediante la fórmula de Euler, es posible reescribir la solución general

$$y = Ae^{\frac{3}{2}x} e^{\frac{\sqrt{7}i}{2}x} + Be^{\frac{3}{2}x} e^{-\frac{\sqrt{7}i}{2}x} = Ae^{\frac{3}{2}x} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) \right) + Be^{\frac{3}{2}x} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) \right)$$

Carlos Núñez

ahora, tomando adecuadamente valores para A y B , por ejemplo $A = B = 1/2$ y $A = -i/2, B = i/2$, obtenemos soluciones significativas con valores reales, esto es

$$y = e^{\frac{3}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) \quad \text{y} \quad y = e^{\frac{3}{2}x} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$$

por lo tanto

$$y = Ee^{\frac{3}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + Fe^{\frac{3}{2}x} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right).$$

d) la ecuación polinomial asociada es

$$r^6 - 9r^5 + 30r^4 - 28r^3 - 88r^2 + 256r - 192 = 0$$

factorizando, obtenemos

$$(r - 2)(r - 2)(r + 2)(r - 3)(2 + 2i)(2 - 2i) = 0$$

entonces, las soluciones de la ecuación son

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = xe^{2x}, \quad y_3 = e^{-2x}, \quad y_4 = e^{3x},$$

$$y_5 = e^{2+2i} = e^{2x} \cos(2x) \quad \text{y} \quad y_6 = e^{2-2i} = e^{2x} \text{sen}(2x)$$

por lo tanto, la ecuación general es

$$y = A_1 e^{2x} + A_2 x e^{2x} + A_3 e^{-2x} + A_4 e^{3x} + A_5 e^{2x} \cos(2x) + A_6 e^{2x} \text{sen}(2x).$$

Ahora, obtenemos la solución general de cada ecuación, utilizando los comandos del MatLab:

```
a) >> pretty(dsolve('2*D2y+5*Dy-3*y=0'))  
C1 exp(-3 t) + C2 exp(1/2 t)
```

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

<p>ó</p> <pre>>> pretty(sym(maple('dsolve(2*diff(y(x),x\$2)+5*diff(y(x),x\$1)-3*y(x)=0,y(x)'))))</pre> $y(x) = _C1 \exp(-3 x) + _C2 \exp(1/2 x)$
<p>b) >> pretty(sym(maple('dsolve(diff(y(x),x\$3)</p> <pre>-6*diff(y(x),x\$2)+12*diff(y(x),x\$1)-8*y(x)=0,y(x)'))))</pre> $y(x) = _C1 \exp(2 x) + _C2 \exp(2 x) x^2 + _C3 \exp(2 x) x$
<p>c) >> solve('x^2-3*x+4=0')</p> <p>ans =</p> <pre>[3/2+1/2*i*7^(1/2)]</pre> <pre>[3/2-1/2*i*7^(1/2)]</pre> <pre>>> pretty(sym(maple('dsolve(diff(y(x),x\$2)-3*diff(y(x),x\$1)+4*y(x)=0,y(x)'))))</pre> $y(x) = _C1 \exp(3/2 x) \sin(1/2 \sqrt{7} x) + _C2 \exp(3/2 x) \cos(1/2 \sqrt{7} x)$
<p>d) >> pretty(sym(maple('dsolve(diff(y(x),x\$6)</p> <pre>-9*diff(y(x),x\$5)+30*diff(y(x),x\$4)-28*diff(y(x),x\$3)-</pre> <pre>88*diff(y(x),x\$2)+256*diff(y(x),x\$1)-192*y(x)'))))</pre> $y(x) = _C1 \exp(2 x) + _C2 \exp(3 x) + _C3 \exp(-2 x) + _C4 \exp(2 x) x$ $+ _C5 \exp(2 x) \cos(2 x) + _C6 \exp(2 x) \sin(2 x)$ <p>o así</p> <pre>>> pretty(dsolve('D6y-9*D5y+30*D4y-28*D3y-88*D2y+256*Dy-192*y=0'))</pre> $C1 \exp(-2 t) + C2 \exp(2 t) + C3 \exp(3 t) + C4 \exp(2 t) t$ $+ C5 \exp(2 t) \cos(2 t) + C6 \exp(2 t) \sin(2 t)$

Cuadro 5

Carlos Núñez

No homogéneas con coeficientes constantes $ay'' + by' + cy = f(x)$

Método de coeficientes indeterminados

Consideremos la siguiente ecuación no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes:

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x$$

Su solución general es de la forma $y = y_p + y_h$, donde $y_h = Ae^x \cos x + Be^x \operatorname{sen} x$ es la solución general de la ecuación homogénea. Ahora, determinamos una solución particular de la ecuación, para ello, sea $y_p = Cxe^x \operatorname{sen} x$, sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial, obtenemos

$$(Cxe^x \operatorname{sen} x)'' - 2(Cxe^x \operatorname{sen} x)' + 2(Cxe^x \operatorname{sen} x) = e^x \cos x$$

$$\Rightarrow 2Ce^x \cos x = e^x \cos x \Rightarrow C = 1/2$$

luego, $y_p = \frac{1}{2}xe^x \operatorname{sen} x$, por lo tanto la solución general es

$$y = Ae^x \cos x + Be^x \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}xe^x \operatorname{sen} x.$$

Método de variación de parámetros

Consideremos la ecuación $y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x$. Este método, al igual que el anterior, produce la solución general de la ecuación mediante $y = y_p + y_h$, donde $y_h = Ay_1 + By_2 = Ae^x \cos x + Be^x \operatorname{sen} x$ es la solución general de la ecuación homogénea y $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ es una solución particular de la ecuación diferencial, u_1 y u_2 son funciones desconocidas que se deben determinar.

Para determinar a u_1 y u_2 , es necesario calcular en Wronskiano de las dos funciones y_1 y y_2 , esto es

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \operatorname{sen} x \\ e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x & e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

$$u_1 = -\int u_1' dx = -\int \frac{y_2 f}{W} dx = -\int \frac{e^x \operatorname{sen} x (e^x \cos x)}{e^{2x}} dx = -\int \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{1}{4} \cos(2x)$$

$$u_2 = \int u_2' dx = \int \frac{y_1 f}{W} dx = \int \frac{e^x \cos x (e^x \cos x)}{e^{2x}} dx = \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x)$$

luego

$$y_p = \left(\frac{1}{4} \cos(2x) \right) e^x \cos x + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) \right) e^x \operatorname{sen} x = \frac{1}{4} e^x \cos x + \frac{1}{2} x e^x \operatorname{sen} x$$

por lo tanto, la solución general es

$$y = A e^x \cos x + B e^x \operatorname{sen} x + \frac{1}{4} e^x \cos x + \frac{1}{2} x e^x \operatorname{sen} x.$$

Ahora, obtenemos la solución general de la ecuación, así como la representación gráfica de la familia de soluciones (figura 4), para ciertos valores de A y B , utilizando los comandos del MatLab:

```
>> solve('r^2-2*r+2=0')
ans =
[ 1+i]
[ 1-i]
>> maple('f:=x->exp(x)*cos(x)');
>> maple('y1:=x->exp(x)*cos(x)');
>> maple('y2:=x->exp(x)*sin(x)');
>> maple('W:=x->Wronskian([y1(x),y2(x)],x)');
```

Carlos Núñez

```
>> pretty(simple(sym(maple('det(W(x))'))))
      exp(2 x)
>> maple('W1:=x->array([[0,y2(x)],[1,diff((y2)(x),x)]]');
>> pretty(simple(sym(maple('det(W1(x))'))))
      -exp(x) sin(x)
>> maple('W2:=x->array([[y1(x),0],[diff((y1)(x),x),1]]');
>> pretty(simple(sym(maple('det(W2(x))'))))
      exp(x) cos(x)
>> maple('u1:=x->factor(simplify(int(f(x)*det(W1(x))/det(W(x)),x)))');
>> maple('u1(x)')
ans =
1/4*cos(2*x)
>> maple('u2:=x->factor(simplify(int(f(x)*det(W2(x))/det(W(x)),x)))');
>> maple('u2(x)')
ans =
1/4*sin(2*x)+1/2*x
>> maple('yp:=x->factor(simplify(y1(x)*u1(x)+y2(x)*u2(x)))');
>> maple('yp(x)')
ans =
1/4*exp(x)*(cos(x)*cos(2*x)+sin(x)*sin(2*x)+2*sin(x)*x)
>> maple('y:=x->simplify(c1*y1(x)+c2*y2(x)+yp(x))');
>> maple('combine(y(x),trig)')
ans =
c1*exp(x)*cos(x)+c2*exp(x)*sin(x)+1/4*exp(x)*cos(x)+1/2*exp(x)*sin(x)*x
>> ezplot(simple(sym(maple('subs(c1=-4,c2=6,y(x))'))),[-2,2])
>> hold on
>> ezplot(simple(sym(maple('subs(c1=-4,c2=-6,y(x))'))),[-2,2])
```

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

```

>> ezplot(simple(sym(maple('subs(c1=-4,c2=-3,y(x)')))),[-2,2])
>> ezplot(simple(sym(maple('subs(c1=-4,c2=3,y(x)')))),[-2,2])
>> ezplot(simple(sym(maple('subs(c1=-4,c2=2,y(x)')))),[-2,2])
>> ezplot(simple(sym(maple('subs(c1=-4,c2=-2,y(x)')))),[-2,2])
>> ezplot(simple(sym(maple('subs(c1=4,c2=2,y(x)')))),[-2,2])
>> ezplot(simple(sym(maple('subs(c1=4,c2=-2,y(x)')))),[-2,2])
>> ezplot(simple(sym(maple('subs(c1=4,c2=5,y(x)')))),[-2,2])
>> ezplot(simple(sym(maple('subs(c1=4,c2=-4,y(x)')))),[-2,2])
>> ezplot(simple(sym(maple('subs(c1=-4,c2=-4,y(x)')))),[-2,2])
>> ezplot(simple(sym(maple('subs(c1=-4,c2=-5,y(x)')))),[-2,2])

```

Cuadro 6

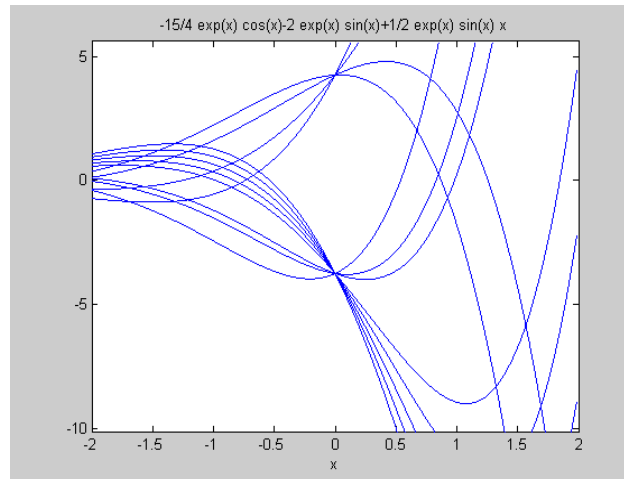


Figura 4

Ecuaciones diferenciales con coeficientes variables reducibles a ecuaciones con coeficientes constantes. Ecuación de Cauchy-Euler

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y^{(1)} + a_0 y = f$$

Consideremos la ecuación $x^4 y^{(4)} + 6x^3 y^{(3)} - x^2 y'' - 7xy' + 16y = 0$.

Carlos Núñez

Para transformarla en ecuación de coeficientes constantes, hacemos

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x$$

por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right) = \frac{1}{x^3} \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^3} \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right) \right) = \frac{1}{x^4} \left(\frac{d^4y}{dt^4} - 6 \frac{d^3y}{dt^3} + 11 \frac{d^2y}{dt^2} - 6 \frac{dy}{dt} \right)$$

sustituyendo estas derivadas en la ecuación diferencial, obtenemos

$$x^4 \frac{1}{x^4} \left(\frac{d^4y}{dt^4} - 6 \frac{d^3y}{dt^3} + 11 \frac{d^2y}{dt^2} - 6 \frac{dy}{dt} \right) + 6x^3 \frac{1}{x^3} \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right) - x^2 \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) - 7x \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} + 16y = 0 \Rightarrow \frac{d^4y}{dt^4} - 8 \frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0$$

luego, la ecuación polinomial asociada es

$$r^4 - 8r^2 + 16 = 0 \Rightarrow (r-2)(r-2)(r+2)(r+2) = 0$$

por tanto

$$y_1 = e^{-2t} = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}, \quad y_2 = te^{-2t} = \ln(x) e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2} \ln x$$

$$y_3 = e^{2t} = e^{2 \ln x} = x^2 \quad y \quad y_4 = te^{2t} = \ln(x) e^{2 \ln x} = x^2 \ln x$$

$$y = C_1 \frac{1}{x^2} + C_2 \frac{1}{x^2} \ln x + C_3 x^2 + C_4 x^2 \ln x.$$

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

Mediante cualquier comando del MatLab del cuadro 7, se obtiene la solución de la ecuación. En esta ecuación el programa, se toma su tiempo para dar el resultado. No se edita por ser muy extenso.

```
pretty(simple(dsolve('x^4*D4y+6*x^3*D3y-x^2*D2y-7*x*Dy+16*y=0')))  
pretty(sym(maple(dsolve('x^4*D4y+6*x^3*D3y-x^2*D2y-7*x*Dy+16*y=0'))))
```

Cuadro 7

Ecuaciones diferenciales y transformada de Laplace

$$F(p) = \mathcal{L}[f](p) = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-px} f(x) dx$$

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g], \quad \mathcal{L}[e^{ax} f(x)] = F(p - a).$$

Si $F = \mathcal{L}[f]$ es la transformada de Laplace, entonces $f = \mathcal{L}^{-1}[F]$, es la transformada inversa de Laplace.

Por otra parte, si $f(x) = y'(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'](p) &= \int_0^{\infty} e^{-px} y'(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-px} y'(x) dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-px} y(x) \Big|_0^N + \lim_{N \rightarrow \infty} p \int_0^N e^{-px} y(x) dx = -y(0) + p \mathcal{L}[y] \end{aligned}$$

luego

$$\mathcal{L}[y'] = p \mathcal{L}[y] - y(0)$$

de igual manera

$$\mathcal{L}[y''] = p^2 \mathcal{L}[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\mathcal{L}[y^{(3)}] = p^3 \mathcal{L}[y] - p^2 y(0) - py'(0) - y''(0), \text{ etc.}$$

Carlos Núñez

Sea la ecuación $y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x} \cos x$, con las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$. Nótese, que podemos tomar a $y'(0) = 2(p+1)$ como condición inicial.

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos miembros de la igualdad, esto es

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[2y'] + \mathcal{L}[5y] = \mathcal{L}[3e^{-x} \cos x]$$

utilizando los resultados obtenidos anteriormente, obtenemos

$$p^2 \mathcal{L}[y] - py(0) - y'(0) + 2p \mathcal{L}[y] - 2y(0) + 5 \mathcal{L}[y] = 3 \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}[y](p^2 + 2p + 5) - (p+2)y(0) - y'(0) = \frac{3p+3}{(p+1)^2 + 1}$$

sustituyendo las condiciones iniciales, despejando y utilizando una descomposición en fracciones parciales, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y] &= \frac{3p+3}{(p^2 + 2p + 2)(p^2 + 2p + 5)} = \frac{p+1}{p^2 + 2p + 2} - \frac{p+1}{p^2 + 2p + 5} \\ &= \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} - \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4} \end{aligned}$$

aplicando la transformada inversa, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}[y]) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+1}{(p+1)^2 + 1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+1}{(p+1)^2 + 4}\right) \\ y &= e^{-x} \cos x - e^{-x} \cos(2x). \end{aligned}$$

Por intermedio de los comandos del MatLab, obtenemos la solución particular, así como la solución grafica (figura 5):

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

```

>> maple('L:=p->laplace(diff(y(x),x$2)+2*diff(y(x),x)+5*y(x),x,p)');
>> pretty(simple(sym(maple('subs(y(0)=0,(D(y))(0)=0,L(p))'))))
                2
      laplace(y(x), x, p) (p + 2 p + 5)
>> maple('L1:=p->laplace(3*exp(-x)*cos(x),x,p)');
>> pretty(simple(sym('L1(p)')))
                p + 1
      3 -----
                2
      (p + 1) + 1
>> pretty(simple(sym(maple('solve(L(p)=L1(p),laplace(y(x),x,p))'))))
      3          2
      (y(0) p + (4 y(0) + D(y)(0)) p + (3 + 2 D(y)(0) + 6 y(0)) p + 3
      + 2 D(y)(0) + 4 y(0)) / (p + 4 p + 11 p + 14 p + 10)
>> maple('TL:=p->solve(L(p)=L1(p),laplace(y(x),x,p)');
>> pretty(simple(sym('subs(y(0)=0,(D(y))(0)=0,TL(p))'))))
                3 + 3 p
      -----
                4      3      2
      p + 4 p + 11 p + 14 p + 10
>> maple('TLO:=p->simplify(subs(y(0)=0,(D(y))(0)=0,TL(p)))');
>> solucion=simple(sym(maple('invlaplace(TLO(p),p,x)')));
>> pretty(solucion)
      exp(-x) (cos(x) - cos(2 x))
>> x=(-2*pi:0.1:2*pi);
>> y=exp(-x).*cos(x)-exp(-x).*cos(2*x);
>> plot(x,y)

```

Cuadro 8

Carlos Núñez

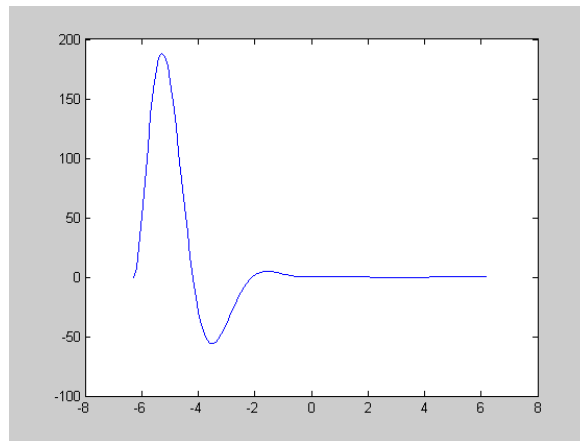


Figura 5

Solución en series de potencias de ecuaciones lineales – Método de las series de

Taylor
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Consideremos las ecuaciones

$$a) \quad y'' - xy' - y = 0 \quad y \quad b) \quad y'' + 3y = 0$$

a) Conjeturemos que la ecuación tiene una solución expresada como serie de potencias, es decir

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

determinemos los coeficientes de la serie, para ello es necesario precisar y' y y''

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots$$

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

al sustituir en la ecuación, es conveniente que la primera y segunda serie tengan el índice igual a la tercera, esto es

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)a_{n-1} x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = 0 \\ & (2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \dots) \\ & - (a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + \dots + (n-2)a_{n-2}x^{n-2} + \dots) \\ & - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-2}x^{n-2} + \dots) = 0 \end{aligned}$$

reuniendo las potencias iguales de x , obtenemos

$$\begin{aligned} & (2 \cdot 1a_2 - a_0) + (3 \cdot 2a_3 - a_1 - a_1)x + (4 \cdot 3a_4 - 2a_2 - a_2)x^2 \\ & + (5 \cdot 4a_5 - 3a_3 - a_3)x^3 + \dots + (n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-2} - a_{n-2})x^{n-2} + \dots = 0 \end{aligned}$$

esta ecuación se satisface si todos los coeficientes son nulos, este hecho produce las relaciones de recurrencia siguientes

$$\begin{aligned} & 2 \cdot 1a_2 - a_0 = 0, \quad 3 \cdot 2a_3 - 2a_1 = 0, \quad 4 \cdot 3a_4 - 3a_2 = 0, \\ & 5 \cdot 4a_5 - 4a_3 = 0, \quad \dots, \quad n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-2} = 0, \quad \dots \end{aligned}$$

resolviendo cada ecuación y considerando a a_0 y a_1 como constantes cualesquiera A y B , obtenemos

índices pares

$$a_2 = \frac{a_0}{2 \cdot 1} = \frac{A}{2}, \quad a_4 = \frac{3}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{1}{4 \cdot 2} \frac{A}{2} = \frac{A}{4 \cdot 2}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{(n-1)}{n(n-1)} a_{n-2} = \frac{1}{n} a_{n-2}, \dots$$

pero

Carlos Núñez

$$a_{n-2} = \frac{(n-3)}{(n-2)(n-3)} a_{n-4} = \frac{1}{(n-2)} a_{n-4}$$

pero

$$a_{n-4} = \frac{1}{(n-4)} a_{n-6}$$

luego

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-2} = \frac{1}{n(n-2)} a_{n-4} = \frac{1}{n(n-2)(n-4)} a_{n-6} = \dots$$

entonces

$$a_n = \frac{A}{n(n-2)\dots 4 \cdot 2}$$

por tanto

$$a_{2n} = \frac{A}{2 \cdot 4 \dots (2n)}$$

Índices impares

$$a_3 = \frac{2a_1}{3 \cdot 2} = \frac{B}{3}, \quad a_5 = \frac{4}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{1}{5} \frac{B}{3} = \frac{B}{5 \cdot 3}, \dots$$

en general

$$a_{2n-1} = \frac{B}{3 \cdot 5 \dots (2n-1)}$$

la solución general, es

$$y = A \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2 \cdot 4} x^4 + \dots + \frac{1}{2 \cdot 4 \dots (2n)} x^{2n} + \dots \right)$$

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

$$+ B \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3 \cdot 5}x^5 + \dots + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}x^{2n-1} + \dots \right).$$

b) Conjeturemos que la ecuación presente una solución expresada como serie de potencias, es decir

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

para obtener los coeficientes es necesario determinar y''

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots$$

al sustituir en la ecuación, es conveniente que la primera serie tengan el índice igual al de la tercera, esto es

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 3 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = 0$$

$$\left(2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + 5 \cdot 4 a_5 x^3 + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots \right)$$

$$+ \left(3 a_0 + 3 a_1 x + 3 a_2 x^2 + 3 a_3 x^3 + \dots + 3 \cdot a_{n-2} x^{n-2} + \dots \right) = 0$$

reuniendo las potencias iguales de x , obtenemos

$$\begin{aligned} & (2 \cdot 1 a_2 + 3 a_0) + (3 \cdot 2 a_3 + 3 a_1) x + (4 \cdot 3 a_4 + 3 a_2) x^2 \\ & + (5 \cdot 4 a_5 + 3 a_3) x^3 + \dots + (n(n-1) a_n + 3 a_{n-2}) x^{n-2} + \dots = 0 \end{aligned}$$

para que la serie de potencias sea igual a cero, cada coeficiente debe ser cero, esto es

Carlos Núñez

$$2 \cdot 1a_2 + 3a_0 = 0, \quad 3 \cdot 2a_3 + 3a_1 = 0, \quad 4 \cdot 3a_4 + 3a_2 = 0,$$

$$5 \cdot 4a_5 + 3a_3 = 0, \quad \dots, \quad n(n-1)a_n + 3a_{n-2} = 0, \quad \dots$$

así, obtenemos las relaciones de recurrencia siguientes

Índices pares

consideremos a_0 una constante cualquiera A

$$2 \cdot 1a_2 + 3a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{3A}{2 \cdot 1}$$

$$4 \cdot 3a_4 + 3a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = -\frac{3}{4 \cdot 3} \left(-\frac{3A}{2 \cdot 1} \right)$$

$$\Rightarrow a_4 = \frac{3^2 A}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

deducimos que

$$a_{2n} = (-3)^n \frac{A}{(2n)(2n-1)\dots\cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow a_{2n} = (-3)^n \frac{A}{(2n)!}$$

luego

$$y = A + Bx - \frac{3A}{2!}x^2 - \frac{3B}{3!}x^3 + \frac{3^2 A}{4!}x^4 + \frac{3^2 B}{5!}x^5 - \dots$$

$$y = A \left(1 - \frac{3}{2!}x^2 + \frac{3^2}{4!}x^4 - \dots + \frac{(-3)^n}{(2n)!} - \dots \right) + B \left(x - \frac{3}{3!}x^3 + \frac{3^2}{5!}x^5 - \dots + \frac{(-3)^n}{(2n+1)!} - \dots \right)$$

Índices impares

consideremos a_1 una constante cualquiera B

$$3 \cdot 2a_3 + 3a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{3B}{3 \cdot 2}$$

$$5 \cdot 4a_5 + 3a_3 = 0 \Rightarrow a_5 = -\frac{3}{5 \cdot 4} \left(-\frac{3B}{3 \cdot 2} \right)$$

$$\Rightarrow a_5 = \frac{3^2 B}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

deducimos que

$$a_{2n+1} = (-3)^n \frac{B}{(2n+1)(2n)\dots\cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow a_{2n+1} = (-3)^n \frac{B}{(2n+1)!}$$

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

$$y = A \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \right) + B \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right)$$

por lo tanto, la solución general es

$$y = A \cos(\sqrt{3}x) + B \sin(\sqrt{3}x).$$

Por intermedio de los comandos del MatLab, obtenemos las soluciones generales y particulares para $y(0)=1$ y $y'(0)=1$:

```
a) >> maple('dsolve(diff(y(x),x$2)-x*diff(y(x),x)-y(x)=0,y(x),series)')
```

```
ans =
```

```
y(x) = series(y(0)+D(y)(0)*x+(1/2*y(0))*x^2+(1/3*D(y)(0))*x^3
      +(1/8*y(0))*x^4+(1/15*D(y)(0))*x^5+O(x^6),x,6)
```

```
>> pretty(simple(sym(maple('dsolve( {diff(y(x),x$2)-x*diff(y(x),x)
      -y(x)=0,y(0)=1,D(y)(0)=1 },y(x),series)')))))
```

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{15} x^5 + O(x^6)$$

```
b) >> pretty(simple(sym(maple('dsolve(diff(y(x),x$2)+3*y(x)=0,y(x),series)')))))
```

```
y(x) = y(0) + D(y)(0) x - 3/2 y(0) x^2 - 1/2 D(y)(0) x^3 + 3/8 y(0) x^4 +
      3/40 D(y)(0) x^5 + O(x^6)
```

```
>>pretty(simple(sym(maple('dsolve( {diff(y(x),x$2)+3*y(x)=0,
      y(0)=1,D(y)(0)=1 },y(x),series)')))))
```

$$y(x) = 1 + x - \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{3}{8} x^4 + \frac{3}{40} x^5 + O(x^6)$$

Carlos Núñez

```
>> pretty(simple(sym(maple('dsolve({diff(y(x),x$2)+3*y(x)=0,
y(0)=1,D(y)(0)=0},y(x),series')))))
          2      4      6
y(x) = 1 - 3/2 x + 3/8 x + O(x), (donde y(0)=1, y'(0)=0)

>> pretty(simple(sym(maple('dsolve({diff(y(x),x$2)+3*y(x)=0,
y(0)=0,D(y)(0)=1},y(x),series')))))
          3      5      6
y(x) = x - 1/2 x + 3/40 x + O(x), (donde y(0)=0, y'(0)=1)
```

Cuadro 9

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t) \end{cases}$$

Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes – método de valores propios

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y \end{cases}$$

Consideremos los sistemas siguientes

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + y \end{cases}$$

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

Puesto que, un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con coeficientes constantes es reducible a una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, podemos conjeturar que el sistema presenta una solución de la forma

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt} \end{cases}$$

derivando y sustituyendo esta posible solución en el sistema, obtenemos

$$\begin{cases} Ame^{mt} = Ae^{mt} + 4Be^{mt} \\ Bme^{mt} = Ae^{mt} + Be^{mt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-m)A + 4B = 0 \\ A + (1-m)B = 0 \end{cases}, \text{ donde } A \text{ y } B \text{ son incógnitas}$$

para que este sistema de ecuaciones tenga solución, es necesario que

$$\det \begin{vmatrix} 1-m & 4 \\ 1 & 1-m \end{vmatrix} = 0$$

si es diferente de cero, se obtiene la solución trivial $A = B = 0$

desarrollando el determinante, obtenemos la ecuación polinomial asociada o auxiliar

$$m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m+1)(m-3) = 0 \Rightarrow m_1 = -1, m_2 = 3$$

si $m = -1$, obtenemos

$$\begin{cases} 2A + 4B = 0 \\ A + 2B = 0 \end{cases}$$

es claro, que estas ecuaciones son múltiplos entre sí, luego el determinante es cero, por tanto existen soluciones no triviales, una de ellas es $A = -2, B = 1$, entonces

Carlos Núñez

$$\begin{cases} x = -2e^{-t} \\ y = e^{-t} \end{cases}$$

si $m = 3$, obtenemos

$$\begin{cases} -2A + 4B = 0 \\ A - 2B = 0 \end{cases}$$

es claro, que estas ecuaciones son múltiplos entre sí, luego el determinante es cero, por tanto existen soluciones no triviales, una de ellas es $A = 2, B = 1$, entonces

$$\begin{cases} x = 2e^{3t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$$

es evidente, que los dos conjuntos solución obtenidos son linealmente independientes, por lo tanto la solución general del sistema es

$$\begin{cases} x = -2C_1e^{-t} + 2C_2e^{3t} \\ y = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} \end{cases}.$$

b) Antes de resolver, el sistema, es prudente hacer ciertas consideraciones, a saber los coeficientes A y B son números complejos, esto es $A = A_1 + A_2i$ y $B = B_1 + B_2i$, por lo tanto

$$\begin{cases} x = (A_1 + A_2i)e^{(a+bi)t} \\ y = (B_1 + B_2i)e^{(a+bi)t} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = (A_1 + A_2i)e^{(a-bi)t} \\ y = (B_1 + B_2i)e^{(a-bi)t} \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de Euler en la primera solución particular propuesta del sistema, obtenemos

$$\begin{cases} x = (A_1 + A_2i)e^{at} (\cos(bt) + i\text{sen}(bt)) \\ y = (B_1 + B_2i)e^{at} (\cos(bt) + i\text{sen}(bt)) \end{cases}$$

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ((A_1 \cos(bt) - A_2 \operatorname{sen}(bt)) + i(A_1 \operatorname{sen}(bt) + A_2 \cos(bt)))e^{at} \\ y = ((B_1 \cos(bt) - B_2 \operatorname{sen}(bt)) + i(B_1 \operatorname{sen}(bt) + B_2 \cos(bt)))e^{at} \end{cases}$$

luego, las soluciones con valores reales son

$$\begin{cases} x = (A_1 \cos(bt) - A_2 \operatorname{sen}(bt))e^{at} \\ y = (B_1 \cos(bt) - B_2 \operatorname{sen}(bt))e^{at} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = (A_1 \operatorname{sen}(bt) + A_2 \cos(bt))e^{at} \\ y = (B_1 \operatorname{sen}(bt) + B_2 \cos(bt))e^{at} \end{cases}$$

es claro que estas soluciones son linealmente independientes, por lo tanto la solución general del sistema, es

$$\begin{cases} x = (C_1(A_1 \cos(bt) - A_2 \operatorname{sen}(bt)) + C_2(A_1 \operatorname{sen}(bt) + A_2 \cos(bt)))e^{at} \\ y = (C_1(B_1 \cos(bt) - B_2 \operatorname{sen}(bt)) + C_2(B_1 \operatorname{sen}(bt) + B_2 \cos(bt)))e^{at} \end{cases}$$

Obsérvese, que si se aplica un procedimiento similar a la segunda solución propuesta, obtenemos la misma solución general.

Resolvamos, bajo estas premisas, el sistema en consideración, para ello conjeturemos que el sistema presenta una solución de la forma

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt} \end{cases}$$

derivando y sustituyendo esta posible solución en el sistema, obtenemos

$$\begin{cases} Ame^{mt} = Ae^{mt} - Be^{mt} \\ Bme^{mt} = 4Ae^{mt} + Be^{mt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-m)A - B = 0 \\ 4A + (1-m)B = 0 \end{cases}$$

para que este sistema de ecuaciones tenga solución, es necesario que

Carlos Núñez

$$\det \begin{vmatrix} 1-m & -1 \\ 4 & 1-m \end{vmatrix} = 0$$

si es diferente de cero, se obtiene la solución trivial $A = B = 0$

desarrollando el determinante, obtenemos la ecuación polinomial asociada o auxiliar

$$m^2 - 2m + 5 = 0 \Rightarrow m = 1 \pm 2i$$

si $m = 1 + 2i$, obtenemos

$$\begin{cases} -2iA - B = 0 \\ 4A - 2iB = 0 \end{cases}$$

es claro, que estas ecuaciones son múltiplos entre sí, luego el determinante es cero, por tanto existen soluciones no triviales, una de ellas es $A = 1$, $B = -2i$, entonces

$$\begin{cases} x = e^{(1+2i)t} = e^t (\cos(2t) + i\operatorname{sen}(2t)) \\ y = -2ie^{(1+2i)t} = -2ie^t (\cos(2t) + i\operatorname{sen}(2t)) = e^t (-2i\cos(2t) + 2i\operatorname{sen}(2t)) \end{cases}$$

luego, las soluciones con valores reales son

$$\begin{cases} x = \cos(2t)e^t \\ y = 2\operatorname{sen}(2t)e^t \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = \operatorname{sen}(2t)e^t \\ y = -2\cos(2t)e^t \end{cases}$$

es claro que estas soluciones son linealmente independientes, por lo tanto la solución general del sistema, es

$$\begin{cases} x = (C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t))e^t \\ y = 2(C_1 \operatorname{sen}(2t) - C_2 \cos(2t))e^t \end{cases}$$

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

Ahora, obtenemos la solución general de los dos sistemas, así como la solución particular, mediante el *método de las series de Taylor*, del segundo para $x(0) = 1$ y $y(0) = 1$, utilizando los comandos de MatLab:

```
a) >> S=dsolve('Dx=x+4*y,Dy=x+y','t');
>> pretty(sym([S.x,S.y]))
```

$$\left[\frac{1}{2} C_1 \exp(-t) + \frac{1}{2} C_1 \exp(3 t) + C_2 \exp(3 t) - C_2 \exp(-t) , \right.$$

$$\left. \frac{1}{4} C_1 \exp(3 t) - \frac{1}{4} C_1 \exp(-t) + \frac{1}{2} C_2 \exp(-t) + \frac{1}{2} C_2 \exp(3 t) \right]$$

ó

```
>> pretty(sym(maple('dsolve( {diff(x(t),t)=x(t)+4*y(t),diff(y(t),t)=x(t)+y(t)},
{x(t),y(t)}'))))
```

$$\{x(t) = \frac{1}{2} _C1 \exp(-t) + \frac{1}{2} _C1 \exp(3 t) + _C2 \exp(3 t) - _C2 \exp(-t),$$

$$y(t) = \frac{1}{4} _C1 \exp(3 t) - \frac{1}{4} _C1 \exp(-t) + \frac{1}{2} _C2 \exp(-t) + \frac{1}{2} _C2 \exp(3 t)\}$$

```
b) >> S=dsolve('Dx=x-y,Dy=4*x+y','t');
```

```
>> pretty(sym([S.x,S.y]))
```

$$\left[-\frac{1}{2} \exp(t) (-2 \cos(2 t) C_1 + \sin(2 t) C_2) , \exp(t) (2 \sin(2 t) C_1 + \cos(2 t) C_2) \right]$$

Método de las series de Taylor

```
>> pretty(simple(sym(maple('dsolve( {diff(x(t),t)-x+y=0,diff(y(t),t)-4*x-y=0,
x(0)=1,y(0)=1}, {x(t),y(t)},series')))))
```

$$\{y(t) = 1 + 5 t + \frac{5}{2} t^2 - \frac{5}{2} t^3 - \frac{55}{24} t^4 + \frac{7}{24} t^5 + O(t)^6,$$

$$x(t) = 1 - \frac{5}{2} t^2 - \frac{5}{3} t^3 + \frac{5}{24} t^4 + \frac{1}{2} t^5 + O(t)^6\}$$

Cuadro 10

Sistemas lineales no homogéneos con coeficientes constantes

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + f_2(t) \end{cases}$$

Método de coeficientes indeterminados

Consideremos el sistema siguiente

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + e^{2t} \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases}$$

En primer lugar presentemos la solución general del sistema homogéneo

$$\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} \\ y = 4C_1e^{-t} + C_2e^{2t} \end{cases}$$

De esta solución se desprende, que no es admisible considerar la solución $x = Ae^{2t}$, $y = Be^{2t}$, como solución particular del sistema lineal no homogéneo, puesto que es una solución (para $C_1 = 0$) de la solución general del sistema homogéneo.

Por la experiencia en la solución de ecuaciones diferenciales no homogéneas, conjeturemos que una solución particular es

$$\begin{cases} x = (A_1 + A_2t)e^{2t} \\ y = (B_1 + B_2t)e^{2t} \end{cases}$$

derivando y sustituyendo en el sistema, obtenemos

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

$$\begin{cases} (2A_1 + A_2 + 2A_2t)e^{2t} = (3A_1 + 3A_2t)e^{2t} + (-B_1 - B_2t)e^{2t} + e^{2t} \\ (2B_1 + B_2 + 2B_2t)e^{2t} = (4A_1 + 4A_2t)e^{2t} + (-2B_1 - 2B_2t)e^{2t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (A_2 - B_2)t + (A_1 - A_2 - B_1 + 1) = 0 \\ (4A_2 - 4B_2)t + (4A_1 - 4B_1 - B_2) = 0 \end{cases}$$

para que estas ecuaciones sean nulas, los coeficientes tienen que ser igual a cero, esto es

$$\begin{cases} A_2 - B_2 = 0 & (i) \\ 4A_2 - 4B_2 = 0 & (ii) \\ A_1 - A_2 - B_1 + 1 = 0 & (iii) \\ 4A_1 - 4B_1 - B_2 = 0 & (iv) \end{cases}$$

de (i) y (ii) obtenemos que $A_2 = B_2$, de (iv) $A_1 - B_1 = B_2/4$, de esta última expresión y de (iii), obtenemos

$$\frac{B_2}{4} - B_2 = -1 \Rightarrow B_2 = \frac{4}{3} = A_2 \Rightarrow A_1 - B_1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

haciendo $B_1 = 0$, entonces $A_1 = 1/3$, luego

$$\begin{cases} x = \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}t\right)e^{2t} \\ y = \left(\frac{4}{3}t\right)e^{2t} \end{cases}$$

por lo tanto, la solución general es

$$\begin{cases} x = C_1e^{-t} + \left(C_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}t\right)\right)e^{2t} \\ y = 4C_1e^{-t} + \left(C_2 + \frac{4}{3}t\right)e^{2t} \end{cases}$$

Carlos Núñez

Ahora, obtenemos la solución general y particular utilizando los comandos de MatLab:

```
>> S=dsolve('Dx=3*x-y+exp(2*t),Dy=4*x-2*y','t');
>> pretty(sym([S.x,S.y]))
[- 1/3 C1 exp(-t) + 4/3 C1 exp(2 t) - 1/3 C2 exp(2 t) + 1/3 C2 exp(-t)
- 1/9 exp(2 t) + 4/3 exp(2 t) t , 4/3 C1 exp(2 t) - 4/3 C1 exp(-t)
+ 4/3 C2 exp(-t) - 1/3 C2 exp(2 t) + 4/3 exp(2 t) t - 4/9 exp(2 t)]
```

Método de las series de Taylor

```
>> pretty(simple(sym(maple('dsolve({diff(x(t),t)-3*x+y-exp(2*t)=0,diff(y(t),t)
-4*x+2*y=0,x(0)=1,y(0)=1},{x(t),y(t)},series)'))))
{x(t) = 1 + 3 t + 9/2 t2 + 23/6 t3 + 19/8 t4 + 9/8 t5 + O(t)6,
y(t) = 1 + 2 t + 4 t2 + 10/3 t3 + 13/6 t4 + --- t5 + O(t)6}
30
```

Cuadro 11

Método de variación de parámetro

Consideremos el sistema siguiente

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y + e^t \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y + e^{4t} \end{cases}$$

En primer lugar, consideremos la solución general del sistema homogéneo, para ello conjeturemos que tiene una solución de la forma

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt} \end{cases}$$

derivando y sustituyendo esta posible solución en el sistema, obtenemos

$$\begin{cases} Ame^{mt} = 3Ae^{mt} + 2Be^{mt} \\ Bme^{mt} = Ae^{mt} + 2Be^{mt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-m)A + 2B = 0 \\ A + (2-m)B = 0 \end{cases}$$

para que este sistema de ecuaciones tenga solución, es necesario que

$$\det \begin{vmatrix} 3-m & 2 \\ 1 & 2-m \end{vmatrix} = 0$$

si es diferente de cero, se obtiene la solución trivial $A = B = 0$

desarrollando el determinante, obtenemos la ecuación polinomial asociada o auxiliar

$$m^2 - 5m + 4 = 0 \Rightarrow (m-1)(m-4) = 0$$

si $m = 1$, obtenemos

$$\begin{cases} 2A + 2B = 0 \\ A + B = 0 \end{cases}$$

es claro, que estas ecuaciones son múltiplos entre sí, luego el determinante es cero, por tanto existen soluciones no triviales, una de ellas es $A = 1, B = 1$, entonces

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = -e^t \end{cases}$$

si $m = 4$, obtenemos

Carlos Núñez

$$\begin{cases} -A + 2B = 0 \\ A - 2B = 0 \end{cases}$$

es claro, que estas ecuaciones son múltiplos entre sí, luego el determinante es cero, por tanto existen soluciones no triviales, una de ellas es $A = 2$, $B = 1$, entonces

$$\begin{cases} x = 2e^{4t} \\ y = e^{4t} \end{cases}$$

es evidente, que los dos conjuntos solución obtenidos son linealmente independientes, por lo tanto la solución general del sistema homogéneo, es

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{4t} \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{4t} \end{cases}.$$

Ahora, consideremos una solución particular del sistema no homogéneo, esto es

$$\begin{cases} x = u_1 e^t + u_2 (2e^{4t}) \\ y = u_1 (-e^t) + u_2 e^{4t} \end{cases}, \text{ donde } u_1 \text{ y } u_2 \text{ son funciones de } t \text{ desconocidas}$$

derivando y sustituyendo en el sistema, obtenemos

$$\begin{cases} u_1' e^t + u_1 e^t + 2u_2' e^{4t} + 8u_2 e^{4t} = 3u_1 e^t + 6u_2 e^{4t} - 2u_1 e^t + 2u_2 e^{4t} + e^t \\ -u_1' e^t - u_1 e^t + u_2' e^{4t} + 4u_2 e^{4t} = u_1 e^t + 2u_2 e^{4t} - 2u_1 e^t + 2u_2 e^{4t} + e^{4t} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} u_1' e^t + 2u_2' e^{4t} = e^t \\ -u_1' e^t + u_2' e^{4t} = e^{4t} \end{cases} \Rightarrow u_1' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} e^{3t}, u_2' = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{-3t}$$

integrando, obtenemos

$$u_1 = \int \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} e^{3t} \right) dt = \frac{1}{3} t - \frac{2}{9} e^{3t} \quad \text{y} \quad u_2 = \int \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{-3t} \right) dt = \frac{1}{3} t - \frac{1}{9} e^{-3t}$$

Ecuaciones diferenciales en el contexto del MatLab

por lo tanto, la solución general del sistema, es

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{4t} + \left(\frac{1}{3}t - \frac{2}{9}e^{3t}\right)e^t + \left(\frac{1}{3}t - \frac{1}{9}e^{-3t}\right)(2e^{4t}) \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{4t} + \left(\frac{1}{3}t - \frac{2}{9}e^{3t}\right)(-e^t) + \left(\frac{1}{3}t - \frac{1}{9}e^{-3t}\right)e^{4t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{4t} + \left(\frac{1}{3}t - \frac{2}{9}\right)e^t + 2\left(\frac{1}{3}t - \frac{1}{9}\right)e^{4t} \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{4t} - \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{9}\right)e^t + \left(\frac{1}{3}t + \frac{2}{9}\right)e^{4t} \end{cases}$$

Ahora, obtenemos la solución general y particular utilizando los comandos de MatLab:

```
>> S=dsolve('Dx=3*x+2*y+exp(t),Dy=x+2*y+exp(4*t)', 't');
>> pretty(sym([S.x,S.y]))
[1/3 C1 exp(t) + 2/3 C1 exp(4 t) + 2/3 C2 exp(4 t) - 2/3 C2 exp(t)
+ 1/3 t exp(t) - 2/9 exp(4 t) + 2/3 t exp(4 t) - 2/9 exp(t) ,
1/3 C1 exp(4 t) - 1/3 C1 exp(t) + 2/3 C2 exp(t) + 1/3 C2 exp(4 t)
+ 1/3 t exp(4 t) - 1/9 exp(t) - 1/3 t exp(t) + 2/9 exp(4 t)]
ó
>> pretty(sym(maple('dsolve({diff(x(t),t)=3*x(t)+2*y(t)+exp(t),
diff(y(t),t)=x(t)+2*y(t)+exp(4*t)}, {x(t),y(t)}))))
{x(t) = 1/3 _C1 exp(t) + 2/3 _C1 exp(4 t) + 2/3 _C2 exp(4 t)
- 2/3 _C2 exp(t) + 1/3 t exp(t) - 2/9 exp(4 t) + 2/3 t exp(4 t)
- 2/9 exp(t), y(t) = 1/3 _C1 exp(4 t) - 1/3 _C1 exp(t)
+ 2/3 _C2 exp(t) + 1/3 _C2 exp(4 t) + 1/3 t exp(4 t) - 1/9 exp(t)
- 1/3 t exp(t) + 2/9 exp(4 t)}
```

Carlos Núñez

```
>> S=dsolve('Dx=3*x+2*y+exp(t),Dy=x+2*y+exp(4*t)', 'x(0)=1,y(0)=1','t');  
>> pretty(simple(sym([S.x,S.y])))  
      [(1/3 exp(t) + 2/3 exp(4 t)) t - 1/3 exp(t) + 4/3 exp(4 t) ,  
      (1/3 exp(4 t) - 1/3 exp(t)) t + exp(4 t)]
```

Cuadro 12

Bibliografía

- García, J. et al. (2002). **Aprenda Matlab 6.1 como si estuviera en primero**. Madrid: Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad Politécnica de Madrid.
- Golubitsky, M. y Dellnitz, M. (1999). **Linear algebra and differential equations using MATLAB**. New York: Brooks Cole Publishing Company.
- Ledder, G. (2006). **Differential equations: a modeling approach**. New York: McGraw-Hill, Inc.
- MATLAB (Matriz LABORatory). (2001). **The language of technical computing**. Version 6.1.0.450 Release 12.1. New York: The MathWorks, Inc.
- Núñez R., C. (2000). **Sucesiones y series**. Trabajo se ascenso a la Categoría de Asociado. Universidad Nacional Experimental del Táchira – UNET. San Cristóbal, Venezuela.
- Núñez R., C. (2003). “Los números complejos en el entorno Maple 7”. **Alep Sub – Cero, Serie de Divulgación**. 2003-I(I), 53–73. Venezuela.
- Pérez, C. (1999). **Análisis matemático y álgebra lineal con MATLAB**. Madrid: ra-ma.
- Simmons G. y Krantz, S. (2007). **Ecuaciones diferenciales**. México: McGraw-Hill, Interamericana.
- Takeuchi, Y. et al. (1978). **Ecuaciones diferenciales**. México: Limusa.