

## I. INTRODUCCIÓN

### ***A) Diseño de elementos de concreto reforzado ..... 10***

- ✓ Teorías para el diseño de estructuras de concreto reforzado
- ✓ Ventajas del diseño plástico
- ✓ Hipótesis en el diseño plástico
- ✓ Método de Charles S. Whitney
- ✓ Factores de carga
- ✓ Factores de reducción

### ***B) Elementos de una memoria de cálculo ..... 17***

- ✓ Estructuración
- ✓ Prediseño estructural
- ✓ Evaluación de cargas
- ✓ Análisis estructural
- ✓ Diseño estructural
- ✓ Verificación de las dimensiones propuestas

## II. DISEÑO DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO

### ***A) Vigas rectangulares simplemente armadas ..... 24***

- ✓ Descripción
- ✓ Obtención de fórmulas

### ***B) Requisitos de separaciones y recubrimientos libres del acero de refuerzo en vigas. .... 28***

- ✓ Recubrimiento
- ✓ Límites para el espaciamiento del refuerzo en vigas

**C) Deflexiones en vigas. ....30**

- ✓ Deflexiones permisibles
- ✓ Control de deflexiones

**D) Algunos criterios para el dimensionamiento de vigas. ... 33**

**E) Ejemplos de vigas rectangulares simplemente armadas**

**F) Vigas doblemente reforzadas. .... 45**

- ✓ Descripción y obtención de fórmulas
- ✓ Ejemplos

**G) Vigas de sección "T". .... 57**

- . Descripción
- . Dimensionamiento de las vigas de sección "T". .... 58
- . Fórmulas para las vigas "T"
- . Ejemplos. .... 63

**H) Agrietamiento en vigas. .... 70**

- . Características
- . Recomendaciones del ACI sobre agrietamiento
- . Ejemplo
- . Medios auxiliares de diseño. .... 75

### III CORTANTE EN VIGAS

I) Cortante en vigas. . . . . 76

- . Características
- . Modos de falla de vigas sin refuerzo por tensión diagonal
  - a) Falla por flexión
  - b) Falla por tensión diagonal
  - c) Falla en compresión por cortante
- . Vigas con refuerzo en el alma
- . Mecanismos de falla por cortante en miembros con refuerzo transversal
- . Efectos de las variables en la carga de agrietamiento
  - a) Resistencia del concreto a tensión
  - b) Porcentaje de acero longitudinal
  - c) Esbeltez
  - d) Tamaño
  - e) Carga axial
  - f) Corte de barras longitudinales
- . Expresiones para evaluar la resistencia a efectos de fuerza cortante
- . Refuerzo mínimo por cortante
- . Límites de separación para el refuerzo por cortante
- . Ejemplo

### IV TORSION

J) Torsión en vigas. . . . . 78

- . Características

- . Vigas con efectos importantes de torsión
  - a) Vigas que soportan marquesina
  - b) Vigas con muros colocados excéntricamente
  - c) Vigas de borde en sistemas de piso
  - d) Vigas curvas
  
- Torsión simple
- Comportamiento y modos de falla en vigas de concreto simple
- Comportamiento y modos de falla en vigas de concreto reforzado
- Evaluación de la resistencia de elementos de concreto simple
- Evaluación de la resistencia de elementos de concreto reforzado
- Torsión y cortante
- Torsión y flexión
- Flexión, cortante y torsión
- Expresión para evaluar la resistencia a efectos de torsión
- Ejemplo

## **V ADHERENCIA Y ANCLAJE.**

K) Adherencia y Anclaje. .... 116

- . Introducción
- . Desarrollo de los esfuerzos de adherencia
- . Adherencia en anclaje
- . Adherencia de flexión
- . Longitud básica de desarrollo



- . Desarrollo de varillas en tensión
- . Longitud de desarrollo de varillas
- corrugadas sujetas a compresión
- . Ejemplo
- . Ganchos estándar. . . . . 123
- . Desarrollo del acero positivo en los apoyos libres
- de vigas y en los puntos de inflexión
- . Corte y doblado de barras
- . Anclaje del refuerzo transversal
- . Ejemplo
- . Empalme del refuerzo
- . Traslapes. . . . . 145
- . Recomendaciones del reglamento ACI-318-04
- . Ejemplo

## VI COLUMNAS

- 7.1. Introducción.
- 7.2. Identificación de los estados límite, en general, involucrados en el diseño de columnas.
  - 7.2.1. Estados límite de falla.
  - 7.2.2. Estados límite de servicio.
- 7.3. Efectos de esbeltez o efectos de 2º Orden.
  - 7.3.1. El concepto de elemento corto.
  - 7.3.2. El concepto de elemento largo o esbelto.
  - 7.3.3. El efecto  $P-\delta$ .
  - 7.3.4. El efecto  $P-\Delta$ .
  - 7.3.5. Requisitos del Reglamento ACI-vigente para tomar en cuenta los efectos de esbeltez.

- 7.4. Resistencia última de una sección en flexocompresión, con flexión uniaxial.
  - 7.4.1. Definición de Resistencia última (MR, PR).
  - 7.4.2 Hipótesis en la determinación de la resistencia.
  - 7.4.3 El concepto de falla balanceada.
  - 7.4.4 El concepto de falla en tensión.
  - 7.4.5. El concepto de falla en compresión.
  - 7.4.6. El concepto de diagrama de interacción y su uso para fines de diseño y/o revisión.
  - 7.4.7. Identificación de alternativas de solución al problema de determinación de la resistencia.
    - a) Solución por tanteos.
    - b) Mediante fórmulas desarrolladas para distintos casos de secciones y arreglos de refuerzo.
    - c) Uso de diagramas de interacción.
    - d) Uso de Tablas de Resistencias.
- 7.5. Resistencia última de una sección en flexocompresión, con flexión biaxial.
  - 7.5.1. Definición de Resistencia última (PR, MRx, MRy).
  - 7.5.2. El concepto de superficie de falla.
  - 7.5.3. Diagramas de interacción.
  - 7.5.4. El Método de la carga recíproca de Bresler.
- 7.6. Refuerzo máximo y mínimo.
- 7.7. Resistencia a fuerza cortante.
- 7.8. Especificaciones ACI-vigentes.
- 7.9. Aplicaciones.

## **VII DISEÑO DE LOSAS DE CONCRETO REFORZADO**

### **A) Losas en una dirección**

- ✓ . Introducción
- ✓ . Comportamiento

- ✓ . Dimensionamiento
- ✓ . Acero de refuerzo
- ✓ . Revisión por cortante
- ✓ . Ejemplo

#### B) Losas en dos direcciones

#### C) Losas apoyadas perimetralmente

- . Comportamiento
- . Modos de falla

#### D) Losas Planas

- ✓ Introducción
- ✓ Comportamiento de las losas planas

#### E) Método Generalizado para el Diseño de Losas

- ✓ Comportamiento de sistemas de piso
- ✓ Influencia de las columnas
- ✓ Efectos de la rigidez flexionante de las vigas
- ✓ Efectos de la rigidez torsionante de las vigas
- ✓ Influencia de tipo de carga

#### F) Método de Diseño Directo

- ✓ Desarrollo
- ✓ Limitaciones
- ✓ Determinación del momento estático total
- ✓ Distribución del momento estático total en momentos
- ✓ negativo y positivo “Momentos longitudinales”

- ✓ Distribución de los momentos a lo ancho de la franja
- ✓ Determinación de la fuerza cortante en vigas y losas
- ✓ Determinación de los momentos en columnas
- ✓ Efectos de cargas desfavorables
- ✓ Cálculo de parámetros relacionados
- ✓ con las rigideces de los elementos
- ✓ Peraltes mínimos para losas en dos direcciones
- ✓ Refuerzo para losas en dos direcciones
- ✓ Ejemplo

## **VII ZAPATAS**

9.1. Tipos y función de las zapatas.

9.2. Zapatas rectangulares y cuadradas.

9.2.1. Identificación de estados límite de falla y de servicio.

9.2.2. Aspectos básicos del comportamiento en el desarrollo de cada estado límite.

9.2.3. Tipos de refuerzo ordinario requerido.

9.2.4. Especificaciones ACI-vigentes.

Aplicaciones

## **IX. CONCLUSIONES**

## **X. BIBLIOGRAFÍA**

# I

## INTRODUCCIÓN

## DISEÑO DE ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO

Existen dos teorías para el diseño de estructuras de concreto reforzado: “La teoría elástica” llamada también “Diseño por esfuerzos de trabajo” y “La teoría plástica” ó “Diseño a la ruptura”.

**La teoría elástica** es ideal para calcular *los esfuerzos y deformaciones* que se presentan en una estructura de concreto bajo *las cargas de servicio*. Sin embargo esta teoría es incapaz de predecir *la resistencia última de la estructura* con el fin de determinar la intensidad de las cargas que provocan la ruptura y así poder asignar *coeficientes de seguridad*, ya que la hipótesis de proporcionalidad entre esfuerzos y deformaciones es completamente errónea en la vecindad de la falla de la estructura.

**La teoría plástica** es un método para calcular y diseñar secciones de concreto reforzado fundado en las experiencias y teorías correspondientes al estado de ruptura de las teorías consideradas.

### VENTAJAS DEL DISEÑO PLÁSTICO

1. En la proximidad del fenómeno de ruptura, los esfuerzos no son proporcionales a las deformaciones unitarias, si se aplica la teoría elástica, esto llevaría errores hasta de un 50% al calcular los momentos resistentes últimos de una sección. En cambio, si se aplica la teoría plástica, obtenemos valores muy aproximados a los reales obtenidos en el laboratorio.
2. La carga muerta en una estructura, generalmente es una cantidad invariable y bien definida, en cambio la carga viva puede variar mas allá del control previsible. En la teoría plástica, se asignan diferentes factores de seguridad a ambas cargas tomando en cuenta sus características principales.

3. En el cálculo del concreto presforzado se hace necesario la aplicación del diseño plástico, porque bajo cargas de gran intensidad, los esfuerzos no son proporcionales a las deformaciones.

### **HIPÓTESIS DEL DISEÑO PLÁSTICO**

Para el diseño de los miembros sujetos a carga axial y momento flexionante, rompiendo cumpliendo con las condiciones aplicables de equilibrio y compatibilidad de deformaciones, las hipótesis son:

- A) Las deformaciones unitarias en el concreto se supondrán directamente proporcionales a su distancia del eje neutro. Excepto en los anclajes, la deformación unitaria de la varilla de refuerzo se supondrá igual a la deformación unitaria del concreto en el mismo punto.
- B) La deformación unitaria máxima en la fibra de compresión extrema se supondrá igual a 0.003 en la ruptura.
- C) El esfuerzo en las varillas, inferior al límite elástico aparente  $F_y$ , debe tomarse igual al producto de  $2.083 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  por la deformación unitaria de acero. Para deformaciones mayores que corresponden al límite elástico aparente, el esfuerzo en las barras debe considerarse independientemente de la deformación igual al límite elástico aparente  $F_y$ .
- D) Se desprecia la tensión en el concreto en secciones sujetas a flexión.
- E) En la ruptura, los esfuerzos en el concreto no son proporcionales a las deformaciones unitarias. El diagrama de los esfuerzos de compresión puede suponerse rectangular, trapezoidal, parabólico, o de cualquier otra forma cuyos resultados concuerden con las pruebas de los laboratorios.
- F) La hipótesis anterior puede considerarse satisfecha para una distribución rectangular de esfuerzos definida como sigue:

En la ruptura se puede suponer un esfuerzo de  $0.85 f'_c$ , uniformemente distribuido sobre una zona equivalente de compresión, limitada por los bordes de la sección transversal y una línea recta, paralela al eje neutro y localizada a una

distancia  $a = \beta_1 c$  a partir de la fibra de máxima deformación unitaria en compresión y el eje neutro, se medirá perpendicularmente a dicho eje. El coeficiente " $\beta_1$ " se tomará como 0.85 para esfuerzos  $f'_c$  hasta de  $280 \text{ kg/cm}^2$  y se reducirá continuamente en una proporción de 0.05 por cada  $70 \text{ kg/cm}^2$  de esfuerzo en exceso de los  $280 \text{ kg/cm}^2$ .

### **ANÁLISIS DE LAS HIPÓTESIS**

La hipótesis (A), acepta la variación lineal de las deformaciones unitarias. Lo cual es cierto, excepto en la vecindad de la ruptura, pero las diferencias son muy pequeñas y no son dignas de tomarse en cuenta.

En cuanto a la deformación unitaria de las varillas de refuerzo es igual a la del concreto en el mismo punto, es indispensable para el trabajo conjunto del acero de refuerzo y el concreto.

La hipótesis (B), señala la ruptura del concreto, la deformación unitaria 0.003 cuyo valor concuerda con el promedio de los datos obtenidos en el laboratorio, resultando ligeramente conservador.

La hipótesis (C), se fundamenta en el diagrama esfuerzo-deformación de los aceros de refuerzo, y, para deformaciones mayores que las correspondientes al límite elástico aparente debe considerarse el esfuerzo en las varillas, independiente e igual a " $F_y$ " porque se encuentran dichas deformaciones en la zona plástica del diagrama, el cual puede considerarse horizontal sin mucho error.

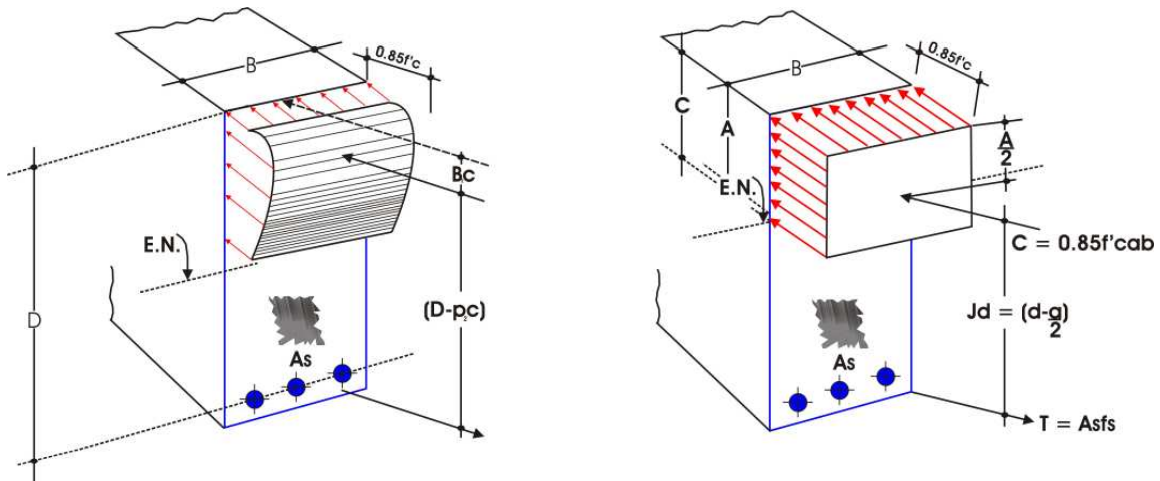
La hipótesis (D), desprecia la resistencia a la tensión del concreto, en miembros sujetos a flexión. El error que con ello se comete es muy pequeño y permite establecer fórmulas mucho más sencillas que si se considera dicha resistencia

La hipótesis (F), se basa en una solución presentada en 1937 por Charles S. Whitney y tiene la ventaja de proporcionar un método muy sencillo de análisis de las cuñas de esfuerzos de compresión.



**MÉTODO DE CHARLES S. WHITNEY**

Este método consiste en suponer una distribución uniforme de los esfuerzos de compresión de intensidad  $0.85 f'_c$  actuando sobre un área rectangular limitada por los bordes de la sección y una recta paralela al eje neutro, localizada a una distancia  $a = \beta_1 c$  de la fibra de máxima deformación en compresión.



**Figura 1.1. Cuña rectangular de esfuerzos equivalentes en una viga.**

En la figura 1.1 se ilustra la cuña rectangular de Whitney en el caso de flexión en una viga.

La distribución rectangular de esfuerzos tiene que cumplir dos condiciones:

1. El volumen de la cuña rectangular  $C$  tiene que ser igual al volumen de la cuña real (Fig. 1.1).
2. La profundidad  $\frac{a}{2}$  de la resultante  $C$  en la cuña rectangular que tiene que ser igual a la profundidad  $\beta_1 c$  de la resultante  $C$  en el diagrama real de esfuerzos.

Cumpliendo esas dos condiciones, la mecánica de las fuerzas interiores en una sección dada no se altera.

La hipótesis (F) hace que la compresión total como volumen de la cuña rectangular tenga el valor:

$$C = 0.85 f'_c a b \quad (a)$$

Para una sección rectangular.

Si se designa por  $\beta_1$  la relación entre el área real del diagrama de compresiones (Fig. 1.1) y el área del rectángulo circunscrito a ese diagrama, el volumen de la cuña real de compresiones puede escribirse así:

$$C = 0.85F_c\beta_1cb \quad (b)$$

Por lo que igualando las ecuaciones (A) y (B) para que cumpla la primera condición:

$$0.85F_cab = 0.85F_c\beta_1cb$$

De donde:

$$a = \beta_1 c$$

Como lo establece la hipótesis (F) ya citada.

La segunda condición que deben cumplir las resultantes de los dos diagramas (el real y el rectangular, se cumplen con la expresión):

$$\beta_2 = \frac{a}{2}$$

Es decir:

$$\beta_2 = \frac{\beta_1 c}{2}$$

Por lo tanto:

$$\beta_2 = \frac{\beta_1}{2}$$

En consecuencia:  $\beta_2$  se tomará igual a 0.425 para concretos con  $F_c \leq 280 \text{ kg/cm}^2$  y disminuirá a razón de 0.025 por cada  $70 \text{ kg/cm}^2$  en exceso de los 280

En el diagrama real de esfuerzos de la figura 1.1 se ha asignado a los esfuerzos de compresión un valor máximo de  $0.85F_c$ , en lugar de  $f_c$  que es la fatiga de ruptura en cilindros a los 28 días.

Eso se debe principalmente a que los elementos estructurales por lo general tienen una esbeltez mayor que 2, que es la correspondiente a los cilindros de prueba. La esbeltez influye en forma muy importante en el esfuerzo final de ruptura, el cual disminuye hasta cerca del 85% para esbelteces de 6 o mayores.

El tipo de carga también podría tener influencia en la reducción del esfuerzo de ruptura del concreto en las estructuras, pues en estas es de larga duración, cuando menos la correspondiente a carga muerta, la cual actúa permanentemente desde un principio. Sin embargo, considerando que la carga muerta suele ser de un 40% del valor de las cargas totales, su acción en la fatiga final de ruptura no parece ser muy importante.

### **FACTORES DE CARGA**

Factor de carga es el número por el cual hay que multiplicar el valor de la carga real o de servicio para determinar la carga última que puede resistir un miembro en la ruptura.

Generalmente la carga muerta en una estructura, puede determinarse con bastante exactitud pero no así la carga viva cuyos valores el proyectista solo los puede suponer ya que es imprevisible la variación de la misma durante la vida de las estructuras; es por ello, que el coeficiente de seguridad o factor de carga para la carga viva es mayor que el de la carga muerta. Los factores que en el reglamento del ACI se denominan U, son los siguientes:

A) Para combinaciones de carga muerta y carga viva:

$$U = 1.4D + 1.7L$$

Donde: D = Valor de la carga muerta y  
L = Valor de la carga viva

B) Para combinaciones de carga muerta, carga viva y carga accidental:

$$U = 0.75 (1.4D + 1.7L + 1.7W) \text{ o}$$
$$U = 0.75 (1.4D + 1.7L + 1.87E)$$

Donde: W = Valor de la carga de viento y

$E$  = Valor de la carga de sismo

Cuando la carga viva sea favorable se deberá revisar la combinación de carga muerta y carga accidental con los siguientes factores de carga:

$$U = 0.90D + 1.30W$$

$$U = 0.90D + 1.30E$$

### FACTORES DE REDUCCIÓN

Es un número menor que 1, por el cual hay que multiplicar la resistencia nominal calculada para obtener la resistencia de diseño.

Al factor de reducción de resistencia se denomina con la letra  $\phi$ : los factores de reducción son los siguientes:

Para:

Flexión .....	0.90
Cortante y Torsión .....	0.75
Adherencia .....	0.85
Compresión con o sin flexión	
columnas con refuerzo helicoidal .....	0.75
Columnas con Estribos .....	0.70

El factor de reducción de resistencia toma en cuenta las incertidumbres en los cálculos de diseño y la importancia relativa de diversos tipos de elementos; proporciona disposiciones para la posibilidad de que las pequeñas variaciones adversas en la resistencia de los materiales, la mano de obra y las dimensiones las cuales, aunque pueden estar individualmente dentro de las tolerancias y los

límites pueden al continuarse, tener como resultado una reducción de la resistencia.

## **II**

# **DISEÑO DE VIGAS**

## VIGAS RECTANGULARES SIMPLEMENTE ARMADAS

Una viga de concreto es rectangular, cuando su sección transversal en compresión tiene esa forma.

Es simplemente armada, cuando sólo tiene refuerzo para tomar la componente de tensión del par interno.

En general, en una viga la falla puede ocurrir en dos formas:

Una de ellas se presenta cuando el acero de refuerzo alcanza su límite elástico aparente o límite de fluencia  $F_y$ ; sin que el concreto llegue aún a su fatiga de ruptura  $0.85 F'_c$ .

La viga se agrietará fuertemente del lado de tensión rechazando al eje neutro hacia las fibras más comprimidas, lo que disminuye el área de compresión, aumentando las fatigas del concreto hasta presentarse finalmente la falla de la pieza. Estas vigas se llaman “**Subreforzadas**” y su falla ocurre más ó menos lentamente y va precedida de fuertes deflexiones y grietas que la anuncian con anticipación.

El segundo tipo de falla se presenta cuando el concreto alcanza su límite  $0.85 F'_c$  mientras que el acero permanece por debajo de su fatiga  $F_y$ . Este tipo de falla es súbita y prácticamente sin anuncio previo, la cual la hace muy peligrosa. Las vigas que fallan por compresión se llaman “**Sobreforzadas**”.

Puede presentarse un tipo de viga cuya falla ocurra simultáneamente para ambos materiales, es decir, que el concreto alcance su fatiga límite de compresión  $0.85 F'_c$ , a la vez que el acero llega también a su límite  $F_y$ . A estas vigas se les da el nombre de “**Vigas Balanceadas**” y también son peligrosas por la probabilidad de la falla de compresión.

Para evitar las vigas sobre reforzadas y las balanceadas, el reglamento del ACI 318-04 limita el porcentaje de refuerzo al 75% del valor correspondiente a las secciones balanceadas.

Por otra parte, también las vigas con porcentajes muy pequeños, suelen fallar súbitamente; para evitar ese riesgo el reglamento ACI 318-04 exige que el porcentaje mínimo en miembros sujetos a flexión sea de:

$$\rho = \frac{14.5}{F_y}.$$

El porcentaje de la sección balanceada se obtiene como sigue:

Por equilibrio de fuerzas:

$$C = T$$

$$C = 0.85F_c\beta_1bc$$

$$T = A_s.F_y$$

Por lo tanto:  $0.85F_c\beta_1bc = A_s.F_y$

$$\frac{A_s}{bd}F_y = 0.85\beta_1F_c \frac{c}{d}$$

Llamando:  $\rho = \frac{A_s}{bd}$   $\rho = \frac{0.85\beta_1F_c}{F_y} \cdot \frac{c}{d}$  (2.1)

Del diagrama de deformaciones, aceptando las condiciones de viga balanceada:

$$\epsilon_c = 0.003 \quad \epsilon_y = \frac{F_y}{E_s}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_y} = \frac{0.003}{\left[0.003 + \frac{F_y}{2.039 \times 10^6}\right]} = \frac{6115}{6115 + F_y}$$

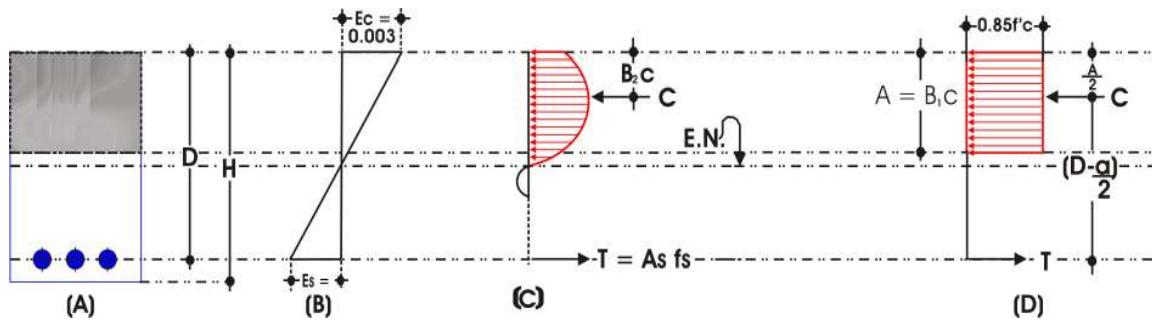
Por lo tanto:  $\rho_b = \frac{0.85\beta_1F_c}{F_y} \cdot \frac{6115}{6115 + F_y}$  (2.2)

La expresión (2.2) representa el valor del porcentaje de refuerzo en la sección balanceada de una viga. El reglamento ACI 318-04 limita el porcentaje máximo aplicable a miembros sujetos a flexión, a 75% de ese valor por las razones ya explicadas.

$$\rho_{\max} = \frac{0.75 \times 0.85\beta_1F_c}{F_y} \cdot \frac{6115}{6115 + F_y} \quad (2.3)$$

El momento último resistente de una viga rectangular puede deducirse de la siguiente manera:

$$C = T \quad \text{en consecuencia:} \quad 0.85\beta_1 F_c b c = A_s F_y$$



**Fig. 2.1. Deformaciones y esfuerzos en una viga rectangular.**

El asignar a  $f_s$  el valor  $F_y$ . Se está considerando que el acero fluye y la viga es sobrerreforzada:

$$c = \frac{A_s F_y}{0.85\beta_1 F_c b}$$

$$\text{Si llamamos:} \quad \rho = \frac{A_s}{bd} \quad c = \frac{\rho F_y}{0.85\beta_1 F_c} d \quad (2.4)$$

Que es la profundidad el eje neutro en la ruptura.

El momento último del par es:

$$M_u = C \cdot (d - \beta_2 c) \quad (\text{Fig. 2.1})$$

$$\text{En donde:} \quad C = 0.85\beta_1 F_c b c$$

Y sustituyendo valores de C y c:

$$M_u = \rho F_y b d^2 \cdot \left(1 - \frac{\beta_2}{0.85\beta_1} \rho \frac{F_y}{F_c}\right)$$

$$\text{Y se designa por:} \quad \omega = \rho \frac{F_y}{F_c}$$

$$M_u = b d^2 F_c \omega \cdot \left(1 - \frac{\beta_2}{0.85\beta_1} \omega\right) \quad (2.5)$$

Anteriormente habíamos establecido que  $\beta_1 = 2\beta_2$



Por lo tanto:  $Mu = bd^2 F_c \omega (1 - 0.59\omega)$

Estableciendo el momento último en función del acero de refuerzo se produce de la siguiente manera, refiriéndose a la figura 2.1 y empleando la cuña rectangular de Whitney:

$$Mu = As.Fy.(d - \frac{a}{2})$$

Ambas expresiones del momento último, el reglamento las propone afectadas de un coeficiente de seguridad que como ya se vio, para las vigas vale 0.9, por lo que quedarían finalmente:

$$Mu = \phi.(bd^2 F_c \omega (1 - 0.59\omega)) \quad (2.6)$$

$$Mu = \phi.\left[AsFy.(d - \frac{a}{2})\right] \quad (2.7)$$

En donde:

$$a = \frac{AsFy}{0.85F_c b} \quad (2.8)$$

En función de porcentaje, el momento último toma la forma:

$$Mu = \phi.\left[bd^2 \rho Fy(1 - 0.59\rho \frac{Fy}{F_c})\right] \quad (2.9)$$

Despejando el índice de refuerzo "W" de la fórmula (2.6):

$$Mu = \phi.[F_c b d^2 \omega (1 - 0.59\omega)]$$

Dado que  $\phi = 0.90$

$$Mu = 0.90[F_c b d^2 \omega (1 - 0.59\omega)]$$

$$Mu = 0.90F_c b d^2 \omega - 0.53F_c b d^2 \omega^2$$

Por lo tanto:  $0.53F_c b d^2 \omega^2 - 0.90F_c b d^2 \omega + Mu = 0$

$$0.53F_c b d^2 .(\omega^2 - 1.698\omega + \frac{Mu}{0.53F_c b d^2}) = 0$$

$$\omega = 0.849 \pm \sqrt{(0.721 - \frac{Mu}{0.53F_c b d^2})}$$

En la fórmula anterior, únicamente se toma el signo negativo ya que si tomamos el valor positivo del radical resultaría “W” muy alto y al calcular el porcentaje de acero “ $\rho$ ” con  $\rho = \omega \frac{F_c}{F_y}$ , resultaría mayor que el máximo permisible,  $\rho_{\max} = 0.75\rho_b$

$$\text{Así que:} \quad \omega = 0.849 - \sqrt{(0.721 - \frac{Mu}{0.53F_c b d^2})} \quad (2.10)$$

## REQUISITOS DE SEPARACIONES Y RECUBRIMIENTOS LIBRES DEL ACERO DE REFUERZO EN VIGAS

### Recubrimiento

El refuerzo debe de tener recubrimiento adecuado cuyo fin es el de proteger al acero de dos agentes: La corrosión y el fuego.

La magnitud del recubrimiento debe fijarse por lo tanto, según la importancia de estos agentes agresivos.

Por lo tanto, debe proveerse de un recubrimiento suficiente para tales fines, aunque un recubrimiento demasiado grande, provocará demasiadas grietas.

**El agrietamiento** se debe a las deformaciones causadas por los cambios volumétricos y los esfuerzos ocasionados por fuerzas de tensión, por momentos flexionantes, o por las fuerzas cortantes.

El recubrimiento se mide desde la superficie del concreto hasta la superficie exterior del acero, a la cual, se aplica el recubrimiento. Cuando se prescriba un recubrimiento mínimo para una clase de elemento estructural; éste debe medirse:

Hasta el borde exterior de los estribos, anillos ó espirales, si el refuerzo transversal confina las varillas principales hasta la capa más cercana de varillas, si se emplea más de una capa sin estribos o anillos, hasta los dispositivos metálicos de los extremos o los ductos en el acero de preesfuerzo postensado. El reglamento del A.C.I. 318-04 recomienda un recubrimiento mínimo de 4 cm. para vigas.

## **Límites para el Espaciamiento del Refuerzo en Vigas**

En cuanto a la separación de las varillas en vigas, el reglamento del A.C.I. 318-04 recomienda lo siguiente:

- ✓ La distancia libre entre barras paralelas no debe ser menor que: El diámetro nominal de las barras: 1.3 veces el tamaño máximo del agregado grueso o 2.5 cm.
- ✓ Cuando el refuerzo paralelo se coloque en dos o más capas, las varillas de las capas superiores, deben colocarse exactamente arriba de las que están en las capas inferiores, con una distancia libre entre ambas; no menor de 2.5 cm.

## **Deflexiones en Vigas**

El cálculo de deflexiones tiene dos aspectos.

Por un lado, es necesario calcular las deflexiones de miembros estructurales bajo cargas y condiciones ambientales conocidas.

Por otro lado, deben establecerse criterios sobre límites aceptables de deflexiones.

El problema de calcular las deflexiones de miembros de estructuras reales es aún más difícil que el de estimar las deflexiones de vigas ensayadas en laboratorios. Los siguientes son algunos de los factores que lo complican.

El comportamiento del concreto es función del tiempo y, por consiguiente en cualquier enfoque riguroso debe de tenerse en cuenta la historia de carga del miembro investigado. En la práctica esto no es posible generalmente, ya que las condiciones de carga son muy variables, tanto en magnitud como en el tiempo de aplicación.

También son difíciles de predecir las variaciones de humedad y temperatura con el tiempo, las cuales tienen influencia sobre las deflexiones a largo plazo.

El segundo aspecto, o sea, la limitación de deflexiones, es importante desde dos puntos de vista.

En primer lugar, las deflexiones excesivas de un miembro pueden producir daños en otros miembros estructurales, o más frecuentemente en elementos no estructurales como muros divisorios, o acarrear problemas como acumulación de agua en azoteas.

Los valores de las deflexiones permisibles dependen desde este punto de vista de varios factores, tales como el tipo de elementos no estructurales, tipo de conexión entre el miembro estructural y otros elementos estructurales o no, y del método de construcción utilizado.

En segundo lugar, a veces es significativa la respuesta humana ante las deflexiones de los miembros. Las deflexiones excesivas no son toleradas por los usuarios de la estructura, ya que producen una sensación de inseguridad, ya por razones de orden estético.

Existen métodos para el cálculo de deflexiones de vigas bajo cargas de servicio de corta y larga duración.

Algunos de estos métodos son: Métodos de YU y WINTER, Método del Reglamento del A.C.I. 318-04, Método de las NTCDF, además de otros métodos como los propuestos por el Comité Euro-Internacional del Concreto (CEB).

### **Deflexiones Permisibles**

Se ha mencionado anteriormente que las deflexiones de elementos estructurales deben limitarse por dos razones: Por la posibilidad de que provoquen daños en otros elementos de la estructura y por los motivos de orden estético.

El valor de las deflexiones permisibles para evitar daños en otros elementos, depende principalmente del tipo de elementos y de construcción empleados, también debe de considerarse el procedimiento de construcción.

Desde el punto de vista estético, el valor de las deflexiones permisibles depende principalmente del tipo de estructura y de la existencia de líneas de

referencia que permitan apreciar las deflexiones. Es obvio que las deflexiones permisibles en una residencia deben ser menores que en una bodega.

Cuando existe una línea horizontal de referencia, las deflexiones permisibles deben fijarse como un valor absoluto, mientras que si no existe dicha referencia, es más conveniente fijar las deflexiones permisibles como una fracción del claro de la viga.

La posibilidad de dar contraflechas es otro factor que debe tomarse en cuenta al establecer las deflexiones permisibles. El valor de la contraflecha puede restarse de la deflexión calculada y la diferencia, compararse con la deflexión permisible. Sin embargo, no deben darse contraflechas excesivamente grandes.

### Control de Deflexiones

El reglamento A.C.I. 318-04 permite prescindir del cálculo de deflexiones de vigas y de losas que trabajan en una dirección siempre que se satisfagan los peraltes no perjudique a elementos no estructurales.

Tabla 2.1

Peraltes totales mínimos de vigas y losas que trabajan en una dirección cuando no se calculan las deflexiones y cuando las deformaciones de dichos elementos no perjudican a elementos no estructurales.

elemento	Libremente apoyada	Un extremo continuo	Ambos extremos continuos	voladizo
Losas macizas	$L / 20$	$L / 24$	$L / 28$	$L / 10$
Vigas y losas nervuradas	$L / 16$	$L / 18.5$	$L / 21$	$L / 8$

La longitud "L" es en cms.

Nota: Estos valores se aplican para concreto de peso normal y acero con límite de fluencia  $F_y = 4220 \text{ kg/cm}^2$ .

Para valores distintos de  $F_y$ , los valores de esta tabla deberán multiplicarse por:

$$(0.4 + \frac{F_y}{7030})$$

### Algunos Criterios para el Dimensionamiento de Vigas

El caso mas general en el dimensionamiento de vigas es aquél en el que son conocidos el momento flexionante y las resistencias de los materiales y se trata de determinar las dimensiones de la sección y el área de acero necesaria.

En la ecuación de flexión:  $M_u = \phi [F_c b d^2 \omega (1 - 0.59 \omega)]$

Existen tres variables independientes que intervienen en el problema:  $b$ ,  $d$  y  $W$ .

Según la forma en que se plantea el problema y de acuerdo con algún criterio conveniente, se suelen fijar los valores de dos de estas variables y se calcula la tercera de ellas.

Una forma común de proceder consiste en suponer un valor de  $P$ , a partir del cual se determina un valor de  $W$ , y el valor de la relación  $b/d$ . En casos prácticos puede resultar preferible partir de la relación  $b/h$ .

El valor de  $P$  que se suponga debe estar comprendido entre los límites inferior y superior permisibles, y debe fijarse atendiendo a consideraciones económicas.

Para condiciones de costos prevalecientes en México, los porcentajes pequeños suelen conducir a soluciones mas económicas. Si el valor escogido es del orden de 0.35 a 0.50  $P_b$  o menor, habrá poco riesgo de que las deflexiones sean excesivas. Sin embargo, puede suceder que sea necesario lograr secciones esbeltas por motivos arquitectónicos o para disminuir el peso propio, y entonces conviene usar porcentajes elevados. El valor de  $b/d$  que se suponga, influye considerablemente en el costo de la estructura: Mientras más peraltada sea la sección, menor es el consumo de materiales.

Sin embargo, el uso de peraltes excesivamente grandes puede llevar a problemas de inestabilidad lateral y a un aumento en el costo de los acabados del edificio, debido al incremento en el espesor de los sistemas de piso. También el costo de la cimbra aumenta con el peralte de la viga. Cuando no existen

limitaciones en el peralte, los valores  $b/d$  suelen estar comprendidos entre  $1/4$  y  $1/2$  aproximadamente.

## EJEMPLOS DE VIGAS RECTANGULARES SIMPLEMENTE ARMADAS.

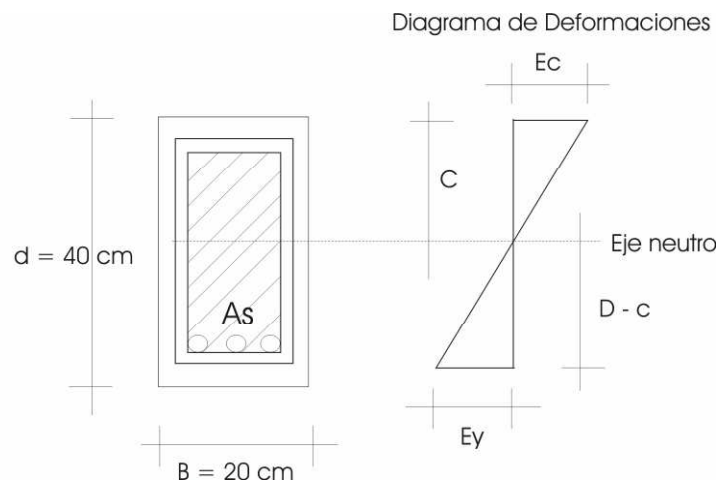
Determinar el último momento resistente de una viga rectangular simplemente armada, investigando si la viga falla en tensión o compresión.

- A) Por medio de la cuña rectangular de esfuerzos.
- B) Por fórmulas.

DATOS:

Datos

$B = 20 \text{ cm}$   
 $d = 40 \text{ cm}$   
 $r = 5 \text{ cm}$   
 $F_c = 200 \text{ kg/cm}^2$   
 $F_y = 4250 \text{ kg/cm}^2$   
 $A_s = 10.14 \text{ cm}^2$   
 ( 2 barras no. 8 )



SOLUCION:

a).- Por medio de la cuña rectangular.

1.- Cálculo de la profundidad del eje neutro.

Cuyo valor no debe exceder de:

$$C = T$$

$$0.85F_c a b = A_s F_y$$

Suponiendo que el acero fluye.

$$a = \frac{A_s F_y}{0.85 b F_c}$$

Sustituyendo los valores en la ecuación anterior tenemos:

$$a = \frac{(10.14)(4250)}{(0.85)(20)(200)} = 12.58 \text{ cm}$$

## 2.- Tipo de falla de la viga.

Para calcular el tipo de falla de la viga, podemos calcular la Deformación Máxima del concreto cuando el acero empieza a fluir.

Del diagrama de Deformaciones de la figura anterior tenemos.

$$\frac{\epsilon_c}{\epsilon_y} = \frac{c}{d - c} \qquad \epsilon_c = \frac{\epsilon_y - c}{d - c}$$

Recordando que:  $a = \beta_1 c$  y como  $F_c = 200 \text{ kg/cm}^2 < 280 \text{ kg/cm}^2$

$$\beta_1 = 0.85 \quad \text{Por lo tanto: } c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{12.58}{0.85} = 14.80 \text{ cm}$$

$$\epsilon_y = \frac{F_y}{E_s} = \frac{4250}{2.1 \times 10^6} = 0.0021$$

$$\text{Por lo tanto: } \epsilon_c = \frac{(0.0021)(14.80)}{40 - 14.80} = 0.0012$$

Resultó menor que 0.003 y por lo tanto, la viga falla en tensión.

## 3.- Momento resistente.

$$Mu = \phi \left[ A_s F_y \left( d - \frac{a}{2} \right) \right] \quad \text{Donde } \phi = 0.90 \text{ para flexión}$$

Sustituyendo:

$$Mu = 0.90 \left[ 10.14 \times 4250 \left( 40 - \frac{12.58}{2} \right) \right] = 1298230 \text{ kg} - m$$



b).- Por Formulas.

1.- Calculo del porcentaje de acero.

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{10.14cm^2}{(20cm)(40cm)} = 0.0127$$

Cuyo valor no debe exceder de:

$$\rho = 0.75 \times 0.85 \beta_1 \frac{F_c}{F_y} \cdot \frac{6115}{6115 + F_y}$$

$$\rho = 0.75(0.85^2) \frac{200}{4250} \left[ \frac{6115}{6115 + 4250} \right] = 0.0152$$

El porcentaje de la viga es mucho menor que el límite que señala el reglamento y que corresponde el 75% del valor del porcentaje para sección balanceada. Por lo tanto, **“la viga es subreforzada y falla en tensión”**.

2.- Calculo del último momento resistente.

$$\omega = \rho \frac{F_y}{F_c}$$

$$\omega = \frac{(0.0127)(4250)}{200} = 0.268$$

$$Mu = \phi(bd^2 F_c \omega (1 - 0.59\omega))$$

Sustituyendo en la ecuación anterior tenemos:

$$Mu = 0.90(20)(40^2)(200)(0.268)[1 - (0.59)(0.268)]$$

$$Mu = 1299593 \text{ kg-cm}$$

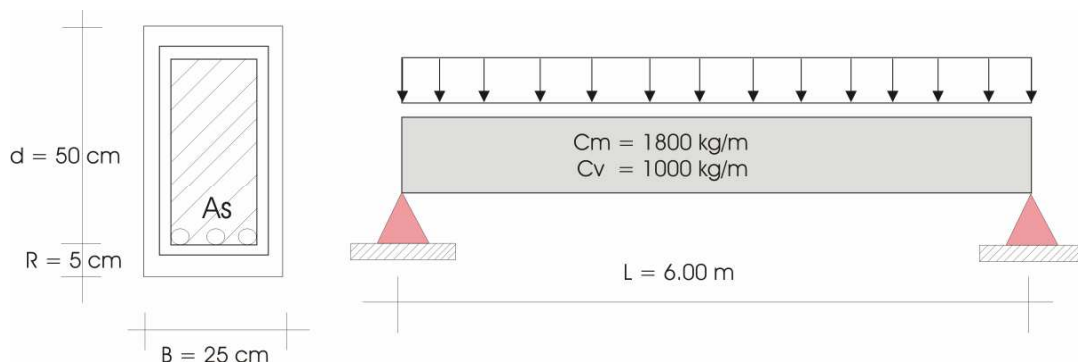
En los siguientes ejemplos se procede a calcular el área de acero de una viga rectangular simplemente armada para que resista un momento último dado, conociendo la resistencia de los materiales y proponiendo una sección.

Se busca que las vigas sean subreforzadas ya que como se mencionó anteriormente su falla ocurre más o menos lenta y va precedida de grietas y deflexiones que la anuncian.

Se resuelve por medio de fórmulas ya que es un procedimiento más rápido.

Ejemplo:

Diseñar por flexión el área de acero máxima que requiere una viga rectangular simplemente reforzada con  $F_c = 200 \text{ kg/cm}^2$ ,  $F_y = 4220 \text{ kg/cm}^2$ .



La carga muerta incluye el peso propio de la viga.

- **Cálculo de la carga última:**

-  $D_{live} = 1800 \frac{\text{kg}}{\text{m}} ; D_{LU} = 1.4 D_{Live} = (1.4)(1800) = 2520 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$

-  $L_{LIVE} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}} ; L_{LU} = 1.7 L_{Live} = (1.7)(1000) = 1700 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$

$$W_u = 4220 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Recuérdese que los factores de carga son 1.4 para carga muerta y de 1.7 para carga viva.

- Cálculo del momento último máximo
  - Como la viga está simplemente apoyada, el momento máximo ocurre en el centro del claro y vale  $\frac{WL^2}{8}$ .
- $$Mu = \frac{(4250)(6.00m)^2}{8} = 18990kg - m$$
- Cálculo del peralte efectivo.
  - Con el fin de evitar deflexiones excesivas en la viga, se propone un porcentaje  $\rho = 0.5\rho_{balanceado}$ .

$$\rho_b = \frac{(0.85)(0.85)(200)}{4250} \left[ \frac{6115}{6115 + 4250} \right] = 0.02026$$

$$\rho = (0.5)(0.02026) = 0.0101$$

$$W = \rho \frac{F_y}{F_c} = (0.0101) \left( \frac{4220}{200} \right) = 0.216$$

$$d = \sqrt{\frac{Mu}{\phi F_c b \omega (1 - 0.59\omega)}} = \sqrt{\frac{(18990)(100)}{(0.90)(200)(0.213)(1 - (0.59 \times 0.123))}}$$

$$d = 47.60cm \approx 50cm$$

**Nota:** Para que las unidades sean compatibles en la formula “Mu” debe sustituirse en kg-m.

Como el peralte efectivo “d” adoptado fuè de 50 cm en lugar de 47 cm, cambia el índice de refuerzo de la sección supuesta.

$$\omega = 0.849 - \sqrt{(0.721 - \frac{(18990)(100)}{(0.53)(200)(25)(50^2)})} = 0.190$$

$$\rho = \omega \frac{F_c}{F_y} = (0.190) \left( \frac{200}{4220} \right) = 0.0090$$

Comparando los porcentajes de acero permisibles, tenemos:

$$\rho_{\max} = 0.75\rho_b = (0.75)(0.2026) = 0.0033$$

$$\mathbf{0.003 < 0.0090 < 0.0152}$$

Por lo tanto el porcentaje obtenido esta dentro de lo permitido.

Obtención del área de acero.

$$A_s = \rho b d = (0.0090)(25\text{cm})(50\text{cm}) = 11.25\text{cm}^2$$

Comparando el peralte total “h” con el mínimo que recomienda el reglamento A.C.I. 318-04, para evitar el calculo de deflexiones.

Peralte mínimo recomendado.

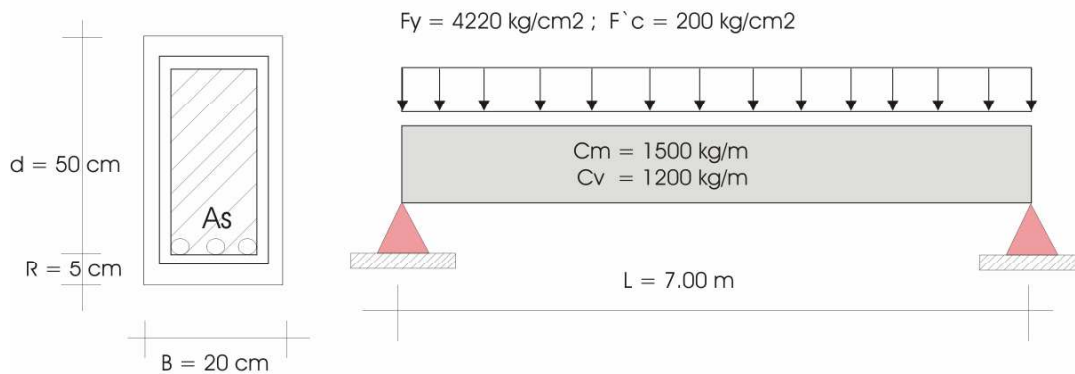
$$h = \frac{L}{16} = \frac{600\text{cm}}{16} = 37.5\text{cm} \quad , \text{ para vigas simplemente apoyadas.}$$

37.5 cm < 50 cm, por lo tanto el peralte obtenido es correcto. ✓ o.k.

**Ejemplo:**

Calcular el área máxima de acero que requiere la viga doblemente empotrada de la figura siguiente.

La carga muerta no incluye el peso propio de la viga.



Suponiendo  $b = 20 \text{ cm}$ ,  $d = 45 \text{ cm}$  y una recubrimiento  $r = 5 \text{ cm}$ .

Calculo del peso propio de la viga:

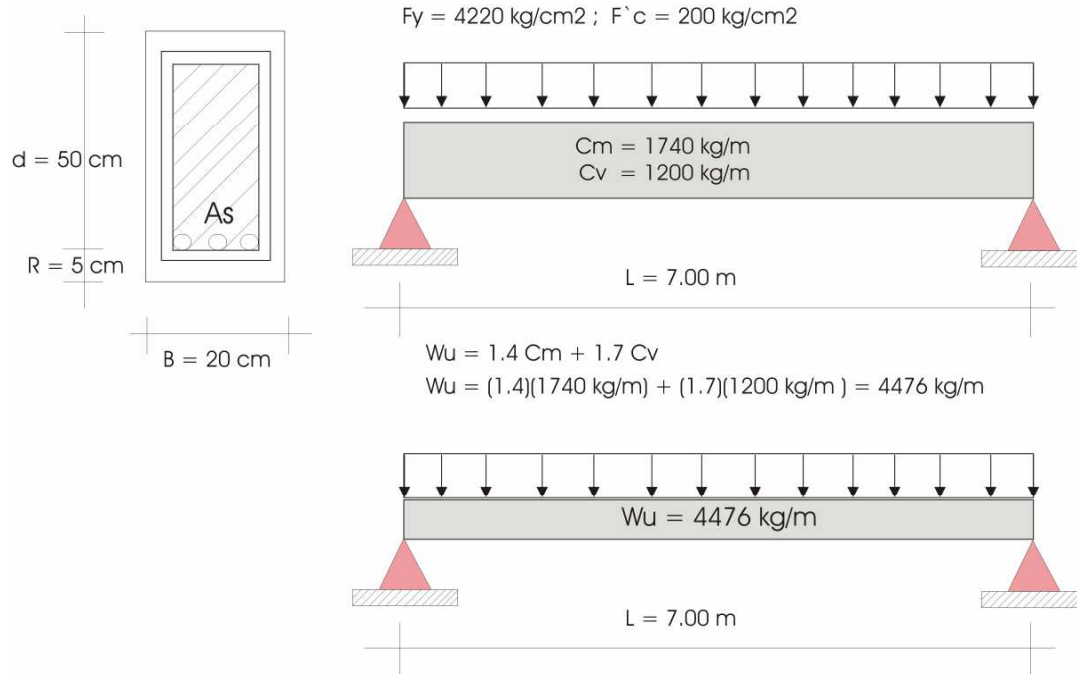
$$W_{\text{propio}} = (0.20)(0.50)(2400) = 240 \text{ kg/m}$$

Sumando el peso propio a la carga muerta existente, tendremos:

$$C_m \text{ total} = 1.4 C_m + 1.7 C_v$$

$$C_m \text{ total} = 1500 \text{ kg/m} + 240 \text{ kg/m} = 1740 \text{ kg/m}$$

La carga muerta no incluye el peso propio de la viga.



$$W_u = 1.4 C_m + 1.7 C_v$$

$$W_u = (1.4)(1740 \text{ kg/m}) + (1.7)(1200 \text{ kg/m}) = 4476 \text{ kg/m}$$

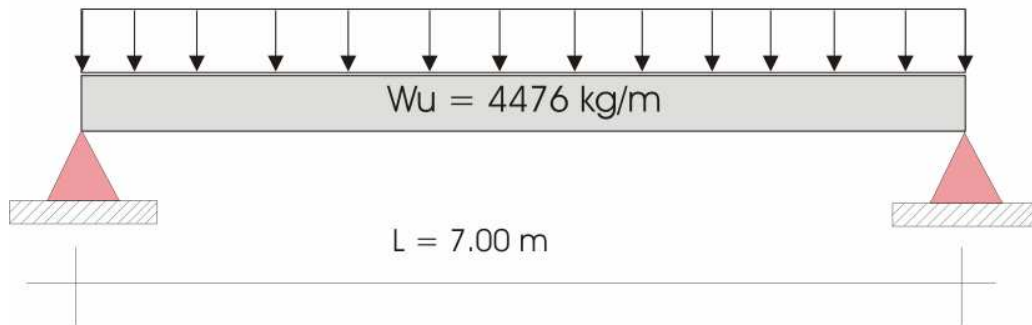
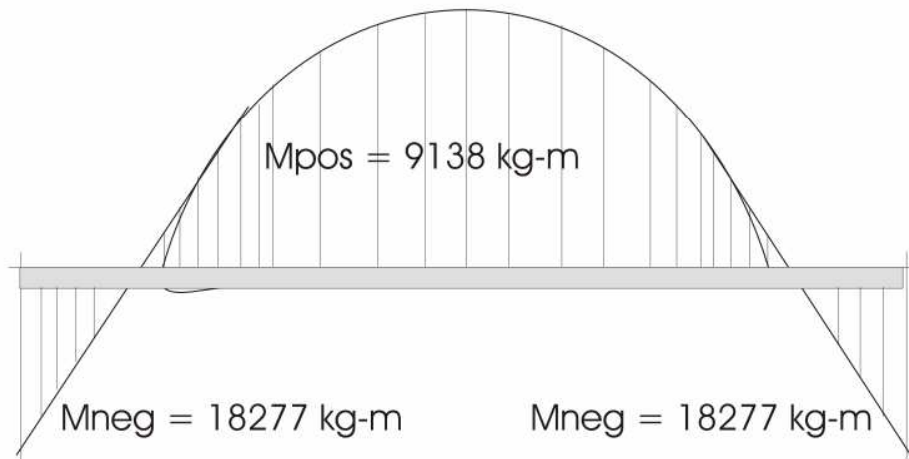


Diagrama de Momentos



Calculo del área de acero para Momento Negativo:

$$\omega = 0.849 - \sqrt{(0.721 - (\frac{18277 \times 100}{(0.53)(200)(20)(45^2)})} = 0.3056$$

$$\rho = \omega \frac{F_c}{F_y} = \frac{(0.3056)(200)}{4220} = 0.0145$$

Comparando el porcentaje obtenido con los permisibles, tenemos:

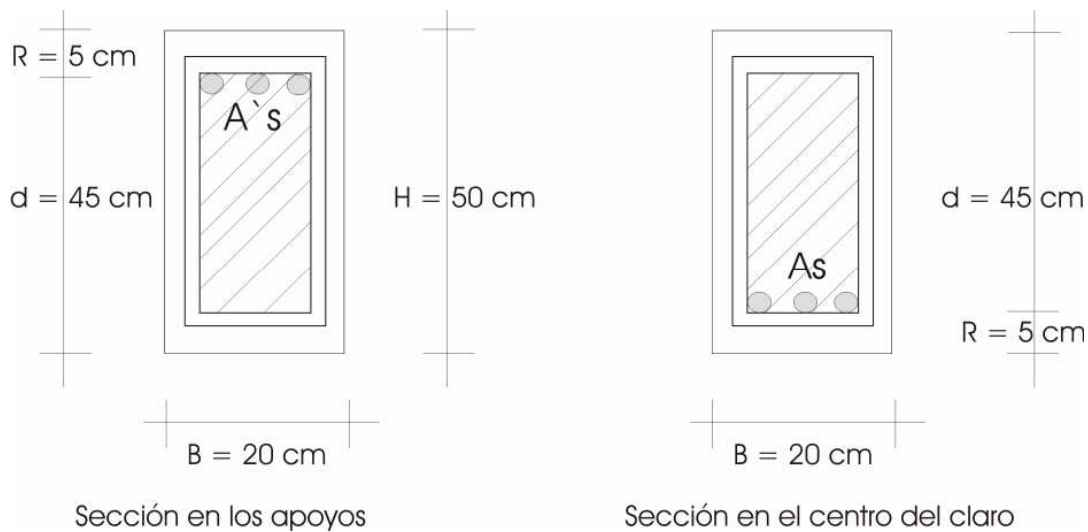
$$\rho_{\min} = \frac{14.5}{F_y} = \frac{14.5}{4220} = 0.0033 \quad ; \quad \rho_{\max} = 0.75\rho_{\text{balanceado}}$$

$$\rho_{\max} = 0.75 \frac{0.85\beta_1 F'_c}{F_y} \left[ \frac{6115}{6115 + F_y} \right] = 0.75 \frac{(0.85^2)(200)}{4220} \left[ \frac{6115}{6115 + 4220} \right] = 0.0152$$

$$0.0033 < 0.0145 < 0.0152 \quad \text{o.k. } \checkmark$$

Por lo tanto el porcentaje obtenido es correcto.

$$A_s = \rho b d = (0.0145)(20\text{cm})(45\text{cm}) = 13.05\text{cm}^2$$



Cálculo del área de acero para momento negativo:

$$M_{(+)\max} = 9138.50\text{kg} - \text{m}$$



$$\omega = 0.849 - \sqrt{(0.0721) - \left[ \frac{(9138.50)(100)}{(0.53)(200)(20)(50^2)} \right]} = 0.136$$

$$\rho = \omega \frac{F_c}{F_y} = \frac{(0.136)(200)}{4220} = 0.0064$$

$$\rho_{\min imo} < 0.0064 < \rho_{\max imo}$$

$$As = \rho bd = (0.0064)(20cm)(45cm) = 5.76cm^2$$

## VIGAS DOBLEMENTE REFORZADAS

Las secciones de las vigas doblemente reforzadas tienen acero de refuerzo tanto en la cara de tensión como en la de compresión, por lo general únicamente donde existe un apoyo en la viga.

Las vigas doblemente reforzadas son necesarias cuando se restrinja el peralte de éstas, debido a limitaciones arquitectónicas en el centro del claro o porque la sección en el centro del claro, no es suficiente para soportar el momento negativo que se presenta en el apoyo, aún cuando se aumente de manera suficiente el acero de tensión en dicho apoyo. Así la mayoría de las varillas inferiores en el centro del claro se prolongan y anclan de manera apropiada en los apoyos para que actúen como refuerzo a compresión y reforzar adecuadamente en la cara de tensión (arriba) de la viga en el apoyo con el área de acero necesaria.

Para analizar o diseñar una viga con refuerzo de compresión  $A's$ , se hace una división en dos partes a la sección como es nuestra en la siguiente figura siguiente:

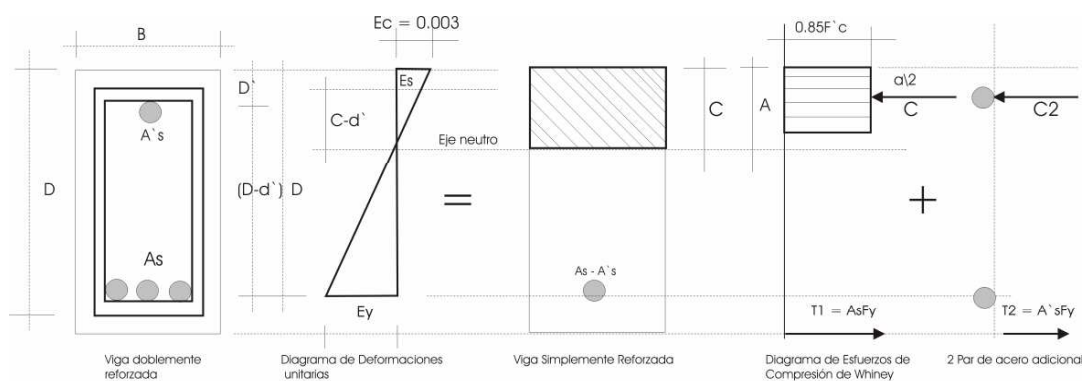


Figura 2.3 Viga Doblemente Reforzada

$$Mn1 = Fy(As - A's)(d - \frac{a}{2})$$

$$Mn2 = A'sFy(d - d')$$

**Las dos partes de la solución son:**

- 1) La del refuerzo simple (como simplemente reforzada) incluyendo el bloque rectangular equivalente como se discutió en el tema anterior, siendo el área de refuerzo de tensión igual a  $(A_s - A'_s)$  y
- 2) Las dos áreas de acero equivalentes  $A'_s$  tanto en la cara de tensión como en la de compresión para formar el par T2 y C2 como la segunda parte de la solución general.

Puede verse en la fig. 2.2 que el momento resistente nominal total (el que es capaz de soportar la sección) es  $M_n = M_{n1} + M_{n2}$ , es decir, la suma de los momentos para las partes (1) y (2) de la solución.

A continuación se decidirán las fórmulas, las cuales se condicionarán suponiendo que el acero en compresión fluye al mismo tiempo que el de tensión; entonces, el momento  $M_2$  formado por las áreas iguales  $A'_s$  tendrán esfuerzo a la ruptura.

**Momento Resistente Total de la Sección****(El que es capaz de resistir)**

$$M_1 = F_y(A_s - A'_s)(d - \frac{a}{2}) \quad (\text{Como viga simplemente reforzada})$$

Donde:

$$a = \frac{F_y(A_s - A'_s)}{0.85F'_c b}$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad \text{Por lo tanto; } a = \frac{(\rho - \rho')d.F_y}{0.85F'_c}$$

$$\rho' = \frac{A'_s}{b.d}$$

Porque:

$a$ : Distancia de la máxima fibra en compresión hasta la profundidad del diagrama rectangular de esfuerzos de compresión de Whitney.

$\rho$ : Porcentaje de acero en el área de tensión.

$\rho'$ : Porcentaje de acero en el área de compresión.

$M_2 = A's F_y (d - d')$ , (Proporcionado por el par adicional del acero).

Si llamamos  $M_u$  al momento último que puede soportar la sección y si tomamos en cuenta que hay necesidad de reducirlo con el factor de reducción para flexión:  $\phi = 0.90$

$M_u = M_1 + M_2$ , por lo tanto

$$M_u = \phi \left[ F_y (A_s - A's) \left( d - \frac{a}{2} \right) + A's F_y (d - d') \right]$$

Siempre y cuando tanto el acero de tensión como el de compresión fluyen (alcancen el valor de  $F_y$  en la ruptura).

Ahora, para encontrar el valor de " $a$ " se igualan  $C_1$  y  $T_1$  ( $C_1 = T_1$ ) ya que para poder que exista el equilibrio en la sección, estos valores tienen que ser iguales:

$$C_1 = 0.85 F'_c a b \qquad 0.85 F'_c a b = F_y (A_s - A's)$$

$$T_1 = F_y (A_s - A's)$$

De aquí que:

$$a = \frac{F_y (A_s - A's)}{0.85 F'_c b}$$

Sabiendo que:  $\frac{A_s}{bd} = \rho$  y  $\frac{A's}{bd} = \rho'$

Por lo tanto:  $A_s = \rho b d$  y  $A'_s = \rho' b d$

Por lo tanto:  $a = \frac{F_y d (\rho - \rho')}{0.85 F'_c}$

Para saber si el acero en compresión fluye (condición para aplicar las fórmulas anteriores), se hace lo siguiente:

$$a = \beta_1 c$$

Y sustituyendo esto en la ecuación anterior:

$$\beta_1 c = \frac{F_y d (\rho - \rho')}{0.85 F'_c}$$

Y despejando  $\rho - \rho'$ :

$$(\rho - \rho') = 0.85 \beta_1 \frac{F'_c}{F_y} \cdot \frac{c}{d}$$

Ahora vamos a encontrar el valor de "c" profundidad de la fibra máxima a compresión hasta el eje neutro) fibra frontera entre los esfuerzos de tensión y compresión y que por lo tanto no soporta esfuerzo alguno).

Del diagrama de deformaciones unitarias:

$$\frac{0.003}{c} = \frac{\epsilon_c}{(c - d')} \quad \text{Despejando c: } 0.003c - 0.003d' = \epsilon_s c$$

$$c(0.003 - \epsilon_s) = 0.003d' \quad \text{Por lo tanto: } c = \frac{0.003d'}{0.003 - \epsilon_s}$$

$$\text{Pero como: } \epsilon_s E_s = F_y, \text{ por lo tanto } \epsilon_s = \frac{F_y}{E_s}, \text{ entonces } c = \frac{0.003d'}{0.003 - \frac{F_y}{E_s}}$$

$$E_s = \text{Modulo de Elasticidad del acero} = 2.0383 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

De aquí que:

$$c = \frac{0.003d'}{0.003 - \frac{F_y}{2.0383 \times 10^6}} = \frac{6115d'}{6115 - F_y}$$

Y sustituyendo este valor en  $(\rho - \rho')$  :

$$(\rho - \rho') = 0.85\beta_1 \frac{F_y c}{F_y} \left[ \frac{6115}{6115 - F_y} \right] \cdot \frac{d'}{d}$$

Y tomando en cuenta que el A.C.I. especifica:

$$(\rho - \rho') \geq 0.85\beta_1 \frac{F_y c}{F_y} \left[ \frac{6115}{6115 - F_y} \right] \cdot \frac{d'}{d}$$

$$(\rho - \rho') \geq 0.75\rho_{bal} = (0.75)(0.85)\beta_1 \frac{F_y c}{F_y} \left[ \frac{6115}{6115 - F_y} \right]$$

Si igualamos  $f_y = F_y$  = Esfuerzo de fluencia del acero usado y si:

$$(\rho - \rho') < 0.85\beta_1 \frac{F_y c}{F_y} \left[ \frac{6115}{6115 - F_y} \right] \cdot \frac{d'}{d}$$

Significa que el acero en compresión no fluyó en la ruptura y que  $f_y < F_y$  y el momento calculado  $M_u$  es mayor que el que realmente puede soportar la sección, entonces podemos desprestigiar la “ayuda” del acero en compresión y usar el momento que la viga soporta solo con el acero a tensión (como simplemente reforzada), es decir:

$$M_u = \phi \left[ A_s F_y \left( d - \frac{a}{2} \right) \right] \quad \text{o bien:} \quad M_u = \phi \left[ F_y c b d^2 \omega (1 - 0.59\omega) \right]$$

Cuando el acero de compresión no fluye y se quiere tomar en cuenta el momento que éste resiste, se puede determinar mediante:

$$M_2 = A'sf's(d - d')$$

Donde  $f's$  es el refuerzo en el acero y es menor que  $f_y$ .

Por lo tanto el momento resistente de la sección será:

$$M_u = \phi \left[ A_s F_y \left( d - \frac{a}{2} \right) + A's f's (d - d') \right]$$

El reglamento del A.C.I. 318-04 especifica que el porcentaje máximo de acero para una viga debe ser:

$$\rho_{\max} = 0.75 \rho_b + \rho' \left( \frac{f'sb}{f_y} \right)$$

Donde:

$f'sb$  = Esfuerzo en el refuerzo en compresión en condiciones de deformación balanceada.

$$f'sb = 6115 - \frac{d'}{d} (6115 + f_y) \leq f_y$$

A continuación se ilustrara el uso de las formulas deducidas anteriormente con la solución de dos ejemplos de diseño de secciones doblemente reforzadas:

1. Una trabe tiene que soportar el peso de una losa sólida de concreto reforzado, que le provoca un momento producido por el peso de la losa y la carga viva, además de peso de la propia trabe (peso propio) de  $M_u = 18,230 \text{ kg-m}$ . Por razones arquitectónicas, la trabe debe tener un ancho  $b = 15 \text{ cm}$  (que es el ancho de los muros de construcción) y un peralte total  $h = 45 \text{ cm}$ .

SOLUCION:

Utilizaremos para esta trabe concreto con  $F'_c = 200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$  y acero de refuerzo  $F_y = 4220 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ .

Para empezar, vemos si la sección sería capaz de resistir nuestro momento como simplemente reforzada:

Paso 1: Es necesario saber cual es el porcentaje máximo de acero que le podemos proporcionar a la viga, para eso usaremos:

$$\rho_{\max} = 0.75\rho_{\text{bal}} = (0.75)(0.85)\beta_1 \frac{F_c}{F_y} \left[ \frac{6115}{6115 + F_y} \right]$$

$$\rho_{\max} = 0.75\rho_{\text{bal}} = (0.75)(0.85)^2 \frac{200}{4220} \left[ \frac{6115}{6115 + 4220} \right] = 0.01526$$

Paso 2: Calcular el momento que se puede soportar como viga simplemente reforzada, es decir; M1:

$$\omega = \rho \frac{F_y}{F_c} = \frac{(0.01526)(4220)}{200} = 0.3220$$

$$M1 = \phi F_c b d^2 \omega (1 - 0.59\omega)$$

$$M1 = (0.90)(200)(15)(40)(0.3220)[1 - 0.59(0.3220)] = 1126770 \text{ kg} - \text{cm}$$

$$M1 = 11268 \text{ kg} - \text{m}$$

Se supuso recubrimiento en la zona de tensión  $r = 5 \text{ cm}$ .

$$\text{Pero } Mu = 18230 \text{ kg} - \text{m} > M1 = 11268 \text{ kg} - \text{m}$$

Por lo tanto la viga no podría soportar el esfuerzo actuante como simplemente reforzada, de aquí que la solución será **UNA VIGA DOBLEMENTE REFORZADA**.

Paso 3: Obtener el área de acero de la sección como si fuera simplemente reforzada:

$$(A_s - A_s') = \rho b d = (0.01526)(15 \text{ cm})(40 \text{ cm}) = 9.16 \text{ cm}^2$$

$$(A_s - A_s') = 9.16 \text{ cm}^2$$

Hasta aquí, hemos concluido con primera parte de la solución.



Paso 4: Se procederá ahora a la parte segunda de la solución, empezando en este paso con encontrar el área de acero del par adicional para producirle ala sección el momento que le hace falta para soportar el momento último:

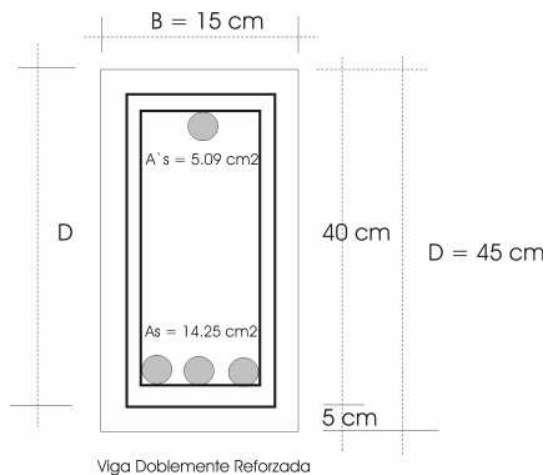
$$M_u = M_1 + M_2$$

Por lo tanto:  $M_2 = M_u - M_1 = \text{Momento excedente.}$

$$A's = \frac{M_2}{\phi(d - d')F_y} = \frac{(18230 - 11268)(100\text{cm})}{(0.90)(40 - 4)(4220)} = 5.09\text{cm}^2$$

Por lo tanto:  $A's = 5.09\text{cm}^2$

Quedando finalmente la sección:



Paso 5: Debido a que las fórmulas anteriores se utilizaron suponiendo que el acero en compresión fluyó, es necesario verificar si realmente este acero fluye, ya que de lo contrario, los cálculos anteriores son erróneos.

Hay que recordar que:

$$(\rho - \rho') \quad \text{Debe ser mayor que} \quad 0.85\beta_1 \frac{F'_c}{F_y} \cdot \left[ \frac{6115}{6115 - F_y} \right] \frac{d'}{d}$$

Para que el acero en compresión fluya:

$$(\rho - \rho') = \frac{(A_s - A'_s)}{bd} = \frac{9.16}{(15\text{cm})(40\text{cm})} = 0.01526$$

$$0.85\beta_1 \frac{F'_c}{F_y} \left[ \frac{6115}{6115 - F_y} \right] \frac{d'}{d} = (0.85^2) \frac{200}{4200} \left[ \frac{6115}{6115 - 4200} \right] \frac{(4)}{(40)} = 0.01104$$

$$0.01526 > 0.01104$$

Por lo tanto, el acero en compresión realmente fluyó, las formulas usadas son correctas y nuestro diseño es adecuado...

## EJEMPLO No. 2

Se tiene una sección obligada de  $b = 20 \text{ cm}$ ,  $h = 40 \text{ cm}$ ,  $r = 5 \text{ cm}$ ,  $d' = 4 \text{ cm}$ .

Calcular el área de acero necesaria para que resista el momento  $M_u = 15,250 \text{ kg-m}$ , empleando concreto  $F'_c = 180 \text{ kg/cm}^2$  y acero  $f_y = 4220 \text{ kg/cm}^2$ .

Primero investigaremos si la sección puede resistir como simplemente armada:

a).- Porcentaje máximo de acero.

$$\beta = 0.85 \text{ Para concreto } F'_c = 180 \text{ kg/cm}^2$$

$$\rho_{\max} = 0.75\rho_{\text{bal}} = (0.75)(0.85) \frac{180}{4220} \left[ \frac{6115}{6115 + 4220} \right] = 0.0137$$

$$\rho_{\max} = 0.0137$$

b).- Momento  $M_1$ :

$$\omega = \rho \frac{F_y}{F'_c} = \frac{(0.0137)(4220)}{180} = 0.321$$

**Índice de Resistencia**

$$M1 = \phi F_c b d^2 \omega (1 - 0.59 \omega)$$

$$M1 = (0.90)(180)(20)(35^2)(0.321)(1 - (0.59)(0.321)) = 10327.6 \text{ kg} - m$$

$$M1 = 1032756.90 \text{ kg} - cm$$

Como  $M1 = 10327.60 \text{ kg} - m < Mu = 15250 \text{ kg} - m$

La sección será doblemente reforzada.

c).- Área de acero de la sección como simplemente armada:

$$(A_s - A'_s) = \rho_{\max} b d = (0.0137)(20)(35) = 9.59 \text{ cm}^2$$

Segundo: Calculamos el área de acero  $A'_s$  del par de acero capaz de tomar M2.

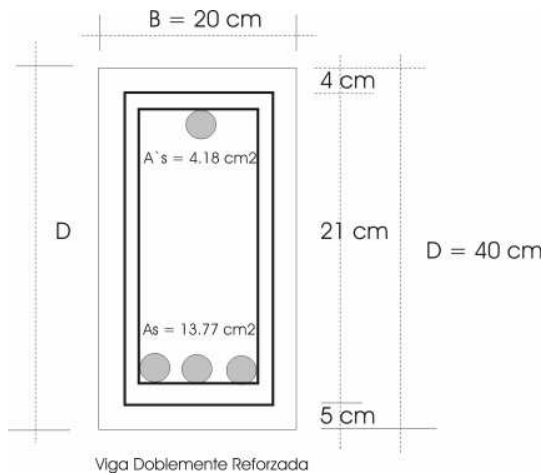
$$M2 = Mu - M1$$

$$M2 = 15250 - 10327.60 = 4922.40 \text{ kg} - m$$

$$A'_s = \frac{4922.40}{0.90(35 - 4)(4220)} = 4.48 \text{ cm}^2$$

Por lo tanto  $A_s = (A_s - A'_s) + A'_s = (9.59 + 4.18) = 13.77 \text{ cm}^2$

Finalmente, la sección será.



Tercero: Verificaremos si el acero en compresión fluye.

$$0.85\beta_1 \frac{F'_c}{F_y} \left[ \frac{6115}{6115 - F_y} \right] \cdot \frac{d'}{d} = (0.85^2) \left( \frac{180}{4220} \right) \left[ \frac{6115}{6115 - 4220} \right] \cdot \frac{(4)}{(35)} = 0.0114$$

$$(\rho - \rho') = \frac{(A_s - A's)}{bd} = \frac{9.59}{(20)(35)} = 0.0137$$

$$0.0137 > 0.0114$$

Por lo tanto el acero en compresión fluye en la ruptura y la viga trabaja como doblemente reforzada.

## VIGAS EN SECCION "T"

Uno de los sistemas de piso mas comúnmente utilizando en estructuras de concreto, consiste en vigas que soportan losas de concreto coladas monolíticamente con ellas.

Se forman así las llamadas viga "T".

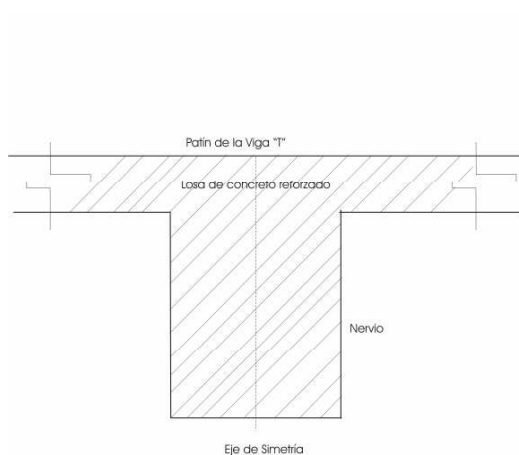


Figura 2.4 Viga de Sección "T"

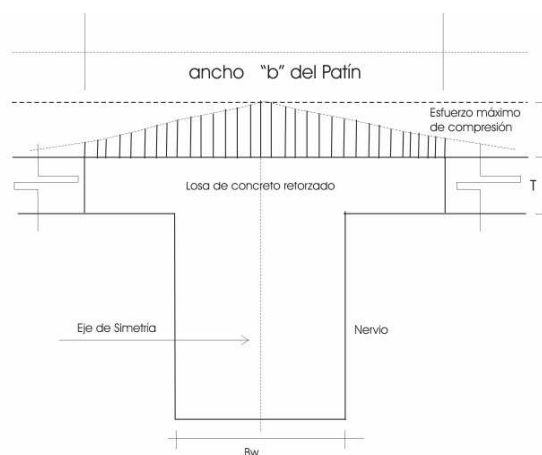


Figura 2.5 Viga de Sección "T"

Si se trata de vigas libremente apoyadas, las recomendaciones de la tabla 2.1 que fijan relaciones peralte / claro, pueden servir para una estimación preliminar de dimensiones.

En una viga "T" se le llama "patín" a la parte de la losa que la forma y "nervio" o "nervadura" al alma de la misma.

Resulta difícil de determinar con exactitud, el ancho  $b$  del patín ya que los esfuerzos de compresión que se presentan son máximos en el eje de simetría de la sección y disminuyen asintóticamente a medida que se alejan de dicho eje, así como se ilustra en la figura 2.5.

Esfuerzos de compresión en la viga "T"

El ancho  $b$  del patín, según el reglamento A.C.I. 318-02, no deberá exceder de:

- a).-  $\frac{1}{4}$  de la longitud del claro de la viga:  $\leq \frac{1}{4}$
- b).- 8 veces el peralte de la losa en voladizo a cada lado del alma; esto equivalente a  $16t + b_w$ .
- c).- La separación entre nervaduras:  $s$  (centro a centro).

El ancho " $b$ " del patín será el menor de los 3 valores anteriores.

### DIMENSIONAMIENTO DE LAS VIGAS DE SECCION "T"

En una viga de sección transversal "T" pueden identificarse los siguientes casos dependiendo de la profundidad del eje neutro " $c$ ".

Caso 1: Profundidad del eje neutro " $c$ " menor que el espesor del patín  $t$ .

En este caso puede tratarse a la viga como una sección rectangular estándar siempre y cuando la profundidad " $a$ " del bloque rectangular equivalente sea menor que el espesor del patín. En el análisis el ancho  $b$  del patín de la cara de compresión deberá utilizarse como el ancho de la viga tal y como se muestra en la figura 2.6.

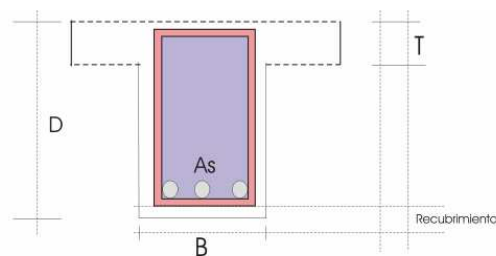


Figura 2.6 Viga idealizada de Sección "T" que trabaja como viga rectangular

Caso 2: Profundidad del eje neutro  $c$  mayor que el espesor del patín  $t$ .

En este caso ( $c > t$ ) la profundidad del bloque de esfuerzo rectangular equivalente “ $a$ ” puede ser menor o mayor que el espesor del patín  $t$ . Si  $c > t$  pero  $a < t$ , la viga puede considerarse para propósitos de diseño como una viga rectangular. Por lo tanto se aplican las consideraciones del caso 1.

Si ambos “ $c$ ” y “ $a$ ” son mayores que  $t$ , la sección deberá considerarse como una sección “T”.

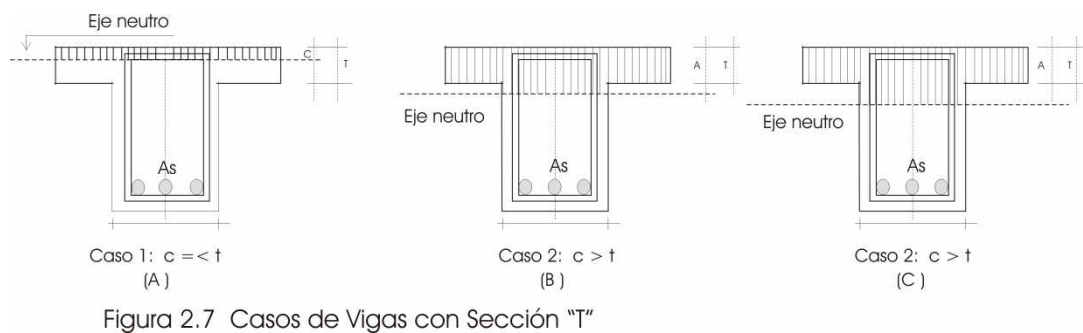


Figura 2.7 Casos de Vigas con Sección “T”

## FORMULAS PARA LAS VIGAS “T”

Cuando la sección “T”, efectivamente trabaja como tal, es decir;  $a > t$  para facilitar la obtención de fórmulas y para efectos de cálculo, se descompone la sección en dos partes:

1.- Una Viga rectangular de escuadría ( $b_w d$ ) con su correspondiente área de acero ( $A_s - A_{sf}$ ), que es capaz de tomar un momento ( $M_1$ ).

(Ver figura 2.8b).

2.- Una sección compuesta por aletas del patín en compresión  $(b - b_w)t$  con su correspondiente área de acero en tensión  $(A_{s_f})$  que es capaz de tomar el momento  $(M_2)$ . (Ver figura 2.8c).

Por lo tanto el momento total o último de la viga "T" será  $M_u = M_1 + M_2$

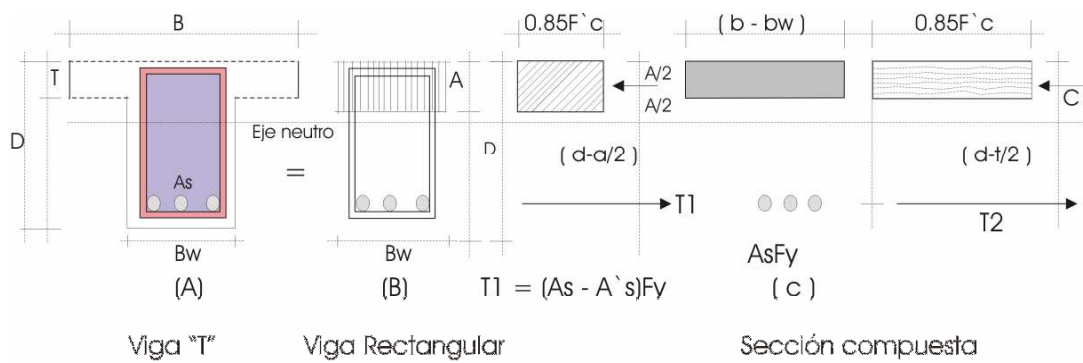


Figura 2.8 Descomposición de una Viga de Sección "T".

El momento resistente,  $M_1$  de la viga rectangular es:

$$M_1 = (A_s - A'_s)F_y(d - \frac{a}{2})$$

En donde: 
$$a = \frac{(A_s - A'_s)F_y}{0.85F'_c b_w} \quad (a)$$

El momento resistente de la viga complementaria es:

$$M_2 = A_s F_y(d - \frac{t}{2})$$

Para que exista equilibrio, es necesario que:

$$T_2 = T_1 \quad A_{s_f} F_y = 0.85F'_c (b - b_w)t$$

Por lo tanto: 
$$A_{s_f} = \frac{0.85F'_c (b - b_w)t}{F_y}$$

El momento resistente de la viga "T"  $M_u = M_1 + M_2$ , afectado por el factor de reducción para flexión  $\phi = 0.90$ .

$$M_u = \phi \left[ (A_s - A_{s_f})F_y(d - \frac{a}{2}) + A_{s_f}F_y(d - \frac{t}{2}) \right]$$



Si se considera la viga “T” completa como una unidad, la profundidad de la cuña o prima rectangular de esfuerzos de compresión (que adopta precisamente una forma de “T”) se puede obtener al igualar la resultante total de los esfuerzos de compresión, con resultante de los de tensión de modo que:  $T = C$

$$\text{Por lo tanto: } AsF_y = 0.85F'_c[(b_w a + (b - b_w).t)]$$

$$a = \frac{AsF_y - 0.85F'_c(b - b_w).t}{0.85F'_c.b_w} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (B)$$

De la ecuación (A):

$$0.85F'_c.b_w a = (As - As_f)F_y$$

De la ecuación (B):

$$0.85F'_c.b_w a = AsF_y - 0.85F'_c(b - b_w).t$$

Igualando las ecuaciones (A) y (B):

$$\text{Significa que: } As_f F_y = 0.85F'_c(b - b_w).t$$

$$T_2 = C_2$$

Como ya se vio anteriormente, en las vigas de sección rectangular se buscan que estas fallen en tensión por fluencia del acero y se evita que la falla sea súbita por el aplastamiento del concreto. De ahí que se ha limitado el porcentaje del refuerzo en la viga rectangular completamente en la que se dividió de la viga “T” para su estudio, al 75% del valor del porcentaje correspondiente a la sección balanceada.

$\rho_b$  = Relación de refuerzo balanceado para una sección rectangular con refuerzo en tensión únicamente.

$$\rho_{bal} = \frac{(As - As_f)}{b_w d} = \frac{As_w}{db_w} = \frac{T_w}{db_w F_y}$$

$\rho_f$  = Relación de refuerzo en tensión,  $As_f$ , para desarrollar la resistencia a compresión de los patines.

De la figura 2.8 se observa que:  $T = T1 + T2$

$$\rho_{bal} d d F_y = \rho_{bal} b_w d F_y + \rho_f b_w d F_y$$

Simplificando:

$$\rho_{bal} b = \rho_{bal} b_w + \rho_f b_w$$

Despejando a  $\rho_{bal}$ :

$$\rho_{bal} = \frac{b_w}{b} (\rho_{bal} + \rho_f) = \frac{As}{bd}$$

Para lograr que la viga falle a tensión, debe cumplirse que:

$$\rho_{max} = 0.75 \left[ \frac{b_w}{b} (\rho_{bal} + \rho_f) \right]$$

#### EJEMPLO No. 1

Una viga de sección "T" tiene que resistir un  $M_u = 25,000 \text{ kg-m}$ , el claro de la viga es de 5.50 m, la separación centro a centro de nervaduras es de 70 cms, el espesor del patín es de 5cm, el ancho del nervio es de 20cm, su peralte efectivo de 40cm, el concreto utilizado es de  $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ , el acero de refuerzo longitudinal de  $F_y = 4220 \text{ kg/cm}^2$ .

Diseñar el acero por flexión en sección mas crítica considerando a la viga como simplemente reforzada.



## SOLUCION:

1.- Como primer paso vemos si la sección trabaja como rectangular.

Si trabaja como rectangular, deberá tener la profundidad del bloque rectangular de esfuerzos de compresión a una distancia máxima, a partir del lecho superior igual a "t".

En este caso  $T = 5\text{cm}$ .

La compresión es máxima cuando  $a = t = 5\text{ cm}$ .

$$C = 0.85F_c\beta_1cb \quad \text{-----} \rightarrow \quad (A)$$

$$\beta_1 = 0.85 \text{ Ya que } F_c = 210 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 280 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} .$$

Determinaron del ancho "b":

El valor de "b" es el menor de:

$$\frac{L}{4} = \frac{550\text{cm}}{4} = 137.50\text{cm}$$

$$S = 70\text{ cm} \quad \leftarrow \text{----- RIGE}$$

$$16t.b_w = (16)(5) + 10 = 100\text{cm}$$

Compresión máxima como viga rectangular (la que resiste el patín).

$$C = (0.85)(210)(5)(70) = 62475\text{kg}$$

La compresión necesaria que debe resistir el patín es:

$$Mu = C(d - \frac{a}{2})$$

$$\text{Por lo tanto: } C = \frac{Mu}{(d - \frac{a}{2})} = \frac{(25000)(100\text{cm})}{(40 - \frac{5}{2})} = 66666\text{kg}$$

$$C = 66,666\text{kg}$$

Como 62,475 kg < 66,666 kg se concluye que la viga debe trabajar como viga "T"

a).- Área de acero de la sección compuesta:

$$T_2 = C_2$$

$$T_2 = A_{s_f} F_y$$

$$C_2 = 0.85 F'_c (b - b_w) t$$

$$A_{s_f} F_y = 0.85 F'_c (b - b_w) t$$

$$A_{s_f} = \frac{0.85 F'_c (b - b_w) t}{F_y}$$

$$A_{s_f} = \frac{(0.85)(210)(70 - 20)(5)}{4220} = 10.57 \text{ cm}^2$$

El momento resistente es:

$$M_2 = \phi A_{s_f} F_y \left( d - \frac{t}{2} \right)$$

$$M_2 = 0.90(10.57)(4220) \left( 40 - \frac{5}{2} \right) = 15054 \text{ kg} - \text{m}$$

b).- Área de acero de refuerzo del nervio,  $(A_s - A_{s_f})$ .

$$\phi M_1 = M_u - \phi M_2 = (25000 - 15054) \text{ kg} - \text{m} = 9,946 \text{ kg} - \text{m}$$

Caculo del Índice de Refuerzo " $\omega$ ":

$$\omega = 0.849 - \sqrt{0.721 - \left[ \frac{M_u}{(0.53 F'_c b d^2)} \right]} = 0.849 - \sqrt{0.721 - \left[ \frac{(9946)(100)}{(0.53)(210)(20)(40^2)} \right]}$$

$$\omega = 0.184$$

$$(\rho - \rho_f) = \omega \frac{F'_c}{F_y} = \frac{(0.184)(210)}{4220} = 0.0092$$

$$(A_s - A_{s_f}) = (\rho - \rho_f) b_w d = (0.0092)(20\text{cm})(40\text{cm}) = 7.36\text{cm}^2$$

$$(A_s - A_{s_f}) = 7.36\text{cm}^2$$

$$A_s = (A_s - A_{s_f}) + A_{s_f} = 7.36\text{cm}^2 + 10.57\text{cm}^2 = 17.93\text{cm}^2$$

$$A_s = 17.93\text{cm}^2$$

3.- El tercer paso consiste en verificar si los porcentajes de acero obtenidos se encuentran dentro de los límites recomendados.

$$\rho_{\max} \leq 0.75\rho_{bal} \quad ; \quad \rho_{bal} = (0.85^2) \frac{210}{4220} \left[ \frac{6115}{6115 + 4220} \right] = 0.02127$$

$$\rho_f = \frac{A_{s_f}}{b_w d} = \frac{10.57\text{cm}^2}{(20\text{cm})(40\text{cm})} = 0.0132$$

$$\rho_{bal} = \frac{b_w}{b} (\rho_{bal} + \rho_f) = \frac{20\text{cm}}{70\text{cm}} (0.02127 + 0.0132) = 0.0098$$

$$\rho_{bal} = 0.0098$$

$$\rho_{\max} = 0.75\rho_{bal} = 0.75(0.0098) = 0.00735$$

$$\rho_{\min} = \frac{14.5}{F_y} = \frac{14.5}{4220} = 0.0033$$

Porcentajes obtenidos:

$$\rho_w = \frac{A_s}{b_w d} = \frac{17.93}{(20\text{cm})(40\text{cm})} = 0.0224 > \rho_{\min} = 0.0033 \quad \text{O.K.}$$

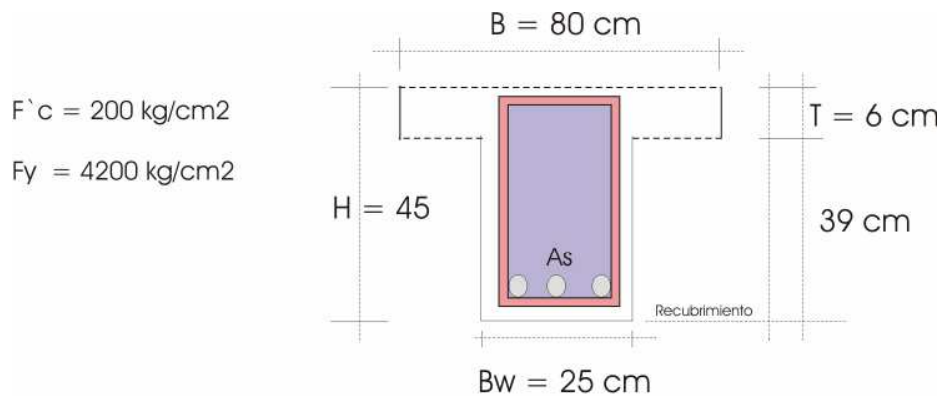
$$\rho = \frac{A_s}{b.d} = \frac{17.93\text{cm}^2}{(70\text{cm})(40\text{cm})} = 0.00640 < \rho_{\max} = 0.00735$$

POR LO TANTO, EL ACERO FLUIRA Y **LA VIGA FALLARA POR TENSION.**

**También, se le conoce como Falla Dúctil.**

## EJEMPLO No. 2.

Calcular el momento resistente máximo de la siguiente viga "T" de acuerdo con los datos de la figura,



Ejemplo no. 2, Viga de Sección "T".

Solución:

Partiendo de la condición balanceada:

$C_2 = T_2$  ;  $0.85F'_c(b - b_w).t = A_s F_y$  , Despejando  $A_s$  , tendremos:

$$A_{s_f} = \frac{0.85F'_c(b - b_w).t}{4220} = \frac{(0.85)(200)(80 - 25)(6)}{4220} = 13.29 \text{ cm}^2$$

$$A_{s_f} = 13.39 \text{ cm}^2$$

$$A_s = (A_s - A_{s_f}) + A_{s_f}$$

$$(A_s - A_{s_f}) = A_s - A_{s_f} = (20 - 13.29) \text{ cm}^2 = 6.71 \text{ cm}^2$$

$$(A_s - A_{s_f}) = 6.71 \text{ cm}^2$$

Cálculo del porcentaje de acero:

$$\rho_f = \frac{A_{s_f}}{b_w d} = \frac{13.29 \text{ cm}^2}{(25 \text{ cm})(45 \text{ cm})} = 0.0118$$

$$\rho_{bal} = (0.85^2) \left( \frac{200}{4220} \right) \left[ \frac{6115}{6115 + 4220} \right] = 0.02026$$

$$\rho_{bal} + \rho_f = 0.0118 + 0.02026 = 0.03206$$

Porcentajes de acero permitidos:

$$\rho_{\max} = 0.75 \frac{b_w}{d} (\rho_{bal} + \rho_f) = (0.75) \left[ \frac{25}{80} \right] (0.03206) = 0.0075$$

$$\rho_{\max} = 0.0075$$

$$\rho_{\min} = \frac{14.5}{F_y} = \frac{14.5}{4220} = 0.0033$$

$$\rho_w = \frac{A_s}{b_w d} = \frac{20 \text{ cm}^2}{(25 \text{ cm})(45 \text{ cm})} = 0.0178 > \rho_{\min} = 0.0033$$

$$\rho = \frac{A_s}{b.d} = \frac{20 \text{ cm}^2}{(80 \text{ cm})(45 \text{ cm})} = 0.0056 > \rho_{\max} = 0.0075$$

Por lo tanto, la falla será dúctil y la viga será sobreforzada.

Cálculo del momento resistente:

$$\phi M_n = \phi M_1 + \phi M_2$$

$$\phi M_n = \phi \left[ (A_s - A_{s_f}) F_y \left( d - \frac{a}{2} \right) + A_{s_f} F_y \left( d - \frac{t}{2} \right) \right]$$

$$a = \frac{(A_s - A_{s_f})F_y}{0.85F'_c b_w} = \frac{(6.71)(4220)}{(0.85)(200)(25)} = 6.66 \text{ cm}$$

$$\phi M_n = \phi \left[ (6.71)(4220) \left( 45 - \frac{6.66}{2} \right) + (13.29)(4220) \left( 45 - \frac{6}{2} \right) \right]$$

$$\phi M_n = \phi (3535,456) \text{ kg} - \text{cm}$$

$$\phi = 0.90 \text{ Para flexión}$$

$$\phi M_n = 0.90 (3535,456) \text{ kg} - \text{cm}$$

$$\phi M_n = 31.89 \text{ ton} - \text{m} \leftarrow \text{----- Momento resistente de la viga "T"}$$



## **AGRIETAMIENTO EN VIGAS**

Debido a la baja resistencia a la tensión del concreto, los elementos de este material tienden a agrietarse.

Son diversas las causas que conducen al agrietamiento del concreto, siendo las fundamentales, las deformaciones debidas a cambios volumétricos y los esfuerzos ocasionados por fuerzas de tensión, por momentos flexionantes, o por las fuerzas cortantes.

Son las dos razones por las que se requiere controlar el agrietamiento: La apariencia y el riesgo de corrosión del refuerzo.

Muchas estructuras diseñadas por el método de los esfuerzos de trabajo (teoría plástica) y con bajos esfuerzos en el acero cumplieron con las funciones a las que se les destinó con un agrietamiento muy pequeño debido a la flexión. Cuando se usan aceros de refuerzo de alta resistencia bajo esfuerzos altos debidos a las cargas de servicio, es de suponer que aparezcan grietas visibles, y es necesario tomar precauciones para detallar el refuerzo, con objeto de controlar las grietas. Para asegurar la protección del refuerzo contra la corrosión, y por razones estéticas, son preferibles muchas grietas muy finas, capilares que pocas grietas anchas.

El control de agrietamiento es particularmente importante cuando se utiliza refuerzo con resistencia a la fluencia superior a 2810 kg/cm<sup>2</sup>. Las buenas prácticas actuales de detallado de refuerzo generalmente conducirán a un control adecuado del agrietamiento aun cuando se utilice un refuerzo de 4220 kg/cm<sup>2</sup> de resistencia a la fluencia. Con una cuidadosa atención de los detalles del acero, se han construido estructuras totalmente satisfactorias con resistencia a la fluencia de diseño que exceden al límite de 5,625 kg/cm<sup>2</sup>.

A través de estudios experimentales se han determinado los factores que mayor influencia tiene ancho de las grietas y se han encontrado que dicho ancho:

- Es mayor cuando se utilizan barras lisas que con barras corrugadas.
- Es directamente proporcional al espesor, siendo esta variable la más importante.
- Depende del área de concreto que rodea alas barras en la zona de tensión disminuyendo cuando mejor se encuentre distribuido el refuerzo en dicha zona.

### **RECOMENDACIONES DEL A.C.I. 318-04 SOBRE AGRIETAMIENTO**

El reglamento A.C.I. 318-04 establecen reglas que conducen a un detallado del refuerzo en vigas para evitar el agrietamiento excesivo.

Este reglamento indica que cuando el esfuerzo de fluencia del acero es superior a 2810 kg/cm<sup>2</sup>, el refuerzo debe detallarse de manera que la cantidad dada por la ecuación:

$$Z = 1.1\beta f_s \sqrt[3]{(dcA)}$$

No exceda de  $31250 \frac{kg}{cm}$  para vigas protegidas.

Ni de  $25895 \frac{kg}{cm}$  kg/cm para vigas expuestas a la intemperie.

Donde:

$F_s$  = Esfuerzo en el acero a nivel de las cargas de servicio, en  $\text{kg/cm}^2$  que puede calcularse como  $0.6 f_y$ .

$d_c$  = Es el recubrimiento de la barra más próxima a la cara en tensión medido desde el centro de la barra, en cm.

$A$  = Área efectiva del concreto en tensión en torno el refuerzo principal con el mismo centroide que el refuerzo, dividida por el número de barras, en  $\text{cm}^2$ .

Si las barras no son todas del mismo tamaño, se toma como numero de barras el área total de refuerzo dividida por el área de la barra de mayor diámetro del grupo.

$\beta$  = Relación de distancias al eje neutro a partir de la fibra extrema en tensión y centroide del refuerzo principal.

Para vigas se utiliza  $\beta = 1.2$

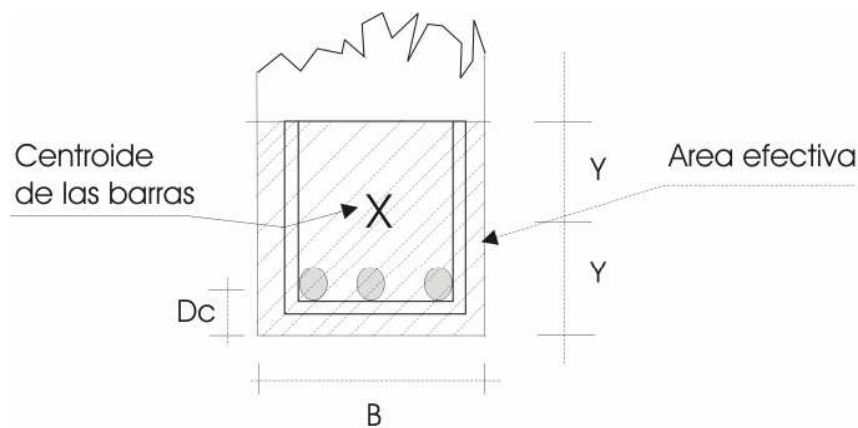
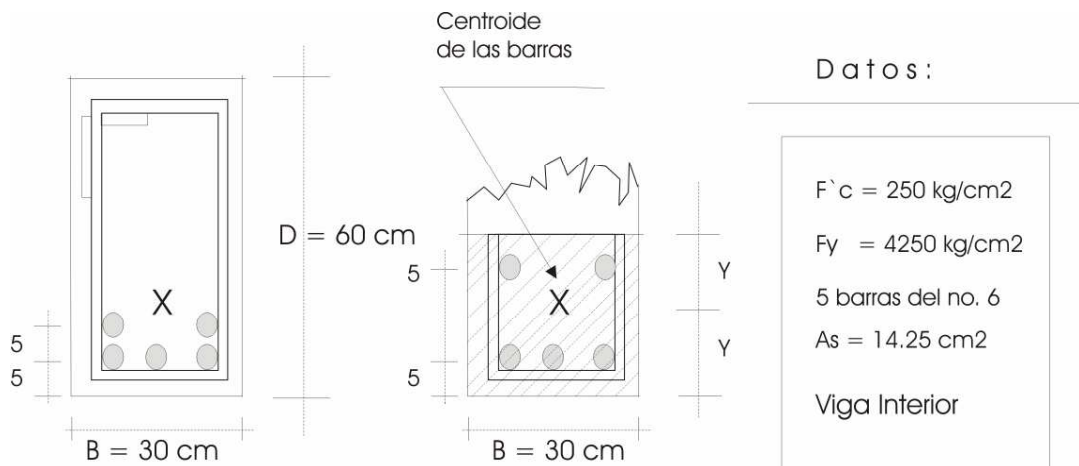


figura 2.9 Significados de la notación utilizada en la ecuacion

$$A = \frac{2y.b}{n} , \text{ donde } n = \text{número de barras}$$

### EJEMPLO:

Revisar el agrietamiento de la siguiente viga:



Solución:

$$Y = \frac{(3)(5) + (2)(10)}{5} = 7 \text{ cm}$$

$$Z = 1.1\beta_s f_s \sqrt[3]{(d c A)}$$

$$f_s = 0.6 F_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$$

$$A = \frac{(2)(7 \text{ cm})(30 \text{ cm})}{5 \text{ varillas}} = 84 \text{ cm}^2 \quad (\text{Area Efectiva})$$

$$Z = (1.1)(1.2)(2530) \sqrt[3]{(5)(84)} = 25000 \text{ kg/cm}$$

$$Z = 25000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}} < 31250 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}; \text{ Por lo tanto: El refuerzo es aceptable.}$$

A pesar que se han realizado numerosos estudios, no se dispone de una evidencia experimental clara respecto al ancho de la grieta a partir de la cual existe peligro de corrosión. Las pruebas de exposición indican que la calidad del concreto, la compactación adecuada y el apropiado recubrimiento del concreto pueden ser más importantes para la protección contra la corrosión que el ancho de la grieta en la superficie del concreto.

En grandes vigas “T”, la distribución del refuerzo negativo para el control del agrietamiento debe tomar en cuenta dos condiciones:

1.- El gran espaciamiento del refuerzo a lo largo del ancho efectivo del patín puede provocar que se formen grietas anchas en la losa cerca del alma.

2.- El reducido espaciamiento cerca del alma deja sin protección las losas exteriores del patín. La limitación de  $\frac{L}{10}$  sirve para evitar que haya un espaciamiento muy grande, al tiempo que proporciona un poco de refuerzo adicional necesario para proteger las zonas exteriores del patín.

Para elementos sujetos a flexión relativamente peraltados debe colocarse un ligero refuerzo longitudinal cerca de las caras verticales en la zona de tensión, con el fin de controlar el agrietamiento en el alma.

Si no se coloca dicho acero auxiliar, el ancho de las grietas dentro del alma puede exceder en gran medida el ancho de las grietas al nivel del refuerzo en tensión por flexión.

### ***MEDIOS AUXILIARES DE DISEÑO.***

Actualmente se han preparado ayudas de diseño que pueden ser en forma de gráficas, de tablas o incluso programas de computadora con el fin de simplificar la labor numérica que se requiere en el dimensionamiento de los elementos del concreto.

Existen manuales que reúnen diversas ayudas de diseño.

En algunos libros de texto aparecen diagramas de flujo para elaborar programas de computadora en diversos lenguajes.

Las calculadoras programables de bolsillo son de gran utilidad, ya que con ellas pueden resolverse problemas de diseño de considerable complejidad. Recientemente se ha generalizado el uso de micro- computadoras y macro-computadoras es aún mayor.

Existe una gran variedad de programas de computadora que facilitan distintos aspectos del análisis y dimensionamiento de estructuras de concreto.

En la escuela de ingeniería existe una gran diversidad de programas de computadora con los cuales el alumno puede realizar desde el análisis estructural de un elemento de concreto hasta el diseño del mismo.

Existen a la venta programas con los cuales pueden realizar análisis sísmicos tridimensionales estáticos o dinámicos de una gran variedad de estructuras. Algunos de ellos permiten elaborar dibujos estructurales y ordenes de trabajo que describen los detalles de fabricación del refuerzo.

## **CORTANTE EN VIGAS.**

En este tema presentan procedimientos para el análisis y diseño de vigas de concreto reforzado para resistir las fuerzas cortantes que resultan de las cargas externas aplicadas. El diseño por cortante es de principal importancia en las estructuras de concreto debido a que la resistencia a tensión del concreto es considerablemente menor que la compresión.

El comportamiento de las vigas de concreto reforzado en el instante de falla por cortante es muy diferente a su comportamiento por flexión. La falla es repentina. Sin suficiente aviso previo y las grietas diagonales que se desarrollan son más amplias que las de flexión.

Debido a la naturaleza frágil de dichas se deberán diseñar secciones que sean suficientemente fuertes para resistir las cargas transversales externas factorizadas sin que se alcance su capacidad de resistencia a cortante, o sea se deberán de diseñar los elementos para que fallen en forma dúctil (ante cargas últimas) antes que se presente una falla frágil por cortante o tensión diagonal.

Para visualizar el efecto de la fuerza cortante es útil recordar algunos conceptos elementales de la mecánica de los materiales, ya que, a niveles de carga bajos y antes de la aparición de grietas, el comportamiento del concreto reforzado se asemeja al de un material homogéneo y elástico. El estudio se limita al caso de elementos que el estado de esfuerzos puede suponerse como un estado de esfuerzos planos.

## COMPORTAMIENTO DE VIGAS HOMOGÉNEAS

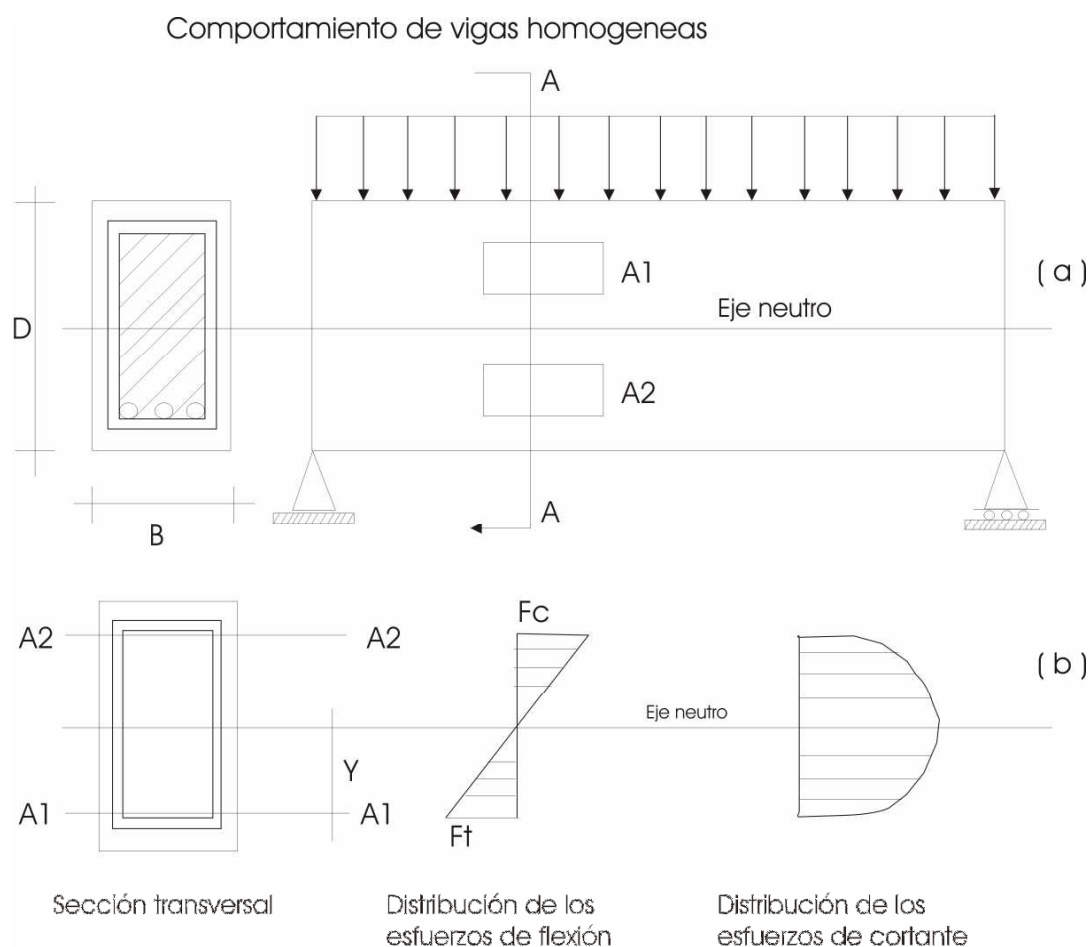


Figura 2.10 Distribución de esfuerzos para una viga típica homogea rectangular

Considere los dos elementos infinitesimales A1 y A2 de la viga rectangular de la figura 2.10 a la cual esta hecha de material linealmente elástico, homogéneo e isótropo. En la figura 2.10b se muestran las distribuciones de los esfuerzos flexión y cortante a través del peralte de sección.

El esfuerzo normal de tensión  $f_t$  y el esfuerzo cortante  $V$  son los valores del elemento A1 en la sección del plano  $a_1 - a_1$  a una distancia "Y" del eje neutro. Por principios fundamentales de mecánica, el esfuerzo normal  $f$  y el esfuerzo cortante  $V$  para el elemento A1 puede escribirse como:



$$f = \frac{My}{I} \quad y \quad V = \frac{v \cdot A \bar{y}}{Ib}$$

Donde:

M y v = Momento flexionante y fuerza cortante en la sección  $a_1 - a_1$ .

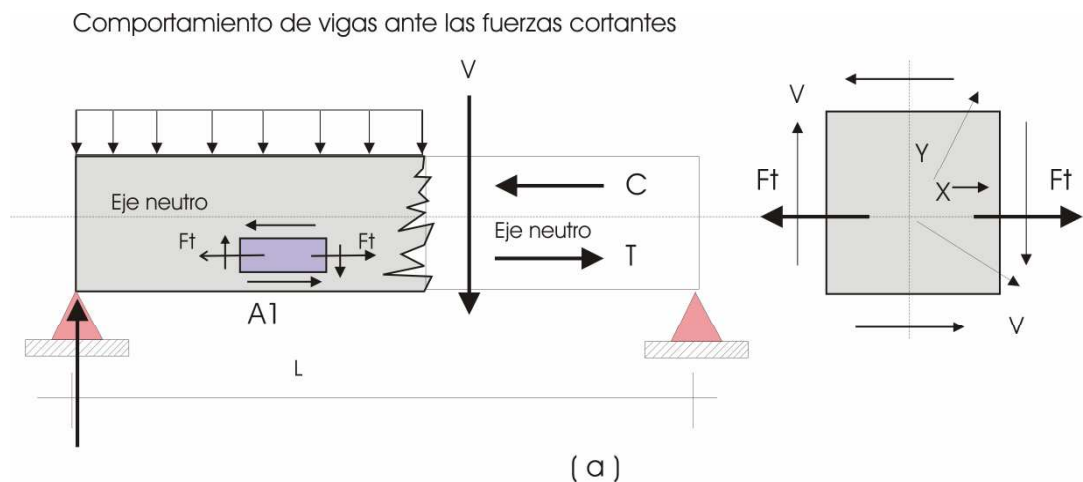
A = Área transversal de sección en el plano que pasa por el centroide del elemento del elemento A1.

Y = Distancia del elemento A1 al eje neutro.

$\bar{Y}$  = Distancia del centroide de A1 al eje neutro.

I = Momento de inercia de la sección transversal.

B = Ancho de la viga.



### Comportamiento de vigas ante las fuerzas cortantes

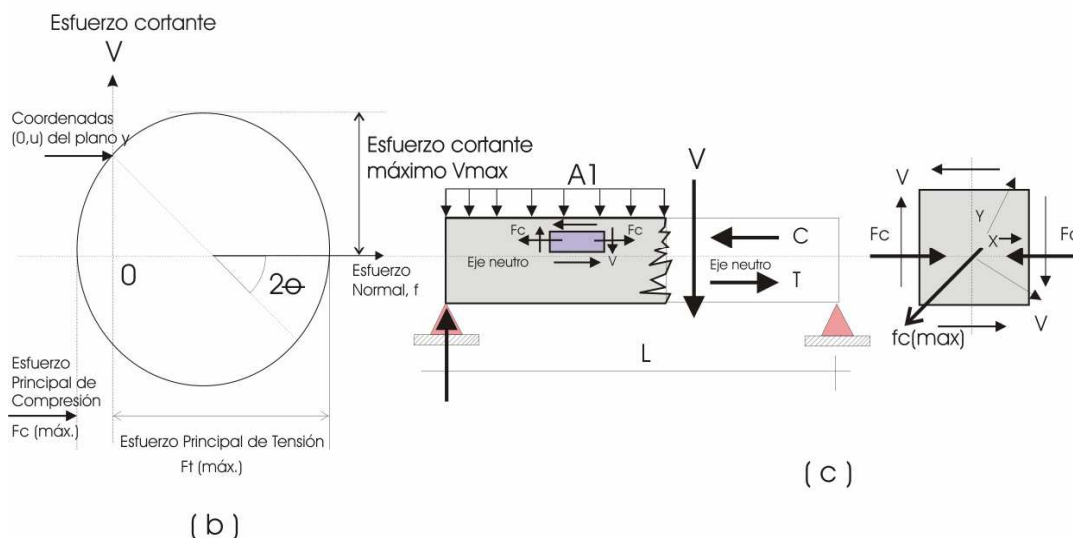


Figura 2.11. – Estado de esfuerzos en los elementos A1 y A2;

- a).- Estado de esfuerzos en el elemento A1.
- b).- Representación en el círculo de Mohr, elemento A1.
- c).- Estado de esfuerzos en el elemento A2.
- d).- Representación en el círculo de Mohr, elemento A2.

La figura 2.11 muestra los esfuerzos internos que actúan en los elementos infinitesimales A1 y A2. Utilizando el círculo de Mohr de la figura 2.11b los esfuerzos principales para el elemento A1 en la zona de tensión debajo del eje neutro vienen a ser:

$$f_{t(\text{máx.})} = \frac{f_t}{2} + \sqrt{\left[\frac{f_t}{2}\right]^2 + V^2} \quad \text{Tensión Principal}$$

$$\text{Y, } \tan 2\phi_{\text{máx}} = \frac{V}{\frac{f_t}{2}}$$

$$f_{c(\text{máx.})} = \frac{f_t}{2} - \sqrt{\left[\frac{f_t}{2}\right]^2 + V^2} \quad \text{Compresión Principal}$$

## **EXPRESIONES PARA EVALUAR LA RESISTENCIA A EFECTOS DE FUERZA CORTANTE**

El diseño de secciones transversales sujetas a cortante debe estar basado en:

$$V_u \leq \phi V_n \quad , \text{ donde:}$$

$V_u$  = Es la fuerza cortante factorizada en la sección estudiada.

$V_n$  = Resistencia nominal al cortante del concreto y el acero  $V_n = V_c + V_s$  .

$V_c$  = Es la resistencia nominal al cortante del concreto.

$V_s$  = Es la resistencia nominal al cortante proporcionada por medio del refuerzo para cortante.

La sección crítica nominal para cortante en una viga con carga uniformemente repartida, se presenta a una distancia “d” del paño del apoyo.

## **RESISTENCIA AL CORTANTE PROPORCIONADA POR EL CONCRETO**

Según el reglamento A.C.I. 318-02 la resistencia al cortante  $V_c$  para vigas sujetas unidamente a cortante y flexión, vale:

$$V_c = 0.53 \sqrt{F^c} b_w d \quad , \quad \text{Donde:}$$

$F^c$  = Resistencia especificada a la compresión del concreto en  $\frac{kg}{cm^2}$  .

$B_w$  = Ancho del alma de la viga, en cm.

$D$  = Peralte efectivo de la viga, en cm.

**RESISTENCIA AL CORTANTE PROPORCIONADA POR EL ESFUERZO**

La contribución del acero en el alma se calcula con base en la analogía de la armadura tratada anteriormente, suponiendo que el refuerzo en el alma fluye en la falla. La expresión que se presenta en el reglamento A.C.I. 318-02 se deduce de la ecuación (F) haciendo  $Z = d$ , por lo que se obtiene:

$$V_s = \frac{A_v f_y (\sin \alpha + \cos \alpha) d}{s} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (G)$$

Donde:

$A_v$  = Área total del refuerzo en el alma en una distancia  $S$ .

$\alpha$  = Angulo entre las barras o estribos de refuerzo en el alma y el eje longitudinal de la viga.

$S$  = Separación de estribos o barras dobladas, medida en dirección paralela a la del refuerzo longitudinal.

En el caso más general, los estribos se colocan verticales ( $\alpha = 90^\circ$ ), la ecuación (G) se reduce a:

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (H)$$

El reglamento ACI 318-04 limita la resistencia a la fluencia de diseño en el refuerzo para cortante a  $4220 \frac{kg}{cm^2}$  con el fin de proporcionar un control en el ancho de la grieta diagonal, ya que el refuerzo de alta resistencia también puede resultar quebradizo cerca de dobleces agudos.

**REFUERZO MINIMO POR CORTANTE**

El refuerzo por cortante restringe el crecimiento del agrietamiento inclinado y, por consiguiente, aumenta la ductibilidad y advierte el peligro de falla. De lo contrario, en un alma sin esfuerzo, la súbita formación de agrietamiento inclinado

podría conducir directamente a una falla repentina. Este esfuerzo resulta de gran valor si una viga es sometida a una fuerza de tensión imprevista, o una carga catastrófica. Por lo tanto, se quiere un área mínima de refuerzo por cortante no menor que la especificada por la ecuación (I), siempre que la fuerza cortante factorizada,  $V_u$ , sea mayor que de la resistencia al cortante proporcionada por el concreto, se excluyen de este requisito las vigas anchas de peralte reducido.

$$A_v = \frac{3.5b_w S}{F_y} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (1)$$

Donde  $b_w$  y  $S$  están en centímetros.

### **LIMITES DE SEPARACIÓN PARA EL ESFUERZO POR CORTANTE**

El reglamento ACI 318-02 limita la separación del refuerzo transversal cuando este se considera necesario. En general, se trata de impedir que pueda desarrollarse una grieta inclinada a  $45^\circ$  sin que sea interceptada por una barra en la zona comprendida en el esfuerzo de tensión y el semiperalte efectivo del elemento. Este reglamento especifica al respecto que la separación de estribos perpendiculares al eje de longitudinal de un elemento no exceda de  $\frac{d}{2}$  ni de 60 cm. Cuando  $V_s$  excede de  $1.1F_c b_w$ , estas separaciones deben reducirse a la mitad.

Además de esto, el valor de “ $V_s$ ” en ningún caso debe de exceder de  $2.1F_c b_w d$ , ya si tuviese una cantidad excesiva de esfuerzo en el alma, no se garantizaría que la resistencia total fuese la suma de la resistencia del concreto y de la contribución del acero.

La contribución del esfuerzo a la resistencia nominal debe afectarse del mismo valor de, o sea, 0.85 para obtener la contribución ala resistencia de diseño.

En los siguientes ejemplos se ilustra de una manera clara y detallada lo referente a cortante en vigas hasta ahora visto. En estos ejemplos se trata de ver los casos más comunes que se presentan en la práctica como son las vigas simplemente apoyadas con carga uniformemente repartida.

#### EJEMPLO No. 1.

Una viga rectangular simplemente apoyada, tiene un claro de 7.50 m y soporta una carga viva de 3 ton/m y ninguna carga externa muerta externa excepto su propio peso. Diseñar el esfuerzo por cortante necesario.

Considere:

$$\begin{array}{lll} F'c = 210 \text{ kg/cm}^2. & b_w = 20\text{cm} & h = 40 \text{ cm} \\ Fy = 2800 \text{ kg/cm}^2. & d = 35 \text{ cm} & \end{array}$$

Solución:

##### 1.- Fuerza cortante factorizada:

- Peso propio de la viga;  $W_{propio} = (0.20)(0.40)(2.4) = 0.192 \text{ ton/m}$
- Carga total factorizada;  $W_u = (1.7)(3.0) + (1.4)(0.192) = 5.37 \text{ ton/m}$

$$W_u = 5.37 \text{ ton/m}$$

La fuerza cortante factorizada en el paño del apoyo es:

$$V_u = \frac{(7.50\text{m})(5.37\text{ton / m})}{2}$$

$$V_u = 20.14\text{ton}$$

La primera sección crítica está a una distancia  $d = 35 \text{ cm}$  del paño del apoyo de la viga. La mitad del claro es de  $3.75 \text{ m}$ .

“ $V_u$ ” en “ $d$ ”, tenemos.

$$V_u = \frac{(3.75\text{m}) - (0.35\text{m})}{3.75\text{m}} (20.14\text{ton}) = 18.26\text{ton}$$

$$V_u = 1860\text{kg}$$

2.- Capacidad de cortante:

- La capacidad de cortante del concreto es:

$$V_c = 0.53 F'_c b_w d$$

$$V_c = (0.85)(0.53)(210)(20)(35) = 4570\text{kg}$$

$$V_u = 18260\text{kg} > V_c = 4570\text{kg}$$

Por lo tanto necesita estribos.

$$V_s = V_u - V_c = 18260\text{kg} - 4570\text{kg} = 13690\text{kg}$$

Revisión de que la sección sea adecuada por cortante:

$$2.1\sqrt{F'_c} b_w d = 2.1\sqrt{210} (20)(35) = 21302\text{kg}$$

$$21302\text{kg} > V_s = 13690\text{kg} \quad ; \text{ La sección transversal es adecuada.}$$

3.- Refuerzo por cortante.

Probando con estribos verticales de dos ramas el diámetro No. 2.

Diámetro, No. 2, Avarilla =  $0.32 \text{ cm}^2$ ; Como son de dos ramas:

$$A_v = (2)(0.32) = 0.64\text{cm}^2$$

En la sección crítica, “ $d$ ” =  $35 \text{ cm}$  del paño del apoyo, la separación sería:

$$S = \frac{A_v F_y d}{V_u - V_c} = \frac{(0.64)(2800)(35)}{18260\text{kg} - 4570\text{kg}} = 4.58\text{cm} \quad ; \quad S = 4.58\text{cm}$$

Debido a que:  $V_u = \phi V_c > 1.1\sqrt{F'_c} b_w d$

La separación máxima permisible es  $S = \frac{d}{4} = \frac{35\text{cm}}{4} = 8.75\text{cm}$ .

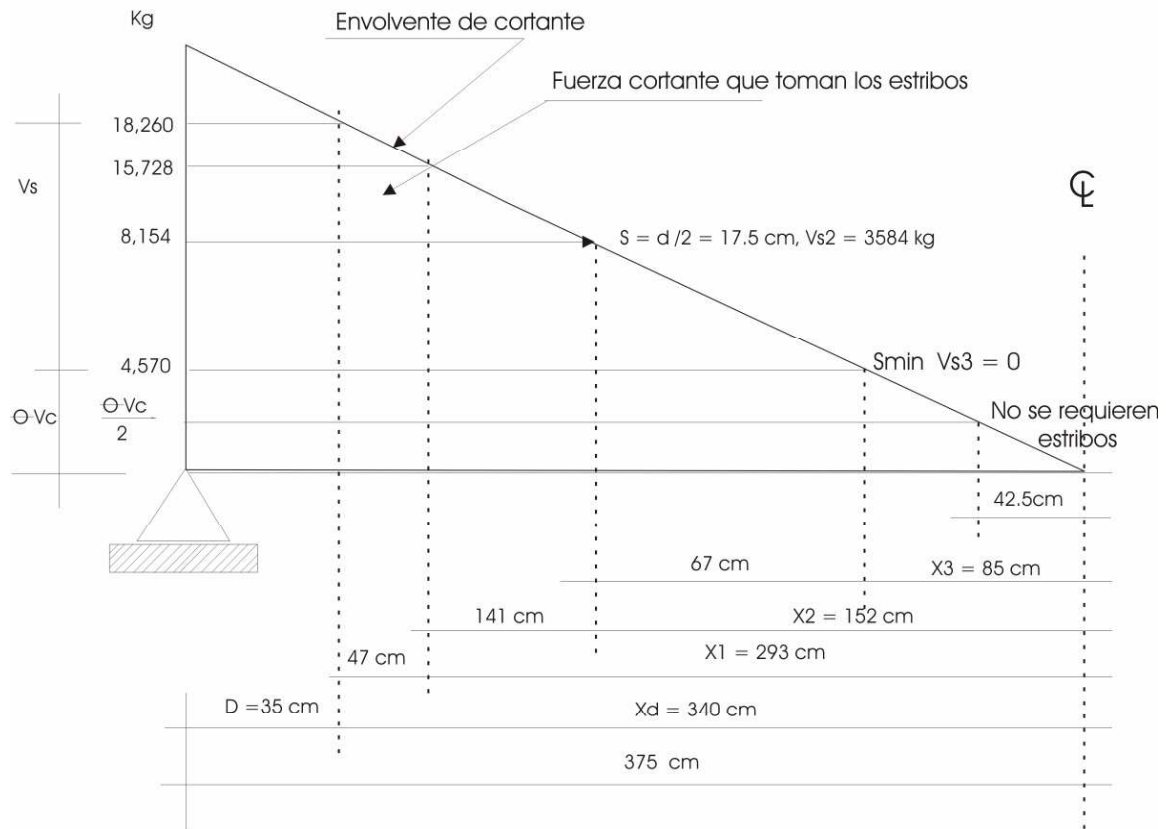


Figura 2.16.- Envolvente de Cortante y diseño de los estribos.

De la figura 2.16

- Plano  $X_1$  con separación máxima  $S = \frac{d}{4}$ ;

$$V_{s1} = 1.1\sqrt{F'c}b_wd = (1.1)\left(\sqrt{210}\right)(20)(35) = 11158\text{kg}$$

$$V_{u1} = 11158 + 4570 = 15728\text{kg}$$



$$X_1 = \frac{(340cm)(15728kg)}{18260kg} = 293cm$$

- Plano  $X_2$  con separación máxima  $S = \frac{d}{2}$  y  $d = 35$  cm; se sabe que:

$$V_s = V_u - \phi V_c$$

$$S = \frac{A_v F_y d}{V_u - \phi V_c} \quad \text{O bien} \quad \frac{35}{2} = \frac{(0.64)(2800)(35)}{V_s}$$

$$V_{s_2} = 3584kg$$

$$V_{u_2} = 3584kg + 4570kg = 8154kg$$

$$X_2 = \frac{(340cm)(8154kg)}{18260kg} = 152cm$$

- Plano  $X_3$  por fuerza cortante  $\phi V_c$  :

$$V_c = (0.85)(0.53)(210)(20)(35) = 4570kg$$

$$X_3 = \frac{(340cm)(4570kg)}{18260kg} = 85cm$$

Acero mínimo en el alma:

Se aplica cuando  $V_u > \frac{V_c}{2}$

$$V_u = 18260kg ; \quad V_u = \frac{4570}{2} = 2285kg$$

$$S = \frac{A_v F_y}{3.5 b_w} = \frac{(0.64)(2800)}{(3.5)(20)} = 25.6cm > \frac{d}{2}$$

La separación de los estribos será de  $\frac{d}{2} = 17.50cm$

$$X_y = 340 \frac{2285}{18260} = 42.50cm$$

El proporcionamiento de la separación de los estribos verticales deberá ser racional.

En figura 2.16, la distancia de 141 cm es la zona de transición de  $S = 8.75\text{cm}$  a  $S = 17.5\text{cm}$ ; por lo que se propone una separación de estribo de 10 cm centro a centro.

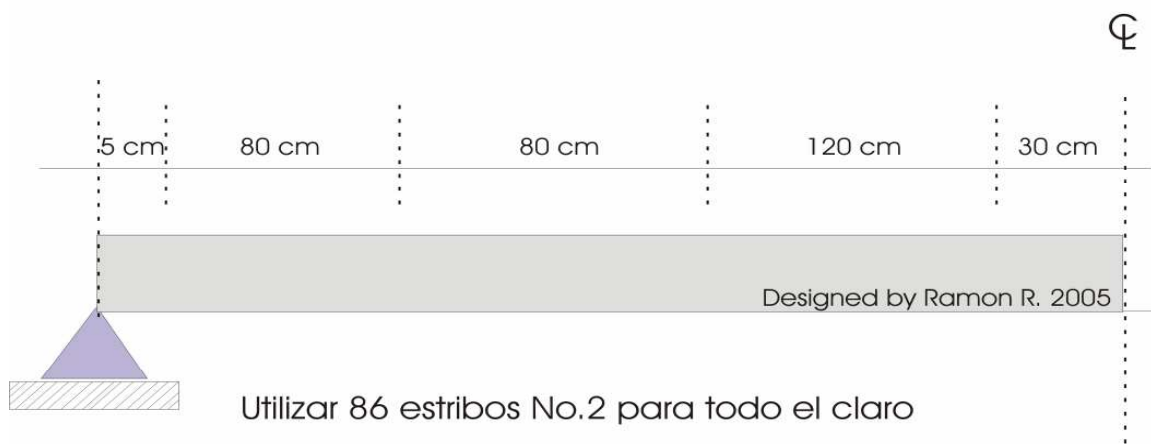


Figura 2.17.- Separación de los estribos verticales.

## EJEMPLO No. 2.

Determinar el tamaño y la separación de los estribos verticales cerrados para una viga simplemente apoyada, con un claro de 6.0 m y que tiene las siguientes características:

Datos:

$$F'_c = 200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad F_y = 4220 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad W_u = 4000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

$$b_w = 25\text{cm}$$

$$d = 50\text{cm}$$

Solución:

1.- Fuerza cortante factorizada

- La fuerza factorizada en el paño del apoyo es:

$$V_u = \frac{(4)(6)}{2} = 12 \text{ ton}$$

- A una distancia "d" del apoyo:

$$V_u = \frac{(3) - (0.50)}{3} (12 \text{ ton}) = 10 \text{ ton} \quad V_u = 10,000 \text{ kg}$$

2.- Resistencia al cortante proporcionada por el concreto:

$$V_u = 0.53 F_c b_w d$$

$$V_u = (0.85)(0.53)(200)(25)(50) = 7964 \text{ kg}$$

$$V_u = 10,000 \text{ kg} > V_u = 7,964 \text{ kg}$$

Por lo tanto necesita estribos.

$$V_s = V_u - \phi V_c = 10000 \text{ kg} - 7964 \text{ kg} = 2036 \text{ kg}$$

Revisando de que la sección sea adecuada por la cortante:

$$2.1 F_c b_w d = (2.1)(200)(25)(50) = 37,123 \text{ kg}$$

$37,123 \text{ kg} > V_s = 2,036 \text{ kg}$ ; Por lo tanto la sección transversal es adecuada.

3.- Refuerzo por cortante.

Probando con estribos verticales de dos ramas el diámetro No. 2.

Diámetro No. 2,  $A_v = 0.32 \text{ cm}^2$ ; Como son dos ramas en el estribo:

$$A_v = (2)(0.32) = 0.64 \text{ cm}^2$$

A una distancia  $d = 50 \text{ cm}$  del paño del apoyo, la separación de los estribos verticales sería:

$$S = \frac{A_v f_y d}{V_u - \phi V_c} = \frac{(0.64)(2810)(50)}{2036 \text{ kg}} = 44.16 \text{ cm}$$

Debido a que:  $V_u - V_c < 1.1F_c b_w d$

La separación máxima permisible es  $S = \frac{d}{2} = \frac{50cm}{2} = 25cm$ .

Por lo tanto se colocarán estribos del No. 2 @ 25 cm en todo el claro de la viga.



Figura 2.18.- Distribución de los estribos

### **TORSIÓN EN VIGAS**

En las vigas, es muy común la existencia de acciones torsionantes debido al carácter monolítico de las mismas.

Cabe aclarar que estas acciones torsionantes se presentan casi siempre en la combinación con acciones de flexión, fuerza cortante y fuerza normal. En algunos casos, los efectos de la torsión son secundarios en comparación con los

efectos producidos por otras acciones, y por esto suelen despreciarse en el diseño. Sin embargo, a veces la torsión puede ser la acción dominante. O al menos tener un efecto lo suficientemente importante para no poder ignorarla sin que la estructura sufra daños.

El problema de la torsión tiene dos aspectos. El primero consiste en la determinación de los momentos torsionantes que actúan sobre los elementos de una estructura, y el segundo, en la determinación de la resistencia de los elementos.

La determinación de momentos torsionantes es un problema de análisis estructural que no ha recibido la misma atención que el cálculo de momentos flexionantes y fuerzas cortantes. Esto se debe, a que se han menospreciado los efectos de torsión y de que no se disponía de medios para evaluar en forma precisa la rigidez torsionante de los elementos de concreto reforzado, dato necesario para el análisis de estructuras continuas.

Gracias al resultado de numerosas investigaciones, es posible calcular con suficiente precisión para fines prácticos, la resistencia a torsión y a combinaciones de torsión, fuerza cortante y momento flexionante de los elementos, así como su rigidez a torsión. Al igual que en el caso de la tensión diagonal, el conocimiento actual sobre el problema es en gran parte empírico.

### ***VIGAS CON EFECTOS IMPORTANTES DE TORSIÓN***

- Vigas que soportan marquesinas.

El momento de empotramiento de la marquesina se transmite como momento torsionante ala viga, la cual debe estar restringida contra giro en sus extremos por medio de columnas u otros elementos rígidos.

Un ejemplo de este tipo se ilustra en la figura 2.19 a.

- Vigas colocadas con muros excéntricamente.

La carga que transmite el muro a la viga no coincide con el eje longitudinal de esta. Dicha carga equivale a una que actúa en el eje longitudinal mas un momento torsionante, como se indica en la figura 2.19b.

- Vigas de borde en sistemas de piso.

En la figura 2.19c se representa parte de un sistema de piso con vigas secundarias perpendiculares a una viga principal de borde. La viga de borde restringe parcialmente a las vigas secundarias y recibe, a su vez, por condiciones de equilibrio, un momento torsionante.

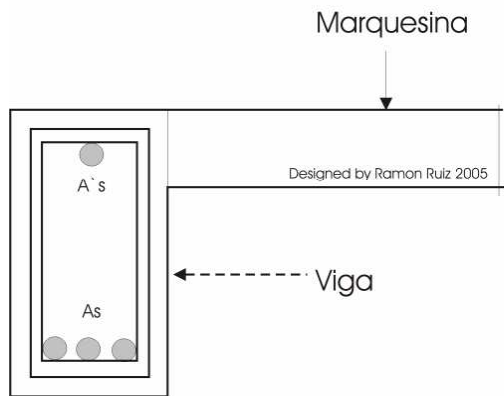
Casos semejantes al anterior se tienen en sistemas de vigas y losas, sin vigas secundarias, y en el de losas planas con vigas de borde, en los cuales las losas transmiten directamente momentos torsionantes a dichas vigas de borde.

En muchos ensayos de sistemas de piso se ha observado que la falla ocurre por torsión de las vigas de borde antes de que se alcance la resistencia en flexión de las losas y de las vigas, por lo tanto, el caso que se ilustra es de gran importancia práctica.

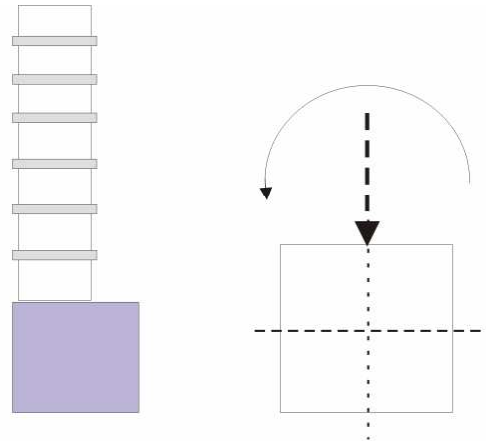
- Vigas curvas.

En este caso, la resultante de las cargas externas no se encuentra en el mismo plano que las reacciones en los apoyos, por lo cual se desarrollan momentos torsionantes en las vigas.

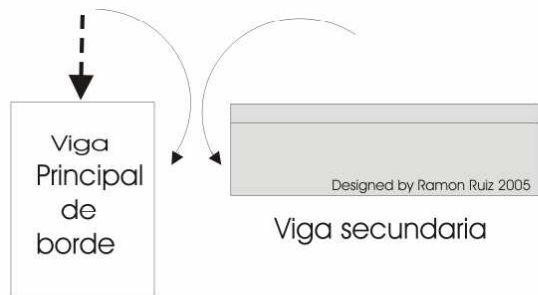
Esta ilustración se muestra en la figura 2.19d.



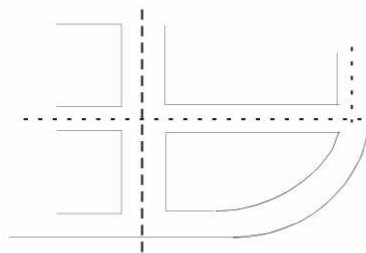
(A) Viga que soportan marquesinas



(B) Vigas con muros colocados excéntricamente.



(c) Viga de borde en sistemas de piso.



(d) Vigas curvas.

Figura 2.19.- Vigas sujetas a torsión.

### **TORSIÓN SIMPLE**

Este caso es poco frecuente en la práctica, ya que la torsión se presenta casi siempre acompañada de flexión y fuerza cortante. Sin embargo, para calcular la resistencia de un elemento sujeto a torsión combinada con flexión y la resistencia de un elemento sujeto a torsión simple.

## COMPORTAMIENTO Y MODOS DE FALLA EN VIGAS DE CONCRETO SIMPLE.

En una viga de concreto simple, la falla ocurre súbitamente para valores pequeños del ángulo de giro; por lo que es una falla de tipo frágil, similar a la de una viga ensayada a flexión, Hsú logró filmar el mecanismo de una falla de una viga, con una cámara de cine de alta velocidad.

La proyección en la cámara lenta de una película reveló que la falla se inicia al formarse una grieta inclinada de tensión en una de las caras mayores de la viga. Esta grieta se barre rápidamente y se extiende alas caras menores de la viga. La falla ocurre finalmente por aplastamiento en la cara mayor opuesta.

El proceso de falla es similar al de una viga de concreto simple ensayada a una flexión, en que la grieta de tensión se indica ala cara inferior, se extiende después alas caras laterales, y se aplasta el concreto de la cara superior. Por lo tanto, puede decirse que la falla por torsión ocurre por flexión en un plano inclinado a  $45^\circ$  con respecto al eje longitudinal de la viga.

En la figura 2.20 se muestra la superficie de falla. Puede verse que la inclinación de las grietas en las dos caras mayores es aproximadamente la misma.

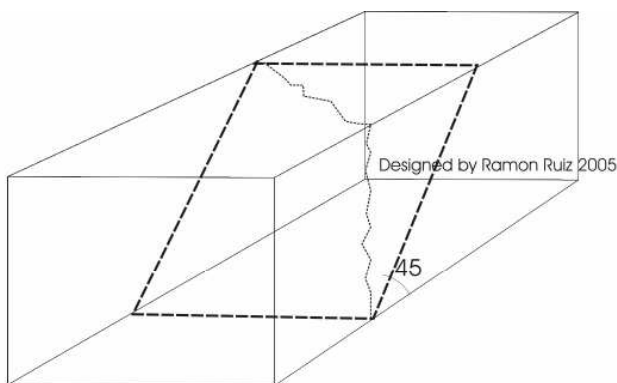


Figura 2.20.- Superficie de falla de una viga de concreto simple.



## COMPORTAMIENTO Y MODOS DE FALLA EN VIGAS DE CONCRETO REFORZADO

El comportamiento, modo falla y resistencia de vigas con refuerzo longitudinal únicamente, es similar al de las vigas de concreto simple, por lo tanto, el refuerzo longitudinal, sino esta combinado con refuerzo transversal no constituye un refuerzo eficiente desde el punto de vista de la torsión. En vigas con refuerzo longitudinal y trasversal, el comportamiento se divide en dos etapas: Una anterior al agrietamiento y otra posterior a él. El comportamiento anterior al agrietamiento es similar a la de una viga de concreto simple. La gráfica momento torsionante – giro es lineal en esta etapa como se ve en la figura 2.21, y los esfuerzos en el acero longitudinal y transversal son muy pequeños. Las primeras grietas de torsión se forman, en una de las caras mayores. Cuando ocurre esto, el momento torsionante, “ $T_{agr}$ ” es igual o ligeramente mayor que el momento resistente de un elemento de concreto simple, “ $T_{rs}$ ”.

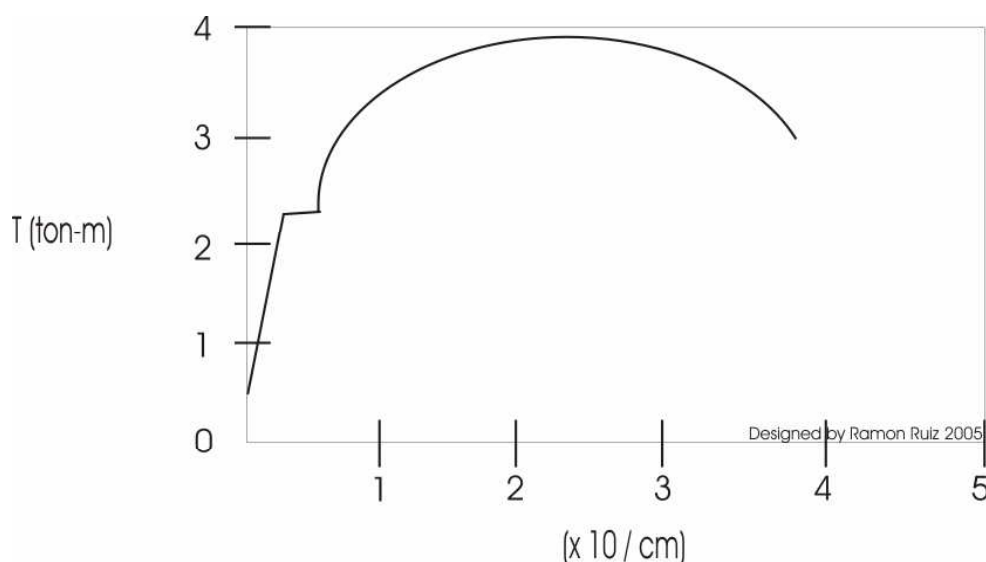


Figura 2.21.- Gráfica momento torsionante-giro de un elemento con refuerzo transversal sujeto a torsión pura.

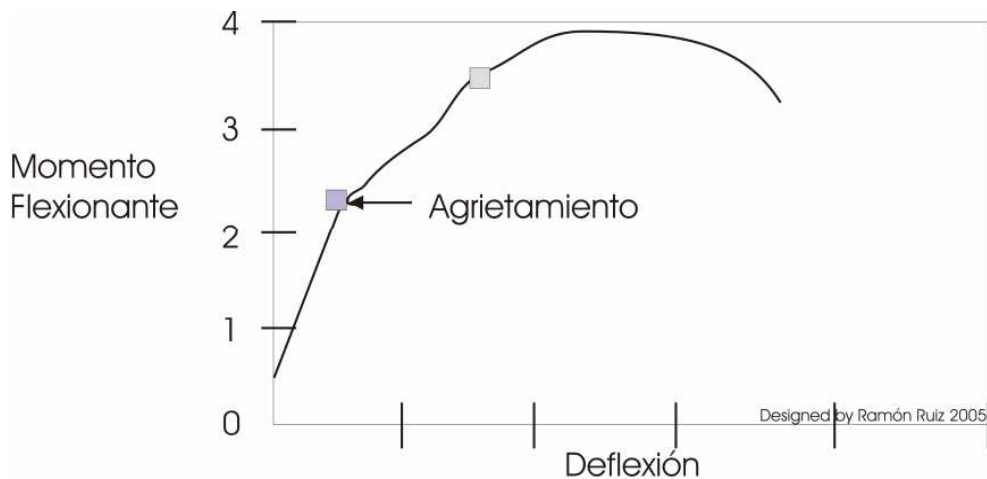
Cuando se agrieta el elemento el giro  $\theta$ , aumenta rápidamente bajo un momento constante, “ $T_{agr}$ ”, como se ve en la rama horizontal de la figura 2.21. Los esfuerzos en el refuerzo longitudinal y transversal también aumentarán rápidamente. La influencia del agrietamiento es diferente en las vigas sujetas a flexión y en vigas sujetas a torsión. En las primeras, los esfuerzos en el refuerzo aumentan gradualmente antes y después del agrietamiento y la pendiente de la gráfica carga – deflexión se modifica ligeramente, como se ve en la figura 2.22 a. En vigas sujetas a torsión sucede lo contrario, el estado interno de equilibrio cambia totalmente al formarse la primera grieta. La pendiente de la gráfica momento torsionante – giro cambia bruscamente como se observa en la figura 2.22b, y el momento externo que era resistido solo por el concreto, es resistido ahora por el concreto y el acero conjuntamente.

Durante este cambio en el estado de equilibrio ocurre una transferencia de carga del concreto al acero. Como el momento externo permanece constantemente mientras ocurre esta transferencia, la fracción del momento total, que es resistida por el concreto después del agrietamiento,  $T_{agr}$ , y por lo tanto, menor que el momento resistente de un elemento de concreto simple de igual sección,  $T_{rs}$ .

Al finalizar la etapa de transferencia de carga del concreto al acero el momento torsionante vuelve a aumentar, pero la rigidez de elemento es menor que antes del agrietamiento, como se ve en la figura 2.21. Tanto la rigidez como el momento resistente,  $T_r$ , dependen de los porcentajes de esfuerzo longitudinal y transversal. Después de alcanzar el momento máximo,  $T_r$ , la gráfica momento – giro tienen una rama descendente que en los ensayos se desarrolla en segundos.

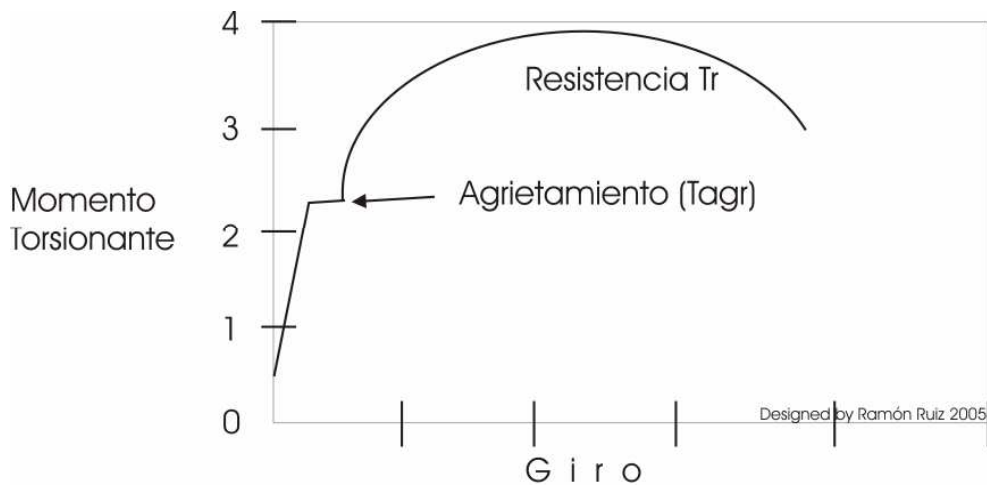
Cuando se alcanza la resistencia,  $T_r$ , el concreto de la cara mayor del elemento, opuesta a la cara con grietas en tensión, se aplasta, y el acero de refuerzo puede estar fluyendo o no, según su porcentaje. De acuerdo con esto, se distinguen tres tipos de elementos: 1) subreforzados, en los que fluyen el acero longitudinal y transversal; 2) sobreforzados en los que el concreto se aplasta antes de que fluya

el refuerzo, y 3) parcialmente sobreforzados, en los que sólo fluye el refuerzo longitudinal o el transversal.



( a ) Viga sujeta a Flexión.

Figura 2.21.- Gráfica momento torsionante-giro de un elemento con refuerzo transversal sujeta a torsión pura.



( b ) Viga sujeta a Torsion.

Figura 2.21.- Gráfica momento torsionante-giro de un elemento con refuerzo transversal sujeta a torsión pura.

## **EVALUACIÓN DE LA RESISTENCIA DE ELEMENTOS DE CONCRETO SIMPLE**

Se han desarrollado varias teorías para calcular la resistencia en torsión de elementos de concreto simple. Las más conocidas son: La teoría elástica, la teoría plástica y la teoría Hsú. En las dos primeras se supone que el concreto es un material perfectamente elástico o perfectamente plástico, respectivamente, al cuál son aplicables los resultados de las teorías de elasticidad o plasticidad. La tercera se desarrolló a partir del comportamiento y modos de falla de las vigas de concreto simple descrito anteriormente. La teoría elástica, desarrollada por Saint Venant en 1855 permite calcular la resistencia por barras prismáticas de material elástico con cualquier sección transversal sujetas a momentos torsionantes en sus extremos. Se supone que al aplicar los momentos torsionantes, las secciones transversales experimentan una rotación y un alabeo.

Los resultados obtenidos con esta teoría se basan en la analogía de la membrana y han sido de gran utilidad en el estudio de problemas de torsión elástica.

La teoría plástica se aplica a materiales elastoplásticos o plásticos. La resistencia en torsión puede calcularse con la analogía del montón de arena que es una extensión de la analogía de la membrana.

La teoría de Hsú está basada en el mecanismo, según el cual la falla ocurre por flexión en la superficie mostrada en la figura 2.20. En esta teoría de la superficie de falla se idealiza por un plano inclinado a  $45^\circ$  respecto al eje longitudinal del elemento y se supone que la falla se produce por una componente del momento torsionante,  $T_2$ , que produce flexión en la sección de la falla.

En resumen, se concluye que las expresiones para calcular la resistencia a torsión de los elementos de sección rectangular obtenidas por las tres teorías mencionadas tienen la misma forma general:

$$T = K \cdot x^2 y \cdot f_{tu}$$

Donde:

X = Lado menor de la sección transversal.

Y = Lado mayor de la sección transversal.

F<sub>tu</sub> = Resistencia a tensión del concreto.

R = Factor que depende de la relación  $x/y$ .

En la teoría de Hsú, el valor de K es constante y vale 0.333, los valores de K para la teoría elástica y plástica aparecen en la tabla 2.2.

X/Y	Ke	Kp
2	0.23	0.41
4	0.27	0.44
6	0.29	0.45
8	0.30	0.46
10	0.31	0.47

Ke = Constante para la teoría elástica; Kp = Constante para la teoría Plástica.

Tabla 2.2.- Valores de las constantes Ke y Kp.

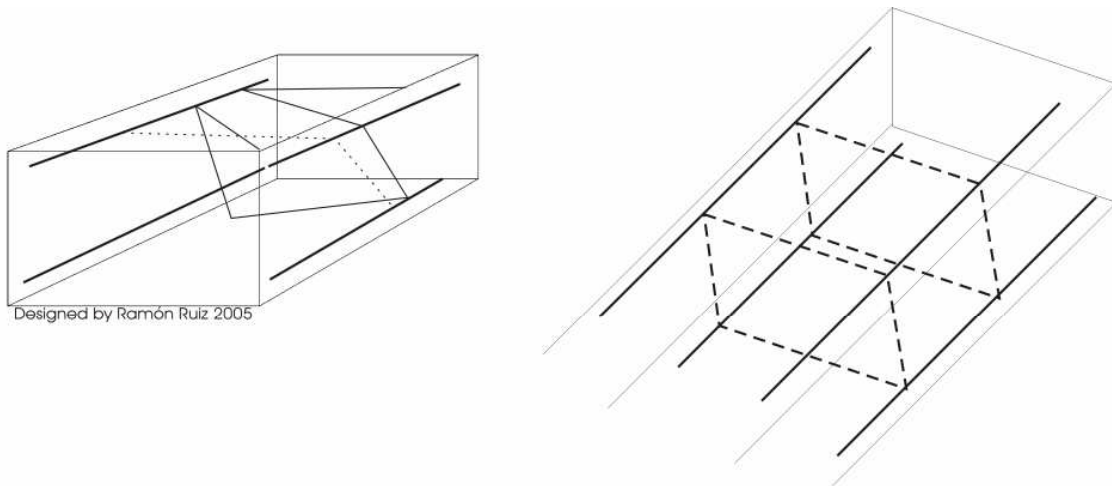
## EVALUACIÓN DE LA RESISTENCIA DE LOS ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO.

Se mencionó anteriormente que la componente T2 del momento torsionante aplicado a un elemento de concreto, produce esfuerzos de tensión por flexión en una de las caras mayores del elemento. Estos esfuerzos de tensión tienen una inclinación de  $45^\circ$  respecto al eje longitudinal de la viga. De la misma manera, en las demás caras del elemento también existen esfuerzos inclinados de tensión producidos por los componentes del momento torsionante. La dirección de los esfuerzos en la cara anterior es perpendicular a la dirección de los esfuerzos en la cara posterior y la dirección en la cara superior es perpendicular a la dirección en la cara inferior.

Hay dos alternativas para reforzar un elemento de concreto sujeto a torsión. La primera consiste en colocar el refuerzo en dirección paralela a los esfuerzos de tensión. De esta manera, el esfuerzo queda en forma helicoidal, como se muestra en la figura 2.23 a, ya que los esfuerzos de tensión son perpendiculares entre sí en cara opuestas. Es necesario colocar varias hélices de tal manera que cada grieta potencial quede cortada por una barra de esfuerzo. Si la dirección del momento torsionante puede cambiar, es necesario colocar dos

Series de hélices perpendiculares entre sí. Este tipo de esfuerzo casi no se utiliza por dificultades constructivas.

La segunda opción consiste en colocar refuerzo longitudinal y transversal como se muestra en la figura 2.23b. De esta manera, el refuerzo resiste las componentes longitudinales y transversales de los esfuerzos de tensión. Este es el tipo de refuerzo más usual en la práctica.



( a ) Viga sujeta a Torsión.

( b ) Refuerzo longitudinal y transversal

Figura 2.23.- Tipos de refuerzo para torsión.

La resistencia a torsión de un elemento con refuerzo puede expresarse como suma de las resistencias del concreto y del acero.

$$T_r = T_c + T_s \quad \text{-----} \rightarrow \quad (1)$$

Existen varias teorías para evaluar  $T_c$  y  $T_s$ . Por lo que respecta a  $T_c$ , el reglamento australiano considera que es la resistencia de un elemento semejante de concreto simple ( $T_c - T_{rs}$ ), mientras tanto, el reglamento alemán considera que el concreto no contribuye después del agrietamiento ( $T_c = 0$ ).

En todas las teorías presentadas, la contribución del acero se calcula con la siguiente expresión:

$$T_s = \frac{\alpha_t A_t f_s x_1 y_1}{S} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (2)$$

Donde:

$\alpha_t$  = Parámetro que se determina experimentalmente.

$A_t$  = Área de una rama del estribo.

$f_s$  = Esfuerzo en el estribo.

$x_1$  = Lado menor de un estribo, medido centro a centro.

$y_1$  = Lado mayor de un estribo, medido centro a centro.

$S$  = Separación de los estribos.

Si se supone que las grietas están inclinadas a  $45^\circ$  en cada cara de la sección transversal del elemento, el número de ramas verticales de estribos que cruzan la grieta es  $y_1/S$ . La separación entre ramas es  $x_1$ , y por lo tanto, si las fuerzas de tensión en las ramas verticales son  $K_1 A_t f_s$ , el momento producido por estas fuerzas de tensión es:

$$T_{S_1} = \frac{A_t f_s x_1 y_1 K_1}{S} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (3)$$

De la misma manera, el momento producido por las ramas horizontales de los estribos es:

$$T_{S_2} = \frac{A_t f_s x_1 y_1 K_2}{S} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (4)$$

Los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$  se introducen para tomar en cuenta que los esfuerzos no son uniformes a lo largo de los estribos, como se ha demostrado experimentalmente.

Sumando las ecuaciones 3 y 4 se obtiene que la contribución de acero en la ecuación 1 es:

$$T_S = \frac{A_t f_s x_1 y_1 (K_1 + K_2)}{S}$$

Haciendo  $K_1 + K_2 = \alpha_t$  se obtiene la ecuación 2.

Los valores de  $T_c$  y  $t$  pueden obtenerse experimentalmente ensayando vigas en las que la variable principal sea término  $\frac{A_t f_s x_1 y_2}{S}$ .



Los resultados experimentales se pueden presentar en una gráfica como la figura 2.24 se obtiene una recta cuya ordenada en el origen es el valor de  $T_c$  y cuya pendiente es el valor de  $\alpha_T$ . La contribución del concreto,  $T_c$ , obtenida de esta manera es un valor extrapolado; no es posible medir esta contribución directamente.

Hsú, ensayó una gran cantidad de vigas y representó sus resultados en gráficas como la figura 2.24, encontrando que:

$$T_c = \frac{x^2 y \sqrt{F_c}}{\sqrt{x}} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (5)$$

$$\alpha_T = 0.66 + \frac{0.33 y_1}{x_1} \leq 1.5 \quad \text{-----} \rightarrow \quad (6)$$

La contribución del concreto,  $T_c$ , obtenida de esta manera es menor que la resistencia de un elemento de concreto simple; para elementos de dimensiones usuales es del orden del 40 %.

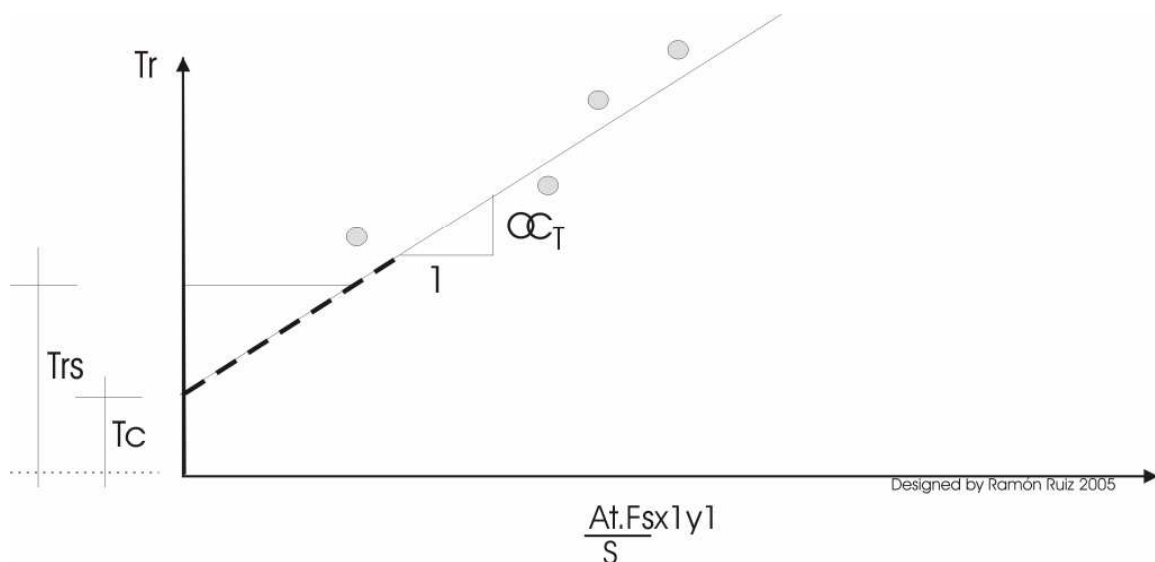


Figura 2.24.- Determinación experimental  $T_c$  y  $\alpha_T$

$$\frac{A_t f_s x_1 y_1}{S}$$

La resistencia total de un elemento con refuerzo transversal se obtiene sustituyendo la ecuación 6 en la 2, y esta y la ecuación 5 en la ecuación 1. El resultado es:

$$T_r = \frac{x^2 y \sqrt{F_c}}{\sqrt{x}} + \left( 0.66 + \frac{0.33 x_1}{y_1} \right) A_t f_s x_1 y_1 \quad \text{-----} \rightarrow \quad (7)$$

Para aplicar esta ecuación es necesario conocer el esfuerzo en los estribos  $f_s$ . Este esfuerzo es igual al de fluencia,  $f_y$ , en vigas subreforzadas, ósea, cuando fluye el acero de los estribos antes de que elemento alcance su resistencia. Para asegurar que esto suceda, deben limitarse tanto la relación volumétrica total de acero (longitudinal más transversal),  $P_{lr}$ , como la relación entre acero longitudinal y acero transversal,  $V$ . Hsú propone los siguientes límites:

$$P_{lr} \leq 6.40 \frac{\sqrt{F_c}}{F_y} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (8)$$

$$0.7 < V < 1.5 \quad \text{-----} \rightarrow \quad (9)$$

Las relaciones  $V$  y  $P_{lr}$  se pueden calcular con las expresiones:

$$V = \frac{A_t S}{2 A_l (x_1 + y_1)} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (10)$$

$$P_{lr} = \frac{A_l \left( 1 + \frac{1}{V} \right)}{x \cdot y} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (11)$$

Donde  $A_l$  es el área total de acero longitudinal. Esta área debe distribuirse en el perímetro de la sección transversal. Si se cumplen las condiciones expresadas por las ecuaciones 8 y 9, la resistencia a torsión de un elemento de concreto reforzado puede calcularse haciendo  $f_s$  igual a  $f_y$  en la ecuación 7. Se obtiene:

$$Tr = \frac{x^2 y \sqrt{F_c}}{\sqrt{x}} + \left(0.66 + \frac{0.33 y_1}{x_1}\right) \cdot \frac{A_l f_s x_1 y_1}{S} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (12)$$

## TORSIÓN Y CORTANTE

La fuerza cortante no puede existir en un elemento a menos que exista también momento flexionante. Por consiguiente, la interacción torsión cortante se estudia siempre con la acción simultánea de momento flexionante. Por simplicidad se utiliza el término interacción torsión- cortante.

Cuando la torsión externa está acompañada por un cortante externo, la misma sección queda sujeta a esfuerzos cortantes, mas elevados debido al efecto combinado de los dos tipos de carga mientras interactúan entre sí. La resistencia de una viga a torsión y cortante combinados es menor que su resistencia a cualquiera de estos dos parámetros cuando actúan en forma separada. Así que, es necesaria una relación de interacción de manera similar a la desarrollada para carga axial y flexión combinados.

La figura 2.25 representa la siguiente expresión de interacción adimensional relacionado ala torsión con el cortante:

1.- Miembro sin acero en el alma:

$$\left(\frac{T_c}{T_{rs}}\right)^2 + \left(\frac{V_c}{V_{rs}}\right)^2 \leq 1.0 \quad \text{-----} \rightarrow \quad (13)$$

$T_c$  y  $V_c$  son la torsión y el cortante externo nominal cuando actúan simultáneamente.  $T_{rs}$  y  $V_{rs}$  son los valores nominales para la torsión y el cortante cuando cada uno actúa en forma separada.

2.- Miembros con acero en el alma:

$$\left(\frac{T_n}{T_r}\right)^2 + \left(\frac{V_n}{V_r}\right)^2 \leq 1.0 \quad \text{-----} \rightarrow \quad (14)$$

$T_n$  y  $V_n$  representan las resistencias nominales a la torsión y al cortante para resistir  $T_u$  y  $V_u$  cuando actúan simultáneamente.  $T_r = T_c + T_s$  representa la resistencia nominal a la torsión del alma reforzada cuando actúa únicamente torsión pura en la sección;  $V_r = V_c + V_s$  representa la resistencia nominal al cortante del alma reforzada cuando actúa únicamente cortante en la sección.

Después de una serie de pruebas hechas con vigas sujetas a cortante y torsión simple y combinada, con y sin acero en el alma, se dedujo que:

De lo que el A.C.I. 318-02 recomienda que:  $T_n = 5T_c$

$$T_s \leq 4T_c$$

De lo contrario, se deberá aumentar la sección transversal de la viga.

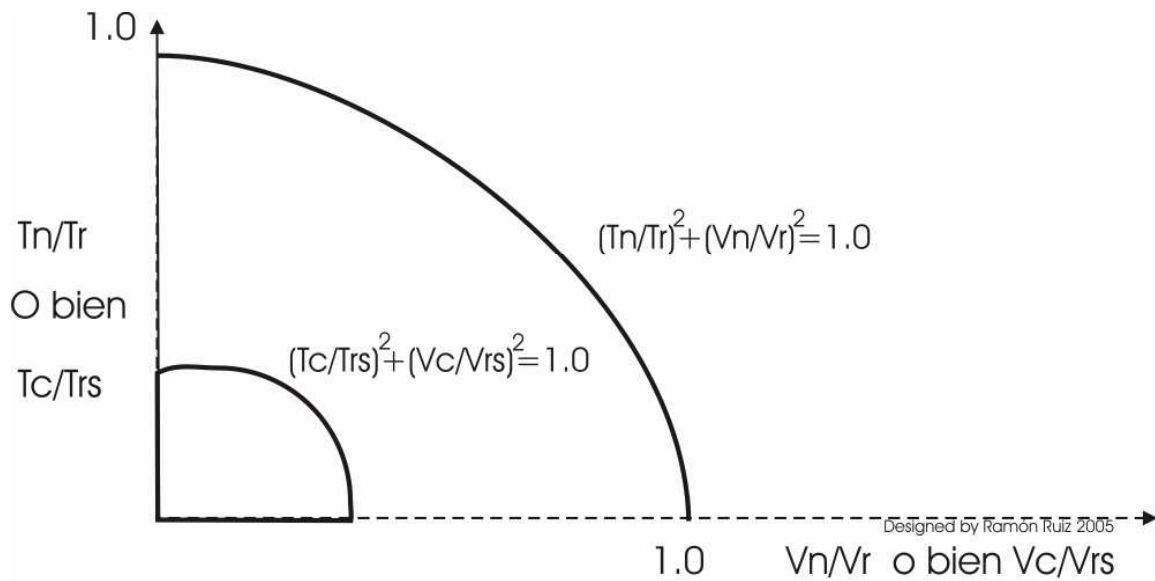


Figura 2.25.- Diagrama de interacción para torsión y cortante combinados.

## TORSIÓN Y FLEXIÓN

Cuando la flexión actúa simultáneamente con la torsión, la capacidad a la flexión de la sección se reduce en forma considerable. Debido a ello, se produce el agrietamiento por efecto de los esfuerzos cortantes de torsión a bajos niveles de carga.

La figura 2.26 muestra al vector resultante  $R_u$  para momentos flexionantes y torsionantes combinados, los cuales causan el alabeo de la sección.

De manera similar al caso de tensión y cortante combinados, se establece una relación de la interacción relacionando a la torsión con la flexión y actuando en forma simultánea. Se debe suponer que la sección está reforzada con acero de tensión y compresión.

Se pueden desarrollar dos casos para los cuales las siguientes expresiones de interacción son aplicables:

1.- Cuando el acero de tensión fluye en la zona de tensión:

$$\left(\frac{T_n}{T_r}\right)^2 = r\left(1 - \frac{M_n}{M_r}\right)$$

2.- Cuando el acero de tensión fluye en la zona de compresión por flexión:

$$\left(\frac{T_n}{T_r}\right)^2 = 1 + r\left(\frac{M_n}{M_r}\right)$$

Donde:

$T_n$  = Momento resistencia nominal ala torsión equivalente a  $\frac{T_u}{\phi}$ .

$T_r$  = Resistencia nominal a la torsión del alma reforzada cuando sólo actúa la torsión pura.

$M_n$  = Momento flexionante resistente nominal  $\frac{M_u}{\phi}$ .

$M_r$  = Resistencia flexionante nominal cuando sólo actúa la flexión.

$$r = \frac{A_s \cdot f_y}{A'_s \cdot f_y}$$

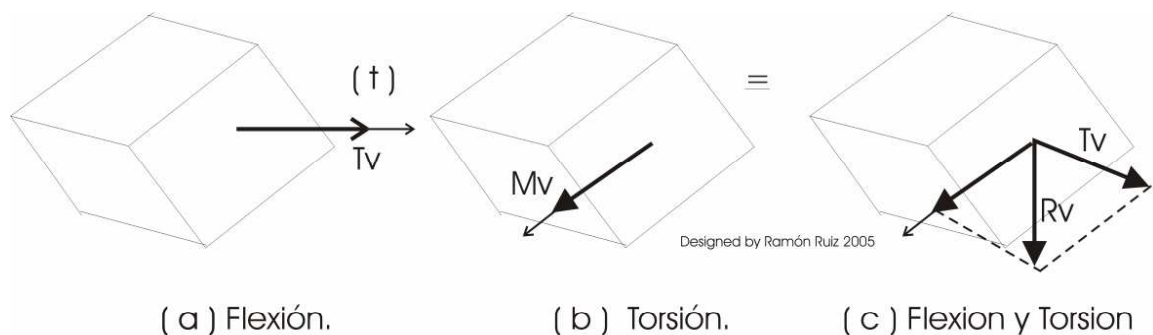


Figura 2.26.- Representación esquemática del vector de torsión y flexión combinados:

## **FLEXION, CORTANTE Y TORSIÓN**

Una combinación de estos tres parámetros resulta en una superficie tridimensional de interacción.

La expresión aplicable resulta de superponer el efecto de la torsión y el cortante combinado en el efecto de la flexión y la torsión combinados según los dos casos de interacción presentados anteriormente.

El ACI requiere:

1.- Cálculo del acero transversal del alma por cortante, adicionándolo al acero transversal al alma por torsión calculando separadamente.

2.- Cálculo del acero longitudinal por torsión, adicionándolo al acero de tensión requerido por flexión, Pero distribuyéndolo en forma simétrica en todas las caras de la sección transversal.

### **EXPRESIONES PARA VALUAR LA RESISTENCIA A EFECTOS DE TORSIÓN.**

El reglamento A.C.I. 318-04 señala que los efectos de torsión deben tomarse en cuenta siempre que el momento torsionante externo, ya factorizado, sea mayor que:

$$\phi(0.13\sqrt{F_c}\sum x^2y)$$

El factor de reducción  $\phi$  se considera de 0.85.

En los elementos de sección rectangular o con patines, la suma de  $\sum x^2y$  debe tomarse en cuenta para todos los rectángulos componentes de la sección, pero el ancho sobresaliente del patín usado en el diseño no debe exceder de tres veces del espesor del mismo.

Una sección en el cajón rectangular puede considerarse como una sección sólida, siempre que el espesor de la pared,  $h$ , sea por lo menos  $\frac{x}{4}$ . Una sección en cajón con un espesor de pared menor de  $\frac{x}{4}$ , pero mayor que  $\frac{x}{10}$ , también puede considerarse como una sección sólida, excepto que  $\sum x^2 y$  debe multiplicarse por  $\frac{4h}{x}$ . Cuando  $h$  sea menor que  $\frac{x}{10}$ , debe considerarse la rigidez de la pared. Debe colocarse chaflanes en las esquinas interiores de todas las secciones en cajón.

Para la determinación de los momentos torsionantes externos, el reglamento ACI distingue entre aquellas estructuras en que el momento torsionante debe ser resistido en su totalidad para mantener el equilibrio y aquellas en las que puede haber una redistribución de momentos torsionantes a otro tipo de acciones internas. En el primer caso se encuentran las marquesinas de la figura 2.19 a, ya que el momento torsionante que se trasmite de la losa de la viga tiene que ser resistido exclusivamente por esta última mediante su trabajo en torsión. La figura 2.19c ilustra el segundo caso, ya que si se reduce el momento torsionante en la viga principal de borde disminuye el momento flexionante en la viga secundaria en su unión con la viga principal., y aumenta dicho momento flexionante en los apoyos interiores en la viga secundaria.

Para el primer caso mencionado, el reglamento ACI señala que los elementos estructurales sean diseñados para resistir el momento torsionante total; en el segundo caso e permite reducir el momento torsionante factorizado hasta un valor de  $\phi(1.1\sqrt{F_c} \cdot \frac{\sum x^2 y}{3})$ , teniendo en cuenta que los momentos o fuerzas cortantes en otros elementos estructurales deben ejecutarse debido a su redistribución.



Cuando se trata de una viga con momento torsionante transmitido por medio de una losa, el reglamento ACI permite considerar que estos momentos torsionantes están distribuidos uniformemente a lo largo de la viga. También señala el reglamento que la sección crítica por cortante, se localiza a una distancia “d” de la cara del apoyo del elemento.

## MOMENTO TORSIONANTE RESISTENTE

La resistencia nominal a torsión de un elemento se supone igual a la suma de la resistencia que proporciona el concreto y la resistencia que proporciona el acero, esto es:

$$T_n = T_c + T_s$$

La contribución del concreto se calcula mediante:

$$T_c = \frac{0.2\sqrt{F_c} \sum x^2 y}{\sqrt{1 + \left[ \frac{0.4V_u}{C_t T_u} \right]^2}}$$

Donde:  $V_u$  y  $T_u$  son la fuerza cortante y el momento torsionante externos multiplicados por el factor de carga y  $C_t$  es un factor que relaciona los esfuerzos por cortante y por torsión.

$$C_t = \frac{b_w d}{\sum x^2 y}$$

La contribución del acero,  $T_s$ , se calcula con la ecuación:

$$T_s = \frac{A_t \alpha_t x_1 y_1 f_y}{S}$$

Donde:

$A_t$  = Área de una rama de estribo.

$S$  = Separación de estribos.

$x_1, y_1$  = Lado menor y lado mayor respectivamente de los estribos mediado centro a centro.

$$\alpha_t = 0.66 + 0.33\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \leq 1.50$$

En ningún caso debe aceptarse que  $T_s$  exceda de  $4T_c$  con el fin de evitar una cantidad excesiva de acero por torsión y una falla frágil del elemento.

Como se mencionó anteriormente, además de los estribos debe colocarse refuerzo longitudinal adicional al de flexión.

El reglamento ACI especifica que el área de refuerzo,  $A_1$ , debe estar determinada por el valor mayor de las ecuaciones siguientes y que el refuerzo debe distribuirse alrededor del perímetro de los estribos:

$$A_1 = 2A_t \left( \frac{x_1 + y_1}{S} \right) \quad \text{-----} \rightarrow \quad (a)$$

$$A_1 = \left[ 28x_s \left( \frac{Tu}{Tu + \frac{Vu}{3Ct}} \right) - 2A_t \left( \frac{x_1 + y_1}{S} \right) \right] \quad \text{-----} \rightarrow \quad (b)$$

El valor  $A_1$ , calculado con la ecuación (b), no necesita exceder del obtenido al sustituir:

$$\frac{3.5b_w S}{F_y} \quad \text{por} \quad 2A_t$$

Los estribos y el refuerzo longitudinal que se requieran por torsión deben adicionarse al refuerzo por flexión, por cortante o por carga axial.

El reglamento señala que la separación de los estribos cerrados no debe exceder de  $\left(\frac{x_1 + y_1}{4}\right)$  ni de 30 cm, el que sea menor, también indica que la separación de las varillas longitudinales no menores del No. 3, distribuidas alrededor del perímetro de los estribos cerrados, no debe exceder de 30 cm. Debe colocarse por lo menos una varilla longitudinal en cada esquina de los estribos cerrados.

El área mínima de los estribos que se requieren por cortante y por torsión debe ser igual a:

$$A_v + 2A_t = \frac{3.5b_w S}{F_y}$$

En esta situación,  $A_v$  representa el área de todas las ramas verticales del estribo mientras que  $A_t$  es el área de cada rama.

La presencia de momento torsionante reduce la resistencia a fuerza cortante de un elemento, ya que ambas acciones producen tensiones diagonales, como se señaló con anterioridad. Para tomar en cuenta esto, el reglamento A.C.I. 318-02 especifica que la fuerza cortante,  $V_c$ , que puede resistir una sección sujeta a torsión y cortante simultáneamente se calcula con la ecuación:

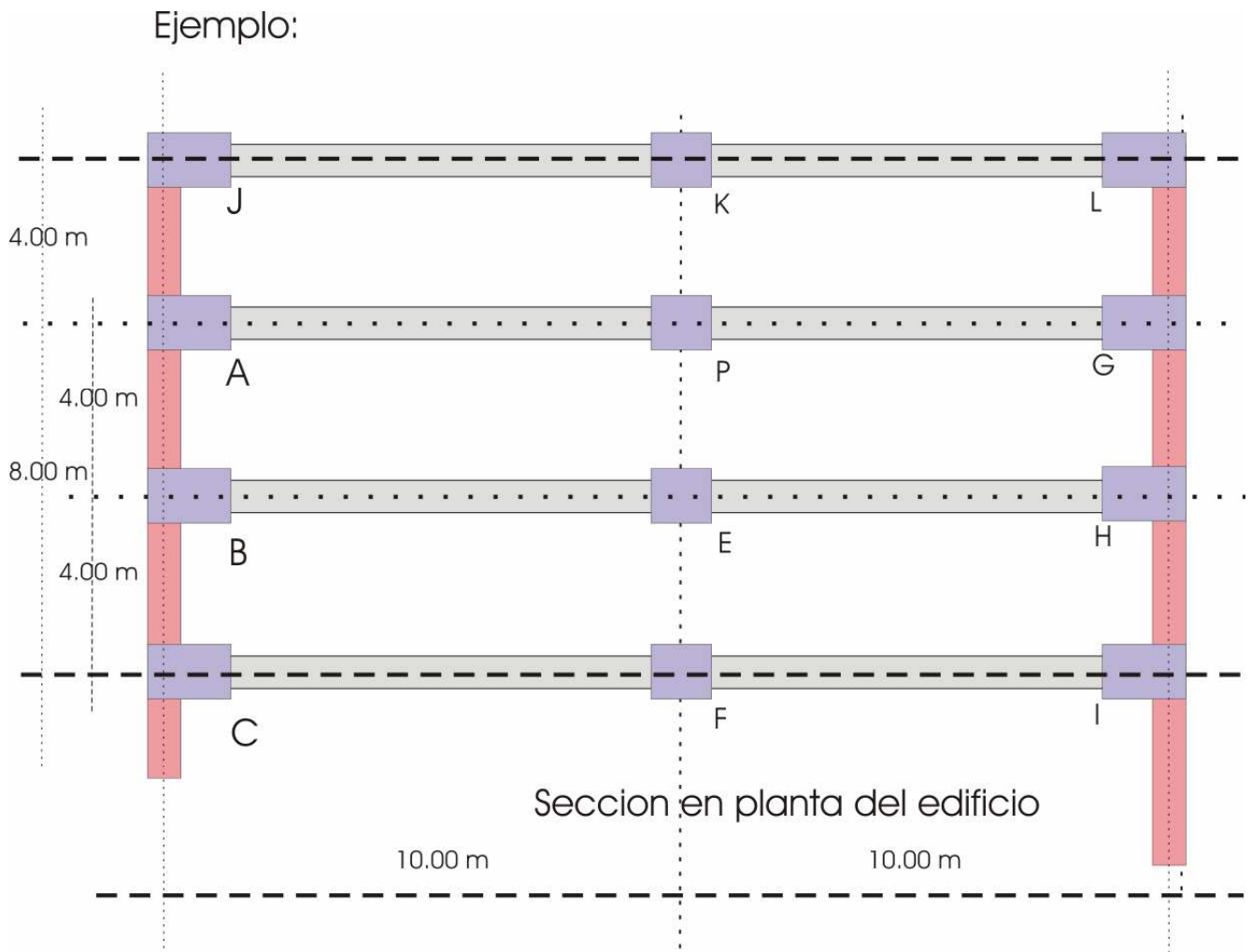
$$V_c = \frac{0.53\sqrt{F'_c} b_w d}{\sqrt{1 + \left(\frac{2.5C_t T_u}{V_u}\right)^2}}$$

El numerador de esta ecuación proporciona la resistencia a fuerza cortante del concreto cuando sólo actúa fuerza cortante, y el denominador indica la reducción correspondiente a un diagrama e interacción cortante torsión de forma circular.

Esta ecuación debe usarse siempre que el valor del momento torsionante  $T_u$ , exceda de  $\phi(0.13\sqrt{F_c'} \sum x^2 y)$ .

EJEMPLO:

Diseñar la viga de borde “AC” de la siguiente figura para cortante y torsión combinados, en le segundo nivel de un edificio.



- Criterios de diseño:

Tablero Típico-----	= 4.00 x 10.00 m
Espesor de la losa---	= 12 cm
Carga viva-----	= 250 kg/m <sup>2</sup>
F 'c -----	= 280 kg/cm <sup>2</sup>

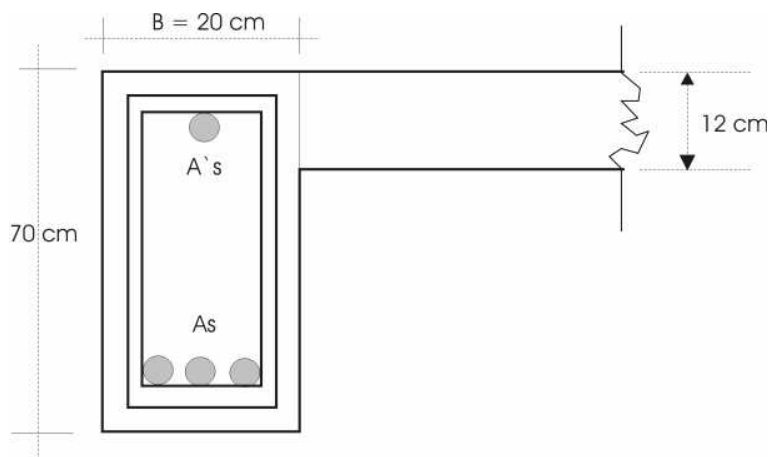
Fy -----	= 4220 kg/cm <sup>2</sup>
Altura -----	= 3.00 m (de piso a piso)
Todas las vigas -----	= 35 x 70 cm
Columnas exteriores	= 35 x 50 cm
Columnas interiores	= 50 X 50 cm

### SOLUCION:

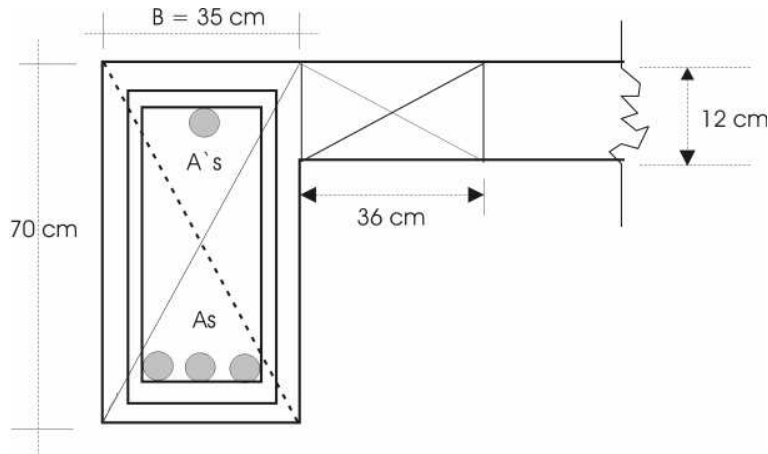
Como se trata de un caso en que puede haber redistribución de fuerzas internas, el momento torsionante para diseño se puede reducir hasta:

$$\phi(1.1\sqrt{F_c} \frac{\sum x^2 y}{3})$$

1.- Cálculo de  $\phi(1.1\sqrt{F_c} \frac{\sum x^2 y}{3})$  para la viga "AC".



Como se trata de una figura con patín, esta puede descomponerse en dos rectángulos como se muestra a continuación:



Para la porción en losa:  $y = (3)(12) = 36 \text{ cm}$

$$\sum x^2 y = (35^2)(70) + (12^2)(36) = 90934 \text{ cm}^3$$

$$\phi = 0.85$$

$$\phi(1.1\sqrt{F_c} \frac{\sum x^2 y}{3}) = 0.85 \left( 1.1\sqrt{280} \left( \frac{90934 \text{ cm}^3}{3} \right) \right) = 4.74 \text{ ton-m}$$

Este valor deberá usarse para determinar la redistribución de momentos en la viga "BE". La reacción resultante en "B" determinará el cortante en la viga "AC" que se utilizará en combinación con la torsión.

2.- Determinación de los momentos de empotramiento en los extremos de la viga "BE".

- Cargas que actúan sobre la viga.
- Carga Muerta de servicio:
- Peso de la losa:

$$(0.12 \times 4.00)(4200) = 1152 \text{ kg/m}$$

Peso de la viga:

$$[(0.70 - 0.12)(0.35)](2400) = 487 \text{ kg/m}$$

$$\text{DL de servicio} = 1152 + 487 = 1639 \text{ kg/m}$$

\*Carga viva de servicio:

$$\text{LL de servicio} = (250)(4.00) = 1000 \text{ kg/m}$$

-Carga factorizada:

$$U = (1.4)(1639) + (1.7)(1000) = 3995 \text{ kg/m} \approx 4.0 \text{ ton/m}$$

$$U = 4.0 \text{ ton/m}$$

-Momento de empotramiento:

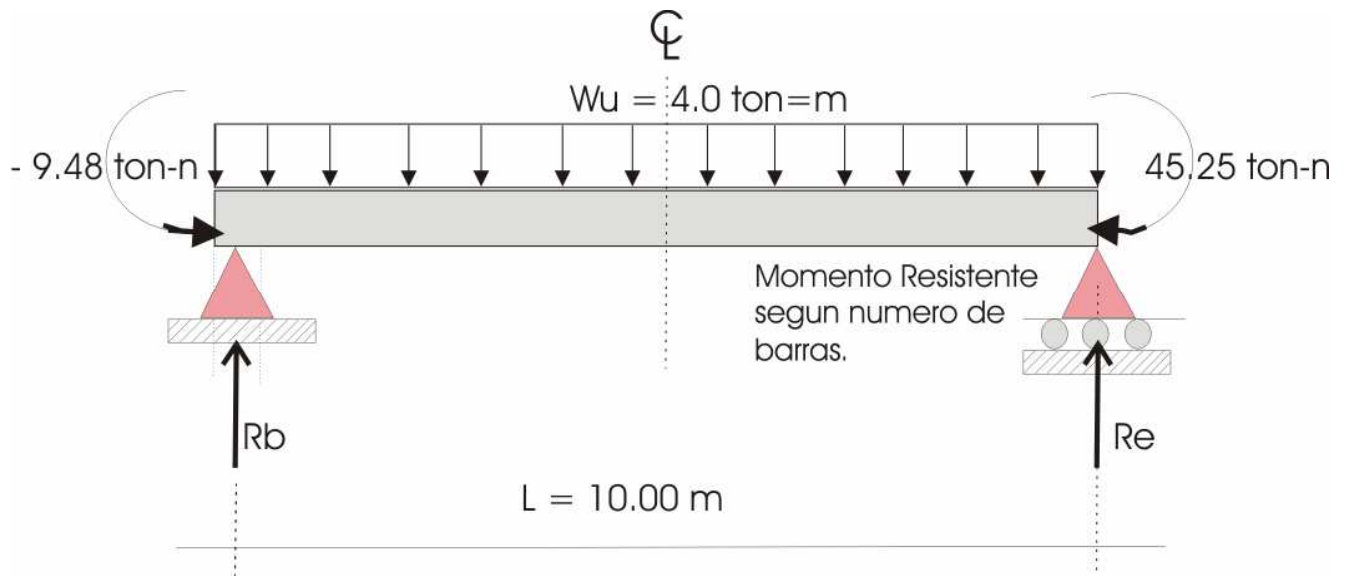
$$M_e = \frac{Wl^2}{12} = \frac{(4.0)(10)^2}{12} = 33.33 \text{ ton/m}$$

3.- Aplicar el momento torsionante restrictivo y reducido del paso 1 = 4.74 ton-m.

Como este momento torsionante aplica desde los extremos de B, el momento en el extremo de "BE" será de  $(2)(4.74) = 9.48 \text{ ton-m}$ .

4.- Cálculo de la reacción de la viga en B y el cortante resultante en la viga "AC"





$$\sum M_E = 0$$

$$10R_B + 45.25 - 9.48 - 4\left(\frac{10^2}{2}\right) = 0$$

$$10R_B + 35.77 - 200 = 0$$

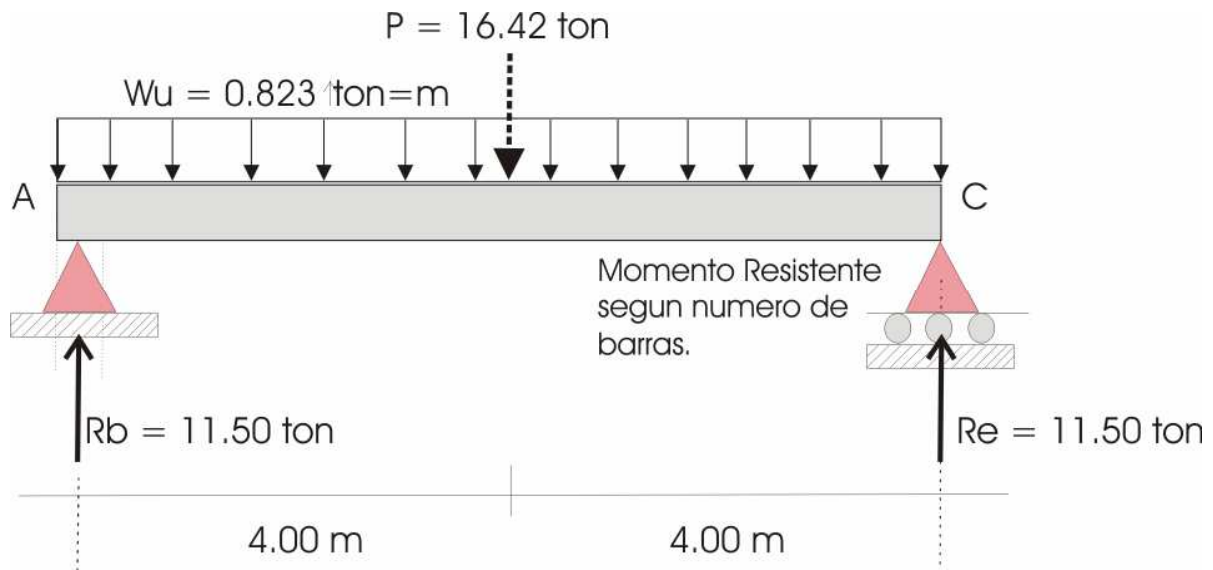
$$R_B = \frac{164.23}{10} = 16.42 \text{ ton}$$

- Carga muerta en "AC".
- Peso propio de la viga:

$$W = (0.35)(0.70)(2400) = 588 \text{ kg/m}$$

$$U = (1.4)(588) = 0.823 \text{ ton/m}$$

Sección crítica en "AC": Suponiendo  $d = 65 \text{ cm}$ .



$$65 + \frac{35}{2} = 85.2 \text{ cm Desde el centro de la columna.}$$

$$Vu = \frac{16.1}{2} + 0.823(4.00 - 0.825) = 10.82 \text{ ton}$$

5.- Calculo del área requerida de estribos cerrados a torsión.

$$\frac{At}{S} = \left( \frac{Tu - \phi Tc}{\phi \cdot fy \cdot \alpha_t x_1 y_1} \right)$$

Hay que recordar que Tu ha sido reducida a 4.74 ton-m en el paso 1.

$$Tc = \frac{0.2 \sqrt{F'c} \sum x^2 y}{\sqrt{\left( 1 + \left[ \frac{0.4 Vu}{Ct Tu} \right]^2 \right)}}$$

$$Ct = \frac{B_w d}{\sum x^2 y} = \frac{(35)(65)}{90934} = 0.025$$

$$T_c = \frac{0.2\sqrt{280}(90934)}{\sqrt{\left(1 + \left[\frac{(0.4)(10820)}{(0.025)(447000)}\right]^2\right)}} = 283784kg - cm$$

$$T_c = 283784kg - cm$$

Suponiendo un recubrimiento de 3.5 cm y estribos del No. 3.

Diámetro del No. 3 = 0.95 cm

$$x_1 = 35 - 2(3.5) - 0.95 = 27.05cm$$

$$y_1 = 70 - 2(3.5) - 0.95 = 62.05cm$$

$$\alpha_t = 0.66 + 0.33 \frac{x_1}{y_1} = 0.66 + (0.33) \left( \frac{62.05}{27.05} \right) = 1.42$$

$$\frac{A_t}{S} = \left( \frac{447000 - (0.85)(2837784)}{(0.85)(4220)(1.42)(27.05)(62.05)} \right) = 0.0240 \frac{cm^2}{cm/rama}$$

$$\frac{A_t}{S} = 0.0240 \frac{cm^2}{cm/rama}$$

6.- Cálculo del área requerida de estribos por cortante.

$$V_u = \frac{(0.53)(\sqrt{280})(35)(65)}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{(2.5)(0.025)(447000)}{10820}\right)^2\right)}} = 7286.65kg$$

$$V_u = 7.2886ton$$

$$V_u = \phi(V_c + V_s)$$

$$V_s = \frac{V_u}{\phi} - V_c = \frac{10820}{0.85} - 7286.65 = 5442.76 \text{ kg}$$

$$V_s = 5.44 \text{ ton}$$

$$\frac{A_t}{s} = \frac{V_s}{F_y \cdot d} = \frac{5442.76 \text{ kg}}{(4220)(65)} = 0.0198 \text{ cm}^2 / \text{cm}$$

7.- Determinación de los requisitos para estribos de cortante y torsión combinados.

$$\frac{A_t}{s} + \frac{A_v}{2s} = 0.0240 + \frac{0.0198}{2} = 0.0339 \text{ cm}^2 / \text{cm/rama}$$

Probando una varilla del No. 3,  $A_b = 0.71 \text{ cm}^2$

$$S = \frac{0.71}{0.0339} = 20.90 \text{ cm}$$

Colocar estribos cerrados del No. 3@ 20 cm.

8.- Verificación de la separación máxima de los estribos.

$$\frac{x_1 + y_1}{4} = \frac{27.05 + 62.05}{4} = 22.27 \text{ cm} > 20.00 \text{ cm} \quad \text{O. K}$$

$$\frac{d}{2} = \frac{65}{2} = 32.50 \text{ cm} > 20.00 \text{ cm} \quad \text{O. K}$$

9.- Revisión de los requisitos al centro del claro.

Vu al centro: 8.21 ton.

$$V_s = \frac{8.21}{0.85} - 7.29 = 2.37 \text{ ton}$$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{F_y \cdot d} = \frac{2370}{(4220)(65)} = 0.0086$$

$$\frac{A_t}{s} + \frac{A_v}{2s} = 0.0240 + \frac{0.0086}{2} = 0.0283 \text{ cm}^2/\text{cm}/\text{rama}$$

$$s = \frac{0.71}{0.0283} = 25 \text{ cm}$$

Utilizar 20 cm de separación en toda la longitud.

10.- Verificación del área mínima de estribo.

$$A_v + 2A_t = \frac{3.5b_w s}{F_y} = \frac{(3.5)(35)(20)}{4220} = 0.58 \text{ cm}^2$$

Área proporcionada =  $(2)(0.71) = 1.42 \text{ cm}^2 > 0.58 \text{ cm}^2$  O.K.

11.- Cálculo del refuerzo longitudinal a torsión.

$$A_l = \frac{2A_t}{s}(x_1 + y_1)$$

$$A_l = (2)(0.0240)(27.05 + 62.05) = 4.28 \text{ cm}^2$$

$$A_l = \left[ \frac{28xs}{F_y} \left( \frac{T_u}{T_u + \frac{V_u}{3C_t}} \right) - 2A_t \right] \left( \frac{x_1 + y_1}{s} \right)$$

(o Sustituyendo  $2A_t$  por  $\frac{3.5b_ws}{F_y}$  )

$$\frac{3.5b_ws}{F_y} = 0.58 < 2A_t = (2)(0.0240)(20) = 0.96$$

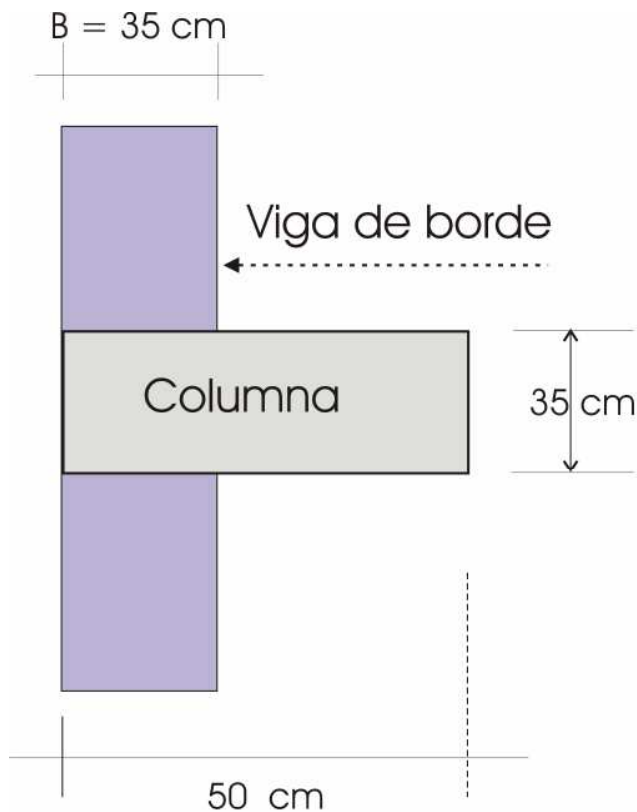
Por lo tanto usar  $2A_t$  .

$$A_t = \left[ \frac{(28)(35)(20)}{4220} \left( \frac{474000}{474000 + \frac{10820}{(3)(0.025)}} \right) - (0.96) \right] \left( \frac{27.05 + 62.05}{20} \right) = 11.59 \text{ cm}^2$$

Por lo tanto suministra  $A_t = 11.59 \text{ cm}^2$

Colocar varillas longitudinales alrededor del perímetro de los estribos cerrados, separados a no más de 30 cm, y colocar una varilla longitudinal en cada esquina de los estribos cerrados. Las varillas longitudinales se pueden combinar con el refuerzo por flexión.

12.- Análisis de flexión de la viga "AC". ( Se desprecia la acción del patín).



Planta de la unión Viga=Columna en ( A )

- Considerando viga –columna en (A):

$$\text{Rigidez de la columna} = \frac{4EI}{L} = \frac{(4E)(50)(35^3)}{(300)(12)} = 2382E$$

(Superior)

$$\text{Rigidez de la columna} = \frac{4EI}{L} = \frac{(4E)(50)(35^3)}{(300)(12)} = 2382E$$

(Inferior)

$$\text{Rigidez de la viga AC} = \frac{4EI}{L} = \frac{(4E)(35)(70^3)}{(800)(12)} = 5002E$$

$$\text{Rigidez de la viga JA} = \frac{4EI}{L} = \frac{(4E)(35)(70^3)}{(400)(12)} = 10004E$$

$$\sum = 19770E$$

Factores de distribución en (A) y (C):

$$\text{Columna superior e inferior} = \frac{2382}{19770} = 0.120$$

$$AJ = \frac{10004}{19770} = 0.506 \quad ; \quad AC = \frac{5002}{19770} = 0.523$$

Momentos de empotramiento perfecto:

$$AJ = \frac{Wl^2}{12} = \frac{(0.823)(4^2)}{12} = 1.10 \text{ ton-m}$$

$$AC = \frac{Pl}{8} + \frac{Wl^2}{12} = \frac{(16.42)(8.00)}{8} + \frac{(0.823)(8^2)}{12} = 20.81 \text{ ton-m}$$

Distribución del momento en dos etapas.

(No se muestran los momentos distribuidos a las columnas superiores e inferiores).

	( A )	( B )	
0.506	0.253	0.253	0.506
-110	+20.81	-20.81	+1.10
-9.97	-4.99	+4.99	+9.97
0.00	+2.50	-2.50	0.0
-1.26	-0.63	+0.63	+1.26
$\Sigma =$	-12.33	- 17.69	+ 12.33

Momentos finales en los extremos de la viga  $AC = 17.89 \text{ ton-m}$

$$\text{Momentos al centro del claro en } AC = \frac{Pl}{8} + \frac{Wl^2}{24} + (20.81 - 17.69)$$



$$= \frac{(16.42)(8)}{8} + \frac{(0.823)(8^2)}{24} + 3.12 = 21.73 \text{ ton.m}$$

Refuerzo para el momento negativo:

$$\omega = 0.849 - \sqrt{\left(0.721 - \left(\frac{1769000}{(0.53)(280)(35)(65^2)}\right)\right)} = 0.049$$

$$\rho = \omega \frac{F_c}{F_y} = 0.049 \left(\frac{280}{4220}\right) = 0.0033$$

$$A_s = \rho b_w d = (0.0033)(35 \text{ cm})(65 \text{ cm}) = 7.51 \text{ cm}^2$$

Refuerzo para el momento positivo:

$$\omega = 0.849 - \sqrt{\left(0.721 - \left(\frac{2173000}{(0.53)(280)(35)(65^2)}\right)\right)} = 0.060$$

$$\rho = 0.060 \left(\frac{280}{4200}\right) = 0.0040$$

$$A_s = (0.0040)(35 \text{ cm})(65 \text{ cm}) = 9.10 \text{ cm}^2$$

### 13.- Tamaño del refuerzo longitudinal combinado.

Se requieren seis varillas longitudinales para el refuerzo de torsión, a fin de cumplir con los requisitos máximos de espaciamiento.

Las dos varillas de las esquinas (lecho superior e inferior) se combinarán con el refuerzo por flexión.

- Sección de momento positivo:

$$\frac{A_1}{2} + A_s = \frac{11.59}{2} + 9.10 = 14.90 \text{ cm}^2$$

Usar 6 varillas del No. 6 = 17.10 cm<sup>2</sup>

- Sección de momento negativo:

$$\frac{A_1}{2} + A_s = \frac{11.59}{2} + 7.51 = 13.30 \text{ cm}^2$$

Usar 5 varillas del No. 6 = 14.25 cm<sup>2</sup>

- Varillas extendidas de momento positivo:

$$\frac{A_1}{2} + \frac{A_s}{2} = \frac{11.59}{2} + \frac{9.10}{2} = 10.34 \text{ cm}^2$$

Usar 4 varillas del No. 6 = 11.40 cm<sup>2</sup>

- Varillas de torsión en los lados de la viga:

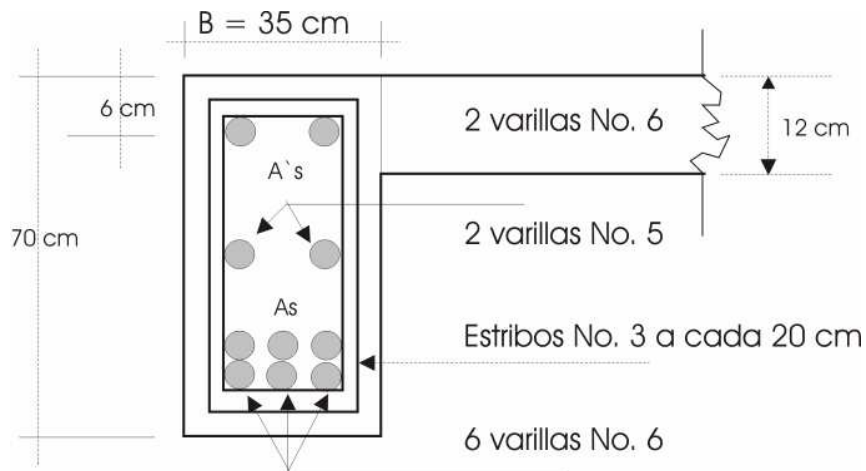
$$\frac{A_1}{6} = \frac{11.59}{6} = 1.93 \text{ cm}^2$$

Usar varillas del No. 5 ( $A_b = 1.98 \text{ cm}^2$ )

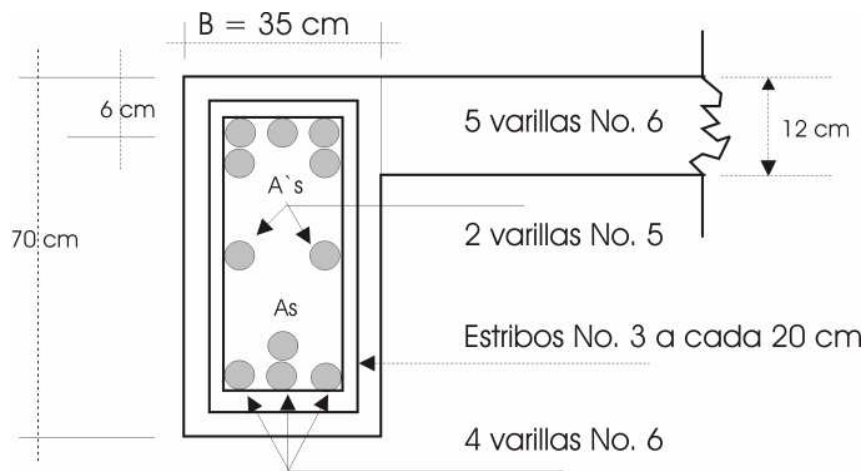
- Varillas de la torsión en las esquinas superiores de la viga:

Prolongar dos varillas de esquina de momento negativo a lo largo de toda la viga.

Usar varillas del No. 5 ( $A_b = 1.98 \text{ cm}^2$ ).



Sección de Momento Positivo



Sección de Momento Negativo

## **ADHERENCIA Y ANCLAJE**

La capacidad del refuerzo en el concreto para desarrollar la resistencia en tensión de una sección, depende de la compatibilidad de ambos materiales para actuar unidos al resistir las cargas externas. Una varilla, por ejemplo, se debe deformar en la misma medida que el concreto que la rodea, con el objeto de evitar la separación de los dos materiales cuando están sujetos a la acción de las cargas. El módulo de la elasticidad, la ductibilidad y la resistencia de fluencia o de la ruptura refuerzo, también deben ser considerablemente mas altas que las del concreto para que sea posible obtener un incremento significativo en la resistencia de la sección de concreto reforzado.

El acero y las fibras de vidrio son materiales que poseen las características para desarrollar la adhesión requerida entre el refuerzo y el concreto; resistencia de fluencia, ductilidad y capacidad de adhesión.

**La resistencia de adherencia** es el resultado de la combinación de varios parámetros, tales como la adhesión mutua entre el concreto y la superficie de contacto del acero y la presión que ejerce el concreto endurecido en la varilla o el alambre de acero, debida ala contracción del concreto al secarse. Además de esto, la trabazón y fricción que ocasionan los micromovimientos de la varilla en tensión, entre las corrugaciones de su superficie y el concreto, resulta en un incremento de la resistencia del desplazamiento. El efecto total que producen estos factores se conoce como adherencia.

En resumen, la resistencia de adherencia es controlada principalmente por los siguientes factores:

- 1.- Adhesión entre el concreto y los elementos de refuerzo.

- 2.- El efecto de sujeción que resulta al secarse y contraerse el concreto que rodea a la varilla y las dovélas de cortante que se forman entre las corrugaciones de la varilla y en el concreto en el que está ahogada.
- 3.- La fricción que resiste al deslizamiento y la trabazón que se produce cuando el elemento de refuerzo es sujeto a esfuerzos de tensión.
- 4.- La calidad y resistencia del concreto ala tensión y ala compresión.
- 5.- El efecto de anclaje mecánico que se obtiene en los extremos de las varillas por medio de la longitud de desarrollo, los empalmes, los ganchos y las barras cruzadas.
- 6.- El diámetro, la forma y la separación del refuerzo, debido a que afectan el desarrollo de grietas.

Las contribuciones individuales de estos factores son difíciles de separar o cuantificar, pero se puede considerar que las dovelas de cortante, el efecto de confinamiento por contracción y la calidad del concreto son más importantes.

## **DESARROLLO DE LOS ESFUERZOS DE ADHERENCIA**

El esfuerzo de adherencia se presenta principalmente como consecuencia de la fuerza cortante, entre el elemento de refuerzo y el concreto que lo envuelve, originada por los factores indicados anteriormente y se pueden describir como un esfuerzo local de cortante por unidad de área de la superficie de la varilla. Este esfuerzo directo se transfiere del concreto a la superficie en contacto de la barra, de modo que modifica el esfuerzo de tensión a lo largo de la varilla de refuerzo.

Los refuerzos de adherencia se presentan en los elementos de concreto reforzado por dos causas: La necesidad de proporcionar anclaje adecuado para barras y la variación de fuerzas en estas debido a la variación del momento a lo largo del elemento.

Se puede determinar la capacidad de adherencia del elemento de refuerzo por medio de tres tipos de pruebas. La prueba de extracción, la de la varilla ahogada y la prueba de la viga.

La figura 2.27 muestra los dos primeros tipos de pruebas.

La prueba de extracción proporciona una buena comparación de la eficiencia de adherencia de las diferentes clases de superficie de varillas y de las longitudes de anclaje correspondientes. Sin embargo, no es verdaderamente representativa del desarrollo de los esfuerzos de adherencia en una viga estructural, debido a que en esta prueba, el concreto está sujeto a compresión y la varilla de refuerzo actúa en tensión en tanto que en una viga, las varillas de refuerzo y el concreto que las rodea están sujetas al mismo esfuerzo.

En la prueba de la varilla ahogada, figura 2.27b, la cantidad de grietas, sus anchos y su separación en los diferentes niveles de carga, son una medida del desarrollo de los esfuerzos de adherencia y de la resistencia de adherencia. El proceso se asemeja más estrechamente al comportamiento en vigas a medida que el incremento progresivo en el ancho de las grietas conduce, finalmente, al desprendimiento de las varillas y la falla de la viga.

El desprendimiento progresivo de las varillas de refuerzo en una viga y la redistribución de esfuerzos se presenta esquemáticamente en la figura 2.28 cuando la resistencia al deslizamiento en la longitud  $L$ , es mayor que la resistencia del concreto a la tensión, se forma una grieta nueva en esa zona y alrededor de la grieta se desarrolla una distribución nueva de esfuerzos. El esfuerzo máximo de adherencia en la figura 2.28 se desplaza hacia la derecha desde el punto "A" al

punto "B" pasando la línea central entre dos grietas potenciales hasta que se forma una segunda grieta a una diferencia  $a_c$  de la grieta 1.

Por lo tanto, es importante escoger una longitud apropiada de las varillas del armado, para disminuir el agrietamiento y deslizamiento. Como resultado el refuerzo puede alcanzar toda su resistencia de tensión; es decir, su resistencia de fluencia, dentro del elemento estructural sin que se presente una falla de adherencia.

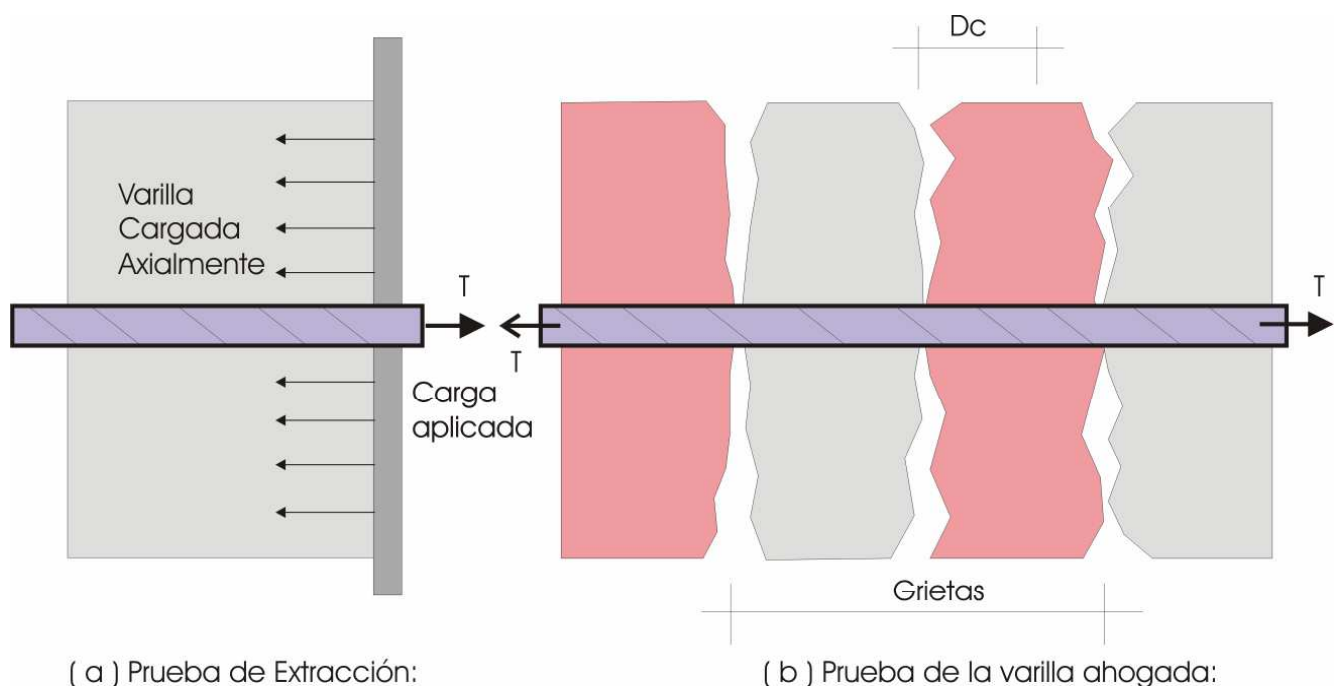


Figura 2.27.- Desarrollo del esfuerzo por Adherencia:

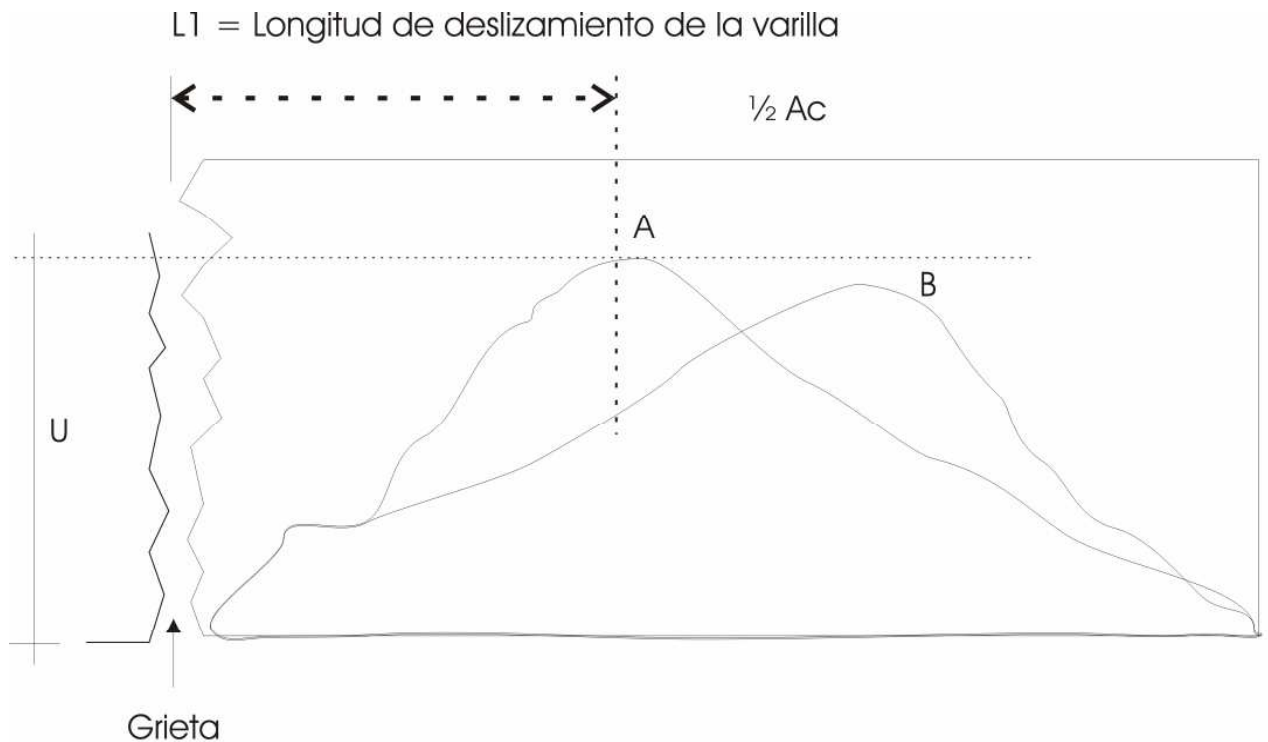


Figura 2.28.- Redistribución de esfuerzos por el Deslizamiento del refuerzo.

## ADHERENCIA EN ANCLAJE

Las barras de refuerzo deben estar ancladas en el concreto a ambos lados de la sección donde se requieran, de manera que pueda desarrollarse en ellas el esfuerzo requerido.

Por ejemplo, considérese una barra anclada en una masa de concreto, sujeta a una fuerza  $T$ , como se ilustra en la figura 2.29 para que se conserve el equilibrio, al actuar ésta fuerza deberán desarrollarse esfuerzos de adherencia en la superficie de la barra. La ley de variación de estos esfuerzos a lo largo de la barra, es compleja, pero puede considerarse un esfuerzo uniforme promedio,  $u$ , equivalente a la variación real de la adherencia. Partiendo de consideraciones de equilibrio puede establecerse la siguiente expresión:



$$\mu \pi d_b L_{des} = \frac{\pi d_b^2 f_s}{4}$$

Donde:

$d_b$  = Diámetro de la barra.

$L_{des}$  = Longitud de la barra que penetra en el concreto.

$f_s$  = Esfuerzo a desarrollar en el acero.

$\mu$  = Esfuerzo de adherencia promedio.

Despejando  $\mu$  resulta:

$$\mu = \frac{d_b f_s}{4 L_{des}} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (a)$$

Si conoce el esfuerzo de adherencia último  $\mu_u$ , la longitud  $L_d$ , necesaria para desarrollar el esfuerzo de fluencia del acero,  $F_y$ , puede calcularse con expresión.

$$L_d = \frac{F_y d_b}{4 \mu_u} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (b)$$

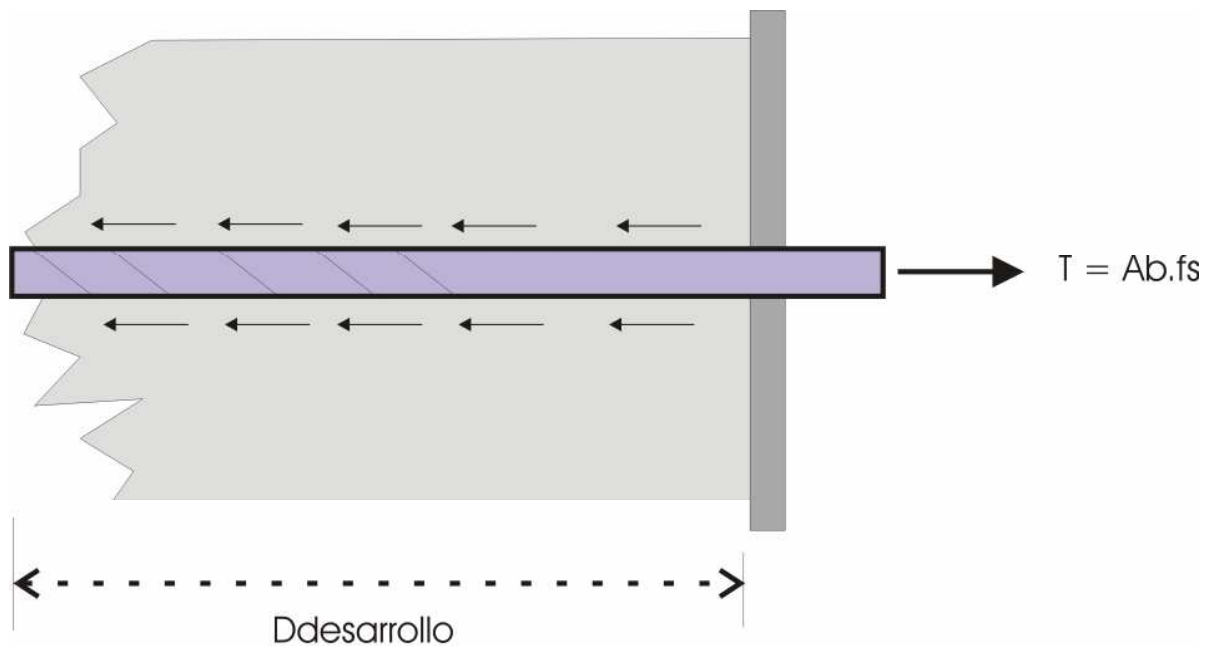


Figura 2.29.- Adherencia en anclaje.

$$T = A_b \cdot f_s = \frac{\pi \cdot d_b^2 \cdot f_s}{4}$$

### ADHERENCIA EN FLEXION

Considérese una viga con momento flexionante variable como en la figura 2.30 a, y dos secciones a-a y b-b separadas entre sí a una distancia  $\Delta x$ . Las fuerzas que actúan en elemento de la viga de longitud  $\Delta x$ , si se supone que el concreto no resiste tensiones, se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 2.30b. Las fuerzas de tensión en la barra en las secciones a-a y b-b se pueden calcular con las ecuaciones:

$$T = \frac{M}{z} \quad \text{y} \quad T + \Delta T = \frac{M + \Delta M}{z}$$

De donde:  $\Delta T = \frac{\Delta M}{z} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (c)$

Se supone que el brazo de momentos,  $z$ , es constante.

Para que la barra (o barras) estén en equilibrio al considerarlas como cuerpos libres tal como se muestra en la figura 2.30c, deberán existir una fuerza en la superficie de contacto entre el concreto y el acero de la barra correspondiente al esfuerzo de adherencia entre los dos materiales. A partir del equilibrio del cuerpo libre puede establecerse la siguiente igualdad:

$$\mu \cdot \sum 0 \cdot \Delta X = \Delta T$$

Donde  $\sum 0$  es la suma de los perímetros nominales de las barras. Despejando  $\mu$ , resulta:

$$\mu = \frac{\Delta T}{\sum 0 \cdot \Delta x}$$

Sustituyendo el valor de  $\Delta T$  dado por la ecuación c:

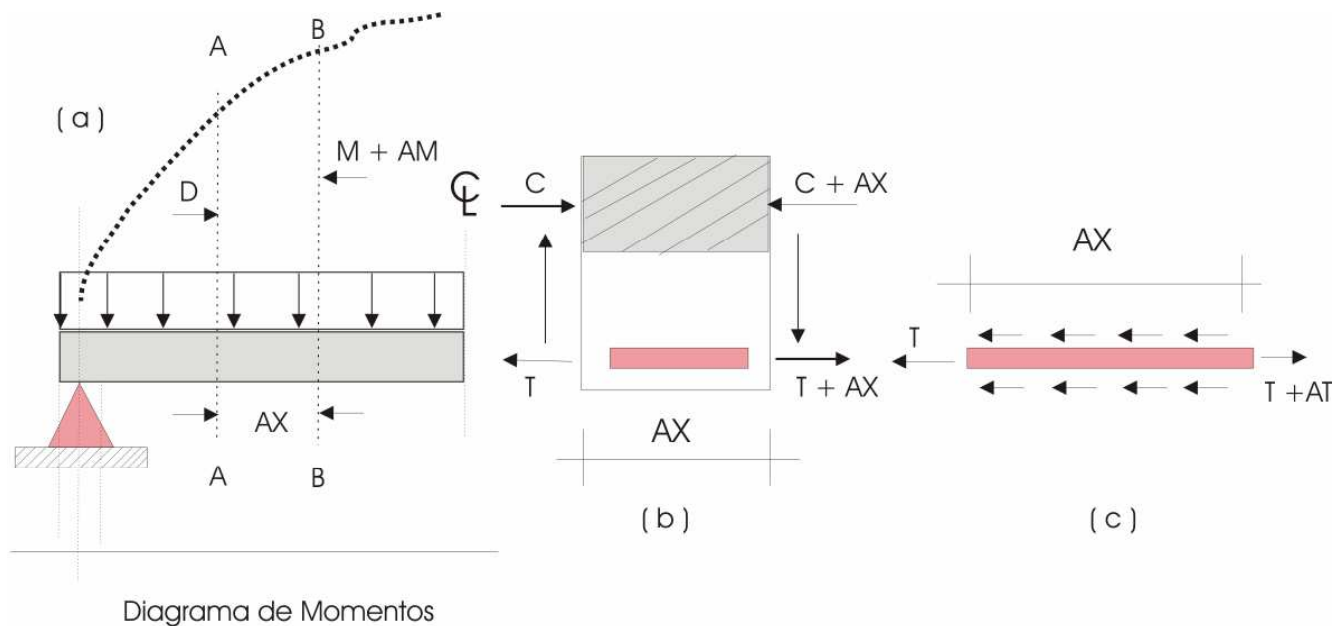
$$\mu = \frac{\Delta M}{z \cdot \sum 0 \cdot \Delta x}$$

Y, tomando límites cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\mu = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{z \cdot \sum 0} \quad \text{Pero como} \quad \frac{dM}{dx} = V \quad \mu = \frac{V}{z \cdot \sum 0}$$

Esta ecuación indica que si la variación del momento es alta (cuando la fuerza cortante es grande) los esfuerzos de adherencia también serán altos.

Sin embargo su validez es relativa, ya que la distribución de esfuerzos es más compleja de lo que ella indica.



## LONGITUD BASICA DE DESARROLLO

La longitud de anclaje recibe también nombre de “Longitud de desarrollo”, es decir, la longitud de una barra requerida para desarrollar por adherencia un determinado esfuerzo en el acero, ambos términos suelen emplearse indistintamente. Obviamente, mientras mayor sea la longitud de desarrollo, mayor será la fuerza  $T$  necesaria para extraer la barra y mayor será el esfuerzo  $f_s$  que puede alcanzarse en el extremo cargado.

Se puede concluir que la longitud de desarrollo  $l_d$  como función del tamaño y la resistencia de fluencia del esfuerzo, determina la resistencia de las varillas al deslizamiento y por lo tanto, la magnitud de la capacidad de una viga a la falla.

Por medio de pruebas se ha verificado que la resistencia de adherencia  $u$ , es una función de la resistencia en compresión del concreto, de tal modo que;

$$\mu = K \sqrt{F_c} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (d)$$

Donde  $K$  es una constante.

Si la resistencia de adherencia iguala o excede al esfuerzo de fluencia de una varilla con una área de sección transversal  $A_b = \frac{\pi \cdot d_b^2}{4}$ , entonces:

$$\pi \cdot d_b l_d \mu \geq A_b F_y \quad \text{-----} \rightarrow \quad (e)$$

De las ecuaciones (a), (d), y (e), se obtiene:

$$l_{db} = K_1 \frac{A_b F_y}{\sqrt{F_c}} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (f)$$

Donde  $K$  es función de las propiedades geométricas de elemento de refuerzo y de la relación entre la resistencia de adherencia y la resistencia en compresión del concreto.

Por lo tanto, la ecuación (f) representa la fórmula básica para definir la longitud mínima de desarrollo de las varillas en los elementos estructurales. El reglamento ACI especifica valores de  $K_1$  para diferentes tamaños de varillas y esfuerzos de adherencia, tanto en tensión como en compresión. Estos valores son resultados de pruebas experimentales muy abundantes.

## DESARROLLO DE VARILLAS EN TENSIÓN

La varilla de refuerzo debe contar con una longitud de desarrollo  $l_d$  suficiente para evitar una falla de adherencia.

El factor  $K_1$  de la ecuación (f) tiene diferentes valores para distintos tamaños de varillas. El reglamento ACI incluye factores que incrementan longitud de desarrollo de las varillas ubicadas en lechos superiores, debido a que su recubrimiento les proporciona un efecto de confinamiento menor, y por lo tanto tiene menos capacidad de adherencia que las varillas en lechos inferiores. También se proporcionan factores correctivos para concretos de agregados ligeros y para varillas con límites de fluencia mayores de  $4220 \frac{kg}{cm^2}$ .

El reglamento ACI especifica que, en ningún caso, la longitud de desarrollo deber ser menor que 30 cms.

- Longitud de desarrollo de varillas corrugadas sujetas a compresión:

Debido a la ausencia de los efectos desfavorables de las grietas de tensión, las varillas en compresión requieren de menor longitud de desarrollo que las varillas en tensión.

Longitud de desarrollo básica	- - - - - →	
<u>Factores de modificación:</u>		
Refuerzo confinado por un refuerzo en		
Espiral con diámetro no menor del no.	- - - - - →	0.75
2 ni mayor de 10 cm. De paso		
Refuerzo que exceda de lo requerido	- - - - - →	$\frac{A_{srequerida}}{A_{sdisponible}}$
Por el análisis.		

## EJEMPLO:

Calcular la longitud de desarrollo requerida para las varillas corrugadas de los casos siguientes:

a).- Varilla No. 8 ( 25.4 mm de diámetro) de refuerzo en lecho superior:

$$F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

La sección se sobrediseñó al proporcionarse un área de acero  $A_s = 15.21 \text{ cm}^2$ , en vez del área necesaria  $A_s = 14.20 \text{ cm}^2$ .

b).- Varilla No. 6 (19.05 mm de diámetro) en compresión.

$$F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

## SOLUCION:

$$a).- L_{bd} = \frac{0.06 A_b F_y}{F_c} = \frac{(0.06)(5.07)(4220)}{210} = 89 \text{ cm}$$

O bien:

$$L_{bd} = 0.006 d_b F_y = (0.006)(2.54)(4220) = 64 \text{ cm}$$

Por lo tanto  $L_{bd}$  requerida = 89 cm.

Factor correctivo para lecho superior = 1.40

$$\text{Factor correctivo por sobrediseño} = \frac{14.2}{15.21} = 0.934$$

$$\text{Longitud mínima de anclaje o desarrollo } L_{bd} = (1.4)(89)(0.934) = 117\text{cm}$$

$$L_{bd} = 120\text{cm} > 30\text{cm}$$

$$\text{b).- } L_{db} = \frac{0.08d_b F_y}{\sqrt{F'c}} = \frac{(0.08)(1.91)(4220)}{\sqrt{200}} = 46\text{cm}$$

O bien :

$$L_{db} = 0.004d_b F_y = (0.004)(1.91)(4220) = 32\text{cm}$$

Por lo tanto:

$$\text{Longitud mínima de desarrollo } L_{db} = 46\text{cm}.$$

## GANCHOS ESTANDAR

Los ganchos se utilizan cuando la limitación de espacio en una sección de concreto impide el desarrollo en línea recta de la longitud de anclaje necesaria. En los miembros estructurales, los ganchos se colocan relativamente cerca de la superficie libre de los elementos de concreto, sitio en las que las fuerzas de tensión proporcionales a la fuerza total de la varilla pueden determinar la capacidad del gancho. Si estos ganchos escuadras reúnen determinadas características geométricas se denominan ganchos estándar.

El gancho estándar no desarrolla la resistencia de fluencia en tensión de la varilla. Si  $L_{np}$  es la longitud básica de desarrollo en tensión del gancho estándar, se le debe añadir una longitud de anclaje adicional para obtener una longitud total  $L_{dh}$  no menor que  $8d_b$  o 15 cm, la que sea mayor. La longitud  $L_{db}$  se muestra en la figura 2.31. La longitud  $L_{db}$  varía con el tamaño de la varilla, su resistencia de fluencia y con la resistencia a la compresión del concreto.



$$L_{hb} = \frac{318d_b}{\sqrt{F_c}}$$

Donde:

$L_{hb}$  = Longitud básica de desarrollo para barras con  $F_y = 4220 \frac{kg}{cm^2}$ .

Para barras con gancho estándar situadas en los extremos discontinuos de miembros en que el recubrimiento libre tanto lateral como superior o inferior es menor de 6.3 cm, se especifica que se proporcione confinamiento por medio de estribos, con una separación máxima de  $3d_b$  en toda la longitud  $L_{dh}$  como se ven en la figura 2.32. Este caso es típico en los extremos de voladizos y de vigas libremente apoyadas.

El uso de ganchos para desarrollo se limita únicamente para barras en tensión.

Los estudios hechos demuestran que la causa principal de las fallas a base de ganchos se debe al agrietamiento del recubrimiento perpendicular al plano de gancho donde se presentan concentraciones de esfuerzos de compresión en interior del gancho depende de este valor.

Factores de modificación de los valores de  $L_{hb}$ .

Con d i c i o n	F a c t o r
Refuerzo con $F_y$ diferente de $4220 \frac{kg}{cm^2}$	----- $\rightarrow$ $\frac{F_y}{4220}$
Varillas del No. 11 y menores, que el recubrimiento lateral (normal al plano del gancho). Con un recubrimiento libre de extensión recta del gancho no inferior a 5 cm.	----- $\rightarrow$ 0.7
Varillas del No. 11 y menores confinadas por refuerzo transver- sal con un espaciamiento máximo de $3d_b$ .	----- $\rightarrow$ 0.8
Refuerzo disponible superior al requerido Por análisis.	----- $\rightarrow$ $\frac{As\ Re\ requerido}{As\ Disponible}$
Concreto de agregado ligero.	----- $\rightarrow$ 1.3

Figura 2.32.- Confinamiento en los extremos discontinuos de miembros cuando el recubrimiento es menor de 6.3 cm.

EJEMPLO:

Diseñar el anclaje en la unión viga-columna que se muestra en la figura:

$$F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$F'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

Área de acero requerida:

$$A_{sr} = 10 \text{ cm}^2$$

SOLUCION:

1ra Alternativa.

Ensayar 3 barras del No. 7

$$A_{sp} = 11.61 \text{ cm}^2 \quad L_{hb} = \frac{318 d_b}{\sqrt{F'_c}} = \frac{(318)(2.22)}{\sqrt{210}} = 49 \text{ cm}$$

$$A_b = 3.87 \text{ cm}$$

$$d_b = 2.22 \text{ cm}$$

Recubrimiento = 5 cm + 1 No. 8.

$$= 5 \text{ cm} + 2.54 \text{ cm} - 7.54 \text{ cm} > 5 \text{ cm} .$$

Por lo tanto: Factor de modificación = 0.7

Por  $A_{sr} > A_{sp}$

$$\frac{A_{sr}}{A_{sp}} = \frac{10}{11.61} = 0.86$$

Longitud de desarrollo del gancho:

$$L_{dh} = (0.7)(0.86)(L_{hb}) = (0.70)(0.86)(49) = 29.5cm$$

Longitud disponible =  $35 - 5 = 30cm > 29.95cm$  O.K.

## DESARROLLO DE ACERO POSITIVO EN LOS APOYOS LIBRES DE VIGAS Y EN LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN

En los apoyos de vigas simplemente apoyadas y en los puntos de inflexión de vigas continuas, donde la fuerza cortante es grande y los esfuerzos de tensión son bajos, ya que el momento vale cero, puede ser crítica la adherencia por flexión.

El artificio mencionado consiste en suponer que el momento flexionante se incrementa linealmente ( $V_u = \text{Constante}$ ) con lo que se obtienen un diagrama indicado con la línea punteada como en la figura 2.33.

Puede demostrarse que longitud de desarrollo del refuerzo positivo es  $M_n/V_u$  y que esta longitud es la misma que la de una barra, cuyo perímetro,  $S$ , se calcula con educación siguiente:

Haciendo  $\sum 0 = s$

$$s = \frac{V_u}{Z \cdot \mu_u} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (1)$$

La longitud de desarrollo de una barra es:

$$L_d = \frac{F_y d_b}{4 \mu_u} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (2)$$

De donde considerando que  $T = \frac{\pi d_b^2 F_y}{4}$  y que el perímetro es igual a S, se deduce que:

$$L_d = \frac{T}{\mu_u S} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (3)$$

Sustituyendo el valor de s de la ecuación (1) en la ecuación (2) se obtiene:

$$L_d = \frac{T z}{V_u} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (4)$$

Al alcanzarse la resistencia de la sección:

$$T z = M_n \quad \text{-----} \rightarrow \quad (5)$$

Sustituyendo la ecuación (5) en la ecuación (4):

$$L_d = \frac{M_n}{V_u} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (6)$$

Como se pretendía demostrar.

El reglamento A.C.I. 318-04, siguiendo un criterio mas conservador especifica que debe cumplirse la siguiente condición:

$$L_d \leq \frac{M_n}{V_u} + L_a \quad \text{-----} \rightarrow \quad (7)$$

En la que  $M_n$  = Momento nominal resistente que pueden desarrollar las barras que pasan por sección de apoyo o el punto de inflexión, calculado sin considerar el factor de reducción  $\phi$ .

$V_u$  = Fuerza cortante última en la sección correspondiente.

$L_a$  = Longitud de anclaje adicional igual a la longitud de la barra a partir del centro de apoyo, como se muestra en la figura 2.34.

No es necesario cumplir con la condición dada por la ecuación (7) si la barra está provista de un gancho estándar a partir del centro del apoyo. En los puntos de inflexión, la longitud  $L_a$  no debe ser mayor que el peralte efectivo de la sección ni que doce veces el diámetro de la barra, como se ilustra en la figura 2.35.

Cuando las barras están confinadas por una fuerza de compresión, como ocurre en los extremos de vigas libremente apoyadas, el reglamento ACI permite incrementar la relación  $M_n/V_u$  30%.

Además de los requisitos anteriores, en los extremos libremente apoyados de vigas, el reglamento exige que por lo menos la tercera parte de refuerzo positivo máximo se prolongue hasta dentro del apoyo. En los extremos continuos se requiere que se continúe por lo menos la cuarta parte del refuerzo positivo. Según el reglamento, la distancia de penetración mínima debe ser 15 cm.

Las anteriores recomendaciones son con el fin de prevenir algunos desplazamientos en los momentos debido a cambios en la carga, al asentamiento de los apoyos, ala presencia de sismos, explosiones, cargas laterales y otras causas.

Las barras de acero positivo deben tener un diámetro tal que su longitud de desarrollo, calculada usando las tablas dadas anteriormente, satisfaga el límite impuesto por la ecuación (7).

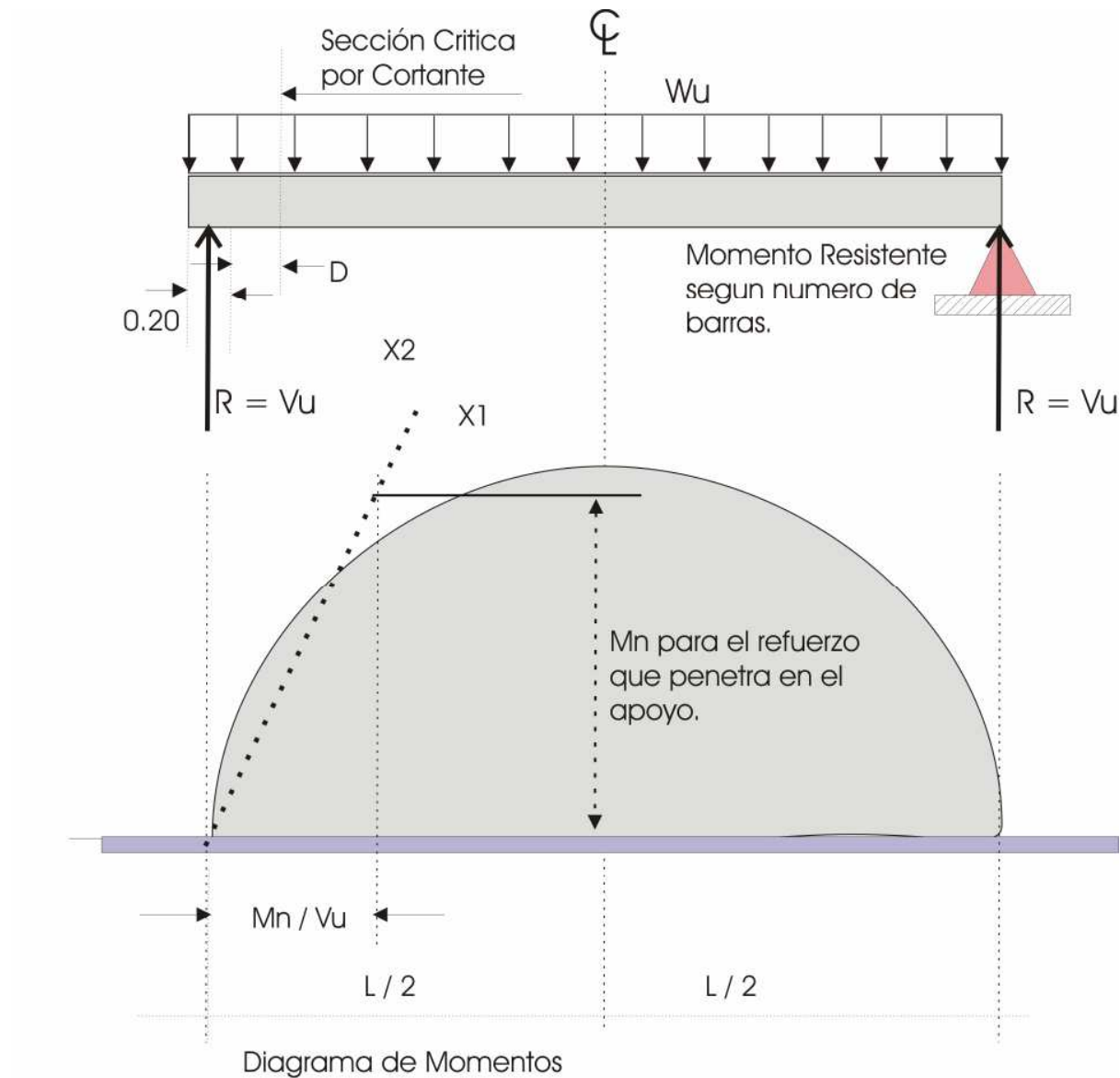


Figura 2.34.- Desarrollo del acero positivo en apoyos libres de vigas.

## CORTE Y DOBLADO DE BARRAS

En las vigas de concreto reforzado el esfuerzo longitudinal puede variarse a lo largo de su longitud de acuerdo con variación del momento. Esto puede hacerse cortando barras o doblándolas a 45° y haciéndolas continuas con el refuerzo del lado opuesto.

La capacidad para resistir momento de una sección, puede expresarse por medio de la ecuación.

$$M_n = A_s F_y Z$$

Donde  $Z$  es el brazo del par interno, formado por la fuerza de tensión desarrollada por el acero y la fuerza de compresión correspondiente al concreto. Como el brazo del par interno,  $Z$  casi no varía, se supone que el acero requerido en las diversas secciones tiene la misma forma que el diagrama de momentos de esta manera se determinan los puntos teóricos donde pueden cortarse o doblarse las barras.

Como una manera de ilustrar lo antes dicho, se muestra la fig. 2.36 donde aparece una viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida, su diagrama de momentos y la sección transversal para momento máximo. Suponiendo que se desea cortar primero la barra central, luego otras dos barras y prolongar las otras dos barras restantes hasta los apoyos, se recomienda hacer los cortes de las barras de manera que el refuerzo quede simétrico en todas las acciones en una viga.

Es fácil determinar analíticamente las distancias  $x_1$  y  $x_2$  correspondientes, respectivamente, a los puntos teóricos de corte de la primera barra cortada y al par de barras siguientes ya que el diagrama de momentos es parabólico. También es posible determinar estos puntos gráficamente trazando líneas horizontales en la forma indicada en la figura; las intersecciones de estas horizontales con el



diagrama definen los puntos teóricos de corte. Cuando los diagramas de momento no corresponden a una Ley matemática sencilla, los métodos gráficos son los apropiados.

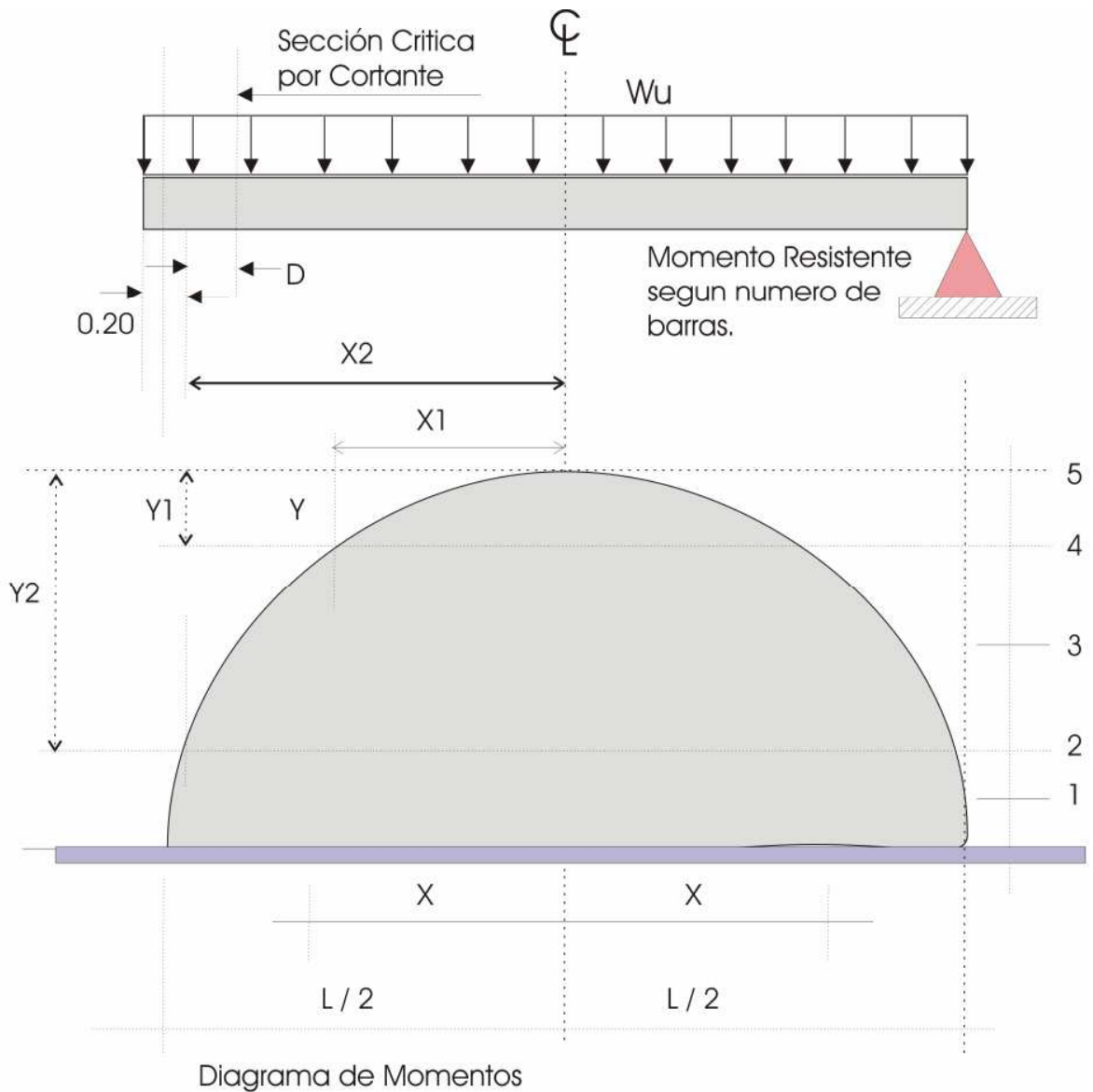


Figura 2.36.- Corte de barras en una viga simplemente apoyada con carga uniforme.

Las barras de refuerzo no deben cortarse en las secciones donde dejan de ser necesarias de acuerdo con los diagramas teóricos de momento flexionante.

Esto se debe a las incertidumbres que se tienen sobre la magnitud y distribución de las cargas actuantes, a las aproximaciones usuales en el análisis estructural, a los efectos de los asentamientos diferenciales de los apoyos y a otros efectos similares. Además, de las grietas inclinadas debidas a tensión diagonal producen un desplazamiento del esfuerzo en el acero.

Debido a esto, los reglamentos recomiendan que las barras se prolonguen una cierta distancia más allá de los puntos teóricos de corte.

El reglamento ACI indica que la longitud adicional sea por lo menos igual al peralte efectivo,  $d$ , o 12 veces el diámetro de la barra,  $d_b$ .

También señala el reglamento que el refuerzo que queda, una vez que se han cortado una o varias barras, se prolongue a una distancia igual a  $L_d$  más allá de la sección donde el refuerzo interrumpido no se requiere para resistir momento. Además de esto, el reglamento recomienda que por lo menos la tercera parte del refuerzo negativo se prolongue mas allá del punto de inflexión una distancia no menor al mayor de los siguientes valores: el peralte efectivo del miembro, 12 veces el diámetro de las barras, o  $\frac{1}{16}$  del claro libre.

En la figura 2.37 se muestran los principales requisitos del reglamento ACI relativos al corte de barras.

El corte de barras en las regiones de las vigas sujetas a tensión produce concentraciones de esfuerzos que pueden ocasionar agrietamientos prematuros.

El reglamento ACI solo permite esta práctica si se cumple algunas de las siguientes condiciones:

a).- La fuerza cortante actuante en la sección donde se efectúa el corte de barras no es mayor que las  $\frac{2}{3}$  partes, de la resistencia a cortante de la sección.

b).- Se proporciona refuerzo transversal adicional a lo largo de la barra interrumpida en un tramo igual  $\frac{3}{4}$  veces el peralte efectivo medido desde el punto del corte. El refuerzo transversal adicional requerido  $A_v$ , está dado por:

$$A_v = \frac{4.2b_w s}{F_y}$$

Suponiendo que se conoce  $A_v$ , la separación es:

$$s = \frac{A_v F_y}{4.2 b_w}$$

Por lo tanto, el de estribos a colocar en la distancia  $\frac{3}{4}d$  será:

$$N = \frac{3.15b_w d}{A_v \cdot f_y} + 1$$

Además, el espaciamiento  $s$  no debe ser superior a  $\frac{d}{8\beta_b}$ , donde  $\beta_b$  es la relación entre el área de refuerzo cortado y el área total del refuerzo en tensión en la sección. Por lo tanto se tiene:

$$N = \frac{0.75d}{\left(\frac{d}{8\beta_b}\right)} + 1 = 6\beta_b + 1$$

Regirá el mayor número de estribos dada por las expresiones anteriores.

e).- El refuerzo que continúa proporciona el doble del área requerida por flexión en la sección de corte y la fuerza cortante actuante es inferior a 0.75 de la resistencia a fuerza cortante disponible.

En algunas ocasiones, en vez de intentar cumplir con alguna de éstas condiciones; resulta preferible prolongar la barra o barras que se cortan hasta alcanzar una zona comprimida, doblarlas, anclarlas en el lado opuesto o hacerlas continuas con el refuerzo de este lado.

### **ANCLAJE DE REFUERZO TRANSVERSAL**

Los estribos deben estar lo más cerca posible de cara de compresión del elemento, debido a que cerca de la carga máxima las grietas de tensión por flexión penetran profundamente.

El refuerzo transversal debe estar anclado de manera que disponga su capacidad máxima a medio peralte de la viga. Los requisitos propuestos en el reglamento ACI se resumen en la figura 2.28. Las varillas longitudinales que se doblan para utilizarlas como refuerzo del alma, deben continuarse como refuerzo longitudinal cerca de la cara opuesta si esta zona está en tensión. Si se trata de una zona en compresión, la barra deberá prolongarse una longitud  $L_d$ , mas allá del medio peralte de la viga.

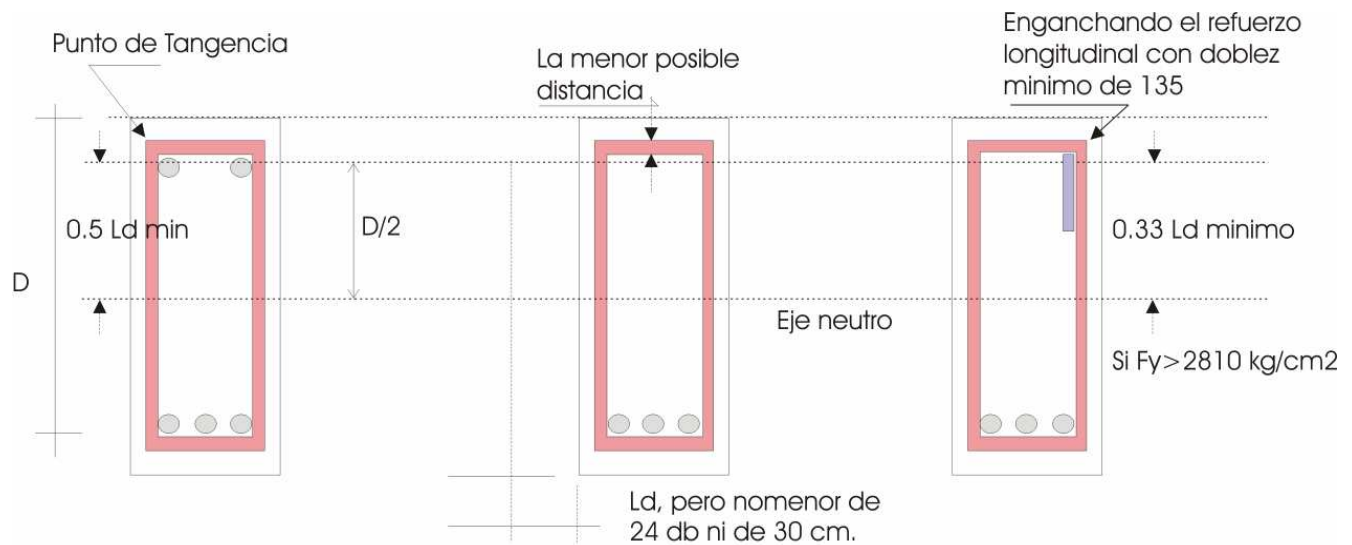
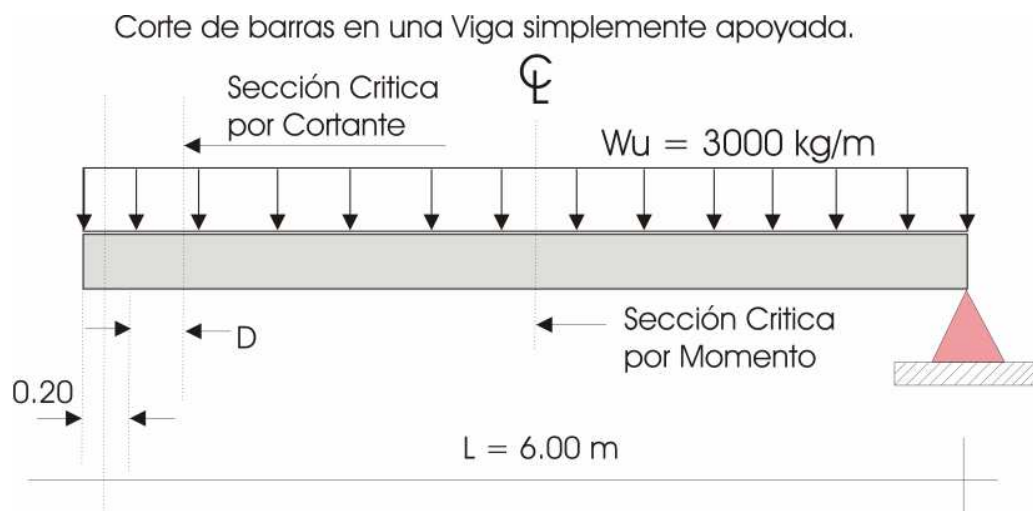


Figura 2.38.- Anclaje de estribos U ( Varillas de refuerzo y alambre ).

EJEMPLO: Corte en una viga simplemente apoyada.



Viga rectangular

$B_w = 20 \text{ cm.}$

$$D = h - \text{rec} = 40 \text{ cm}$$

$H = 45 \text{ cm.}$

$$F_y = 4220 \text{ kg/cm}^2 ; \quad F'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

## SOLUCION

-Fuerza cortante y momento en las secciones críticas.

$$Vu = Wu(3 - 0.10 - 0.40) = (3)(2.5) = 7.5 \text{ ton}$$

$$Mu = \frac{Wl^2}{8} = \frac{(3)(6^2)}{8} = 13.50 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

-Cálculo del acero requerido

a).- Por flexión:

$$\omega = 0.849 - \sqrt{\left(0.721 - \left(\frac{(13.5)(10^5)}{(0.53)(200)(20)(40^2)}\right)\right)} = 0.281$$

$$\rho = \frac{\omega F^c_c}{F_y} = \frac{(0.281)(200)}{4200} = 0.0133$$

$$A_{sr} = (0.0133)(20)(40) = 10.65 \text{ cm}^2$$

Usar 4 vrs. Del No. 6 =  $11.40 \text{ cm}^2 = A_{sp}$

$$A_b = 2.85 \text{ cm}^2 \quad ; \quad d_b = 1.91 \text{ cm}$$

a) Por cortante:

$$Vc = 0.53 f^c_c b_w d = (0.53)(200)(40) = 5996 \text{ kg}$$

$$\phi Vc = (0.85)(5996 \text{ kg}) = 5097 \text{ kg}$$

$$\phi Vc = 5097 \text{ kg} < 7500 \text{ kg} \quad V_s = Vu - \phi Vc = 7500 \text{ kg} - 5097 = 2403 \text{ kg}$$

Por lo tanto necesita estribos.

Revisión de la sección:

$$2.1 \sqrt{F^c_c} b_w d = (2.1) \sqrt{200} (20)(40) = 23759$$

$$23759 > 2403$$

Por lo tanto la sección es adecuada.

Probando estribos verticales de diámetro no. 2 con ramas

$$d_{est} = 0.32cm^2$$

$$A_v = (2)(0.32) = 0.64cm^2$$

$$s = \frac{A_v \cdot f_y \cdot d}{V_s} = \frac{(0.64)(2400)(40)}{5403kg} = 25.50cm$$

Separación Máxima:

$$1.1F_c b_w d = (1.1)(200)(20)(40) = 12445kg$$

$$12445kg > V_s = 2403kg$$

Por tanto  $s_{max} = \frac{d}{2} = \frac{40}{2} = 20cm$ .

Por lo tanto se usarán estribos del No. 2 @ 20 cm.

-Punto teórico de corte de dos varillas:

Capacidad para resistir momento de 2 varillas:

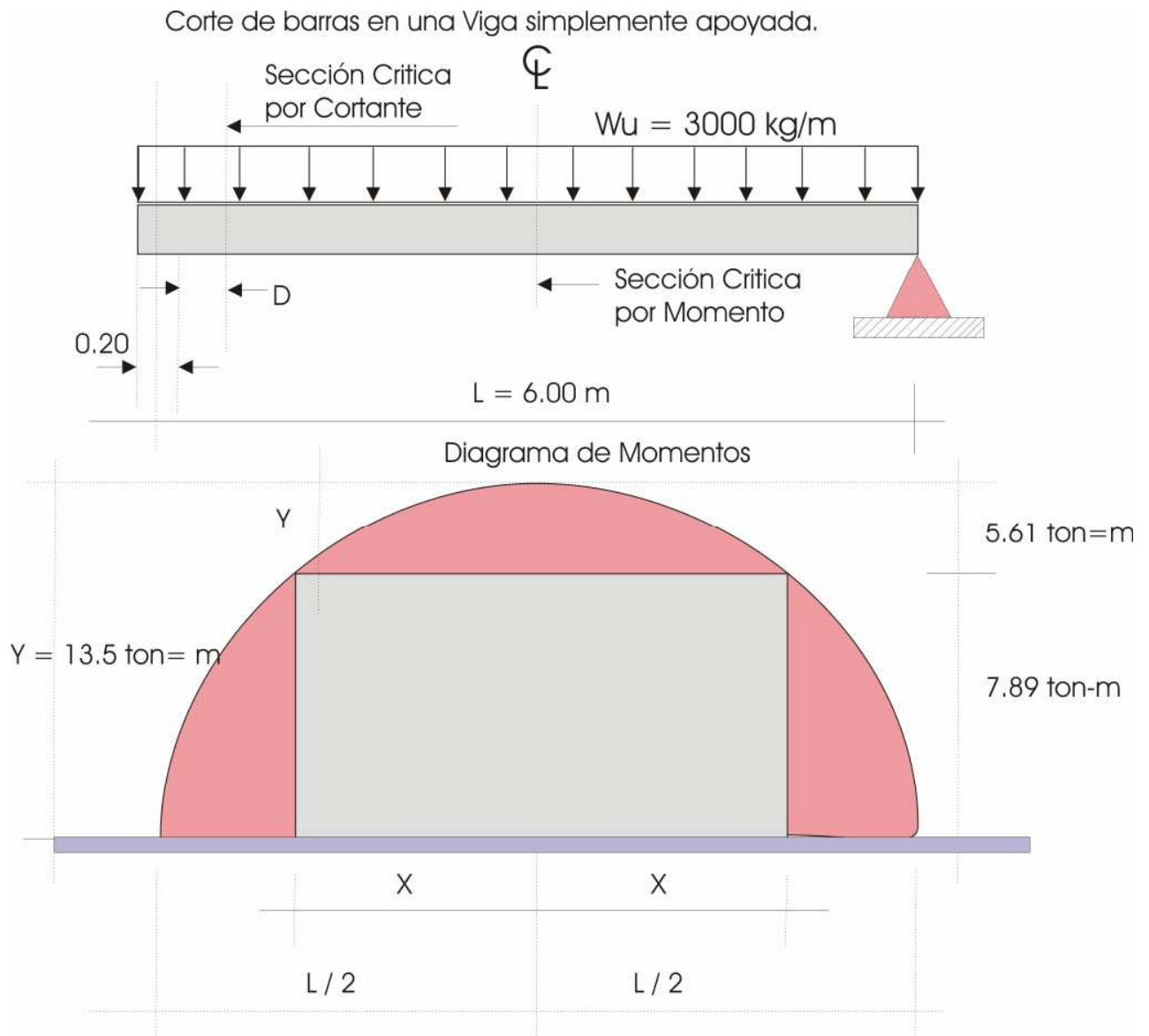
$$Mu_{(2 \text{ varillas})} = \phi \cdot b \cdot d^2 \cdot F_c \cdot \omega \cdot (1 - 0.59\omega)$$

$$\rho_{(2 \text{ varillas})} = \frac{(2)(2.85)}{(20)(40)} = 0.007125$$

$$\omega_{(2 \text{ varillas})} = \frac{\rho \cdot F_y}{F_c} = \frac{(0.007125)(4220)}{200} = 0.1503$$

$$Mu_{(2 \text{ varillas})} = (0.90)(20)(40^2)(200)(0.153)(1 - (0.59)(0.1503)) = 788,958kg - cm$$

$$Mu_{(2 \text{ varillas})} = 7.889ton$$



$$Mu_{(4 \text{ varillas})} = (2)(7.89) = 15.78 \text{ ton-m}$$

$$\frac{y}{y} = \frac{x^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \quad \frac{5.61}{13.5} = \frac{x^2}{(3.00)^2}$$

$$x = 1.93 \text{ m} \quad ; \quad d = 40 \text{ cm}$$

$$12d_b = (12)(1.91) = 22.90 \text{ cm} < 40 \text{ cm}$$

Distancia de corte de las dos varillas a partir del centro.



$$Dist = 1.93 + 0.40 = 2.33m .$$

- Longitud de desarrollo

$$L_{db} = \frac{0.06A_b F_y}{\sqrt{F'_c}} \geq 0.006d_b F_y$$

$$L_{db} = \frac{(0.06)(2.85)(4220)}{\sqrt{200}} = 51cm$$

$$L_{db} = (0.006)(1.91)(4220) = 48cm$$

Por lo tanto  $L_{db} = 51cm$

$$L_d = \frac{L_{db} A_{sv}}{A_{sp}} = \frac{(51)(10.65)}{11.40} = 48cm$$

-Revisión del anclaje en los apoyos

$$L_d \leq \frac{1.3Mn}{V_u} + L_a$$

$$Mn = \frac{Mu}{\phi} = \frac{13.5}{0.90} = 15ton - m$$

$$L_a = 10cm - Recubrimiento = 10 - 5 = 5cm$$

Considerando  $L_d = L_{db} = 51cm$

$$\frac{(1.3)(1.5)}{7.5} + 0.05 = 2.65m > L_d = 0.51m$$

Distancias que penetra las varillas en el apoyo:

$$Dist = 20 - 5 = 15cm \quad \text{O.K.}$$

También se cumple que por lo menos la tercera parte del acero penetra en el apoyo, ya que la mitad del acero penetra en el mismo.

Por lo tanto el anclaje en el apoyo es adecuado.

-Revisión de los requisitos por corte de barras en las zonas de tensión:

$$V_n = V_c + V_s$$

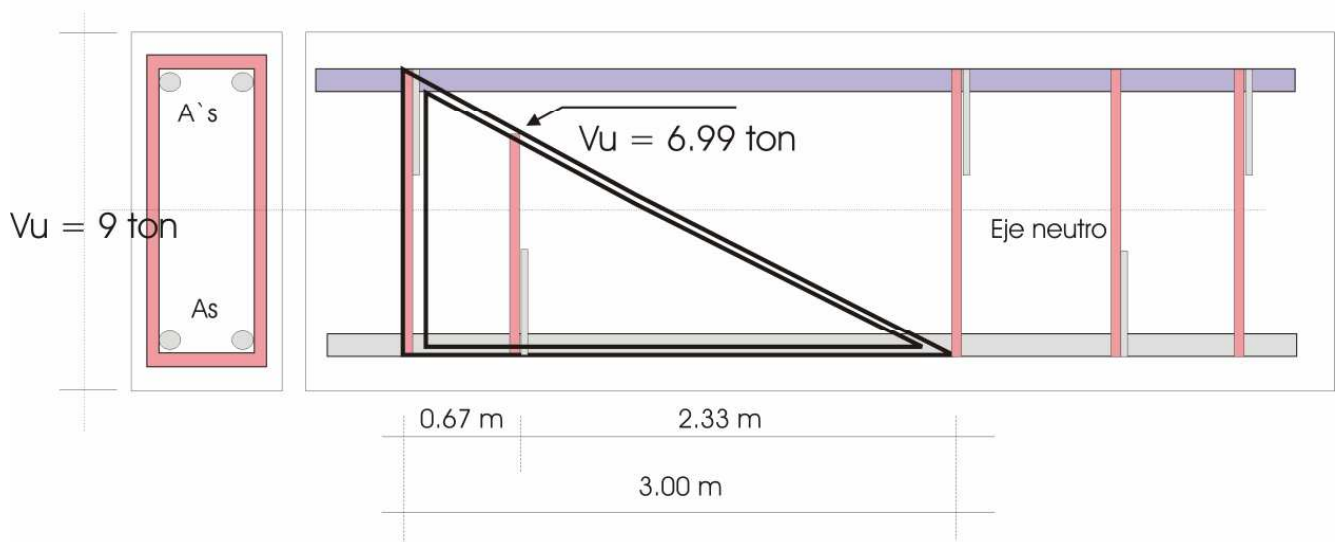
$$V_c = 5996 \text{ kg}$$

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} = \frac{(0.64)(2400)(40)}{20 \text{ cm}} = 3072 \text{ kg}$$

$$V_n = 5996 + 3072 = 9068 \text{ kg}$$

$V_u$  en la sección de corte de las 2 varillas

(  $V_u$  en la sección de corte de las 2 varillas )



$$V_u = \frac{(9)(2.33)}{3.00} = 6.99 \text{ ton}$$

$$\frac{Vu}{\phi V_n} = \frac{6.99}{(0.85)(9.068)} = 0.90 > \frac{2}{3}$$

Por lo tanto se requiere refuerzo trasversal adicional.

-Cálculo de los estribos adicionales.

Si se utilizan los estribos de 2 ramas diámetro No. 2

$$A_v = 0.64 \text{ cm}^2$$

La separación es:

$$s = \frac{A_v f_y}{4.2 b_w} = \frac{(0.64)(2400)(40)}{(4.2)(20)} = 18 \text{ cm}$$

Por lo tanto se colocarán los estribos @ 15 cm.

No. De estribos a una distancia igual a  $\frac{3d}{4}$  a partir del punto de corte:

$$\frac{3d}{4} = \frac{(3)(40)}{4} = 30 \text{ cm}$$

$$\text{No. de estribos} = \frac{30}{15} + 1 = 3 \text{ estribos}$$

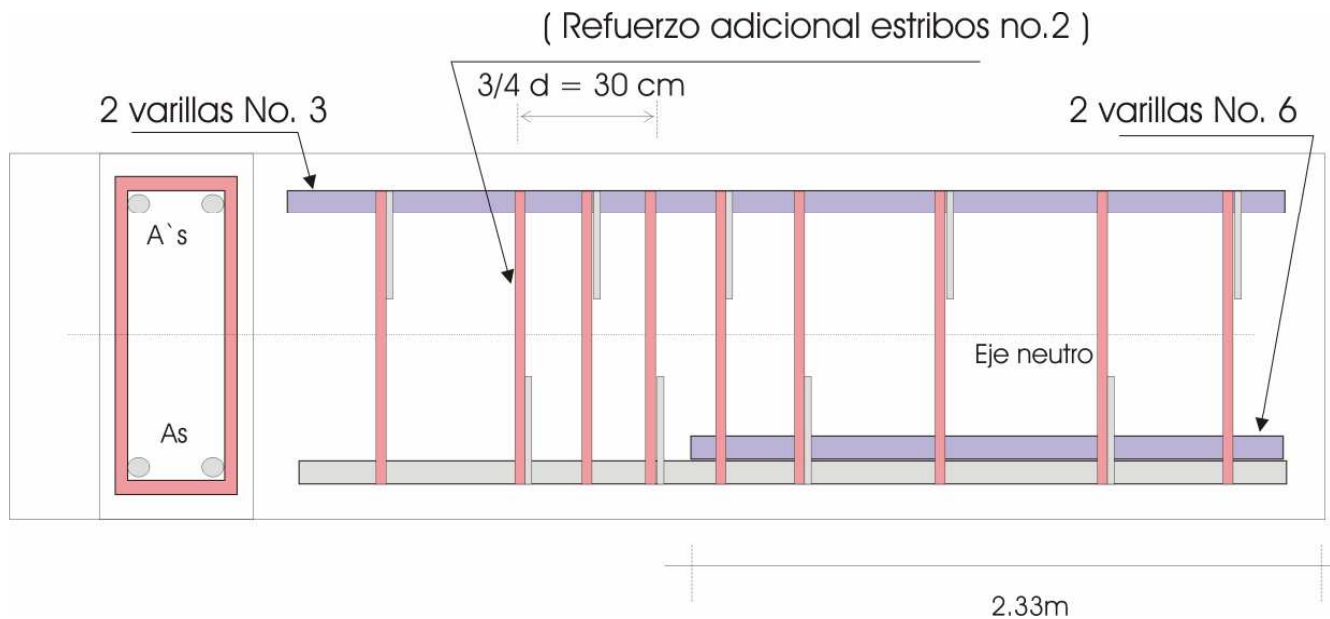
No. máximo de estribos que pueden colocarse:

$$N = 6\beta_d + 1$$

$\beta_d = 0.5$  por lo que se cortan 2 en las cuatro varillas.

$$N = 6(0.5) + 1 = 4$$

$$N = 4 > 3 \quad \text{O.K.}$$



## EMPALME DEL REFUERZO

Las varillas de acero de refuerzo se producen en las longitudes estándar que se determinan por condiciones de su facilidad de transporte y de su peso. En general, se fabrican en longitudes que varían de unos 12 a 18 m pero no es práctico en la obra formar los armados de las vigas y losas que cubren varios claros, con varillas de semejante longitud. En consecuencia, las varillas se recortan a longitudes menores y las No. 11 o menores, se empalman en los sitios donde los momentos flexionantes son menos críticos.

El modo más efectivo para obtener la continuidad en el refuerzo, es el de soldar las piezas cortadas sin disminuir las propiedades mecánicas o de resistencia de la varilla en la zona soldada; sin embargo, por consideraciones de costo se requiere otras alternativas. Existen principalmente tres clases de empalmes:

- 1.- Traslapes.
- 2.- Soldado por fusión de dos varillas en la conexión.
- 3.- Conexiones mecánicas.

## TRASLAPES

La forma más común de efectuar el empalme de varillas consiste en traslaparlas. Generalmente el traslape se efectúa con las barras traslapadas en contacto y marradas con alambre, aunque a veces se permite que puede cierto espacio entre ellas, siempre que esta separación sea menor a la especificada por las normas.

El empalme por medio de traslape resulta práctico y económico para las varillas de los diámetros menores. Para los diámetros mayores el empalme traslapado puede implicar un consumo alto acero, por las longitudes de traslape requeridas, así como un congestionamiento exagerado del armado.

Para evitar los inconvenientes de los traslapes se puede recurrir a empalmes soldados o empalmes a base de algún dispositivo mecánico. La elección del sistema apropiado depende de una comparación entre el costo del acero necesario para los traslapes y el costo de los empalmes a base de soldadura de dispositivos mecánicos.

En un traslape de una varilla de tensión cada una de las varillas debe desarrollar su refuerzo de fluencia en la longitud de traslape como se ilustra en las figuras 2.39 a; o sea, que la longitud de traslape es igual a la longitud de desarrollo determinada en ensaye de vigas. La fuerza de una varilla se transmite a la otra a través del concreto que las rodea por medio de adherencia, por tanto, la efectividad de un traslape depende del desarrollo de adherencia adecuada en la superficie de las varillas. También influyen otros factores como la capacidad del concreto que las rodea para resistir las tensiones y esfuerzos cortantes generados en él y la presencia del refuerzo transversal que proporcione confinamiento.

Un factor importante en el comportamiento de traslapes es agrietamiento que se forma en las terminaciones de esfuerzos originadas por la discontinuidad del refuerzo.

El efecto negativo del agrietamiento prematuro en las terminaciones de las varillas, y el agrietamiento adicional de flexión que se forma dentro de la longitud de traslape, indicando por algunos estudios experimentales, han dado por resultado que las longitudes de traslapes especificadas por el reglamento ACI, sean mayores que las longitudes de desarrollo. También ha contribuido de que la distancia entre varillas disminuye en la zona de traslape, pudiendo provocar agrietamiento. Estudios más recientes demuestran que las longitudes requeridas para desarrollo y traslape sean iguales el diámetro de la varilla, el recubrimiento, el espaciamiento libre y la resistencia del concreto.

El comportamiento de traslapes de varillas en compresión es más favorable que el de varillas en tensión, por dos razones:

- 1.- No existe el agrietamiento de flexión.
- 2.- Los extremos de varillas se apoyan directamente sobre el concreto como se ve en la figura 2.39 b, por lo tanto, los esfuerzos no empiezan a desarrollarse desde un valor nulo, sino desde un valor que depende de los esfuerzos de apoyo directo.

Por estas razones, las especificaciones de los reglamentos son menos severas en el caso de traslapes de varillas de compresión que en el de traslape de varillas de tensión.

**RECOMENDACIONES DEL REGLAMENTO A.C.I. 318-04**

Según este reglamento, sólo se permite empalmar por medio de traslapes en varillas del No. 11 o menores. Para traslapes de varillas en tensión se distinguen tres tipos o clases de acuerdo con la siguiente tabla:

<u>ACERO DISPONIBLE</u> ACERO REQUERIDO	PORCENTAJE MÁXIMO DE ACERO TRASLADO DENTRO DE LA LONGITUD DE TRASLAPE REQUERIDA.		
	50	75	100
IGUAL O MAYOR QUE 2	CLASE A	CLASE A	CLASE B
MENOR QUE 2	CLASE B	CLASE C	CLASE C

La longitud de traslape necesaria es función de la longitud de desarrollo,  $L_d$ , de acuerdo con las siguientes reglas.

Traslape de clase A	-----→	$1.0L_d$
Traslape de clase B	-----→	$1.3L_d$
Traslape de clase C	-----→	$1.7L_d$

La longitud de traslape no debe ser menor que 30 cm.

Para varillas de compresión el traslape se toma igual a las longitudes de desarrollo para varillas en compresión.

La longitud determinada no debe ser menor al mayor de los siguientes valores:

$0.007F_y d_b$ ,  $(0.013F_y - 24)d_b$  para  $F_y > 4220 \frac{kg}{cm^2}$  ni menor de 30 cm.

Cuando  $F'_c$  sea menor de  $210 \frac{kg}{cm^2}$ , la longitud del empalme debe incrementarse  $\frac{1}{3}$ .

Cuando se traslapan varillas de diferentes tamaños, en compresión, el largo del empalme debe ser lo que sea mayor de:

- La longitud de desarrollo de la varilla de tamaño mayor.
- La longitud de empalme de la varilla de tamaño menor.

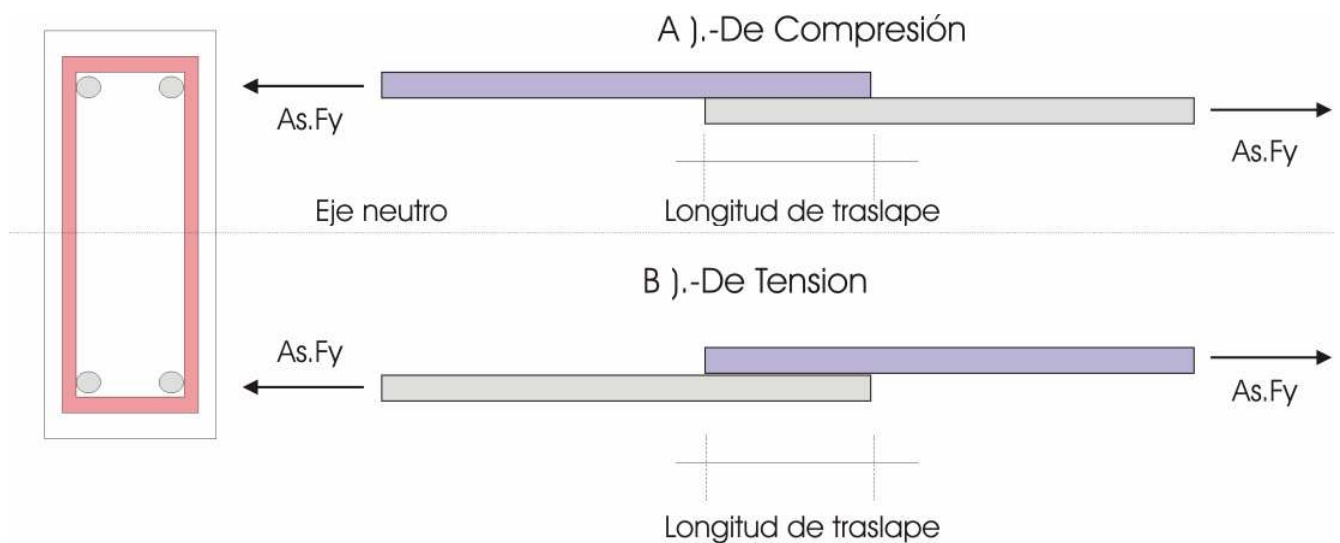


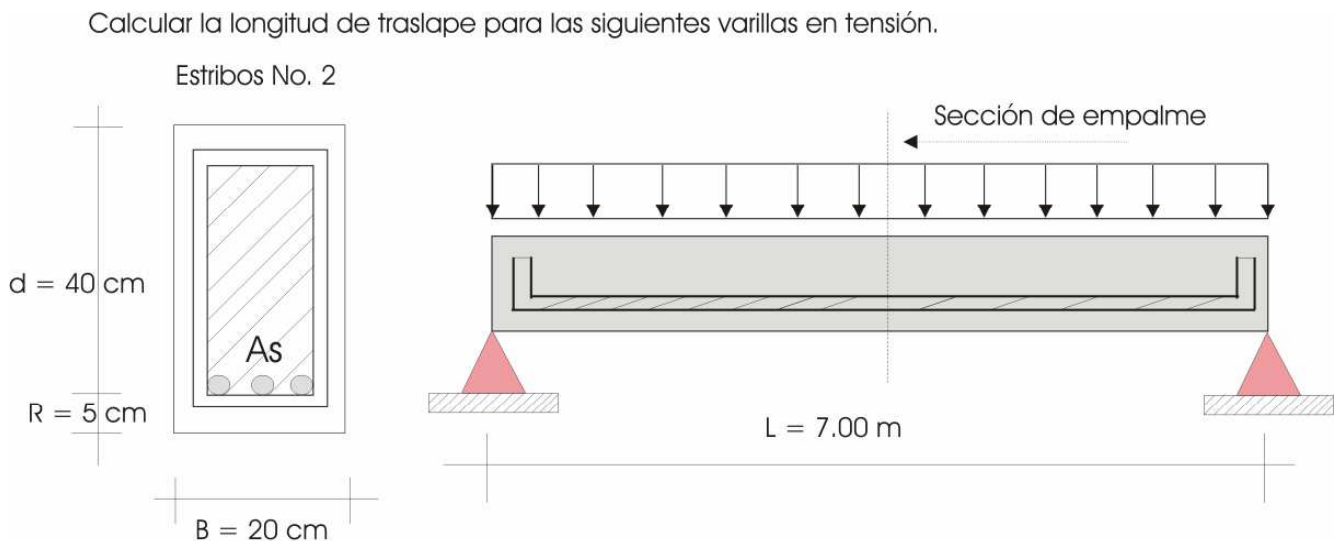
Figura 2.39.- Empalme por traslape.



## EMPALMES POR MEDIO DE DISPOSITIVOS MECÁNICOS

Para empalmar barras de diámetros grandes, como se dijo anteriormente, es aconsejable evitar los empalmes por traslape y recurrir a empalmes a base de soldadura o por medio de dispositivos mecánicos apropiados. El reglamento ACI 318-04 exige que los de este tipo sean capaces de desarrollar el 125 por ciento del esfuerzo de fluencia cuando se utilizan en las regiones donde el esfuerzo está sujeto al esfuerzo máximo. En regiones donde el esfuerzo del acero es bajo, no es necesario cumplir con este requisito.

Según el reglamento ACI, los empalmes soldados, cuando exista riesgo de que puedan presentarse tensiones, se permite la transmisión de esfuerzos por contacto directo de los extremos, siempre que estos sean planos y normales al eje de las barras y que se mantengan en posición mediante dispositivos adecuados.



Suponiendo  $b = 20 \text{ cm}$ ,  $d = 40 \text{ cm}$  y una recubrimiento  $r = 5 \text{ cm}$ .

Acero requerido en la sección de empalme = 7 cm<sup>2</sup>

Acero propuesto = 2 vrs. del No. 7

$$\begin{aligned}A_{sp} &= 7.74 \text{ cm}^2 & F_y &= 4220 \text{ kg/cm}^2 \\A_b &= 3.87 \text{ cm}^2 & F'_c &= 200 \text{ kg/cm}^2 \\d_b &= 2.32 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

SOLUCION:

$$\frac{A_{sp}}{A_{sr}} = \frac{7.74}{7} = 1.10 < 2$$

% del acero traslapado = 100%

DE LA TABLA: TRASLAPE CLASE C

$$L_{\text{traslape}} = 1.7l_d$$

$$Ld_b = \frac{0.06A_b F_y}{\sqrt{F'_c}} \geq 0.006d_b F_y$$

$$Ld_b = \frac{(0.006)(3.87)(4220)}{200} = 69 \text{ cm} \quad \text{RIGE}$$

$$Ld_b = (0.006)(2.22)(4220) = 56 \text{ cm}$$

Por lo tanto  $Ld_b = 69 \text{ cm}$

### FACTOR DE MODIFICACIÓN:

Como  $A_{sp} > A_{rs}$  :

$$\frac{A_{sr}}{A_{sp}} = \frac{7}{7.74} = 0.90$$

$$L_d = 0.90L_{db} = (0.90)(69) = 62cm$$

$$L_{traslape} = 1.70L_d = (1.7)(62) = 105cm$$

$$L_{traslape} = 105cm$$

## **COLUMNAS**

El estudio del comportamiento y diseño de columnas de concreto reforzado, como elementos estructurales en las construcciones como puentes, iglesias y edificios; desde los tiempos antiguos, han sido un reto y un problema que han resuelto de acuerdo a sus alcances y conocimientos nuestros antepasados. Hoy en día seguimos enfrentando este reto como una oportunidad para llevar a cabo el análisis, diseño de estos elementos utilizando algunos métodos empíricos o métodos aproximados, los cuales han nacido después de un largo periodo de experimentación y práctica.

El uso de columnas de concreto reforzado con acero de refuerzo actualmente se ha convertido en una practica común en nuestra sociedad. Podemos encontrar diferentes tipos y tamaños de columnas en diferentes edificios de nuestro país, así como tambien en algunos otros países del mundo en los edificios que se construyen regularmente se usan dichas columnas como elementos estructurales.

### ***¿Qué es una columna de concreto reforzado?***

Las columnas son elementos estructurales que sirven para soportar cargas axiales, y donde actúan fuerzas longitudinales (carga axial), produciendo en ellas esfuerzos de compresión, tensión, cortante y momento flexionante, y en algunos casos se presenta flexocompresión y flexotension; para absorber estas fuerzas producidas en la columna debido a las cargas se adiciona acero estructural grado 47 como refuerzo longitudinal para absorber los esfuerzos de tensión; así como también acero transversal para los esfuerzos cortantes que se producen en dicha columna.

El reglamento A.C.I. 318-04 en la sección 8.8. Dice lo siguiente sobre columnas.

Las columnas se deben diseñar para resistir las fuerzas axiales que provienen de las cargas factorizadas de todos los entrepisos o azoteas, y el momento máximo factorizado debido a las cargas factorizadas en un solo claro adyacente al entrepiso o azotea que se está considerando. También se debe considerar la condición de carga que proporciona la relación máxima de momento a carga axial.

### **DISPOSICIONES DE SEGURIDAD DEL CODIGO ACI 318-02**

Para columnas, al igual que para todos los demás elementos diseñados de acuerdo con el código ACI, se establecen apropiados márgenes de seguridad mediante la aplicación de coeficientes de sobrecarga a las cargas de servicio y de coeficientes de reducción de resistencia a las resistencias últimas nominales. Así que, para columnas,  $\phi P_n \geq P_u$  y  $\phi M_n \geq M_u$  son los criterios básicos de seguridad.

Para elementos sometidos a compresión más flexión, el Código ACI establece coeficientes de reducción básicos:

$\phi = 0.70$  para columnas con flejes.

$\phi = 0.85$  para columnas reforzadas con espiral.

Para estudiar las columnas con mayor detalle las clasificaremos de acuerdo con la carga axial, forma (geometría) de cómo son armadas con acero de refuerzo y en función de su relación de esbeltez.

Si atendemos a la posición de la carga requerida, con respecto al eje de la columna, podemos decir que esta sometida a carga axial y podemos decir que la columna está cargada excéntricamente cuando la carga se localiza fuera del eje longitudinal de la columna.

***Clasificación de las columnas de acuerdo a su relación de esbeltez.***

- Columnas cortas.
- Columnas largas.

***Clasificación de las columnas de acuerdo a su forma o geometría.***

- Columnas rectangulares.
- Columnas cuadradas.
- Columnas circulares.

De acuerdo a estudios de institutos como el ACI y ASCE en los Estado Unidos de Norteamérica, señalan que el 90% de las columnas de concreto reforzado que forman parte de edificios, los cuales cuentan con arriostramiento en sus marcos rígidos (se hace esto para absorber y contrarestar fuerzas horizontales producidas por sismo y viento), son columnas cortas. Y el 40% de las columnas de concreto reforzado que se encuentran en marcos rígidos no arriostrados, tambien se pueden clasificar como columnas esbeltas.

***Consideraciones generales para el diseño de columnas de concreto reforzado.***

- Las columnas se diseñan para un porcentaje de acero de refuerzo longitudinal de  $\rho = 2\%$  hasta  $\rho = 8\%$ . Para fines prácticos, es difícil colocar más de un 5% de refuerzo longitudinal. Bajo condiciones especiales, una columna puede diseñarse con un porcentaje de refuerzo menor al 2%; sin embargo, bajo ninguna circunstancia el porcentaje de refuerzo longitudinal  $\rho$  será menor a 0.005. el proceso puede iniciarse con un valor tentativo de  $\rho = 0.015$ , como un valor mínimo de refuerzo para columnas de concreto reforzado.

- Para porcentajes altos de refuerzo longitudinal, con valores entre  $\rho = 6\%$  hasta  $\rho = 8\%$  (secciones limitadas y sometidas a cargas axiales altas), se requiere del uso de paquetes de barras (quiere decir que se agrupan de dos o tres barras o varillas para formar un paquete entre si). Esto es con la finalidad de evitar congestionamiento del acero de refuerzo longitudinal el cual implica el libre flujo del agregado como es la grava, y se evite asimismo un concreto pobre.
- De acuerdo con el ACI 318-04 en la sección 10.9.2 a la letra dice “El acero de refuerzo longitudinal mínimo en elementos sujetos a compresión debe de ser de 4 varillas dentro de anillos circulares o rectangulares, 3 varillas dentro de anillos triangulares y 6 varillas confinadas por espirales, de acuerdo con la sección 10.9.3.
- Se recomienda tener como dimensiones mínimas las siguientes: para secciones rectangulares, la dimensión menor es de 20 cm (8 inches), y para secciones circulares, el diámetro mínimo será de 25 cm (10 inches); la sugerencia anterior es con la finalidad de garantizar tanto el recubrimiento del acero longitudinal y así de esta manera evitar que se debilite el elemento debido a que el agua y el viento provocan una oxidación en el acero en el interior de la columna.
- En columnas con acero transversal como estribos, estos no deberán tener un diámetro menor de 3/8” cuando el refuerzo longitudinal sea de varillas del numero 10 o de diámetro menor. Para columnas con acero de refuerzo longitudinal mayor al número 10 o con paquetes de barras, el diámetro menor de los estribos serán del número 4 (varillas de 1/2” de diámetro).
- La separación de los estribos no deberá ser mayor que 16 veces el diámetro del refuerzo longitudinal de dicha columna, ni 48 veces el diámetro

del estribo o la menor dimensión de la columna. Finalmente se tomará el valor menor de los tres.

- Cada estribo tendrá un gancho con un ángulo no mayor a  $135^\circ$  y este se colocará en forma alternada para cada varilla de esquina del refuerzo longitudinal. Que servirá de anclaje cuya esquina se va rotando para no tener una esquina débil.
- Los estribos bajo ninguna circunstancia se colocaran a una distancia mayor que  $S/2$  (separación en cm) encima de la cara superior de la zapara o losa; y no mas de  $S/2$  por debajo del refuerzo inferior de una losa o capitel en una columna.
- La separación del refuerzo helicoidal no podrá ser menor de 2.5 cm (1 inch) ni mayor de 7.50 cm (3 inches) en caso de requerirse traslape en el refuerzo continuo, este es soldado o con un traslape de 48 veces el diámetro del refuerzo 30 cm (12 inches), el que resulte mayor de los anteriores.
- En columnas de concreto reforzado se recomienda utilizar concretos de alta resistencia como por ejemplo  $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$  o  $f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$ .
- Debido a que una falla en caso de desastre natural (sismo o un huracán), la columna fallaría primero, antes que las trabes, como elementos estructurales; y esto es muy lamentable y catastrófico. Por lo cual los factores de carga y resistencia consideran estos alcances inesperados, pero así de esta manera se protege el diseñador estructural.



## AYUDAS DE DISEÑO

El diseño de columnas cargadas excéntricamente, según el metodo de análisis descrito acerca de la compatibilidad de deformaciones, requiere la selección de una columna de prueba. La columna de prueba se investiga entonces para determinar si es adecuada para resistir cualquier combinación de  $P_u$  y  $M_u$  que pueda actuar sobre ella en caso de sobrecarga en la estructura, es decir, para observar si  $P_u$  y  $M_u$  resultantes del análisis de la estructura, caen dentro de la región limitada por la curva o diagrama de interacción como resistencia de diseño del ACI. Asimismo, un diseño económico exige que la combinación de  $P_u$  y  $M_u$  que controla esté muy cerca de la curva límite. Si no se cumplen estas condiciones, debe seleccionarse una nueva columna de prueba.

Las graficas que utiliza el código ACI para calcular la resistencia de diseño, consisten en curvas de interacción de resistencia, ya tienen incorporadas las disposiciones de seguridad del código ACI. Sin embargo, en lugar de dibujar  $\phi P_u$  versus  $\phi M_n$ , se utilizan parámetros correspondientes para hacer que las graficas sean generalmente más aplicables, esto es, la carga se dibuja como  $\frac{\phi P_n}{A_g}$  mientras que el momento se expresa como  $\left(\frac{\phi P_n}{A_g}\right)\left(\frac{e}{h}\right)$ . Se dibujan varios grupos de curvas para diferentes valores de  $\rho_c = A_{st}/A_g$ . Estas se usan, en mayor parte de los casos, en conjunto con un grupo de líneas radiales que representan diferentes relaciones de excentricidad  $e/h$ .

Gráficos como los anteriores permiten el diseño directo de columnas cargadas excéntricamente para el intervalo corriente de resistencias y de variables geométricas. Estas pueden utilizarse en cualquiera de las dos maneras que se explican a continuación. Para una carga mayorana  $P_u$  y una excentricidad equivalente.

## COMPRESION MÁS FLEXION EN COLUMNA RECTANGULARES

Este tipo de elementos deben diseñarse para compresión y flexión simultáneamente ya que resulta muy raro encontrar elementos cargados axialmente en nuestra práctica cotidiana en la construcción, es decir, concéntricamente a compresión. Los momentos flectores se producen por continuidad, es decir, por el hecho de que las columnas son partes de pórticos monolíticos en las cuales los momentos en los apoyos de las vigas son resistidos en parte por las columnas de soporte, también bajo condiciones de cargas horizontales como pueden ser fuerzas generadas por el viento o por sismo.

Todas las columnas pueden entonces clasificarse en términos de la excentricidad equivalente  $e = M/P$ . Aquellas con un valor de  $e$  relativamente pequeño se caracterizan en general por una compresión a lo largo de toda la sección de concreto y, si se sobrecarga fallará por aplastamiento del concreto junto con una fluencia del acero a compresión en el lado más cargado.

Columnas esbeltas, en las cuales la resistencia puede reducirse en forma significativa por las deflexiones laterales (efectos de esbeltez en la reducción de la resistencia de las columnas)

La resistencia última nominal de una columna cargada axialmente puede encontrarse reconociendo la respuesta no lineal de los dos materiales.

$$P_n = 0.85 F_c (A_g + A_{st}) + A_{st} F_y$$

$$\phi P_{n_{\max}} = 0.85 \phi [0.85 F_c (A_g - A_{st}) + F_y A_{st}] \quad \phi = 0.75$$

Las columnas con excentricidades grandes se someten a tensión sobre, al menos una parte de la sección y, cuando se sobrecargan, pueden fallar por fluencia del acero a tensión en el lado más alejado de la carga.

$$P_n = 0.85F'_c a b + A'_s F'_s - A_s F_s$$

El momento de los esfuerzos y fuerzas internas con respecto a la línea central de la sección debe ser igual y opuesto al momento de la fuerzas externa  $P_n$ .

Al igual que para flexion simple, la distribución real de esfuerzos a compresión en el concreto se reemplaza por una distribución rectangular equivalente con un espesor  $a = \beta_1 c$

Una mejor aproximación, si se tienen en cuenta las bases para el Diseño práctico, consiste en construir un Diagrama de Interacción de resistencia que defina la carga y el momento de falla para determinada columna en el intervalo completo de excentricidades desde  $e = 0$  hasta  $e = \infty$ . Para cualquier excentricidad ( $e$ ), existe un solo par de valores de  $P_n$  y  $M_n$  que producirán un estado inminente de falla.

En el diagrama de interacción, cualquier línea radial representa una excentricidad particular  $e = M/P$ .

Para  $e = 0$   $P_o$  es la capacidad de la columna para carga concentrada.

$e = \infty$   $M_o$  es la flexion pura con una capacidad a momento.

Las excentricidades pequeñas producirán falla regida por compresión del concreto, mientras que las grandes excentricidades llevarán a una falla iniciada por la fluencia del acero a tensión.

Para el acero en Tensión

$$\epsilon_s = \epsilon_u \frac{d - c}{c}$$

$$f_s = \epsilon_u E_s \frac{d - c}{c} \leq F_y$$

Para el acero en Compresión

$$\epsilon'_s = \epsilon_u \frac{c - d'}{c} \quad f'_s = \epsilon_u \cdot E_s \frac{c - d'}{c} \leq F_y$$

Por lo tanto, el broque de esfuerzos del concreto tiene un espesor:

$$a = \beta_1 \cdot c \leq h$$

La resultante a compresión del concreto es:

$$C = 0.85 \cdot F'_c \cdot a \cdot b$$

Para falla balanceada

$$c = c_b = d \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \epsilon_y} \quad a = a_b = \beta_1 \cdot c_b$$

Pasos en el diseño de una columna cargada excéntricamente con ayudas de diseño

1. Seleccionar unas dimensiones tentativas para la sección transversal  $b$  y  $h$ .
2. Calcular la relación  $\gamma$  basada en los requisitos de recubrimiento hasta el centroide de las barras y seleccionar la grafica correspondiente para el diseño de columnas.
3. Calcular  $\frac{Pu}{Ag}$  y  $\frac{Mu}{Ag \cdot h}$ , donde  $Ag = b \cdot h$
4. A partir de la gráfica y para los valores encontrados en (3), leer la cuantía de acero  $\rho_g$  que se requiere.
5. Calcular el área total de acero  $Ast = \rho_g \cdot b \cdot h$
6. Seleccionar la cuantía de acero  $\rho_g$ .
7. Escoger un valor tentativo para  $h$  y calcular  $\frac{e}{h}$  y  $\gamma$ .

8. De la gráfica correspondiente, leer  $\frac{P_u}{A_g}$  y calcular el área requerida  $A_g$ .
9. Calcular  $b = \frac{A_g}{h}$
10. Si es necesario revidar el valor tentativo de h para obtener una sección bien proporcionada.
11. Calcular el área total de acero  $A_{st} = \rho_g . b . h$

### Ejemplo 1

Seleccione el refuerzo para una columna con determinadas dimensiones. En una estructura de dos pisos debe diseñarse una columna exterior para una carga muerta de servicio 64.50 ton, una carga viva máxima de 96.70 ton, un momento por cargas muertas de 11.50 ton-m y un momento por cargas vivas de 14.70 ton-m.

Las condiciones arquitectónicas exigen que se utilice una columna rectangular con  $b = 40$  cm y  $h = 50$  cm respectivamente.

### Solución

#### Datos

$$F'_c = 281 \text{ kg/cm}^2 \quad b = 40 \text{ cm}$$

$$F_y = 4220 \text{ kg/cm}^2 \quad h = 50 \text{ cm}$$

De acuerdo con las disposiciones de seguridad del código ACI, la columna debe diseñarse para una carga factorizada  $P_u = 64.5 \times 1.4 + 96.7 \times 1.7 = 254.6$  ton y un momento factorizado  $M_u = 11.5 \times 1.4 + 14.7 \times 1.7 = 41.02$  ton –m.

Los parámetros de la columna si se supone flexion con respecto al eje más fuerte son:

$$\frac{Pu}{Ag} = \frac{254,600kg}{(40)(50)} = 127.3 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{Mu}{Ag.h} = \frac{(41.02)(10^5)kg - cm}{(40)(50)(50)} = 41.02 \text{ kg/cm}^3$$

En este caso se especifica una columna de 40 x 50 cm, con refuerzo distribuido alrededor del perímetro de la columna. Considerando un recubrimiento de las barras 2.5 pulg. (6.35 cm), desde la cara de la columna hasta el centroide del acero para cada barra; el parámetro  $\gamma = \frac{(50-5)}{50} = 0.90$ . Para esta geometría de columna y para las resistencias determinadas de los materiales se puede aplicar la grafica A.9.

A partir de la grafica A.90, se encuentra la cuantía de acero  $\rho_g = 0.032$  es suficiente para estas condiciones de carga.

Si se selecciona tentativamente el acero transversal (estribos) del No. 3 (3/8 pulg.), el espaciamiento máximo de estos no debe exceder  $(48)(0.72) = 34.56$  cm. El espaciamiento esta controlado por la menor de las dimensiones de la columna en este caso y se utilizará estribos de 3/8 pulg. De diámetro espaciados a 20 cms.

Acero longitudinal en la columna:

$$Ast = \rho_g . b . h = (0.032)(40)(50) = 64 \text{ cm}^2$$

$$\frac{64 \text{ cm}^2}{2.86 \text{ cm}^2} = 22.37 \text{ varillas ; se colocaran 20 varillas de } \frac{3}{4} \text{ pulg.}$$

## Ejemplo 2

## Datos

$$P_u = 51 \text{ ton} \qquad F_y = 4220 \text{ kg/cm}^2 \qquad b = 20 \text{ cm}$$

$$M_u = 15 \text{ ton-m} \qquad F'_c = 210 \text{ kg/cm}^2 \qquad h = 40 \text{ cm}$$

## Solución

Calculo de la excentricidad de la columna, tenemos:

$$e = \frac{15}{51} 0.2941m \qquad e = 29.401cm$$

$$\frac{d}{h} = \frac{40-5}{40} = 0.875 \approx 0.85$$

Calculo de las constantes K y R en la grafica de ayudas de Diseño.

$$K = \frac{P_u}{F_r.b.h.f'_c} = \frac{51000kg}{(0.70)(20)(40)(170)} = 0.5367$$

$$R = \frac{M_u}{F_r.b.h^2 F'_c} = \frac{15}{(0.70)(20)(40^2)(170)} = 0.394$$

Con estos datos se obtiene el porcentaje de acero  $\rho_{calculado}$  en las graficas

$$\rho_{calculado} = 0.02442$$

Calculo de Índice de resistencia.

$$q = \rho \frac{F_y}{f'_c} = 0.02442 \left( \frac{4220}{170} \right) = 0.6035$$

Cálculo del área de acero  $A_s$

$$A_s = \rho.b.d = (0.02442)(20)(35) = 22.67cm^2$$

Usar 8 varillas  $\Phi \frac{3}{4}$  pulg.

## LOSAS

Las losas de concreto reforzado son elementos estructurales cuyas dimensiones en planta son relativamente grandes en comparación con su peralte. Las cargas principales que actúan sobre ellas, son cargas normales a su plano, ya que se usan para disponer de superficies útiles horizontales como los pisos de edificios o las cubiertas de puentes. En ocasiones, además de las cargas normales actúan cargas contenidas en su plano, como es el caso de losas inclinadas, en las que la carga vertical tiene una componente paralela a la losa, o cuando la losa actúa como un diafragma horizontal que une marcos verticales de distinta rigidez o sujetos a fuerzas horizontales diferentes.

### LOSAS EN UNA DIRECCION

Las losas en una dirección son aquellas que están apoyadas sobre vigas o muros paralelos en dos de sus lados quedando libres en los otros dos, como se muestra a continuación en la figura 5.1.

Se llaman losas en una dirección por que trabajan únicamente en la dirección perpendicular a los apoyos. Los apoyos pueden ser las vigas principales de un marco, vigas secundarias que se apoyan a su vez en vigas principales o en muros, o muros de mampostería que soportan la losa directamente.

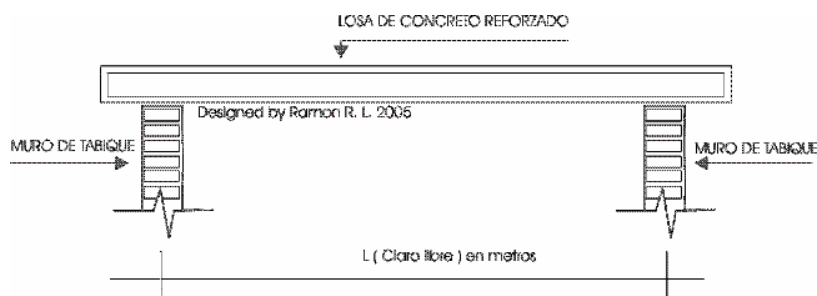


FIGURA 5.1.- Losa de concreto reforzado en una dirección.



Cuando una losa esta apoyada en sus cuatro lados y la relación entre el lado largo y el lado corto de este tablero es mayor de dos, la losa se puede diseñar como losa en una dirección aunque este apoyada en realidad en sus cuatros lados, ya que trabaja en forma similar a la losa mostrada en la figura 5.1.

### **COMPORTAMIENTO**

Las losas en una dirección se comportan esencialmente como vigas. Se considera que la losa es una viga cuyo ancho es la longitud del apoyo, o tambien como se hace frecuentemente, se supone que la losa esta formada por una serie de vigas paralelas e independientes de un metro de ancho (franjas unitarias), que se flexionan de manera uniforme, como se muestra en la figura 5.2.

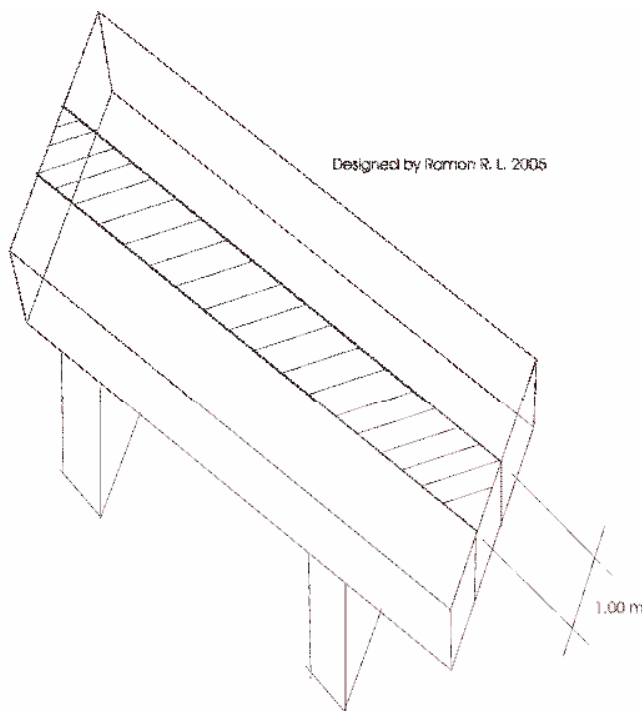


FIGURA 5.2.- Franja unitaria de losa de concreto que trabaja como una viga ancha.

## ***DIMENSIONAMIENTO***

El diseño de estas losas es similar al de las vigas, con algunas características que se señalan a continuación. Es recomendable iniciar el diseño fijando un valor del peralte que garantice que no ocurran deflexiones excesivas, ya que esto es el factor que rige en el diseño. Para ello, se usa la tabla 2.1 que se vio en el tema de vigas, la cual proporciona espesores de losa con los que no se exceden las deflexiones permisibles.

Una vez determinado el espesor de la losa, se calcula el peralte efectivo restando el recubrimiento del espesor. El reglamento ACI 318-02 recomienda un recubrimiento libre de 2 cm para losas no expuestas a la acción del clima (intemperie), ni en contacto con el suelo y que tengan varillas del no. 11 y menores. Para losas con varillas del no. 14 y 18 se recomienda un recubrimiento de 4 cm.

El cálculo de los momentos flexionantes y de las fuerzas cortantes puede realizarse enseguida, considerando que la losa es una viga continua de un metro de ancho con carga uniformemente distribuida.

Se pueden utilizar los coeficientes de momentos presentado por Westergaard en 1950, los cuales se muestran en la tabla 5.1 siempre y cuando que se cumplan las siguientes condiciones o requisitos:

- A.- La losa tiene por lo menos dos claros continuos.
- B.- Los claros son aproximadamente iguales, de tal manera que el mayor de dos claros adyacentes no exceda en más del 20%.
- C.- Las cargas están uniformemente distribuidas.
- D.- La carga viva por metro cuadrado no es mayor que tres veces la carga muerta.
- E.- La losa es de sección transversal constante.

Tabla 5.1.- Coeficientes de momentos flexionantes y fuerzas cortantes; tomada del reglamento ACI 318-02 sección 8.3 métodos de análisis.

<p>Momento positivo</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Claros Extremos</li> </ul> <p>El extremo discontinuo no esta empotrado</p> <p>El extremo discontinuo es monolítico con el apoyo</p> <p>Claros interiores</p>	$WuLn^2/11$ $WuLn^2/14$ $WuLn^2/16$
<p>Momento negativo en la cara exterior del primer apoyo interior</p> <p>Dos claros</p> <p>Mas de dos claros</p>	$WuLn^2/9$ $WuLn^2/10$
<p>Momento negativo en las demás caras de apoyos para losas con claros que no excedan de 3 m.</p>	$WuLn^2/12$
<p>Momento negativo en la cara interior de los apoyos exteriores para los elementos construidos monolíticamente con sus apoyos.</p> <p>Cuando el apoyo es un viga de borde</p> <p>Cuando el apoyo es una columna</p>	$WuLn^2/24$ $WuLn^2/16$
<p>Cortante en el elemento extremos en la cara del primer apoyo interior</p>	$1.15WuLn/2$
<p>Cortante en la cara de todos los demás apoyos</p>	$WuLn/2$

Cuando no se utilicen los coeficientes de la tabla 5.1 y se hace un análisis formal, el claro  $L$ , puede tomarse como el claro libre siempre que no sea mayor de 3 m, y que las losas se cuelen monolíticamente con los apoyos. Si no se cumplen estas condiciones, el claro será la distancia que resulte menor de:

- El claro libre más el peralte total de la losa.
- La distancia entre los ejes de apoyo.

El método para calcular los momentos flexionantes y fuerzas cortantes considerando franjas de losa de un metro es conservador, ya que como la losa no puede deformarse libremente en dirección perpendicular a las franjas, se desarrollan esfuerzos de compresión normales a las franjas que aumentan ligeramente la resistencia en la dirección considerada.

### **ACERO DE REFUERZO**

Una vez establecidos el peralte efectivo,  $d$ , y los momentos flexionantes, se calcula el refuerzo necesario con las ecuaciones de flexión de vigas. Por lo general, las losas son elementos subreforzados, por lo que es válido usar las ecuaciones correspondientes a este tipo de elementos una vez comprobado que el porcentaje de acero  $\rho$ , resulta menor que el porcentaje balanceado,  $\rho_b$ . El refuerzo obtenido se coloca en dirección paralela a las franjas, o sea, en la dirección del claro considerado. En dirección perpendicular es necesario colocar también refuerzo para resistir los esfuerzos producidos por contracción del concreto y por cambios de temperatura, y por falta de uniformidad en la carga. Si no se coloca el refuerzo por contracción y temperatura. El concreto se agrietaría, ya que la losa no puede acortarse libremente en la dirección perpendicular al claro.

El reglamento ACI 318-02 establece requisitos para el refuerzo de flexión y para el refuerzo de contracción y temperatura.

Los porcentaje de acero,  $\rho$ , para contracción y temperatura deber ser por lo menos iguales a los valores señalados en la tabla 5.2 , cuyos valores son tomados del reglamento ACI 318-02 de la sección 7.12 especifica el refuerzo por contracción y temperatura; así como tambien en la sección 10.5 refuerzo mínimo en elementos sujetos a flexion.

Tabla 5.2  $\rho_{\min}$  para calcular el acero por contracción y temperatura.

Tipos de acero	$\rho_{\min}$
Varillas corrugadas con $F_y$ igual a 2800 o 3500 $\text{kg}/\text{cm}^2$	0.0020
Varillas corrugadas o malla soldada de alambre (corrugado o liso) con $F_y = 4220 \text{ kg}/\text{cm}^2$	0.0018
Varillas con $F_y > 4220 \text{ kg}/\text{cm}^2$	$\frac{(0.0018)(4220)}{F_y}$

La separación de las varillas no debe exceder de 45 cm ni de tres veces el espesor de la losa para el refuerzo por flexion, ni de cinco veces dicho espesor, para el refuerzo por contracción y temperatura.

En el dimensionamiento de losas es frecuente calcular primero el área de acero por metro de ancho de losa, después elegir el diámetro de la varilla, y por ultimo se cálculo la sepacion entre varillas. Para este último cálculo se puede utilizar la siguiente ecuación:

$$s = \frac{100.A_b}{A_s}$$

Donde  $s$  es la separación entre varillas;  $A_b$  el área de cada varilla, y  $A_s$  es el área por metro de ancho de losa.

El refuerzo por flexión debe detallarse de tal manera que se satisfagan los requerimientos de acero en las secciones de momento negativo y positivo y que además se cumplan los requisitos de longitud de desarrollo. En la práctica se busca que las separaciones sean lo más cercanas a los valores teóricos, pero al mismo tiempo conviene modularlas para obtener distribuciones regulares y armados sencillos que simplifiquen la construcción y la supervisión.

En la figura 5.3 se muestran algunas recomendaciones típicas para la colocación del refuerzo por flexión. Estas recomendaciones son válidas cuando los claros y las condiciones de carga en cada claro son semejantes. En caso contrario, los dobleces y cortes de varillas deben hacerse con la ayuda del diagrama de momentos.

El acero por contracción y temperatura, no mostrado en la figura, se coloca en forma de varillas rectas en el lecho inferior de la losa por encima del refuerzo por flexión.

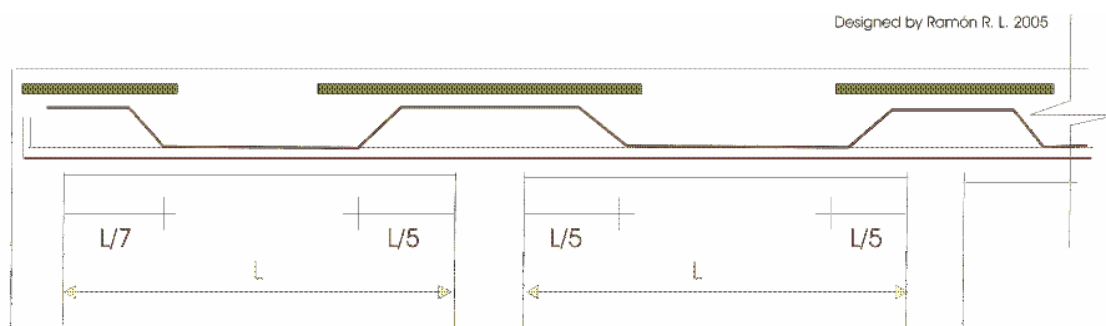


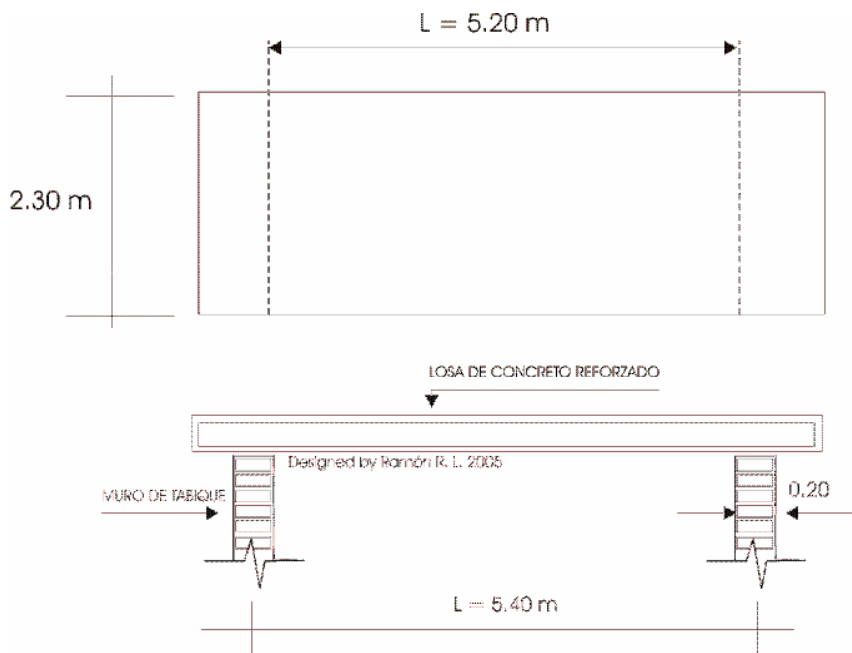
FIGURA 5.3.- Detalles típicos del refuerzo en losas de concreto reforzado.

**REVISION POR CORTANTE**

En la mayoría de las losas, la fuerza cortante no es un factor importante. Sin embargo, debe revisarse, y en caso de que la sección de concreto no pueda resistir la fuerza cortante, debe aumentarse dicha sección ya que por razones constructivas no es posible usar refuerzo por cortante en estas losas.

Ejemplo.

Diseñar la losa simplemente apoyada que se muestra en la siguiente figura.



Diseñar la losa simplemente apoyada que se muestra en la figura.

Solución.

Cálculo del espesor de la losa; de la tabla 2.1  $h = L/20$

$$L_n = 5.20 + 0.20 = 5.40 \text{ m}$$

$$H = 540/20 = 27 \text{ cm}$$

Cálculo de la carga última.

$$W \text{ peso propio} = (L)(0.27)(24009) = 648 \text{ kg/m}^2$$

$$W_u = 1.4 \text{ Dead} + 1.7 \text{ Live}$$

$$W_u = 1.4 (180 + 648) + 1.7 (380) = 1805 \text{ kg/m}^2$$

Analizando un metro lineal de losa.

$$W_u/m = (1.80 \text{ ton/m}^2)(1.00 \text{ m}) = 1.80 \text{ ton/m}$$

Momento máximo

$$M_{\max} = \frac{W_u L^2}{8} = \frac{(1.80)(5.40^2)}{8} = 6.56 \text{ ton-m}$$

Cálculo del área de acero por flexión.

$$D = h - \text{recubrimiento} = 27 - 2 = 25 \text{ cm}$$

$$\omega = 0.849 - \sqrt{\left(0.721 - \frac{(6.56)(10^5)}{(0.53)(200)(100)(25^2)}\right)} = 0.060$$

$$\rho = \omega \frac{F_c}{F_y} = (0.060) \frac{200}{4220} = 0.0028$$

$$\rho = 0.0028 > \rho_{\min} = 0.0018; \text{ Por lo tanto se considera } \rho = 0.0028$$

$$A_s = \rho \cdot b \cdot d = (0.0028)(100)(25) = 7.00 \text{ cm}^2$$

Finalmente, la separación del acero quedará de la manera siguiente:

Utilizando varillas del no. 3 (3/8");  $A_b = 0.71 \text{ cm}^2$



$$s = \frac{100.A_b}{A_s} = \frac{(100)(0.71)}{7.00} = 10cm$$

Calculo del acero por contracción y temperatura.

De la tabla 5.2 se obtiene;  $P_{min} = 0.0018$

Como el acero de contracción y temperatura se coloca sobre el acero por flexion, el peralte efectivo será:

$$D = 25 - 1 \Phi \text{ no. 3} , D = 25 - 0.95 = 24 \text{ cm}$$

$$A_s = (0.0018)(100)(24) = 4.32 \text{ cm}^2$$

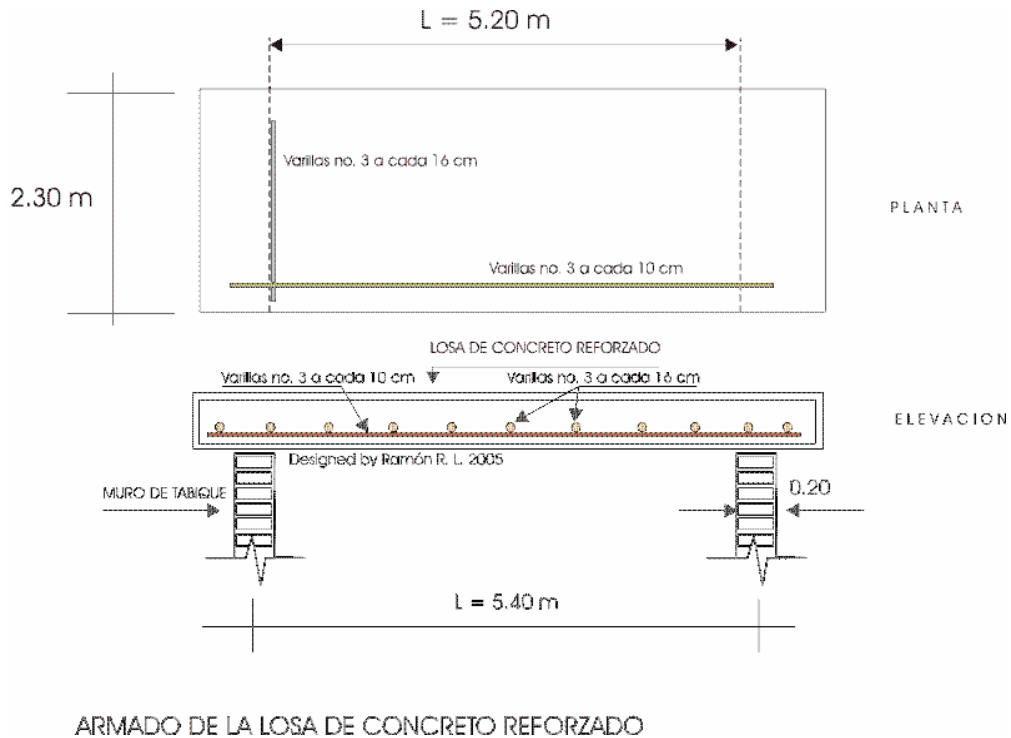
Empleando varillas del no. 3, tenemos la separación siguiente.

$$s = \frac{(100)(0.71)}{4.32} = 16cm$$

Por lo tanto se colocaran varillas del no. 3 @ 16 cm.

Armado de la losa finalmente quedara de la manera siguiente, como se aprecia en el dibujo siguiente:

ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO, CONFORME AL ACI.318-04, \*\*RAMON RUIZ, U.S.A. 2006\*\*



Revisión por cortante.

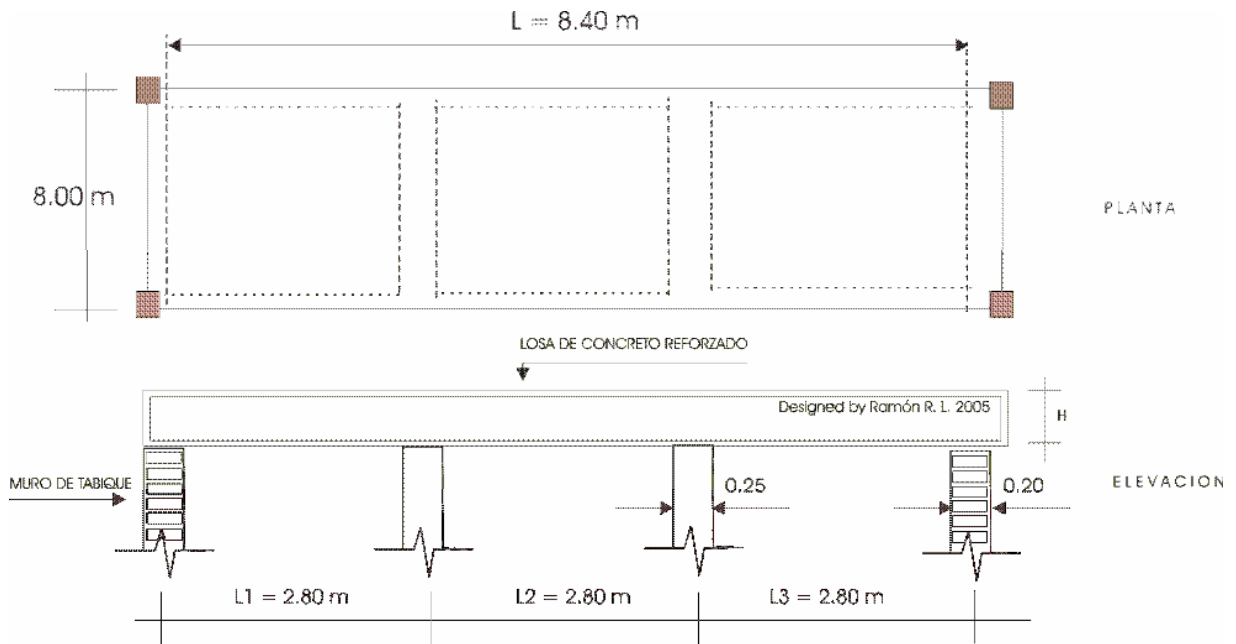
$$V_u = \frac{(1.8)(5.20)}{2} = 4.68 \text{ ton} = 4680 \text{ kg}$$

$$V_c = 0.53 \cdot \sqrt{F'_c} \cdot b \cdot d = (0.53)(\sqrt{200})(100)(25) = 18738 \text{ kg}$$

$$\phi V_c = (0.85)(18738) = \text{kg}$$

$$\phi V_c = 15927 \text{ kg} > V_u = 4680 \text{ kg}$$

Ejemplo 2.



Datos

$W \text{ viva} = 430 \text{ kg/m}^2$

$W \text{ rec y acabados} = 150 \text{ kg/m}^2$

$F_y = 4220 \text{ kg/cm}^2$

$F'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

Solución

Cálculo del espesor de la losa tentativamente.

De la tabla 2.1 se obtiene  $h = L/24$

$$h = \frac{280 - 25}{24} = 10.6 \cong 11 \text{ cm}$$

**Cálculo de la carga última**

$$W \text{ peso propio} = (0.11)(2400) = 264 \text{ kg/m}^2$$

$$W_u = 1.4 D + 1.7 L = 1.4 (150 + 264) + 1.7 (430) = 1310 \text{ kg/m}^2 = 1.31 \text{ ton/m}^2$$

Como se analizará un metro lineal de losa tenemos lo siguiente.

$$W_u = 1.31 \text{ ton/m}$$

$$W_u \cdot L_n^2 = (1.31)(2.55)^2 = 8.52 \text{ ton-m}$$

$$D = h - \text{rec} = 11 - 3 = 8 \text{ cm}$$

Cálculo del acero por flexión.

CONCEPTO	A	viga	sec.		viga	sec.	B
1.- Coeficientes de momento:							
negativos	L/24		L/12		L/12		L/24
positivos		L/14		L/16		L/14	
2.- Momentos ( ton – m)							
Negativos	0.355		0.71		0.71		0.355
positivos		0.608		0.532		0.608	

**3.- Índice de Refuerzo**

$$\omega = 0.849 - \sqrt{\left(0.721 - \frac{Mu}{0.53.F_c.b.d^2}\right)}$$

Negativos	0.031		0.064		0.064		0.031
Positivos		0.054		0.047		0.054	

$$4.- \rho = \omega \frac{F_c}{F_y}, \rho_{\min} = 0.0018$$

Negativos	0.0018		0.003		0.003		0.0018
Positivos		0.0026		0.0022		0.0026	

$$5.- A_s = \rho.b.d.(cm^2/m)$$

Negativos	1.44		2.40		2.40		1.44
Positivos		2.08		1.76		2.08	

$$6.- s = \frac{100.A_b}{A_s}$$

Utilizando varillas del no. 3 (3/8 pulg.)  $A_b = 0.71cm^2$

Negativos	49.30		29.50		29.50		49.30
Positivos		34.10		40.30		34.10	

Para el momento positivo rige la separación  $s = 34$  cm

Pero de acuerdo con el reglamento ACI, la separación no debe exceder de  $3h$  ni de 45 cm.

$$3h = 3(11) = 33 \text{ cm} < 34 \text{ cm}$$

Por lo tanto se colocarán las varillas @ 30 cm

Para momento negativo rige  $s = 29.5$  cm

La distancia entre cada par de columpios es de 60 cm, por lo que hay necesidad de colocar un bastón entre estos para cumplir con los requisitos de acero para momento negativo.

### Acero por contracción y temperatura

$$\rho_{\min} = 0.0018$$

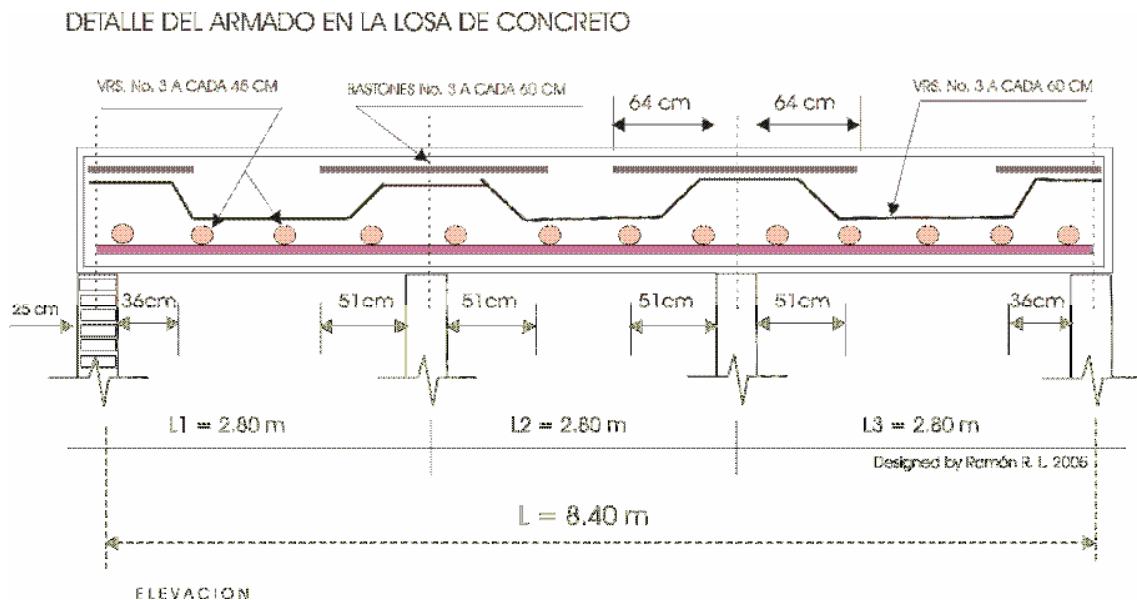
$$A_s = \rho.b.d = (0.0018)(100)(8) = 1.44\text{cm}^2$$

$$s = \frac{(100)(0.71)}{1.44} = 49\text{cm}$$

### Separación máxima (Según el Reglamento ACI )

$$s_{\max} = 5h = (5)(11) = 55\text{cm} \quad ; \text{ Por lo tanto rige } s = 45\text{ cm}$$

Por lo tanto se colocarán varillas del no. 3 @ 45 cm.



Recubrimiento libre = 2 cm

## Revisión por cortante

El caso mas critico es:

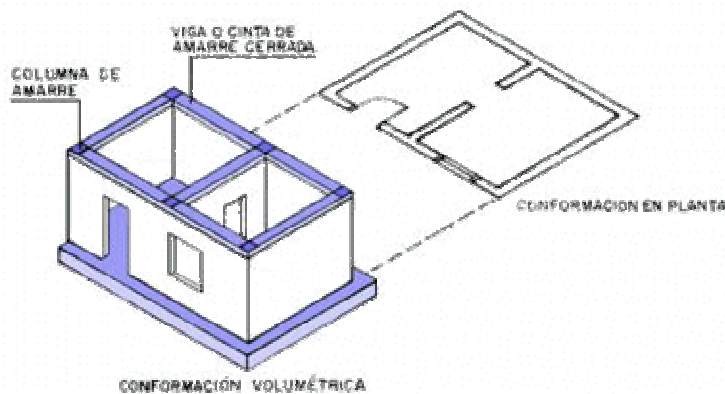
$$V_u = \frac{1.15W_u L_n}{2} = \frac{(1.15)(1310)(2.55)}{2} = 1921kg$$

$$V_c = 0.53\sqrt{f'_c} b.d. = (0.53)(\sqrt{200})(100)(8) = 5996kg$$

$$\phi V_c = (0.85)(5996kg) = 5097kg > V_u$$

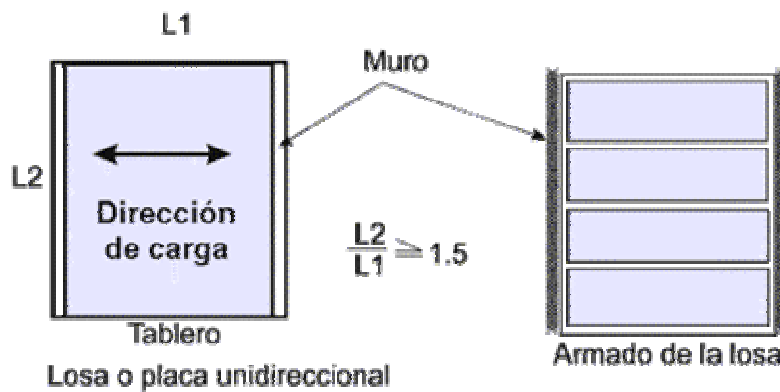
## LOSAS EN DOS DIRECCIONES.

Las losas en dos direcciones, son aquellos tableros en los cuales la relación entre su lado y su lado corto es menor que 2.



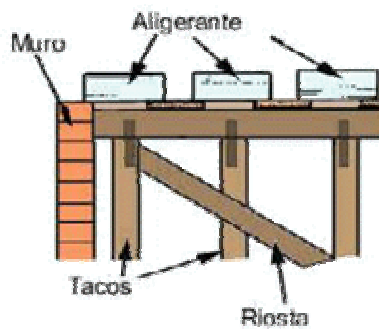
La diferencia entre losas que trabajan en una dirección y losas apoyadas perimetralmente, se puede apreciar en la forma que adquieren las losas cuando se reflexionan bajo la

acción de cargas normales a su plano. Las primeras se deforman en curvatura simple mientras que las segundas lo hacen en curvatura doble.

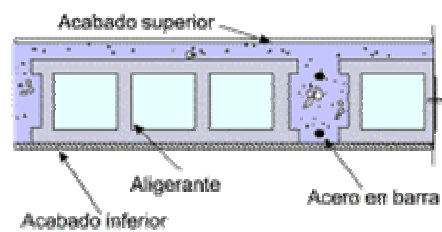


Los sistemas de piso con acción en dos direcciones consisten en:

- Piso de losa reticular.

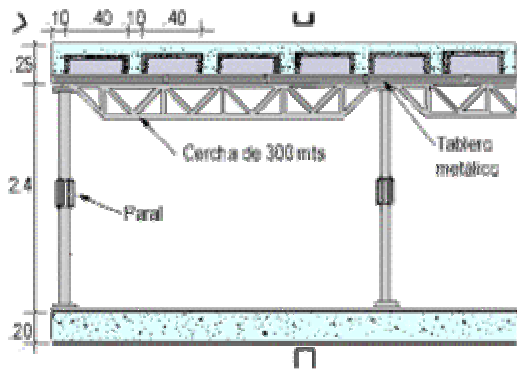


- Piso de losa sobre vigas.
- Piso de losas maciza.



Losa de concreto reforzado





### ***LOSAS APOYADAS PERIMETRALMENTE***

Las losas apoyadas perimetralmente son las que están apoyadas sobre vigas o muros en sus cuatro lados.

Una característica estructural importante en los apoyos de estas losas es que su rigidez a flexión es mucho mayor que la rigidez a flexión de la losa. Cuando las losas se apoyan en muros se considera que estos tienen una rigidez a flexión infinita.

### ***COMPORTAMIENTO Y MODOS DE FALLA***

La grafica carga-deflexión en el centro del claro de una losa apoyada perimetralmente, ensayada hasta la falla, tiene la forma mostrada en la figura 5.4 en la que se distingue las siguientes etapas.

1. Etapa lineal O – A, el agrietamiento del concreto en la zona de esfuerzos de tensión es despreciable. El agrietamiento del concreto por tensión, representado por el punto A, ocurre bajo cargas relativamente altas. Las cargas de servicio de losas se encuentran generalmente cerca de la carga correspondiente al punto A.

2. Etapa A-B, existe agrietamiento del concreto en la zona de tensión y los esfuerzos en el acero de refuerzo son menores que el limite de fluencia. La transición de la etapa O – A a la etapa A – B es gradual, puesto que el agrietamiento del concreto se desarrolla paulatinamente desde las zonas de momento flexionantes máximos hacia las zonas de momentos flexionantes menores. Por la misma razón la pendiente de la grafica carga-deflexión en el tramo A – B, disminuye poco a poco.
3. Etapa B – C, los esfuerzos en el acero de refuerzo sobrepasan el limite de fluencia, al igual que el agrietamiento del concreto, la fluencia del refuerzo empieza en las zonas de momentos flexionantes máximos y se propaga paulatinamente hacia las zonas de momentos menores.
4. Rama descendente C – D, cuya amplitud depende, como en el caso de las vigas, de la rigidez del sistema de aplicación de cargas.

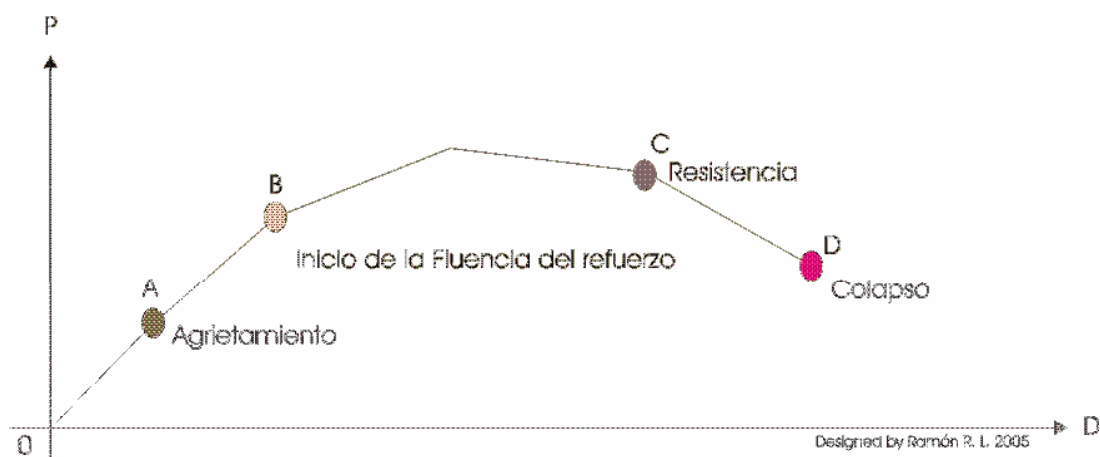


FIGURA 5.4.- GRÁFICA CARGA - DEFLEXIÓN DE UNA LOSA DE CONCRETO

En la figura 5.5 se presenta el avance del agrietamiento y de la fluencia del refuerzo en distintas etapas de carga.

En la figura se presentan las configuraciones de agrietamiento en la cara inferior de una losa cuadrada simplemente apoyada sujeta a carga uniformemente repartida en su cara superior, para distintos valores de la carga aplicada.



FIGURA 5.5.- Configuraciones de Agrietamiento para distintos valores de la carga aplicable.



FIGURA 5.5.- Configuraciones de Agrietamiento para distintos valores de la carga aplicable.

Se puede ver que el agrietamiento empieza en el centro de la losa que es la zona de momentos flexionantes máximos y avanza hacia las esquinas a lo largo de las diagonales.

Los análisis elásticos de losas indican que los momentos principales en una losa de este tipo se presentan precisamente en las diagonales. En etapas cercanas a la falla, se forman grietas muy anchas a lo largo de las diagonales, que indican que el acero de refuerzo ha fluido y ha alcanzado grandes deformaciones. Las deformaciones por flexión de la losa se concentran en estas líneas que reciben el nombre de líneas de fluencia, mientras que las deformaciones en las

zonas comprendidas entre las ***líneas de fluencia*** son, en comparación, muy pequeñas.

La amplitud de las zonas de comportamiento inelástico depende del porcentaje de refuerzo de flexión. Generalmente, este porcentaje es pequeño en losas, por lo que tales elementos resultan subreforzados y las zonas inelásticas son amplias.

En la descripción anterior del comportamiento, se ha supuesto que la falla ocurre por flexión y que no hay efectos de cortante. En el caso de losas apoyadas directamente sobre columnas y de losas sujetas a cargas concentradas altas, es frecuente que la falla ocurra en cortante por penetración antes que se alcance la resistencia en flexión.

## **LOSAS PLANAS**

Las losas planas son aquellas que se apoyan directamente sobre las columnas, sin la intermediación de vigas, como se muestra en la figura 5.6. Pueden tener ampliaciones en la columna o en la losa como en las figuras 5.6<sup>a</sup>, 5.6b y 5.6c, o por ser de peralte uniforme como en la figura 5.6d. A este último caso se les llama placas planas. Pueden ser macizas o aligeradas. El aligeramiento se logra incorporando bloques huecos o tubos de cartón o bien formando huecos con moldes recuperables de plástico u otros materiales. Las losas aligeradas reciben el nombre de encasetonadas o reticulares.

Las ampliaciones de las columnas en su parte superior se denominan capiteles. Tienen como función principal aumentar el perímetro de la sección crítica en cortante por penetración, acción que rige en muchas ocasiones el dimensionamiento de este tipo de losas. Las caras del capitel no deben formar un ángulo mayor de  $45^\circ$  con el eje de las columnas como se indica en la figura 5.7 a. Si este ángulo excede de  $45^\circ$ , la parte que queda fuera del mayor como circular

recto que puede inscribirse en el capitel no se considera útil. El diámetro del capitel en su intersección con la losa se representa con la letra c.

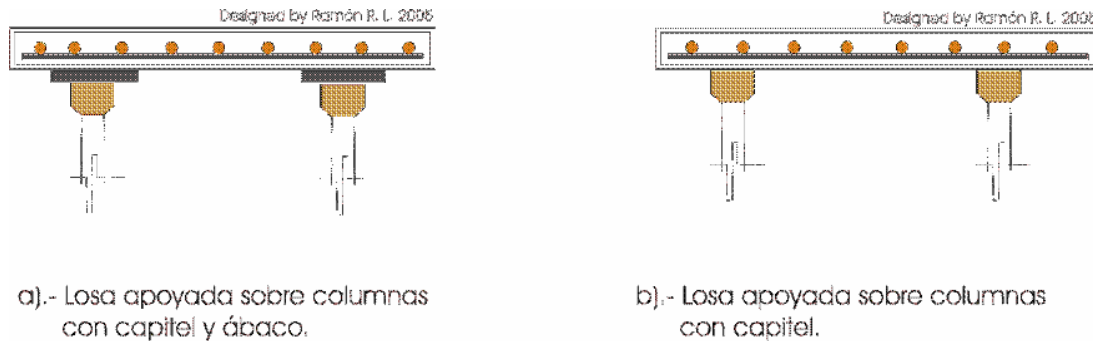


FIGURA 5.6.- Distintos tipos de losas planas.

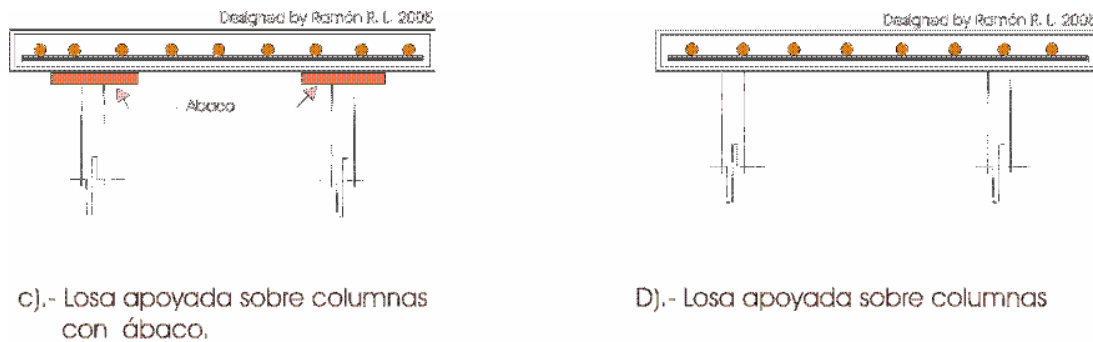


FIGURA 5.6.- Distintos tipos de losas planas.

El ábaco es una zona de losa alrededor de la columna, con mayor peralte. Generalmente es cuadrado o rectangular y se recomienda que sus dimensiones en planta no sean menores que un sexto del claro en la dirección considerada a cada lado del eje de columnas. La proyección del ábaco por debajo de la losa no debe ser menor que  $\frac{1}{4}$  de peralte de la losa como se muestra en la figura 5.7b.

El ábaco tiene como función aumentar el peralte de la losa en la zona en que se presenta el momento flexionante mayor y en donde es crítico el cortante por penetración. Desde estos puntos de vista resulta muy conveniente, pero tiene la desventaja de complicar la cimbra.

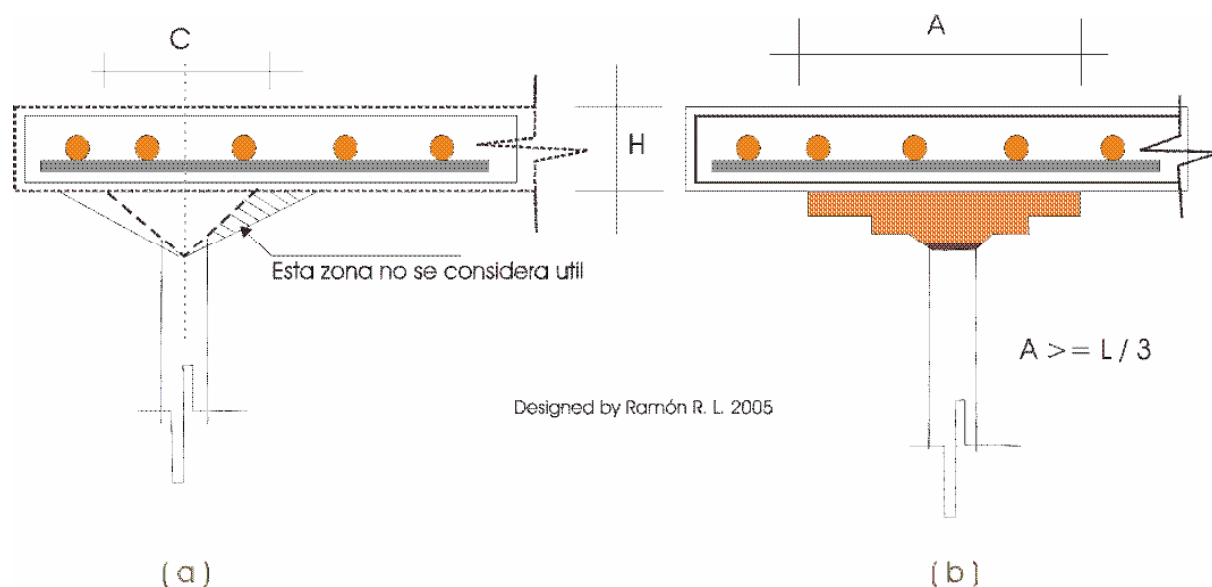


FIGURA 5.7.- Requisitos para capiteles y abacos..

Las placas aligeradas deben llevar ábacos macizos alrededor de las columnas especialmente para poder resistir en forma el cortante por penetración. Es recomendable que estos ábacos tengan una dimensión mínima de un sexto del claro correspondiente, medida desde el eje de columnas, con el objeto de que el cono potencial de falla no atravesase huecos o casetones. Se recomienda también que las losas aligeradas que lleven volados rematen en una viga maciza cuyo ancho sea por lo menos igual al espesor de la losa o a 25 cm como se aprecia en la figura 5.8<sup>a</sup>, y que la longitud del volado no exceda de diez veces dicho espesor como se ilustra en la figura 5.8b.

En la parte superior de la losa, sobre los casetones, debe existir una capa de concreto cuyo espesor se recomienda no sea menor de 4 cm, ni menor de  $1/12$  de la distancia libre entre nervaduras. La distancia libre entre las nervaduras no debe exceder de 75 cm.

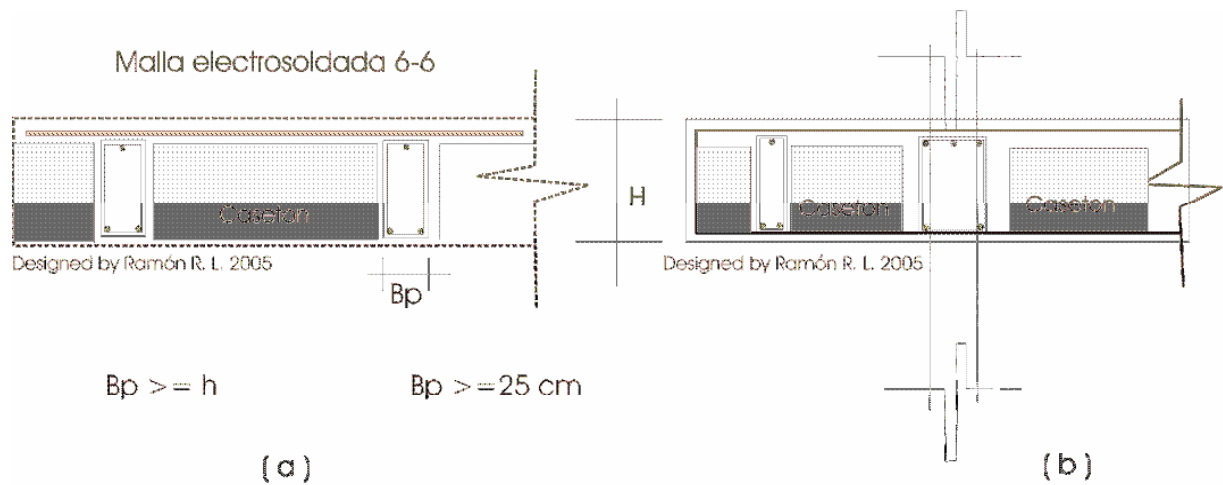


FIGURA 5.8.- Recomendaciones para vigas perimetrales y volados en losas planas aligeradas.

### COMPORTAMIENTO DE LAS LOSAS PLANAS

Las losas planas pueden fallar en cortante por penetración o por flexión. El primer tipo de falla consiste en la penetración de la columna dentro de la losa formándose un cono o pirámide truncada. Con frecuencia el cortante por penetración es el factor crítico en el diseño de losas planas, especialmente cuando no se usan capiteles y ábacos.

Las fallas por flexión ocurren generalmente después de que las losas experimentan grandes deformaciones y de que el acero de refuerzo fluye en varias zonas, ya que son estructuras subreforzadas. Existen dos configuraciones básicas de agrietamiento. En una, las grietas se forman en la cara superior de la losa, a lo largo de los ejes de columnas y en la cara inferior a lo largo de los ejes centrales. En la otra configuración se forman grietas radiales que parten de las columnas en la cara superior de la losa y grietas circunferenciales en la cara inferior.

### **METODO GENERALIZADO PARA EL DISEÑO DE LOSAS.**

Un programa de investigación experimental y analítica de losas y estructuras de concreto realizado en la época de los sesenta ha llegado a la conclusión de que las losas apoyadas sobre vigas y las losas planas se comportan de manera parecida y que pueden diseñarse sobre las mismas bases.

El enfoque derivado de estas investigaciones permite considerar el trabajo en conjunto de las losas, de las vigas en que se apoyan y de las columnas. Las vigas pueden tener una rigidez a flexión cualquiera, y entonces las losas apoyadas perimetralmente son un caso particular en que las vigas tienen rigidez a flexión infinita en comparación con la rigidez de la losa, mientras que las losas planas son el caso particular del otro extremo ya que se considera que están apoyadas sobre vigas de rigidez a flexión nula.

Para fines de diseño de losas apoyadas sobre vigas y de losas planas el reglamento ACI 318-02 presenta **el método directo de diseño y el método del marco equivalente**; pero únicamente presentaremos el primero de ellos.

### **COMPORTAMIENTO DE SISTEMAS DE PISO**

El estudio de sistemas de piso en el programa de investigación consistió en el ensaye en el laboratorio de cinco especímenes como los mostrados en la figura 5.9; un ensaye similar de una placa plana; otros ensayos en especímenes mas pequeños, y numerosos estudios analíticos mediante métodos numéricos.

Tanto en los ensayos como en los estudios analíticos se determinaron los momentos flexionantes en distintas secciones de las losas, vigas y columnas; se estudiaron los mecanismos de falla por flexión, por cortante y por torsión, en el caso de vigas de borde; y , en los ensayos, se analizaron las deflexiones y el agrietamiento para distintos niveles de carga.



Considerando que en la estructura de la figura 5.9 se aísla una viga de ancho unitario  $L_2$  como se muestra en la figura 5.10, la cual con las columnas del eje B forma un marco. La viga de este marco tendrá una carga por unidad de longitud de  $WL_2$ , donde  $W$  es la carga muerta por unidad de área de la losa, y una distribución de momentos como la mostrada cualitativamente en la figura 5.11.

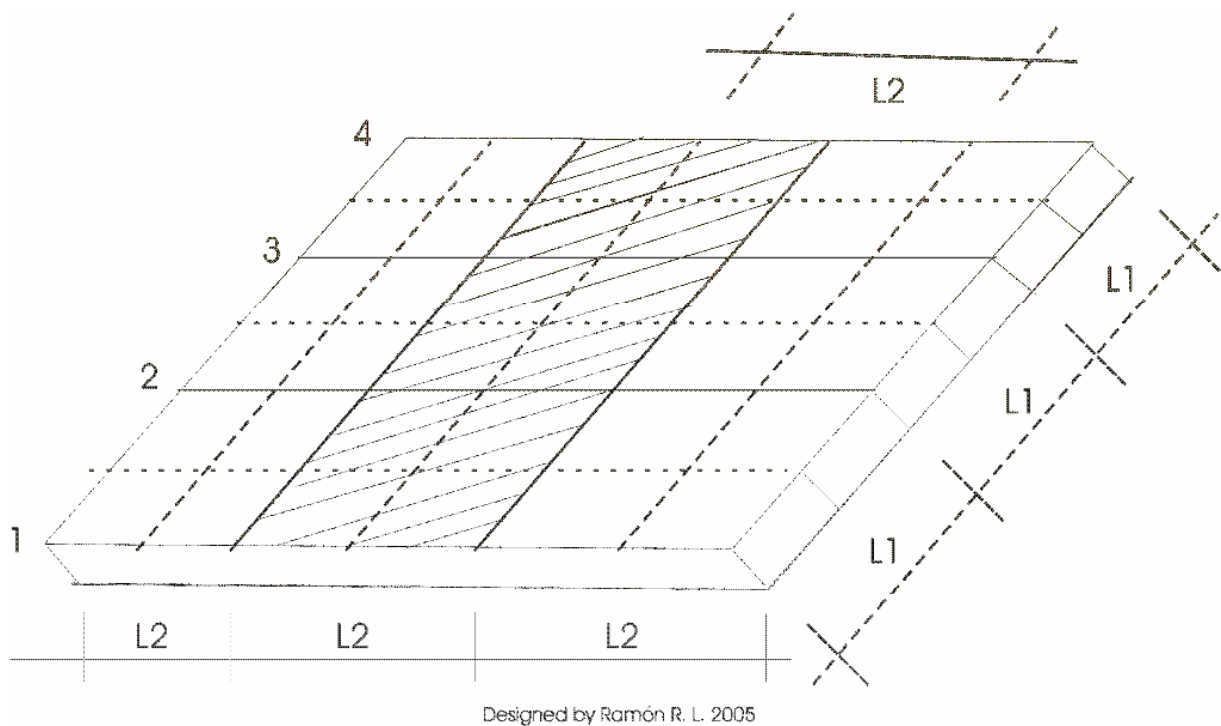


FIGURA 5.10.- Franja de una losa en la cual se determinan los momentos flexionantes.

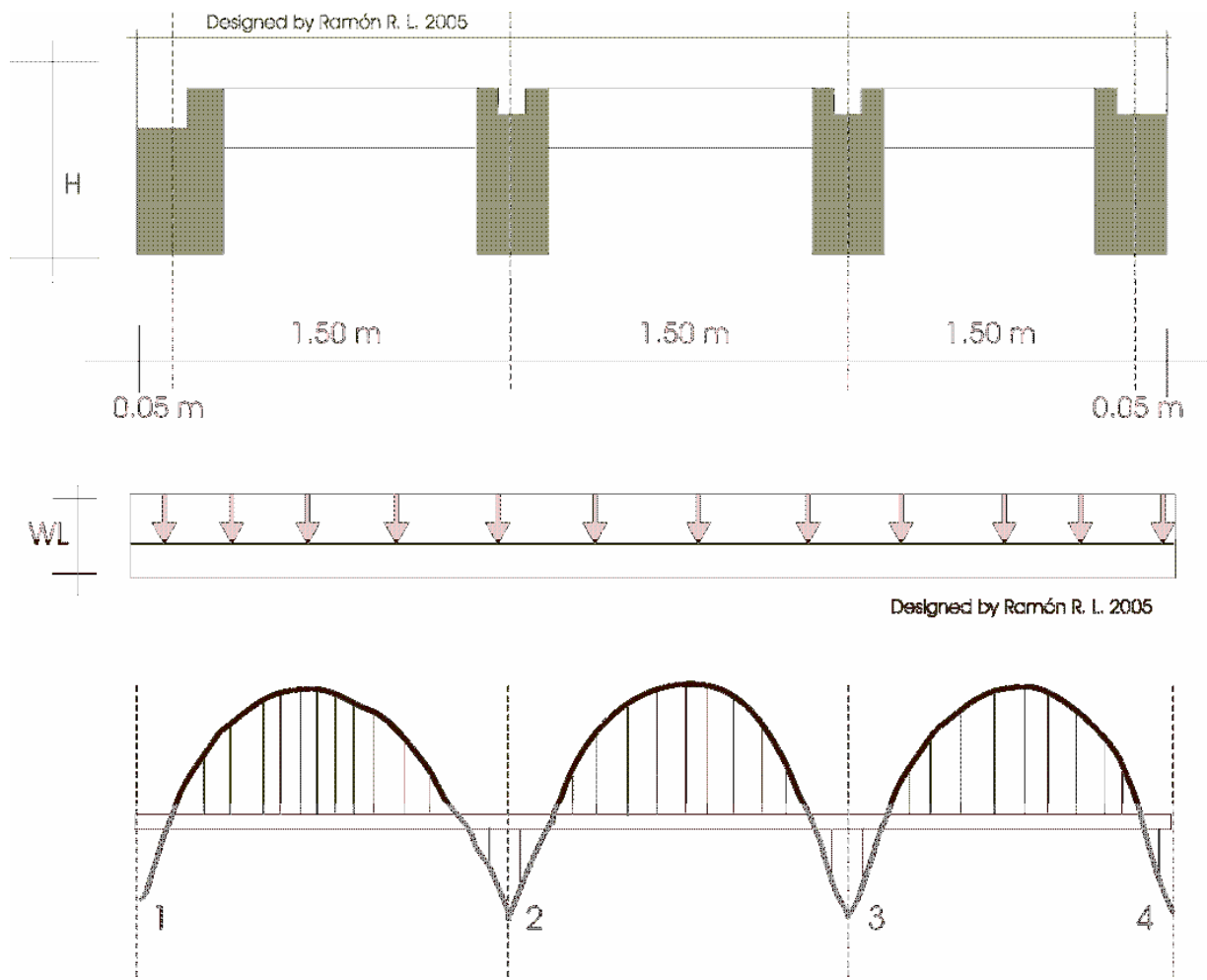


FIGURA 5.11.- Diagrama de momentos en la franja de la losa de la figura 5.10.

Es un principio conocido de estática que el momento positivo en el centro del claro de una viga continua mas el promedio de los momentos negativos en los apoyos es igual al momento en el centro del claro de una viga libremente apoyada. Este momento se conoce como momento estático total.

Por el principio de momento estático total descrito, en cada uno de los claros de la viga se debe cumplir la siguiente ecuación de equilibrio:

$$M_o = \frac{WL_2L_1}{8} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (A)$$

Donde:

$M_o$  = Momento estático total = Momento positivo en el centro del claro, mas el promedio de los momentos negativos en los extremos.

$WL_2$  = Carga por unidad de longitud.

$L_1$  = Longitud del claro considerado.

Por ejemplo, en el claro 2 – 3:

$$M_o = \frac{M_{neg2} + M_{neg3}}{2} + M_{pos} \quad \text{-----} \rightarrow \quad (B)$$

Donde  $M_{neg}$  es momento negativo y  $M_{pos}$  es el momento positivo.

Los momentos flexionantes no son uniformes a lo ancho de la franja considerada en la figura 5.10. A lo largo del eje de columnas, B, los momentos son mayores que a lo largo de los ejes A` y B`. Esto se debe a que el sistema es mas rígido a lo largo del eje B, por la presencia de vigas y por que el efecto de restricción de las columnas es máximo en estos ejes y va disminuyendo hacia los extremos de la franja.

La distribución cuantitativa de momentos a lo largo y ancho de las franjas de losa depende de las características de los elementos que forman la estructura (columnas, vigas y losas) y del tipo de carga aplicada a continuación se describe la influencia de estas variables.

## **INFLUENCIA DE LAS COLUMNAS**

Las columnas influyen sobre la distribución de momento en la losa, por la restricción que ejercen sobre las vigas y la losa, o sea, por el empotramiento parcial que proporcionan a estos elementos estructurales.

Considerando la distribución de momentos a lo largo de la franja A` - B` mostrados en la figura 5.11. Si la rigidez flexionante de las columnas es grande en comparación con la rigidez flexionantes de vigas y losa, entonces la restricción de las columnas en los extremos de la viga continua es grande, lo que causa que los momentos flexionantes en estos extremos sean relativamente grandes.

En cambio si la rigidez flexionante de las columnas es pequeña en comparación con la de vigas y losa, la restricción y los momentos flexionantes en los extremos también son pequeños. Teóricamente, si la rigidez flexionante de las columnas es nula, los momentos en los extremos de la viga continua son nulos.

La rigidez flexionante de las columnas influye también sobre el valor de los momentos flexionantes en otras secciones de la viga continua de la fig. 5.11. Los momentos positivos en los claros extremos (1-2 y 3-4)

Son tanto mayores cuanto menores los momentos en los extremos de la viga continua. Por lo tanto, son mayores mientras menor sea la rigidez flexionantes de las columnas. Al disminuir uno de los momentos negativos necesariamente debe aumentar el momento positivo, ya que el momento estático total permanece constante.

La influencia de la rigidez flexionante de las columnas sobre los momentos negativos y positivos en claros interiores, como en el claro 2-3 de la figura 5.11, es menor que sobre los momentos de los claros extremos, siempre que la carga de la losa este uniformemente distribuida en todos los claros. Cuando la carga no esta

uniformemente distribuida en todos los claros, la influencia de la rigidez flexionante de las columnas es también importante sobre los momentos en claros interiores.

### ***EFFECTO DE LA RIGIDEZ FLEXIONANTE DE LAS VIGAS***

La rigidez flexionante de las vigas, comparada con la rigidez flexionante de la losa, influyen en la distribución de momentos a lo ancho de la franja. Si las vigas son de peralte grande en comparación con el peralte de la losa, un gran porcentaje del momento total en una sección transversal dada es resistido por las vigas y un porcentaje pequeño por la losa.

Dentro de estos dos casos, el peralte de la viga puede ser de cualquier valor y el momento total se distribuye entre la viga y la losa, de acuerdo con sus rigideces flexionantes.

### ***EFFECTO DE LA RIGIDEZ TORSIONANTE DE LAS VIGAS***

La rigidez torsionante de las vigas proporciona un empotramiento parcial a las losas. Su efecto es de especial importancia en los bordes del sistema de piso y en tableros interiores, cuando un tablero se encuentra cargado y el tablero adyacente descargado. En el primer caso, cuando mayor sea la rigidez torsionante, mayores serán los momentos negativos. El segundo caso se analiza al estudiar el efecto del tipo de carga que se verá enseguida.

Para que en un sistema de piso exista el efecto de la rigidez torsionante de las vigas, es necesario que estas sean monolíticas con la losa y con las columnas. Si no se cumple la primera condición, las vigas no pueden restringir o empotrar a la losa, y no pueden desarrollarse momentos flexionantes en la losa en los bordes del sistema de piso. Si la viga no es monolítica con las columnas, no pueden desarrollarse en ella momentos torsionantes, pues giraría libremente en sus extremos.

### ***METODO DE DISEÑO DIRECTO.***

El metodo de diseño directo consiste en un conjunto de reglas para el dimensionamiento de secciones de losa y de vigas para resistir los esfuerzos de flexion. Las reglas se han desarrollado para satisfacer simultáneamente los requisitos de seguridad y la mayoría de los requisitos de servicio.

El metodo de diseño directo incluye tres pasos fundamentales, que se muestran a continuación.

1. Determinación del momento estático factorizado total para el diseño flexion.
2. Distribución de la sección estática factorizada total para el diseño de las secciones de momentos negativos y positivos.
3. Distribución de los momentos factorizados negativos y positivos en las franjas de columna y centrales y en las vigas, si las hay.

### ***LIMITACIONES***

El metodo de diseño directo se desarrollo tomado en cuenta los procedimientos teóricos para determinación de los momentos en losas con y sin vigas, los requisitos de los procedimientos simples de diseño y construcción y los precedentes sentados por el comportamiento de los sistemas de losas. En consecuencia, los sistemas de losa que se diseñan con el metodo de diseño directo deben cumplir con las siguientes limitaciones:

1. Debe existir un mínimo de tres claros continuos en cada dirección.
2. Los tableros deben ser rectangulares, con una relación de claro mayor a claro menor, centro a centro de los apoyos dentro de un tablero, no mayor de 2.

3. Las longitudes sucesivas de los claros de centro a centro de los apoyos en cada dirección no deben diferir del claro mayor en más de un tercio.
4. Las columnas pueden estar desalineadas un máximo del 10% del claro (en la dirección del desalineamiento) a partir de cualquier eje que una los centros de columnas sucesivas.
5. Todas las cargas deben ser únicamente gravitacionales y estar distribuidas de manera uniforme en todo el tablero. La carga viva no debe exceder de 3 veces la carga muerta.
6. Para un tablero con vigas entre los apoyos en todos los lados, la rigidez relativa de las vigas en dos direcciones perpendiculares, no debe ser menor que 0.2 ni mayor que 5.0

$$\frac{\alpha_1 L_2^2}{\alpha_2 L_1^2} \text{ ----- } \rightarrow \quad (C)$$

En esta ecuación,  $L_1$  es el claro en la dirección en que se determinan los momentos, medido centro a centro de los apoyos,  $L_2$  es el claro en dirección perpendicular, también medido centro a centro de los apoyos, y los términos  $\alpha$  son iguales a la relación entre la rigidez a flexión de la viga y la rigidez a flexión de la franja de losa comprendida entre los ejes centrales de los tableros situados a cada lado de la viga;  $\alpha_1$  es el valor de  $\alpha$  en dirección del claro  $L_1$  y  $\alpha_2$  en dirección del claro  $L_2$ .

Las cuatro primeras limitaciones tienen por objetivos garantizar que la estructura sea suficientemente rectangular en su geometría, principalmente para que no se desarrollen desplazamientos laterales de la estructura por condiciones de asimetría, que modificarían el momento estático total. No son limitaciones muy

severas, ya que en la mayoría de los casos prácticos se cumplen estas condiciones.

La limitación del inciso e) si impide la aplicación del metodo a un buen numero de estructuras encontradas en la práctica, ya que es común tener fuerzas horizontales producidas por viento o por sismo. Esto limita el uso de este metodo a estructuras bajas situadas en zonas en que los efectos de fuerzas horizontales sean despreciables, o bien a estructuras que tengan muro de cortante o contravientos para resistir las fuerzas horizontales.

Con la limitación f), se trata de evitar la aplicación del metodo a estructuras que tenga vigas de muy distinta rigidez en las dos direcciones. Desde luego que esta limitación no se aplica en el caso de losas planas e inclusive no evita que el método pueda usarse en losas planas con vigas de borde, caso muy frecuente en la práctica.

### ***DETERMINACION DEL MOMENTO ESTATICO TOTAL***

Para la determinación del momento estático total, se consideran franjas de losa como las mostradas en la figura 5.12. Si se trata de una franja interior, como la del eje 2 de esta figura, se considera que esta limitada por los ejes centrales de los tableros adyacentes al eje, por lo que el ancho de la franja es el promedio de los claros transversales de dicho tableros.

De este modo, para la franja del eje 2 se tiene un ancho de:

$$L_2 = \frac{L_b + L_c}{2}$$

Si es una franja de borde, como la del eje 1, esta limitada de un lado por el borde, y del otro por el eje 1, esta limitada de un lado por el borde, y del otro por el eje central del tablero. En el caso de esta franja, su ancho será:



$$L_2 = L_a + \frac{L_b}{2}$$

El momento estático total puede calcularse con una ecuación igual a la ecuación “A”. En esta ecuación y en la figura 5.11 se supuso que los apoyos son puntuales, lo que no sucede en estructuras reales. Para tomar en cuenta esta diferencia, en el reglamento ACI 318-89 se considera que el claro,  $L_n$ , debe medirse entre las caras interiores de las columnas, capiteles o muros en que se apoye la losa, como se muestra en la figura 5.12, pero que en ningún caso debe ser menor de  $0.65L_1$ . Los apoyos circulares o en forma de polígono regular deben tratarse como apoyos cuadrados que tengan la misma área.

Con estas consideraciones sobre el ancho  $L_2$  y en el claro  $L_1$  de las franjas de losa, el momento estático total se calcula con la ecuación:

$$M_o = \frac{W_u.L_2.L_n^2}{8}$$

Para cada claro y para todas las franjas en las dos direcciones.

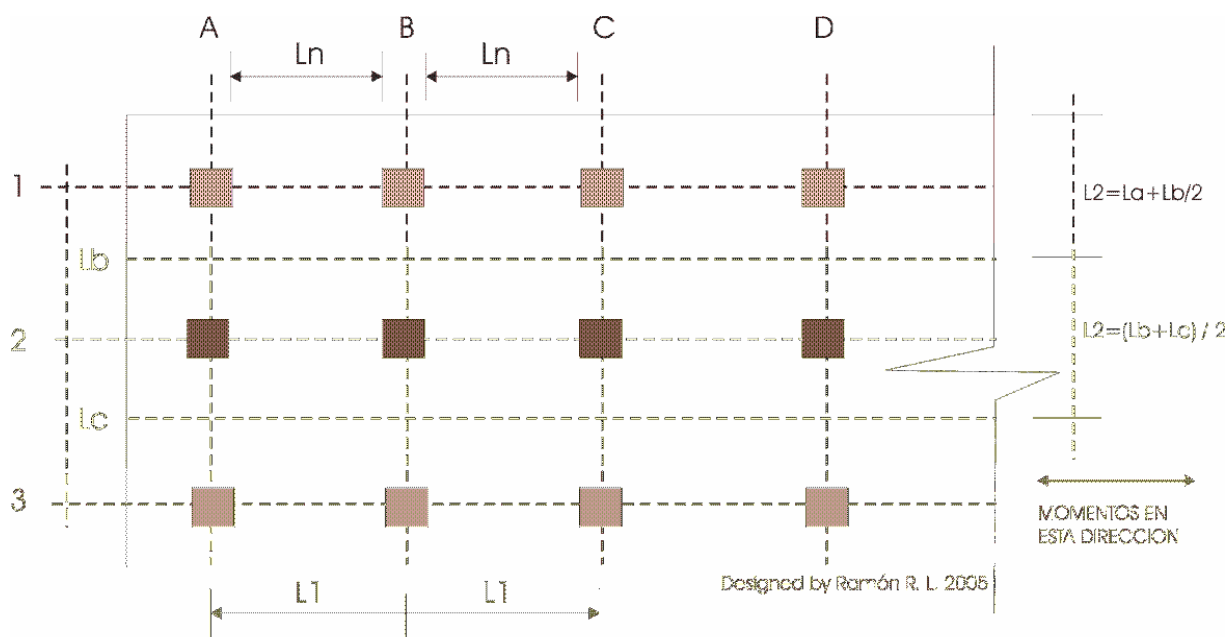


FIGURA 5.12.- Valores de  $L_2$  y  $L_n$  en la determinación del momento estático total.

### DISTRIBUCION DEL MOMENTO ESTATICO TOTAL EN MOMENTOS NEGATIVOS Y POSITIVOS (MOMENTOS LONGITUDINALES).

En un claro interior, el momento estático total  $M_o$  debe distribuirse como se indica a continuación:

Momento negativo factorizado. . . . . 0.65

Momento positivo factorizado. . . . . 0.35

En un claro extremo, el momento estático factorizado total  $M_o$  debe distribuirse como se indica a continuación:

	1	2	3	4	5
	Borde exterior no restringido	Losa con vigas entre todos los apoyos	Sin viga de borde	Con viga de borde	Borde exterior totalmente restringido
Momento					

negativo factorizado interior	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65
Momento negativo factorizado	0.63	0.57	0.52	0.50	0.35
Momento negativo factorizado exterior	0.00	0.16	0.26	0.30	0.65

La columna 1 de la tabla anterior se aplica si la losa esta libremente apoyada en un muro de mampostería o en un muro de concreto no construido monolíticamente con la losa. La columna 2, a sistemas con vigas entre los apoyos, como en el caso de losas apoyadas perimetralmente o en vigas de poca rigidez a flexion. Las columnas 3 y 4 son para el caso de losas planas, que tengan viga de borde o que no la tengan, respectivamente. Y la columna 5, para el caso de losas construidas monolíticamente con muros que tengan una rigidez a flexion tan grande en comparación con la de la losa, que ocurra muy poca rotación entre la losa y el muro.

Los coeficientes de la tabla son tales que el promedio de los que corresponden a momentos negativos sumados al que corresponde a momento positivo es siempre igual a uno, para que se conserve el momento estático total.

Los momentos calculados con la tabla son lo que actúan en los paños de columna.

Cuando los momentos en las dos caras de una columna no son iguales, como suele suceder en la primera columna interior, se debe diseñar con el momento mayor, o bien, distribuir el momento de desequilibrio entre los miembros que concurren al nudo de acuerdo con su rigidez.

Cuando existen vigas de borde perpendiculares a la dirección en que se hace el análisis, los momentos negativos exteriores en la losa, se transfieren como momentos torsionantes a dichas vigas, lo cual debe ser considerado en su diseño. Cuando no existen dichas vigas, se debe considerar que una franja de losa que actúa como viga de borde resiste el momento torsionante correspondiente. Las características de esta viga ficticia de borde se indican mas adelante.

En las columnas de borde hay una fuerte transferencia de momento flexionante entre losa y columna. De acuerdo con el reglamento ACI 318-04, el cual especifica que dicho momento se transfiera en este caso, debe ser igual al momento resistente de la franja de columnas, como se muestra en la figura 5.13.

Una fracción de este momento dada por la ecuación:

$$\delta_f = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \left( \sqrt{\frac{c_1 + d}{c_2 + d}} \right)}$$

debe transferirse por flexion entre losa y la columna, considerando para estos efectos un ancho de losa igual al ancho de la columna en dirección perpendicular a la del momento,  $c_2$ , mas una vez y media del espesor de la losa,  $1.5 h$ , a cada lado del paño de columna. La fracción restante del momento debe transferirse por excentricidad de la fuerza cortante.

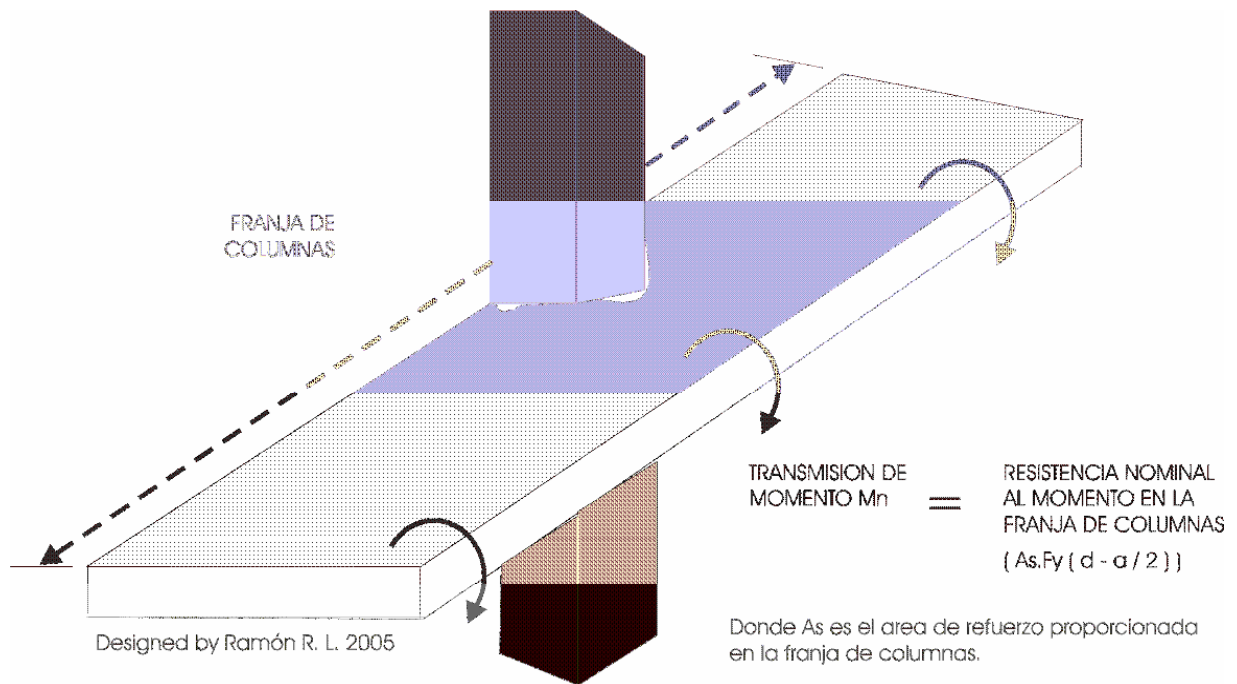


FIGURA 5.13.- Transmisión de momento entre la losa y la columna.

### DISTRIBUCION DE LOS MOMENTOS A LO ANCHO DE LA FRANJA

Los momentos hasta ahora calculados son lo que actúan en todo el ancho de la franja  $L_1$  de la figura 5.12. Es necesario distribuirlos ya que su distribución no es uniforme. Para ello, las franjas de losa se dividen en una franja de columnas y una franja central, como se muestra en la figura 5.14.

El ancho de la franja de columnas se limita al menor de los valores de  $L_1/4$  o  $L_2/4$  a cada lado del eje de columnas, para que en el caso de tableros alargados en dirección de  $L_2$ , la franja de columnas no sea demasiado ancha. Las dos medias franjas centrales abarcan desde el borde de cada franja de columnas hasta el eje central del tablero correspondiente. La distribución se hace de tal manera que el momento total de la franja completa se divide primero en la franja de columnas y la franja central, completa se divide el momento de la franja de columnas entre la losa y la viga. A continuación se presentan los porcentajes de distribución.

1. Franja de columnas. Los porcentajes del momento en la franja completa que corresponden a la franja de columnas se presenta en la tabla 5.3.
2. Franjas centrales. La diferencia entre 100 por ciento y el porcentaje asignado a las franjas de columnas.
3. Distribución entre viga y losa en la franja de columnas. A las vigas se les asigna el 85% del momento en la franja de columnas si  $(\alpha_1 L_2 / L_1) \geq 1.0$  . Si este parámetro está comprendido entre 1.0 y cero, el porcentaje de momento asignado a las vigas se calcula por interpolación lineal entre 85% y 0%.
4. Las vigas deben tener las dimensiones adecuadas para resistir los momentos provocados por cargas concentradas o lineales aplicadas directamente en las vigas, incluyendo el peso del alma que se proyecta por encima o por debajo de la losa, además de los momentos calculados para cargas uniformes.
5. Modificaciones en los momentos. Los momentos factorizados positivos y negativos pueden modificarse en un 10% siempre que se conserve el valor del momento estático total.

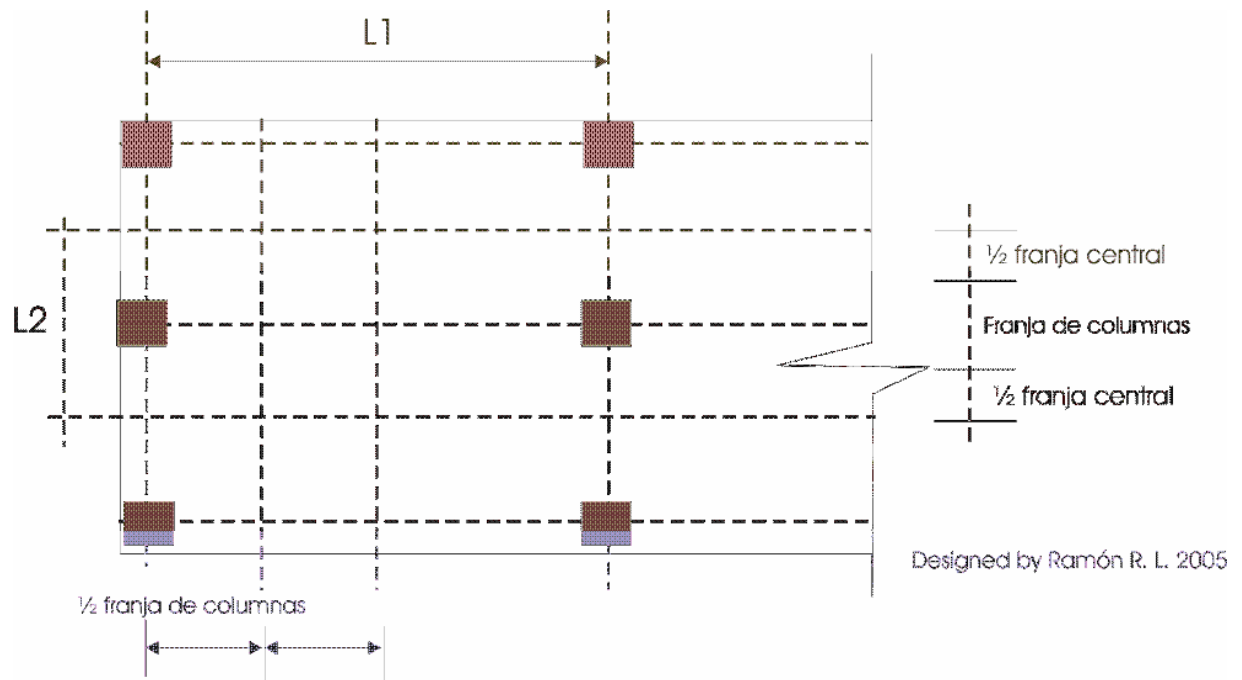


FIGURA 5.14.- Franjas de columna y central para la distribución de los momentos a lo ancho de la franja.

Tabla 5.3.- Porcentaje de los momentos totales que se asignan a las franjas de columnas.

Relación de rigideces			Valores de $L_2/L_1$		
			0.5	1.0	2.0
Momentos negativos en apoyos interiores	$\left(\alpha_1.L_2/L_1\right) = 0$		75	75	75
	$\left(\alpha_1.L_2/L_1\right) \geq 1$		90	75	45
Momentos negativos en apoyos exteriores	$\left(\alpha_1.L_2/L_1\right) = 0$	$\beta_i = 0$ $\beta_i \geq 2.5$	100 75	100 75	100 75
	$\left(\alpha_1.L_2/L_1\right) \geq 1$	$\beta_i = 0$ $\beta_i \geq 2.5$	100 90	100 75	100 45
Momentos positivos	$\left(\alpha_1.L_2/L_1\right) = 0$		60 90	60 75	60 45
	$\left(\alpha_1.L_2/L_1\right) \geq 1$				

Puede usarse interpolación lineal entre los valores mostrados.



## DETERMINACION DE LA FUERZA CORTANTE EN VIGAS Y LOSAS

El área tributaria para calcular el cortante en una viga interior aparece sombreada en la figura 5.15, siempre que el parámetro  $\left(\alpha_1 L_2 / L_1\right) \geq 1$ . Es decir, cuando las vigas son suficientemente rígidas, se considera que la carga distribuida que actúa en la losa se transmite a las vigas de la manera indicada, y a partir de la carga que actúa sobre las vigas, puede calcularse la fuerza cortante en las mismas para fines de diseño o revisión.

Si las vigas son flexibles  $\left(\alpha_1 L_2 / L_1\right) < 1.0$ , la fuerza cortante se obtiene por interpolación entre el caso anterior y el caso en que las vigas no soportan ninguna carga que corresponde a  $\alpha_1 = 0$ .

1. Si las vigas son rígidas  $\left(\alpha_1 L_2 / L_1\right) \geq 1$ , la losa con un claro  $L$  se divide en franjas de ancho unitario y se revisa cada franja como si fuese una viga. La fuerza cortante en el extremo de una franja será  $W_u L / 2$ .
2. En el caso de losas planas, debe revisarse la losa por penetración.
3. Si las vigas son flexibles la revisión debe hacerse teniendo en cuenta que las vigas transmiten a las columnas únicamente una parte de la carga total, y que la diferencia de carga produce esfuerzos de cortante por penetración alrededor de la columna como si se tratase de losa plana.

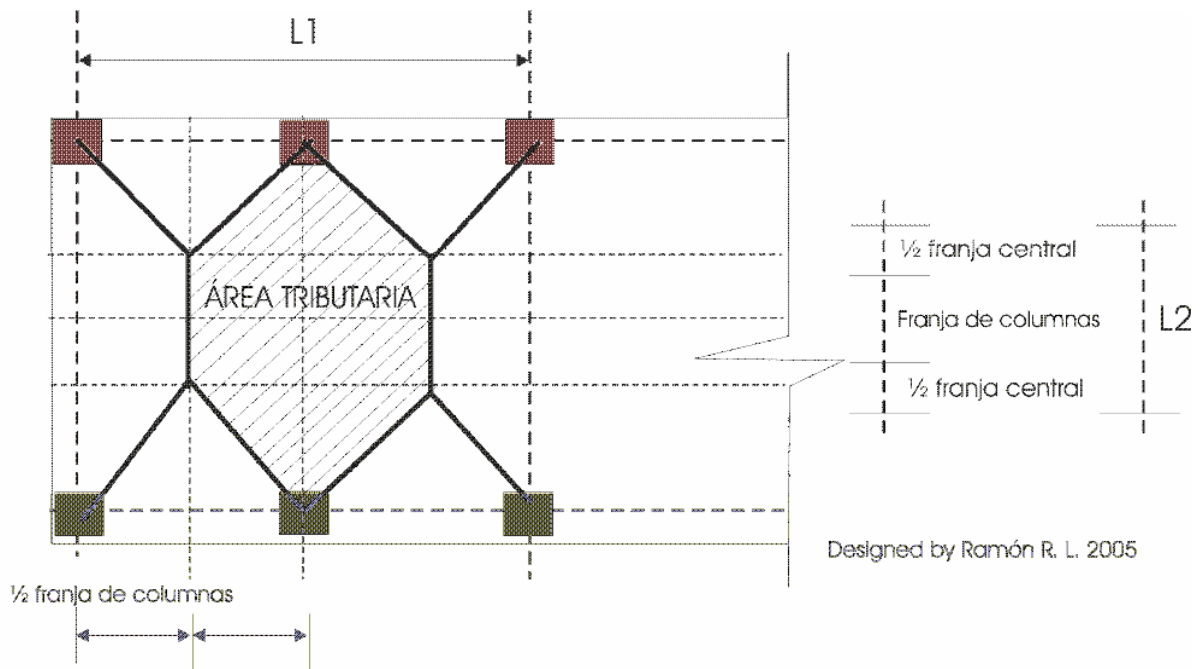


FIGURA 5.15.- ÁREA TRIBUTARIA PARA CORTANTE EN VIGAS INTERIORES.

## DETERMINACION DE LOS MOMENTOS EN LAS COLUMNAS

Las columnas y los muros contruidos monolíticamente con un sistema de losas deben resistir los momentos producidos por las cargas afectadas por el factor de carga que actúa sobre el sistema de losas.

En un apoyo interior, los elementos de apoyo arriba y debajo de la losa deben resistir el momento de desequilibrio especificado por la siguiente ecuación en proporción directa a sus rigideces, a menos que se realice un análisis general.

$$M = 0.07((Wd + 0.5W_1).L_2Ln^2 - Wd'(Ln')^2)$$

Donde  $Wd$  y  $W_1$  son las cargas muerta y viva respectivamente, y  $Wd'$  y  $L_2'$  y  $Ln'$  se refieren al claro mas corto de los dos claros adyacentes.

Esta ecuación se refiere a dos claros adyacentes, uno de ellos mayor que el otro, con la carga muerta completa más  $\frac{1}{2}$  de la carga viva aplicada en el claro mayor, y únicamente carga muerta en el claro menor. El termino 0.07 es una aproximación del coeficiente  $L/12$ , que corresponde a momentos de empotramiento perfecto, reducido para tomar en cuenta que el empotramiento es imperfecto.

## EFFECTOS DE CARGAS DESFAVORABLES

Anteriormente se menciona que existen combinaciones de carga en los tableros de una estructura que producen momentos flexionantes mayores que los que se tendría con todos los tableros cargados, y que este efecto es mayor mientras mayor es la rigidez flexionante de las columnas. Para tomar en cuenta este efecto, el reglamento ACI 318-02 especifica que cuando la relación  $\beta_a$  de carga muerta a carga viva sea menor que 2, debe satisfacerse una de las siguientes condiciones:

1. La suma de las rigideces a la flexion de las columnas arriba y debajo de la losa será tal, que  $\alpha_c$  no será menor que el valor  $\alpha_{\min}$  especificado en la tabla 5.4. El factor  $\alpha_c$  es la relación entre la suma de las rigideces de las columnas situadas arriba y debajo de la losa,  $\sum k_c$ , y la suma de las rigideces de las losas y de las vigas concurren en el nudo en consideración, tomadas en la dirección en que se determinan los momentos,  $\sum (k_s + k_b)$ .

Por lo tanto, 
$$\alpha = \frac{\sum k_c}{\sum (K_s + k_b)} \dots \dots \dots \rightarrow (A)$$

Posteriormente se explicará con detalle el calculo de  $\alpha_c$ .

2. Si  $\alpha_c$  para las columnas arriba y debajo de la losa es menor que  $\alpha_{\min}$  especificado en la tabla 5.4, los momentos positivos factorizados en los

tableros soportados por dichas columnas deben multiplicarse por el siguiente factor:

$$\delta_s = 1 + \frac{2 - \beta_a}{4 + \beta_a} \left( 1 - \frac{\alpha_c}{\alpha_{\min}} \right) \dots \dots \dots \rightarrow \quad (B)$$

La relación  $\beta_a$ , entre carga muerta y carga viva, debe calcularse antes de multiplicar las cargas en condiciones de servicio por los factores de carga.

Tabla 5.4.- Valores de  $\alpha_{\min}$ .

$\beta_a$	Relación de claros $L_2/L_1$	RIGIDEZ RELATIVA DE LA VIGA $\alpha$				
		0	0.5	1.0	2.0	4.0
2.0	0.5 – 2.0	0	0	0	0	0
1.0	0.5	0.6	0	0	0	0
	0.8	0.7	0	0	0	0
	1.0	0.7	0.2	0	0	0
	1.25	0.8	0.4	0	0	0
	2.0	1.2	0.5	0.2	0	0
0.5	0.5	1.3	0.3	0	0	0
	0.8	1.5	0.5	0.2	0	0
	1.0	1.6	0.6	0.2	0	0
	1.25	1.9	1.0	0.5	0	0
	2.0	4.9	1.6	0.8	0.3	0

0.33	0.5	1.8	0.5	0.1	0	0
	0.8	2.0	0.9	0.3	0	0
	1.0	2.3	0.9	0.4	0	0
	1.25	2.8	1.5	0.8	0.2	0
	2.0	13.0	2.6	1.2	0.5	0.3

Con la condición a), se trata de lograr que las columnas sean lo suficientemente rígidas para que los momentos flexionantes no se incrementen en mas de 33% por efecto de condiciones desfavorables de cargas. Si no se cumple esta condición, es necesario incrementar los momentos positivos que son los más afectados por condiciones desfavorables de carga.

El incremento de momentos positivos se obtiene al aplicar la ecuación B. Se observa que el valor mínimo que puede tener  $\beta_1$  es de 1/3 por la limitación e) del metodo directo, que señala que este solo puede usarse si la carga viva no excede de tres veces la carga muerta. Si la rigidez de las columnas es cero, el valor de  $\delta_s$  resulta de 1.38, que es el valor máximo posible. Este valor no puede ser real, ya que las columnas no pueden tener rigidez nula. Cuando no se incrementan los momentos positivos cuando  $\beta_a = 2$ , o cuando  $\alpha_c = \alpha_{\min}$ , el valor de  $\beta_s = 1$ .

## CALCULO DE PARAMETROS RELACIONADOS CON LAS RIGIDECES DE LOS ELEMENTOS

a).- Calculo de  $\alpha$

Este parámetro se define como la relación entre la rigidez a flexion de una viga situada en el eje de las columnas y la rigidez a flexion de la flanja de losa limitada por los ejes centrales de los tableros adyacentes. Se expresa con la ecuación:

$$\alpha = \frac{E_{cb} \cdot I_b}{E_{cs} \cdot I_s}$$

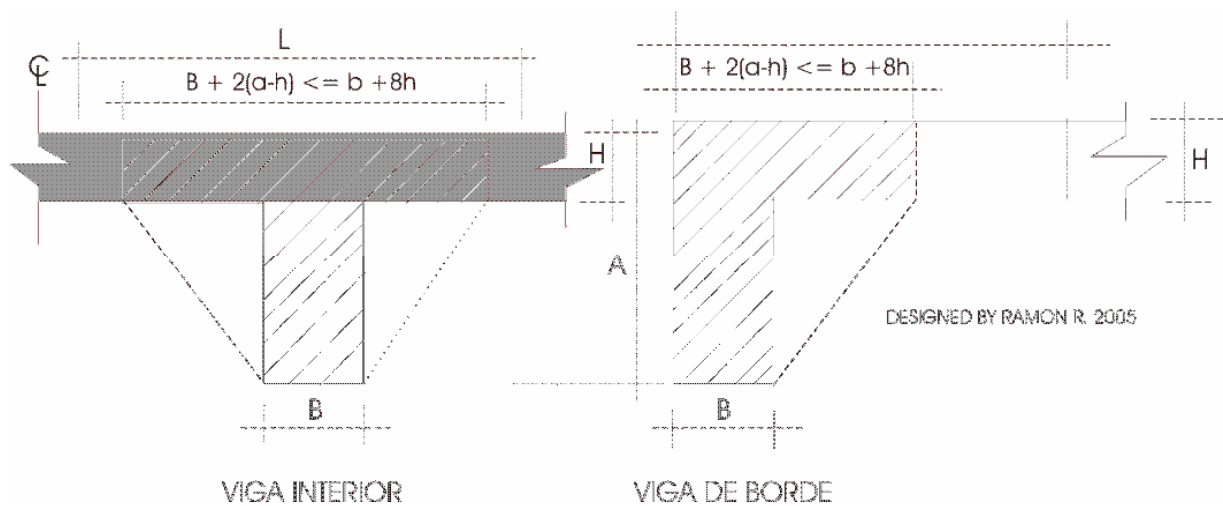
Donde:

$E_{cb}$  y  $E_{cs}$  = Módulos de elasticidad del concreto de la viga y de la losa, respectivamente.

$I_b$  = Momento de inercia de la viga.

$I_s$  = Momento de inercia de la franja de la losa.

Cuando la construcción es monolítica, la viga incluye un tramo de losa a cada lado de las caras laterales de la viga, igual a su proyección por abajo o por arriba de la losa, la que sea mayor, pero no mayor que cuatro veces el espesor de la losa. Por lo tanto, el momento de inercia  $I_b$  es el de la sección L o el de la sección I mostradas en la figura 5.16, según se trate de vigas de borde o vigas interiores, respectivamente.



$$I_b = \frac{(b.a^3).K}{12}$$

$$I_s = \frac{L.h^3}{12}$$

$$\alpha = \frac{(E_{cb} \cdot I_b)}{E_{cs} \cdot I_s} = \left( \frac{E_{cb}}{E_{cs}} \right) \left( \frac{b}{L} \right) \left( \frac{d^3}{h} \right) \cdot f$$

En el apéndice D.4 se obtendrá el valor del factor “K” para las vigas.

Figura 5.6.- Ayuda de diseño para el calculo de  $\alpha$

b).- Calculo de  $\beta_t$

Este parámetro se define como la relación entre la rigidez a torsión de una viga de borde y la rigidez a flexion de una franja de losa cuyo ancho es igual al claro de la viga de borde medido centro a centro de los apoyos. Se expresa por medio de la ecuación.

$$\beta_t = \frac{E_{cb} \cdot C}{2 \cdot E_{cs} \cdot I_s}$$

Donde:

$E_{cb}$  y  $E_{cs}$  = Módulos de elasticidad del concreto de la viga y de la losa, respectivamente.

$I_s$  = Momento de inercia de la franja de la losa mencionada.

C = Constante que define la rigidez a torsión de la viga de borde.

El cálculo de la constante “C” requiere las siguientes consideraciones:

- 1.- Cuando existe una viga de borde, se considera que un ancho del patín igual a la proyección de la viga por debajo o por encima de la losa, pero sin exceder de 4h, forma parte integral de la viga.

2.- Cuando no exista viga de borde, como en el caso de losas planas, la viga queda definida por una franja de losa cuyo ancho es igual al de la columna o capitel, en dirección perpendicular a la viga como se muestra en la figura 5.17c.

Una vez definida la viga, se divide en rectángulos y en cada uno de ellos se denomina “x” al lado menor y “y” al lado mayor. Finalmente, se calcula C, con la ecuación.

$$C = \sum \left( 1 - 0.63 \cdot \frac{x}{y} \right) \left( \frac{x^3 \cdot y}{3} \right)$$

Donde la sumatoria se refiere a todos los rectángulos en que se divide la viga. En las vigas de borde se puede hacer la división en rectángulos de distintas maneras, como se ilustra en las figuras 5.17<sup>a</sup> y 5.17b.

Además de la ecuación, el valor de C puede calcularse con ayuda de la tabla 5.5.

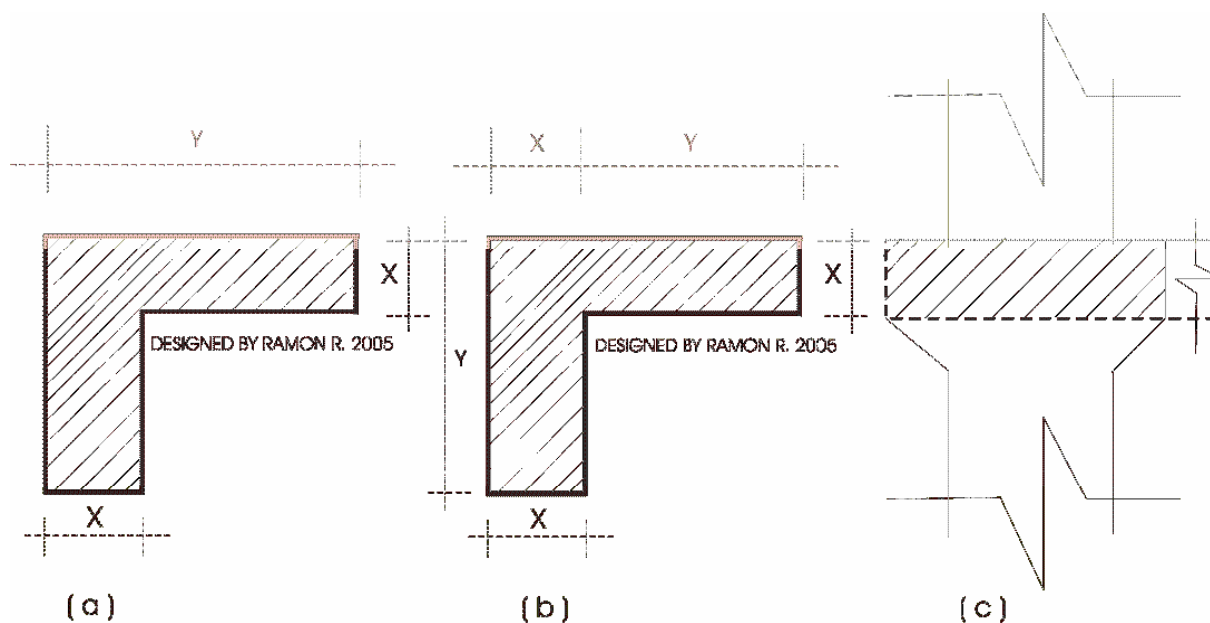


Figura 5.17 .- Secciones transversales para calcular C.



c).- Cálculo de  $\alpha_c$

El parámetro  $\alpha_c$  se define como la relación entre la suma de las rigideces de las columnas situadas encima y debajo de la losa, y la suma de las rigideces de las vigas y de las losas que concurren a un nudo. Estas últimas rigideces se calculan en la dirección en que se analizan los momentos. El valor de  $\alpha_c$  se calcula con la ecuación siguiente:

$$\alpha_c = \frac{\sum K_c}{\sum (K_s + K_b)}$$

Donde:

$K_c$  = Rigidez de cada columna.

$K_s$  = Rigidez de la franja de losa de ancho  $L_2$  y peralte  $h$ .

$K_b$  = Rigidez de la viga definida en el inciso a).

Los valores de las rigideces  $K$  se calculan con la ecuación:

$$K = \frac{V \cdot E \cdot I}{L}$$

Donde:

$V$  = Factor que depende de las condiciones de apoyo en los extremos del miembro.

$L$  = Longitud del miembro.

**PERALTES MINIMOS PARA LOSAS EN DOS DIRECCIONES**

Tabla 9.5 (b) Deflexiones máximas permisibles calculadas (ACI 318-04 pág. 39).

Tipo de elemento	Deflexión considerada	Limite de deflexión
Azoteas planas que no soportan ni estén ligadas a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por grandes deflexiones	Deflexión instantánea debida a la carga viva, $L$	$L/180$
Entrepisos que no soporten ni estén ligados a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por grandes deflexiones.	Deflexión instantánea debido a la carga viva, $L$	$L/360$
Sistema de entrepiso o azotea que soporte o este ligado a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por grandes deflexiones.	La parte de la deflexión total que ocurre después de la unión de los elementos no estructurales (la suma de la deflexión a largo plazo debida a todas las cargas sostenidas, y la deflexión inmediata debida a cualquier carga viva adicional).	$L/480$
Sistema de entrepiso o azotea que soporte o este ligado a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por grandes deflexiones.		$L/240$

El peralte mínimo de losas con o sin vigas que se extienden entre los apoyos en todas direcciones y que tengan una relación de claro largo a claro corto que no exceda a 2 debe ser:

$$h = \frac{Ln\left(0.8 + \frac{F_y}{14000}\right)}{36 + 5\beta\left(\alpha_m - 0.12\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right)} \dots\dots\dots \rightarrow (1)$$

Pero no menor que

$$h = \frac{Ln\left(0.8 + \frac{F_y}{14000}\right)}{36 + 9\beta} \dots\dots\dots \rightarrow (2)$$

Y no se requiere ser mayor que

$$h = \frac{Ln\left(0.8 + \frac{F_y}{14000}\right)}{36} \dots\dots\dots \rightarrow (3)$$

El reglamento ACI 318-04 especifica que en ningún caso los peraltes deben ser mayores que:

a).- Para  $\alpha_m < 2.0$  ..... 13 cm.

b).- Para  $\alpha_m \geq 2.0$  ..... 9 cm

En losas sin vigas que tengan ábacos que se extiendan en cada sentido a partir del eje del apoyo a una distancia no menor de 1/6 de la longitud del claro medida centro a centro de los apoyos en esa dirección, y que tengan una proyección hacia debajo de la losa de por lo menos 1/4 del peralte de la losa, el peralte requerido por las ecuaciones 1,2 y 3 respectivamente, se podrá reducir en un 10%.

En bordes discontinuos debe disponerse una viga de borde que tenga una rigidez  $\alpha$  no menor de 0.80, o bien aumentarse el peralte mínimo requerido por las ecuaciones 1, 2 o 3, por lo menos un 10% en el tablero que tenga un borde discontinuo.

Además de las ecuaciones 1,2 y 3, el peralte mínimo de las losas sin vigas interiores que se extienden entre los apoyos puede calcularse por medio de la tabla 5.6, pero no debe ser menor que los siguientes valores.

A).- Losas sin ábacos . . . . . 13 cm.

B).- Losas con ábacos . . . . . 10 cm.

Los ábacos deben tener las características que se mencionaron anteriormente.

Se puede utilizar peraltes de losas menores que los mínimos requeridos por las ecuaciones o de acuerdo a la tabla 9.5(c) del reglamento, siempre y cuando se demuestre mediante un análisis que la deflexión no exceda de los límites especificados en el reglamento ACI 318-04 página 39.

Tabla 9.5.- Peraltes mínimo de losas sin vigas interiores.

Resistencia a la fluencia $F_y$ $kg/cm^2$	Sin ábacos			Con ábacos		
	Tableros exteriores		Tableros interiores	Tableros exteriores		Tableros interiores
	Sin vigas de borde	Con vigas de borde		Sin vigas de borde	Con vigas de borde	
2800	$L_n/33$	$L_n/36$	$L_n/36$	$L_n/36$	$L_n/40$	$L_n/40$
4200	$L_n/30$	$L_n/33$	$L_n/33$	$L_n/33$	$L_n/36$	$L_n/36$
5250	$L_n/28$	$L_n/31$	$L_n/31$	$L_n/31$	$L_n/34$	$L_n/34$

Para los valores de resistencia a la fluencia del refuerzo entre 2800 y 4220  $kg/cm^2$ , el peralte mínimo debe obtenerse por interpolación lineal.

El valor de  $\alpha$  para la viga de borde no debe ser menor de 0.8.

## ESFUERZO PARA LOSAS EN DOS DIRECCIONES

El refuerzo mínimo en losas debe ser el que se especifica en la tabla 5.2 como refuerzo de contracción y temperatura.

El espaciamiento del refuerzo no debe exceder de 2 veces el espesor de la losa, excepto en zonas aligeradas. En el caso de losas aligeradas debe colocarse refuerzo por contracción y temperatura en la capa superior del concreto.

El refuerzo por momento positivo perpendicular a un borde discontinuo debe prolongarse hasta el borde de la losa y tener una longitud de anclaje recta o un

gancho de, por lo menos, 15 cm en las vigas perimetrales, los muros o las columnas.

El refuerzo por momento negativo perpendicular a un borde discontinuo debe doblarse, formar ganchos o anclarse en otra forma en las vigas perimetrales, muros o columnas, para que desarrolle su tensión en la cara del apoyo.

Cuando la losa, no esta apoyada en una viga perimetral o muro en un borde discontinuo, o cuando la losa se proyecte en voladizo más allá del apoyo, el anclaje del refuerzo puede hacerse dentro de la losa.

Para losas con vigas rígidas en las que  $\alpha \geq 1.0$  se presenta un problema, ya que una losa simplemente apoyada en sus cuatro bordes, con carga vertical, tiende a levantarse de sus esquinas.

Para evitar que la losa se agriete por este efecto, el reglamento ACI 318-04 especifica colocar un refuerzo especial de esquina en la parte superior y en la parte inferior de la losa, de tal magnitud que la resistencia a flexion sea igual al momento positivo máximo por unidad de ancho. El refuerzo se debe colocar en dirección de la diagonal en la parte superior, como se muestra en la figura 5.18, y debe prolongarse hasta una distancia de  $1/5$  del claro en cada dirección desde la esquina de la losa.

Este refuerzo especial solo es necesario en esquinas exteriores.

Ejemplo.

Utilizando el metodo directo de diseño, determinar los momentos de diseño en la dirección transversal para el sistema de losas en dos direcciones sin trabes de un nivel intermedio.

**Datos:**

- 1.- Altura del entrepiso 2.80 m.
- 2.- Columnas de 40x40 cm.
- 3.- Los muros de cortante resistirán las cargas laterales.
- 4.- Sin trabes de borde.
- 5.- Peso del muro divisorio  $W_{muro} = 100 \text{ kg/m}^2$
- 6.- Carga viva de servicio  $W_{servicio} = 185 \text{ kg/m}^2$
- 7.-  $F_c = 200 \text{ kg/cm}^2$  (todos los elementos estructurales).
- 8.-  $F_y = 4220 \text{ kg/cm}^2$

**SOLUCION**

1.- Calculo del peralte de la losa "h".

a).- Para el control de las deflexiones. Para losas sin vigas, el peralte de acuerdo con la tabla 9.5 del reglamento ACI 318-04 en donde se establece que el peralte de la losa debe estar dado por la formula siguiente, cuando  $\alpha_m$  es mayor que 2.

$$h = \frac{Ln\left(0.8 + \frac{F_y}{14000}\right)}{36 + 9\beta}$$

Pero no deberá ser mayor el peralte de la losa "h" a la formula siguiente:

$$h = \frac{Ln\left(0.8 + \frac{F_y}{14000}\right)}{36}$$

Donde:

$L_n$  = Es la longitud del claro libre en la dirección mas larga.

$\beta$  = Es la relación entre el claro libre mayor y menor.

$$L_n = 500 - 40 = 460 \text{ cm}$$

$$\beta = 460 / 360 = 1.28$$

Sustituyendo los valores anteriores tendremos:

$$h = \frac{460 \left( 0.8 + \frac{4220}{14000} \right)}{36 + 9(1.28)} = 10.66 \text{ cm}$$

Pero no mayor que:

$$h = \frac{460 \left( 0.8 + \frac{4220}{14000} \right)}{36} = 14 \text{ cm}$$

Por lo tanto, el valor de peralte "h" que se tomará será  $h = 10.66 \approx 11 \text{ cm}$

Como el sistema de piso no tiene vigas de borde, "h" debe incrementarse el 10%.

$$H = (1.10)(11 \text{ cm}) = 12.10 \text{ cm}$$

Sin embargo, como no existen vigas,  $\alpha_m = 0$ , el peralte "h" no debe ser menor que 13 cm.; por lo que se tomara  $h = 13 \text{ cm}$  finalmente.

b).- Revisión por cortante de la losa:

Utilizar un peralte efectivo promedio "d" = 9 cm ( 2 cm de recubrimiento).

Calculo de la carga factorizada sobre la losa:

- Peso de la losa ,  $W = (0.13)(2400)(1.0)(1.0) = 312 \text{ kg/m}^2$
- Carga muerta factorizada,  $W_d = (312 + 100)(1.4) = 576.80 \text{ kg/m}^2$
- Carga viva factorizada,  $W_1 = (185)(1.7) = 314.5 \text{ kg/m}^2$

---


$$\text{Carga total factorizada } W_u = 891.30 \text{ kg/m}^2$$



Cortante en una dirección:

$$V_u = (0.891)(2.21)(4.0) = 7.88 \text{ ton}$$

Contribución del concreto:

$$V_c = (0.53)(\sqrt{200})(400)(9) = 26.98 \text{ ton}$$

$$\phi V_c = (0.85)(26.98) = 22.93 \text{ ton} ; \text{ Por lo tanto } V_u < \phi V_c$$

Cortante en dos direcciones:

$$V_u = 0.891(5 \times 4 - 0.49^2) = 17.61 \text{ ton}$$

$$V_c = (1.1)(\sqrt{200})(4)(49)(9) = 27.44 \text{ ton}$$

$$\phi V_c = (0.85)(27.44) = 23.32 \text{ ton} ; \text{ Por lo tanto } V_u < \phi V_c$$

Por lo tanto la losa de 13 cm es adecuada para el control de la deflexión y la resistencia al cortante.

2.- Verificación de las limitaciones del Método de Diseño Directo.

- Hay un mínimo de tres claros continuos en cada dirección.
- La relación entre claro largo y corto es menor que 2.

$$5.00 / 4.00 = 1.25 < 2.0$$

- Las longitudes de los claros sucesivos son iguales.
- Las columnas no están desalineadas.
- Las cargas están uniformemente distribuidas con una relación de carga viva a carga muerta menor que 3.

$$\text{Carga de servicio} = 312 + 100 = 412 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{Carga de servicio} = 185 \text{ kg/m}^2$$

$$\frac{185}{412} = 0.45 < 3.0$$

- El sistema de losas carece de vigas.

Por lo consiguiente, el metodo de diseño de losas se puede utilizar en este problema.

### 3.- Calculo de los momentos factorizados de la losa.

a).- Momento estático factorizado por claro.

$$M_o = \frac{(0.8913)(4.00)(4.60^2)}{8} = 9.43 \text{ ton} - \text{m}$$

b).- Momentos factorizados negativos y positivos.

Claro interior.

$$\text{Momento negativo} = 0.65M_o = (0.65)(9.43) = 6.13 \text{ ton} - \text{m}$$

$$\text{Momento positivo} = 0.35M_o = (0.35)(9.43) = 3.30 \text{ ton} - \text{m}$$

Claro extremo (placa plana sin viga de borde):

$$\text{Momento negativo exterior} = 0.26M_o = (0.26)(9.43) = 2.45 \text{ ton} - \text{m}$$

$$\text{Momento positivo} = 0.52M_o = (0.52)(9.43) = 4.90 \text{ ton} - \text{m}$$

$$\text{Momento negativo interior} = 0.70M_o = (0.70)(9.43) = 6.60 \text{ ton} - \text{m}$$

### 4.- Verificación de los efectos del modelo de carga.

Relación de la carga muerta a la carga viva:

$$\beta_a = \frac{412}{185} = 2.23 > 2.0 ; \text{ Por lo tanto se desprecia el modelo de carga.}$$

### 5.- Distribución de los momentos factorizados en las franjas intermedias y columnas.

Los porcentajes de momento para la franja de columnas se obtuvieron de la tabla 5.3

	Momento factorizado	Franja de columna		Dos mitades de franjas centrales
		porcentaje	momento	
Claro extremo exterior				
negativo	2.45	100	2.45	0
Positivo	4.90	60	2.94	1.96
Interior negativo	6.60	75	4.95	1.65
Claro interior				
Negativo	6.13	75	4.60	1.53
positivo	3.30	60	1.98	1.32

Momento factorizado – Momento en franja de columnas.

#### 6.- Momentos factorizados en columnas.

a).- Columnas interiores (con iguales claros transversales y adyacentes):

$$M_i = (0.07)(0.5W_i L_n^2) = (0.070)(0.5)(1.7)(0.185)(4)(4.60^2) = 0.93 \text{ ton} - m$$

Como la columna tiene la misma sección arriba y debajo de la losa:

$$M_c = \frac{0.93}{2} = 0.465 \text{ ton} - m$$

Este momento se combina con la carga axial factorizada (Para cada piso) en el diseño de las columnas interiores.

b).- Columnas exteriores.

El momento negativo total exterior de la losa debe transmitirse directamente a las columnas,  $M_u = 2.45 \text{ ton} - m$ .

Como la columna tiene la misma sección arriba y debajo de la losa:

$$M_c = \frac{2.45}{2} = 1.225 \text{ ton-m}$$

Este momento se combina con la carga axial factorizada (Para cada piso) en el diseño de las columnas exteriores.

7.- Transmisión de cortante y momento de carga de gravedad a la columna exterior.

- Verificaron de las resistencias al cortante y a la flexión de la losa en la columna de borde debidas a cortante directo y transmisión de momento no equilibrado.

a).- Transmisión de la fuerza cortante factorizada en la columna exterior.

$$V_u = \frac{(0.8913)(4)(5)}{2} = 8.91 \text{ ton-m}$$

b).- Transmisión de momento no equilibrado en columna exterior:

El refuerzo total proporcionado en la franja de columna incluye el refuerzo adicional concentrado sobre la columna para resistir la fracción de momento no equilibrado transmitida por flexión  $\alpha_f M_u$ , donde  $M_u$  = es el momento factorizado exterior negativo de la losa. Para losas sin vigas de borde, la franja de columna resiste el total  $M_u = 2.45 \text{ ton-m}$ .

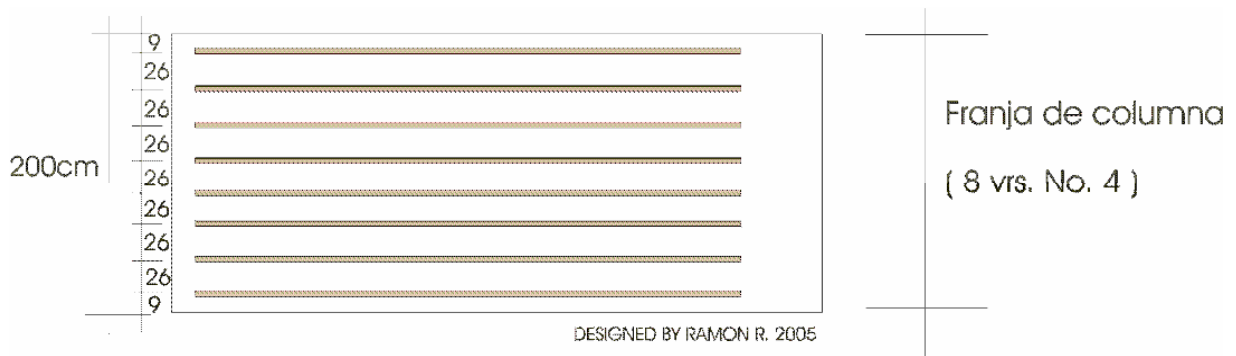
Calculo del refuerzo requerido para el momento negativo  $M_u$  de la franja de columna = 2.45 ton-m.

$$\omega = 0.849 - \sqrt{\left(0.721 - \frac{(2.45)(10^5)}{(0.53)(200)(200)(9^2)}\right)} = 0.088$$

$$\rho = \omega \frac{F_c}{F_y} = (0.088) \left( \frac{200}{4220} \right) = 0.0042 > \rho_{\min imo} = 0.0018$$

$$As = \rho db = (0.0042)(200)(9) = 7.56 \text{ cm}^2$$

Usando varillas del no. 4; por lo tanto la colocación de las varillas se quedaría de la manera siguiente.



Para la transmisión de momento no equilibrado entre la losa y la columna de borde se necesita una franja con un ancho de losa igual al ancho de la columna en dirección perpendicular a la del momento, C2, mas una vez y media el espesor de la losa, 1.5h, a cada lado del paño de la columna.

El refuerzo adicional requerido sobre la columna dentro del ancho efectivo de la losa, de 79 cm, para resistir la fracción de flexión de momento no equilibrado, se calcula con la ecuación siguiente.

$$\sigma_f = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \left( \sqrt{\frac{C_1 + d}{C_2 + d}} \right)}$$

Para columna cuadrada,  $\sigma_f = 60\%$

Calculo del refuerzo adicional sobre la columna:

$$\omega = 0.849 - \sqrt{\left(0.721 - \frac{(1.47)(10^5)}{(0.53)(200)(79)(9^2)}\right)} = 0.139$$

$$\rho = \omega \frac{F_c}{F_y} = (0.139) \left( \frac{200}{4220} \right) = 0.0062 > \rho_{\min imo} = 0.0018$$

$$A_s = \rho db = (0.0062)(79)(9) = 4.69 \text{ cm}^2$$

Usando varillas del no. 4 tenemos.

No solo existen 2 vrs, en la franja de 79 cm, se agregaran 2 vrs. Adicionales.

Calculo del refuerzo para las franjas centrales:

En el borde de la losa, el momento en las franjas centrales vale cero, ya que la franja de columna absorbe el 100% del momento factorizado, debido a esto, se colocara el acero mínimo por temperatura.

Por lo que se colocaran varillas del no. 4 @ 26 cm.

Por lo tanto, el armado final en el borde de la losa, dentro de la franja de diseño queda de la manera siguiente:

Momento que resisten las 4 varillas sobre la columna.

La fracción de momento no equilibrado transmitida por excentricidad de cortante debe estar basada en la resistencia nominal plena de momento,  $M_n$ , proporcionada en la franja de columna,

- Momento que resisten la franja de columna,

Se supone un momento de transmisión  $M_n$ , en el centroide de la sección crítica de transmisión.

c).- Esfuerzo cortante combinado en el paño interior de la sección crítica de transmisión.

El esfuerzo cortante se calcula con la ecuación: 
$$V_u = \frac{v_u}{Ac} + \frac{\sigma \cdot M}{\left(\frac{J}{C}\right)}$$

Haciendo referencia a la figura 17.6 del apéndice, para la columna de borde con flexión perpendicular.

$$a = C_1 + \frac{d}{2} = 40 + \frac{9}{2} = 44.50cm$$

$$b = C_2 + d = 40 + 9 = 49cm$$

$$c = \frac{a^2}{(2a + b)} = \frac{44.50^2}{((2)(44.50)(49))} = 14.35cm$$

$$Ac = (2d + b) \cdot d = [(2 \times 44.5) + 49](9) = 1242cm$$

$$\frac{J}{C} = \frac{6[2ad(a + 2b) + d^3(2a + b)]}{a} = \frac{6[(2)(44.5)(9)[44.5 + (2)(49) + 9^3(2 \times 44.5 + 49)]}{44.5} = 19,400cm^3$$

$$\sigma_v = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \left( \sqrt{\frac{C_1 + d}{C_2 + d}} \right)}$$

Para columnas cuadradas;  $\sigma_v = 0.40$  ; sustituyendo este valor tenemos:

$$V_u = \frac{8910}{1242} + (0.40) \left( \frac{448000}{19400} \right) = 16.41 \text{ kg/cm}^2$$

d).- Esfuerzo cortante permisible.

$$\phi V_n = 0.85(1.1)\sqrt{200} = 13.22 \text{ kg/cm}^2 < 16.41 \text{ kg/cm}^2$$

Por lo tanto, habrá que aumentar el peralte de la losa de tal forma de que los esfuerzos cortantes combinados que se presenten en la sección crítica de transmisión sean menores que el esfuerzo cortante permisible.

Con esto se busca que la losa falle por tensión y no por cortante por las ventajas que esto representa.



# CIMENTACIONES

# CIMENTACIONES



## GENERALIDADES

---

Las estructuras transmiten su sollicitación al terreno a través de una cimentación. Esta, puede estar constituida por uno o varios elementos y dada su ubicación con respecto a nivel del terreno, reciben en algunas ocasiones el nombre de infraestructura o subestructura.

Los tipos de cimentación se pueden considerar divididos en dos sistemas: cimentación directa y cimentación indirecta.

En la cimentación directa, los elementos de la súper-estructura, se continúan hasta nivel del desplante del terreno, ampliando las superficies transmisoras de carga, hasta lograr que la capacidad de soporte del terreno trabaje dentro de un grado de seguridad razonable a este sistema se reconoce con el nombre de ampliación de base.

Cuando la resistencia del terreno superficial sobre cual se va a desplante del edificio no es suficiente, se colocan elementos intermedios que transmiten la carga hasta llegar terreno que si garantice la resistencia requerida; a estos elementos se denominan pilotes, y el sistema cimentación indirecta.

De acuerdo a la profundidad del desplante, las cimentaciones toman otra clasificación: cimentaciones superficiales y cimentaciones profundas.

Aun cuando las cimentaciones superficiales caen siempre dentro del rango de cimentación directa, hay ocasiones en que las características del suelo obligan a una solución de cimentación profunda a base de una cimentación directa; la clasificación es un tanto arbitraria, dando algunos autores como límite para la experiencia entre ambas una profundidad de cuatro metros, con respecto al nivel del terreno.

La profundidad mínima del desplante para evitar la producción lateral en las tierras, será 50cm en tierra natural o un metro en arena seca confinada.

## **CIMENTACION**

Es un conjunto de elementos estructurales sobre los que descansará superestructura, su función es transmitir y distribuir las cargas al suelo de apoyo en tal forma no se exceda la capacidad de carga permisible del terreno condicionado ante el sistema trabaje con un factor de seguridad adecuado que garantice que no se provocaron fallas tanto en el terreno como en la superestructura, de que hundimientos excesivos pueden generar daños en la propia estructura, así como en las colindantes.

Todos los terrenos se comprueben cuando son cargados, ese grado de compresibilidad es variable según el tipo y propiedades mecánicas de los suelos, variando desde los suelos compactos (tepetatazos o rocosos) de baja compresibilidad hasta otros con alta común y alta compresibilidad. Las dos condiciones esenciales que se deben tener en cuenta al productor una cimentación se reducen a que:

1. El asentamiento total de la estructuras no exceda de una magnitud pequeña invisible.
2. A que los asentamientos diferenciales entre los distintos elementos de aquella, tengan un mínimo valor.

Siendo esta última condición más importante por los daños probables que producirán en la construcción (a mayor rigidez del cimiento, serán menores los hundimientos diferenciales).

Por el diseño de una cimentación es importante conocer la naturaleza y propiedades del suelo, lo que se logra mediante estudios de mecánicas de suelos.

La mecánica de suelos es el estudio de ingeniería del suelo, mediante la cual, se puede conocer tanto la naturaleza como las propiedades de los estratos de suelo de desplante, llevando a cabo estudios previos mediante muestras alteradas o inalteradas. Es necesario verificar las características del suelo con la profundidad relacionada con las dimensiones de la placa de apoyo y la magnitud de las cargas a soportar.

### **Capacidad de carga del terreno:**

Una de las pruebas para definir de la compacidad o consistencia de los suelos, es la prueba de penetración estándar, la cual consiste en hincar a percusión un muestreador de pared gruesa, de dimensiones específicas, con energía proporcionada por martinete de 64 Kg de peso, dejándolo caer libremente desde una altura de 75 cm en función del número de golpes necesarios para que el muestreador avance 30 cm se define la compacidad del suelo a través de la resistencia del terreno a la penetración.

También se realizan una serie de ensayos como los de compresión, para definir la resistencia al esfuerzo cortante de los suelos de que cuando éstos son sometidos esfuerzos mayores de los que puede soportar, conducen a la falla del terreno, puesto que la capacidad de carga del suelo, esta en función de la presión máxima que transmite la cimentación al suelo sin que éste falla por cortante.

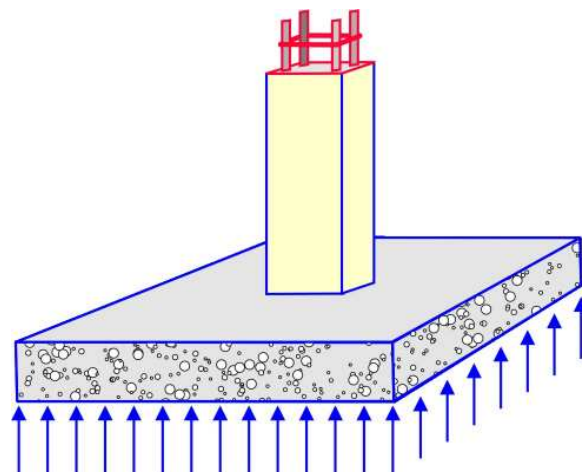
Las presiones en el terreno en cuanto a cargas y distribución, dependen no sólo de la intensidad de la carga y de las características propias del terreno de desplante, sino también indicado muy importante las dimensiones crecimiento y de la rigidez de este punto

De lo tratado anteriormente se deduce, que si los suelos pueden sufrir deformaciones y como consecuencia también la cimentación, esto puede cuestionar una alteración en la distribución de presiones sobre la cimentación y a las fuerzas internas en la superestructura, es por tanto recomendable que los tres componentes del sistema sean tratados en conjunto: suelo, cimentación y estructura.

El tipo de cimentación elegir será consecuencia de una serie de factores como son: intensidad de las cargas que llegan al suelo, profundidad del estrato desplante y capacidad de carga del mismo, características de la superestructura, así como aspectos constructivos y económicos.

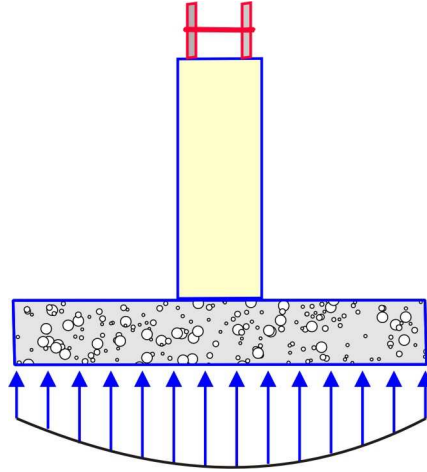
En construcción común y corriente, la carga sobre un muro o columna se transmite verticalmente a la Zapata, lo cual es su vez sostiene la presión hacia arriba del suelo sobre cual descansa. Si la carga simétrica respecto al área de contacto, es decir si su resultante está actuando en el centro de gravedad de la superficie de contacto, la reacción de contacto se supone uniformemente distribuida.

#### Reacción Uniforme



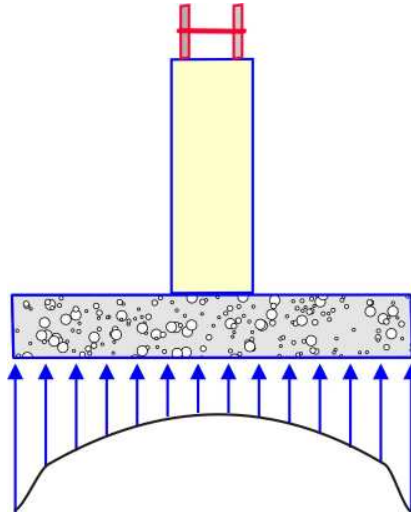
Lo anterior se supone cierto, aproximadamente cierto, para zapatas que descansan sobre suelos granulares gruesos la reacción es mayor en el centro la zapatas y disminuye hacia el perímetro, se supone que los granos individuales este tipo de suelo, están relativamente sueltos de manera que el suelo localizado en las cercanías de perímetro pueden correrse ligeramente hacia fuera en la dirección de menores esfuerzos en el suelo.

### Reacciones mayores al centro



En los suelos arcillosos, las reacciones son mayores cerca del borde que en el centro de la zapata, puesto que la carga produce una fuerza cortante resistente, alrededor del perímetro la cual se adiciona a la reacción hacia arriba.

### Reacciones mayores en los costados



Estas variaciones se acostumbra ignorarlas y se acostumbra aceptar una variación lineal dado que:



1. Su cuantificación numérica es incierta y altamente variable según sea el tipo de suelo.
2. Su influencia en los momentos sectores y de las fuerzas cortantes en cuanto a su magnitud, es relativamente baja y no vale la pena su consideración.

La carga unitaria máxima admisible en el terreno, será la que se aplique al mismo, sin causar asentamientos que puedan afectar las turna o provocar un peligro de falla del suelo al corte.

Haciendo uso de la mecánica de suelos y de acuerdo con las propiedades mecánicas en material, se puede fijar la capacidad de soporte de un terreno (fatiga de trabajo mediante un coeficiente de seguridad) en función de una serie de factores:

1. Dimensiones de zapatas o elementos transmisores de carga al terreno.
2. Nivel de desplante abajo del nivel natural del terreno.
3. Hundimientos diferenciales que pueda tolerar la súper-estructura sin afectar su seguridad.
4. Características y rigidez del edificio.



## CLASIFICACION DE LAS CIMENTACIONES 🇨🇺

---

Generalmente las cimentaciones se clasifican de acuerdo a la profundidad de desplante, quedando comprendidas en los dos grupos antes mencionados, son muy variados los criterios para decidir la clasificación, de que algunos autores califican a superficiales como aquellas en que la profundidad de desplante es menor que su anchura y a su vez la subdividen en muy superficiales cuando el estrato desplante es menor de 1.5 m y superficiales cuando la cota desplante es mayor, pero con un límite de 9.0 m.

La forma más común de clasifican las cimentaciones desde la siguiente forma de cimentación es directa, por ampliación de base, se clasifica como superficial y de acuerdo con el tipo elementos que la integran pueden ser a base de:

### a. Superficiales

- i. Zapatas aisladas.
- ii. Corridas o combinadas.
- iii. Plataforma continua.
- iv. Placas planas.
- v. Plegaduras.
- vi. Cascarones.

Cuando el estrato resistente es muy profundo se recubre a una cimentación indirecta, valiéndose de elementos columnarios de diferente dimensión transversal que sirven de transición entre la superestructura y un terreno de apoyo adecuado, dando origen a las cimentaciones profundas.

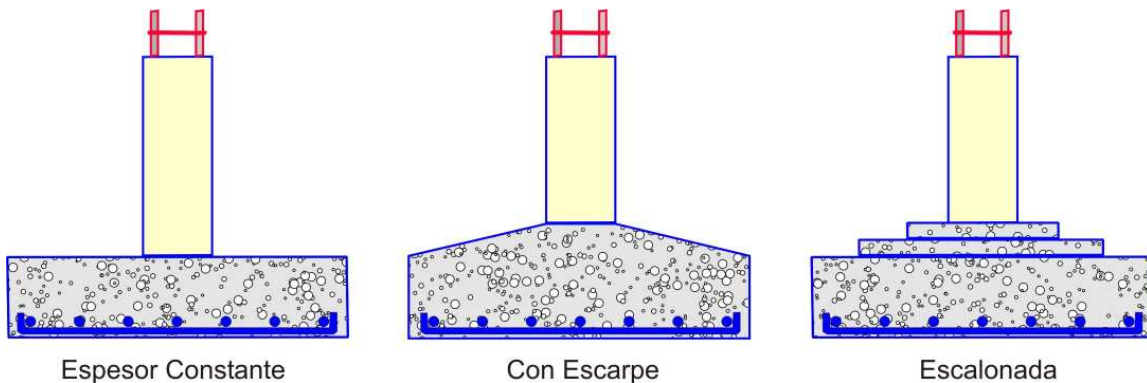
## b. Profundas

- i. Pilotes
- ii. Pilas
- iii. cilindros de cimentación

Aún cuando algunos tipos de cimentación pueden ser resueltos a base de mampostería de piedra hubo otros, en este estudio se orientará al as de concreto reforzado.

### ZAPATA AISLADA

Una zapata aislada soporta una columna que generalmente es concéntrica a ella, en la mayoría de las veces es una losa cuadrada o rectangular de espesor constante pero no otras ocasiones podrán tener escapes o ser escalonada.



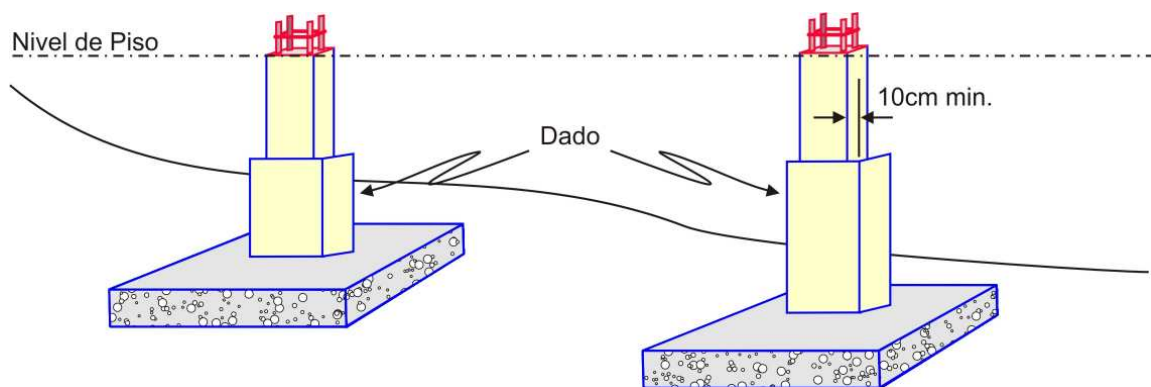
El objetivo de las de espesor variable o de las escalonadas es de ahorrar concreto cerca de los bordes en donde los esfuerzos debidos a la dirección del suelo son muy pequeños. Sin embargo muchas veces el ahorro en material se compensa colocar o de la mano de obra por ser formas más difíciles.

En todas estas zapatas, el esfuerzo consiste entre dos capas de varillas perpendiculares unas de otras y anulados de la zapatas. Las capas se ponen uno sobre la otra al fondo de la zapatas con 7. 62 cm (3") de recubrimiento por lo menos para la capa más profunda. La profundidad efectiva debe tomarse como el promedio de las profundidades del esfuerzo. Si estas varillas fuesen lisas, deberá colocárseles ganchos a los extremos.

En algunas ocasiones se coloca un bloque de concreto simple o reforzado entre la columna y la zapatas, que si ha llamado pedestal. Este miembro de compresión vertical tiene como especificación que su altura no debe ser mayor que tres veces la dimensión lateral y cuando esto sucede entonces deberá considerarse como columna.

Los objetivos de un lado son los siguientes:

1. Cuando la zapatas no están en el mismo nivel, debido a la pendiente del terreno, con los dados se logró tener la misma línea de piso y de esta forma las columnas de la planta baja tendrán la misma altura.
2. Generalmente los dados son de concreto simple y que ello se logra más economía que con las columnas reforzadas.
3. Los dados son de mayor sección transversal que la columna y por tanto las proyecciones de la zapatas a partir de ellos son más pequeñas, de hecho, la zapatas estará sometidas a menores reacciones del suelo y consecuentemente resultan secciones resistentes menores.



Una zapata, generalmente tiene pequeñas varillas verticales llamadas “anclajes” que parten desde la parte superior del dado y llegan hasta el armado de la zapata; el objetivo es transmitir los esfuerzos de la columna a la zapata por adherencia.

Si la longitud del anclaje referido, es mayor que la altura del dado más el peralte efectivo de la zapata, entonces se recurre a doblar el extremo del anclaje en ángulo recto que quedar inmediatamente arriba del refuerzo de la zapata y de esta forma logramos la longitud requerida.

Los factores que controlan las dimensiones de un dado de concreto simple son las siguientes:

1. El dado tendrá un saliente de por lo menos 10 cm (4”) para soportar la cimbra de las columnas alrededor del mismo.
2. El esfuerzo permisible en toda el área “A” del dado, será  $0.25 f'_c$ .
3. El esfuerzo permisible en el área cargada “a” del dado será:

$$\left(\frac{F_c}{16}\right) \left[ 7 \left( \frac{3a}{A} \right) \right].$$

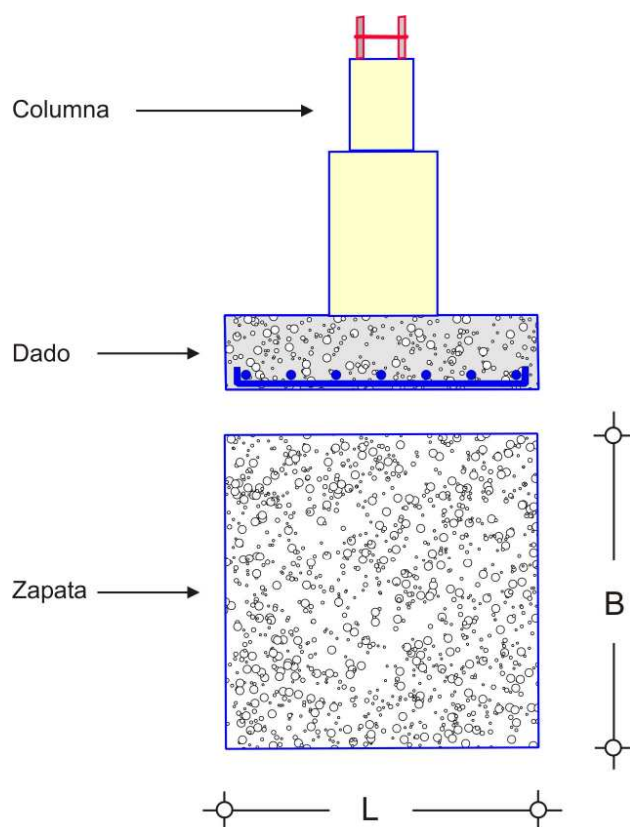
La expresión anterior de valores que vayan desde  $0.25f_c$  cuando la relación  $\left(\frac{a}{A}\right)=1$ ,  $0.375F_c$  para  $\left(\frac{a}{A}\right)=\frac{1}{3}$  y para valores menores de  $\left(\frac{a}{A}\right)=0.375F_c$ , el esfuerzo permisible, sus de acuerdo con el A.C.I. 318-02, es de  $0.375F_c$ .

Los esfuerzos seleccionar antes y de adherencia en zapatas aisladas, se calculan sobre planos verticales en la escala de las columnas, cuando las columnas están directamente soportados por las zapatas y las caras de los dados cuando éstos existan. Para columnas metálicas sobre zapatas de concreto, las decisiones se toman a la mitad de la distancia entre el borde de la base metálicas y las caras de la columna o dado unos por la zapata que soportan muros de mampostería, block o tabique, la sección se tomará a una distancia igual al peralte efectivo de la zapata, medido a partir del paño del muro. Para la zapatas escalonadas, los puertos se determinarán en todos los planos verticales donde ocurren cambios sección.

El A.C.I. permite reducir a el 85% en momentos sección antes y el cortante solicitante por el cálculo de los esfuerzos flexionantes, de adherencia y cortante por la razón de que las fuerzas actuales en las esquinas de la zapata son simultáneamente resistidas por dos acciones en ángulo recto y por lo tanto cualquiera de estas secciones resiste sólo una parte de las fuerzas sitúan en esquina.

Los esfuerzos por tensión diagonal o cortante se calculan sobre planos verticales paralelos a las caras de las columnas y dados, a una distancia igual al peralte efectivo. Para el caso de columnas sobre pilotes, esta distancia deberá reducirse a la mitad. Las decisiones resistentes, no se extienden a través de toda la zapatas, que han limitado por líneas a  $45^\circ$  se extienden desde las esquinas de las columnas o dado. Generalmente el peralte efectivo de una zapata su origen esfuerzos por tensión diagonal: y en segundo lugar se reflexiona antes. Para quedar en el último lugar la adherencia.

Cuando la separación de las columnas es adecuada y las características físicas del terreno son apropiadas, por ejemplo son los compactos de baja compresibilidad, se pueden resolver la cimentación sobre bases independientes unas de otras; en tal forma que cada zapata aislada tomé la carga transmitida por una columna. Para este tipo de cimentación, la estructura debe contar con cierta flexibilidad en tal forma que pueda absorber hundimientos diferenciales sin daños apreciables en la construcción.



debe exceder de 1.5 veces el ancho. Todas las La superficie de apoyo o sea el área de la zapata, se calculará tomando en cuenta el peso propio de la misma, sumando la calidad de la columna y en función de la presión admisible del terreno. Dada la gran rigidez de las bases se puede, como ya se dijo anteriormente, plantear la hipótesis de distribución uniforme de presiones en el terreno de fundación.

**A = Superficie de apoyo ( $B \times L$ )**

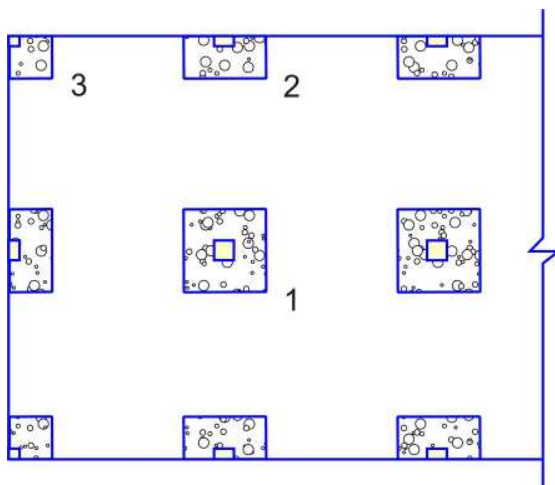
**Pt = Carga sobre el terreno ( $P + p.p.$ )**

**P = Peso propio del cimiento ( $0.10P$ )**

$\sigma$  = Presión admisible en el terreno.

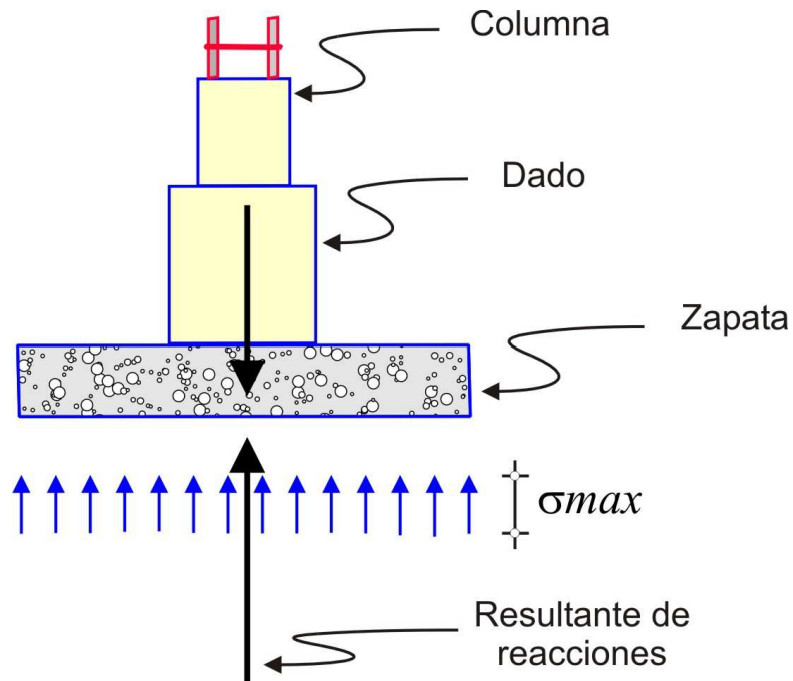
La zapatas aisladas su generalmente cuadradas o rectangulares pero su longitud no

El dado disminuye los momentos y cortantes en la Zapata y reducen esbeltez de la columna. Si el centro de la superficie de la Zapata coincide con el punto de aplicación de la carga se designa como céntrica (zapatas aisladas interiores) y la distribución de presiones se puede considerar un informe.



- 1.- Zapata Interior (céntrica).
- 2.- Zapata de Lindero
- 3.- Zapata Esquinera de lindero.

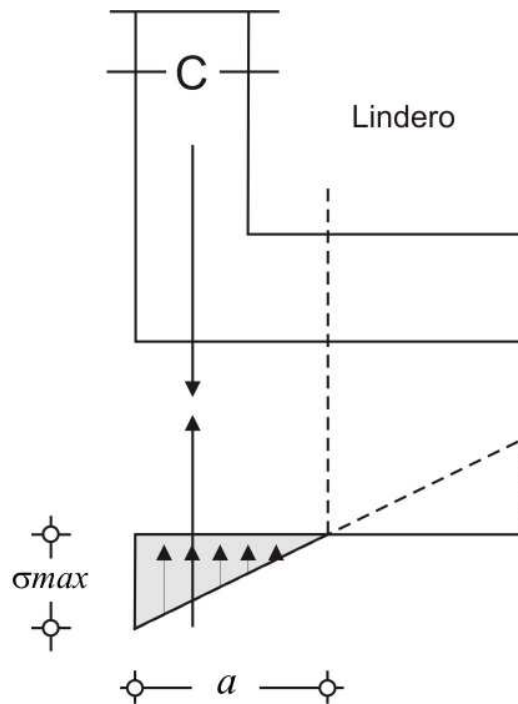
### ZAPATA INTERIOR.



### ZAPATA DE LINDERO (NO RECOMENDABLE).

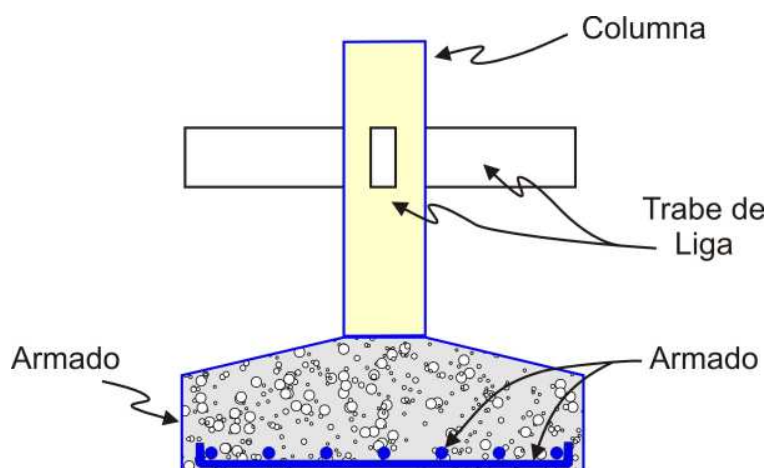
Esta condición uso cumple en los zapatas de lindero, ni en las esquinas de lindero como donde la simplicidad conduce o una distribución excéntrica depresiones y giros en la zapatas.





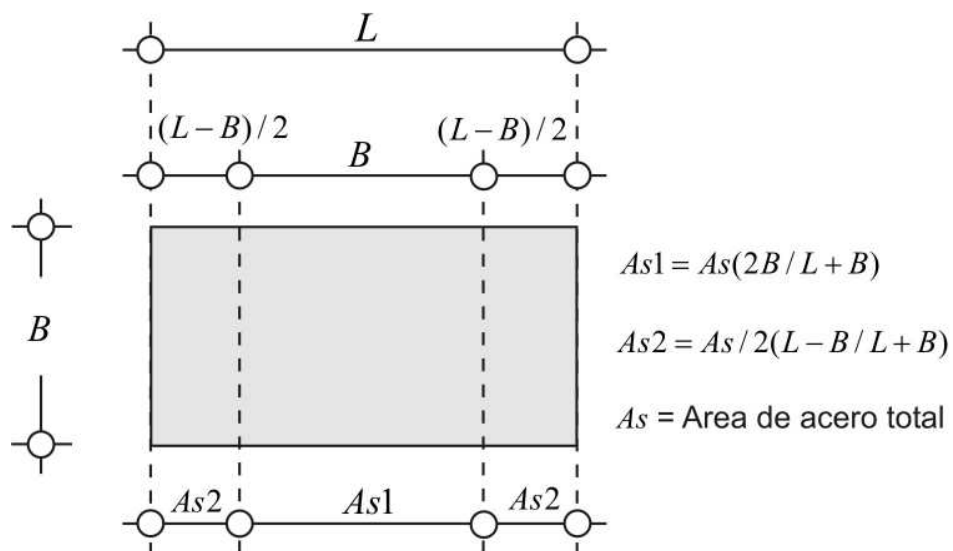
En las zapatas de lindero debido a la excentricidad, una gran porción de la misma no trabaja, ya que no puede haber tracción entre el terreno y zapata, recorrida otro tipo de soluciones mediante el empleo de trabes de liga o zapatas combinadas.

En zonas sísmicas es recomendable unir las zapatas aisladas mediante trabes de liga, las que cumplirán con las siguientes funciones:



1. Reducir la esbeltez de la columna.
2. Absorber los momentos originados por la acción de un sismo transmitidos por las columnas a la cimentación.
3. Absorber asentamientos diferentes provocados por hundimientos en el terreno.
4. Absorber excentricidades descargas en zapatas de lindero.

En zapatas cuadrados el refuerzo se colocara a una separación constante a lo largo de la zapatas, también se seguirá el mismo criterio para la dirección del lado largo una zapatas rectangulares. El refuerzo paralelo, alado cortó en una zapatas rectangulares se concentrará en la parte central con el siguiente criterio:



El A.C.I. 318-04, permite el uso tener dirección uniforme del suelo bajos cimientos amplios, reacción que se determina con la fórmula:

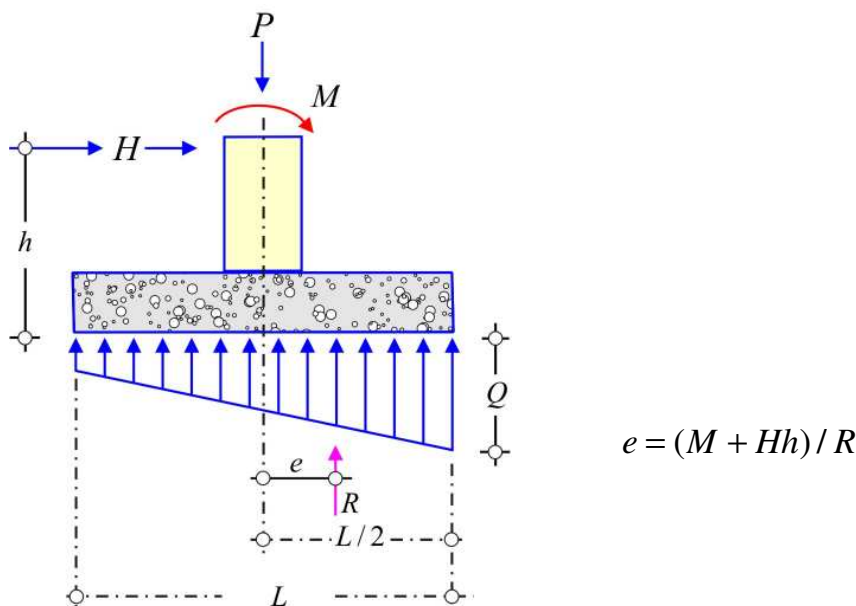
$$q = P / A$$

La fórmula anterior, es en el caso de cimientos para los cuales la carga resultante de la columna esté aplicada en el central de del abastecimiento. Si la carga fuera excéntrica, la presión varía uniformemente y se tendrá uno de los dos casos siguientes:

Primer caso.- se presentara para valores moderados de  $M$  o  $H$ . la resultante  $R$ , está compuesto por la carga aplicada  $P$  más el peso de cimientos,  $M$  es el momento flexionante en la base y  $H$  la carga horizontal. En este caso todo el cimiento, está sometido a la presión del suelo.

Segundo caso.- ocurren por grandes valores de  $M$  y  $H$ , en este caso parte el cimiento nuestra sometido a la presión del suelo.

En ambos casos, la posición de la resultante  $R$ , se encuentra determinando la excentricidad de la carga:



La condición para que exista el caso primero desde que la resultante esté dentro del tercio medio del cimiento:

$$e \leq L/6$$

En el caso contrario se tendrá el caso 2.

$$a = L/2 - e$$

Las ecuaciones anteriores, para cimientos con carga excéntrica, se aplican para la flexión con relación únicamente para un eje y se han reducido, usando la conocida ecuación:

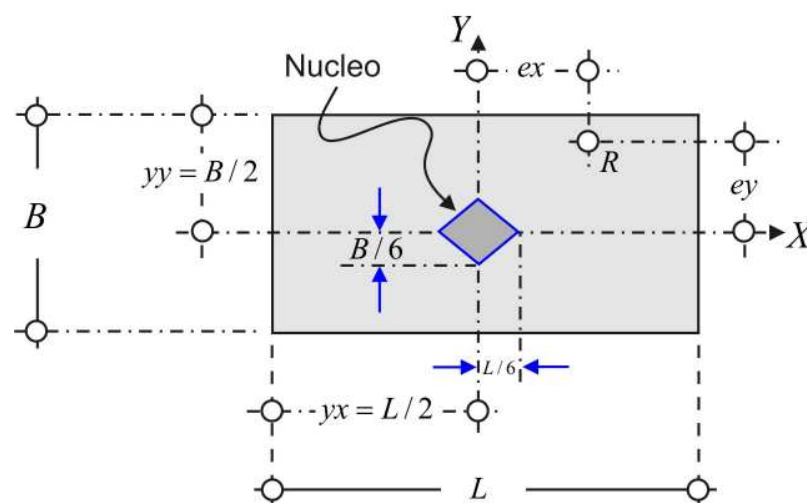
$$q = R/A \pm M_y/I$$

Para el caso en que se presente la flexión en ambos ejes X e Y como y la totalidad del cimiento este sometido a la reacción del suelo, es decir, el caso óptimo en que todo suelo bajo la cimentación este sometido a la compresión, tendremos:

$$Q = (R/A) + (M_x Y_y / I_x) + (M_y Y_x / I_y)$$

$$q = (R/A) - (M_x Y_y / I_x) - (M_y Y_x / I_y)$$

Lo valores de  $e_x$  y de  $e_y$ , se encuentran aplicando la ecuación del principio de esta página, en primer lugar respecto al eje X. y luego respecto al eje Y. ser un todo de aplicación, así obtenido para  $e$ , está colocado fuera del núcleo de la sección (del cual se indica dibujado en la siguiente figura) se tienen caso especial y los puntos de presión nula se deben determinar por tanteo, es de recordar sin que no puede existir tracción entre el suelo y el cimiento.



Planta de la base del cimiento una resultante fueron núcleo.

### DETERMINACIÓN DE LAS PRESIONES DEL SUELO MÁXIMA “Q” Y MÍNIMA “q”.

Si se combinan los efectos de M y del momento ocasionado por H para formar un solo momento M, podemos obtener las presiones máxima y mínima en función del ancho B del cimiento;

Primer caso:

$$Q = \frac{R}{BL} + \frac{6M}{BL} ; \quad q = \frac{R}{BL} - \frac{6M}{BL}$$

Segundo Caso:

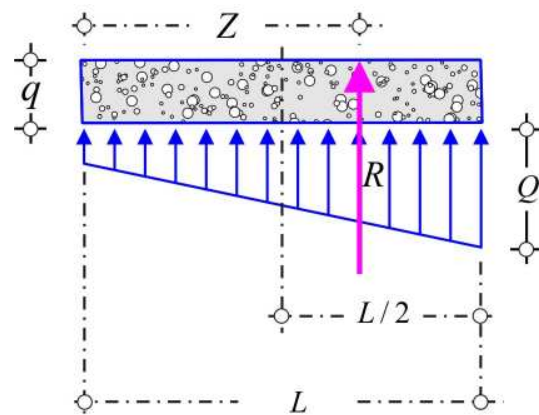
$$Q = \frac{4R}{3B}(L - 2e) ; \quad \text{Por lo tanto:} \quad q = 0$$

Demostración del primer caso:

El momento debido a la reacción es:

En que  $R = (Q + q/2) LB$

Así que  $q = (2R/LB) - Q$



Por la estática sabemos que:  $A = L/3 (2Q + q/Q + q)$

Sustituyendo en la ecuación anterior.

$$M = (Q + q/2) L/3 (2Q + q/Q + q) - (L/2) LB$$

O lo que es lo mismo:

$$M = (Q + (2R / LB - Q)/2)((L/3)(2Q + (2R/LB-Q)/Q + (2R/LB-Q)) - L/2)$$

Simplificando resultara:

$$Q = R/BL + 6M/BL^2 \quad \text{L.C.Q.D.}$$

Ahora el caso de la presión mínima:

$$\text{De } q = (2R/LB) - Q$$

Sustituyendo el valor encontrado de Q:

$$q = (2R / BL) - (R / BL + (6M / (BL)(BL)))$$

Simplificando resultara:

$$q = R / BL - (6M / (BL)(BL)) \quad \text{L.C.Q.D.}$$

Demostración del segundo caso:

$$M = Re \dots \dots \dots \} \quad M = R (L/2 - a)$$

$$e = (L/2) - a$$

$$\text{Se sabe que } R = (3a/2) AB \dots \dots \dots \} \text{ y } Q = 4R/3B (L - 2e)$$

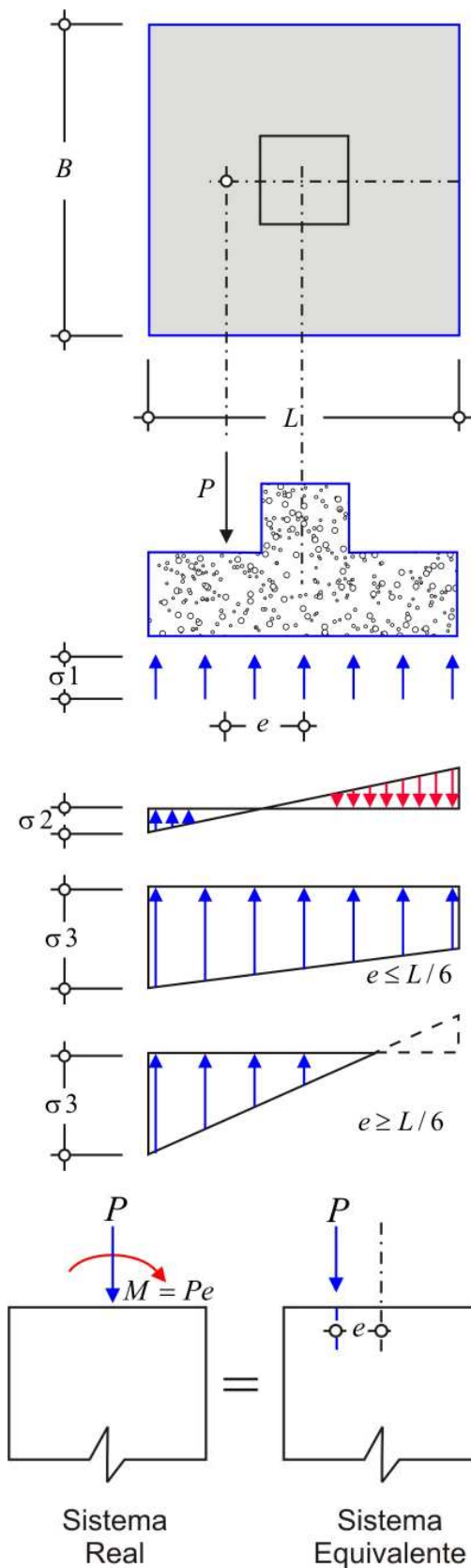
$$\text{Por lo que; } a = 2R/3QB \quad \text{L.C.Q.D.}$$

$$\text{Es obvio que: } q = 0$$

La distribución de las presiones del suelo depende tanto las características del propio terreno como de la rigidez del cimiento; pudiéndose adoptar dos criterios: una variación lineal de presiones o una distribución uniforme concéntrica con la resultante de la descarga de la columna.

### **DISTRIBUCIÓN LINEAL DE PRESIONES:**

Suponiendo nos aparta sujeta a una carga axial y momentos, se tienen:



$\sigma_1$  = Presión por carga axial en

$$\sigma_1 = P / A = P / BL$$

$\sigma_2$  = Presión por flexión

$$\sigma_2 = My / I = (PeL/2) / ((1/12)BL^3) = 6Pe / BL^2$$

Considerando  $\sigma_1 = \sigma_2$ , al compararlas resulta:  $e = L/6$  es el núcleo central de inercia o tercio medio.

Cuando  $e \leq L/6$  se producen solamente compresiones en la base y en cambio, cuando  $e \geq L/6$ , "se producen tensiones en la base provocando que se reduzca el área útil de la zapata.

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_2 = P / A \pm 6Pe / BL$$

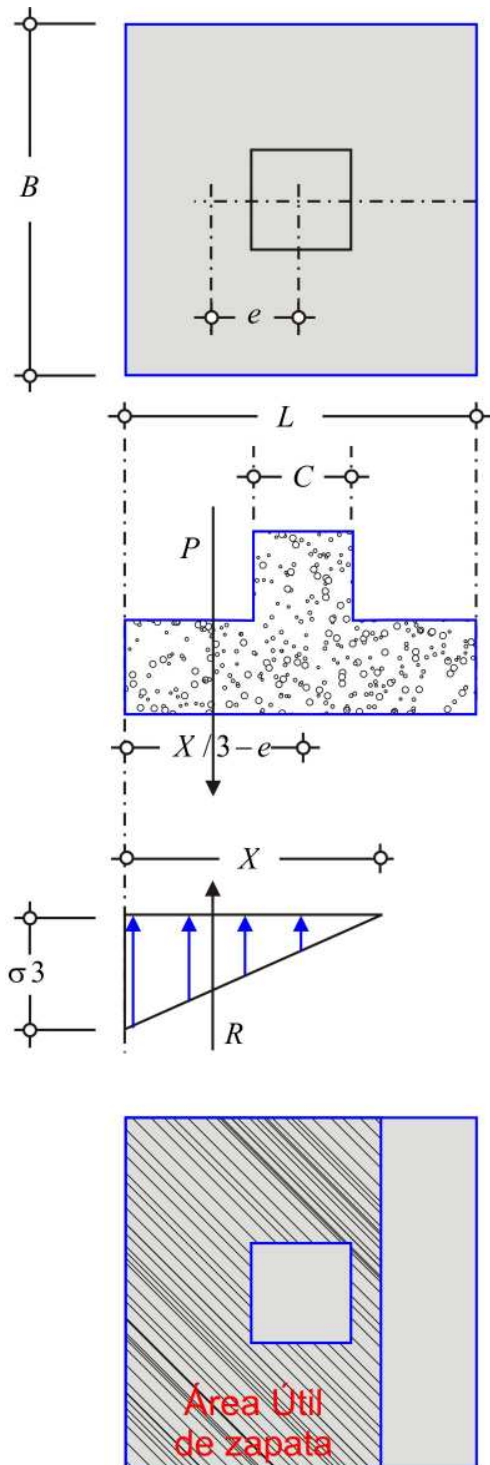
$$\sigma_3 = P / A \pm 6Pe / AL = P / A (1 \pm 6e / L)$$

Para  $e \leq L/6$ .

Cuando  $e > L/6$ , de acuerdo a la estática, la fuerza total resistente de presiones en el suelo debe ser igual y col lineal con la carga aplicada.

Para que exista equilibrio.





por lo tanto  $x = 3(L/2 - e)$

Como:  $P = \sigma x / 2.B$

Resulta:  $P = (\sigma 3(L/2 - e)B) / 2$

Finalmente, despejando a B:

$$B = 2P / 3\sigma(L/2 - e)$$

$R$  = Resultante de presiones en el suelo

$P$  = Suma de cargas verticales

$M$  = Momento

$e$  = Excentricidad =  $M / P$

condición  $e > H / 6$

$L$  = Lado de la Zapata en el sentido del momento.

$B$  = Ancho de la Zapata

$\sigma$  = Presión máxima admisible en el suelo

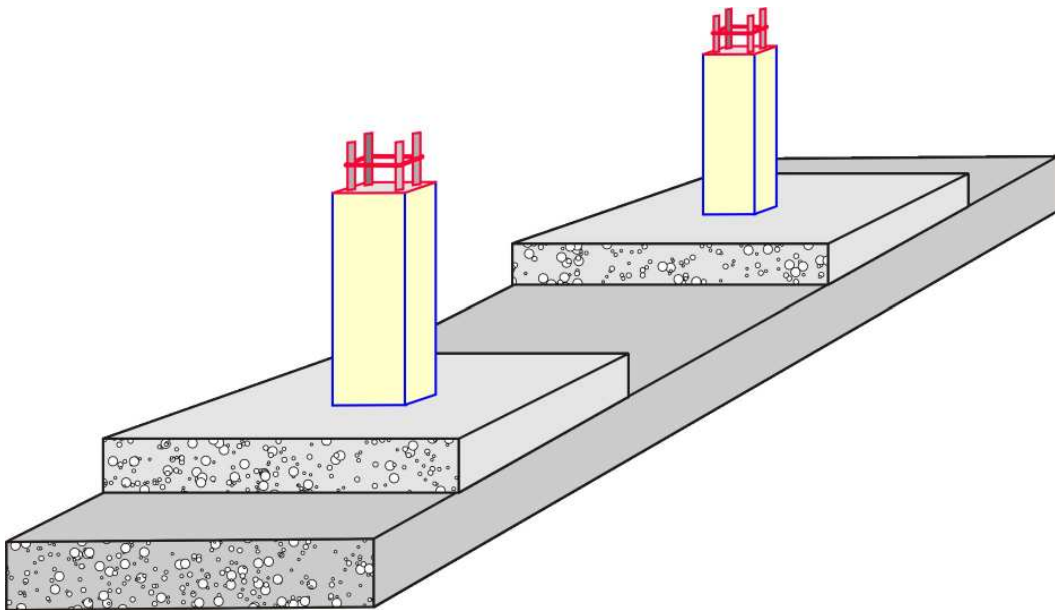
$$X / 3 = L / 2 - e$$

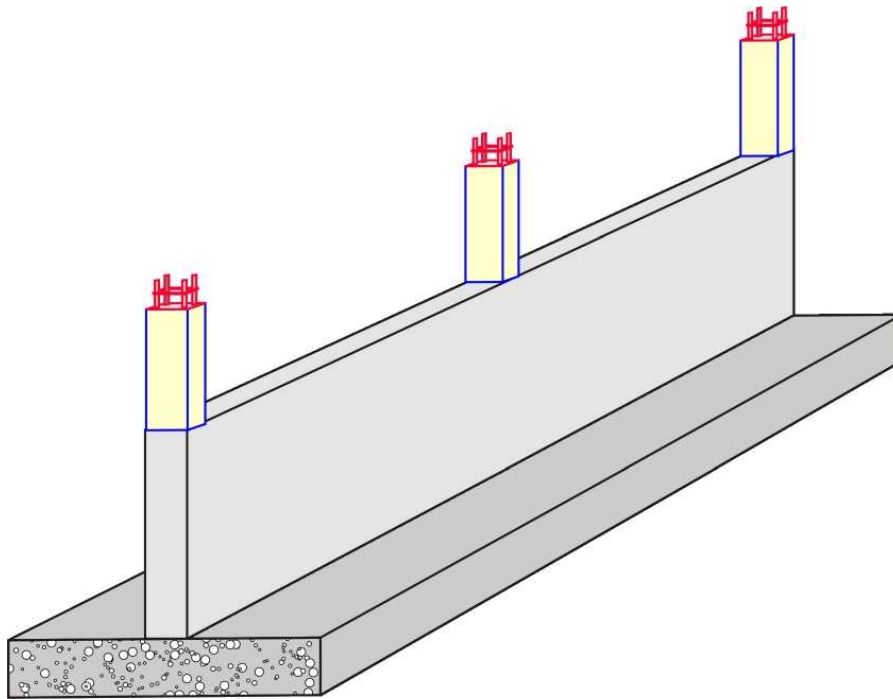
## DISTRIBUCIÓN UNIFORME DE PRESIONES

El segundo criterio establece que se puede considerar una distribución uniforme de presiones en tal forma que la resultante de las cargas sea concéntrica y de la misma magnitud de la resultante de presiones del suelo. Para el caso de excentricidad en una elección se tiene:

## ZAPATA CORRIDA O COMBINADA

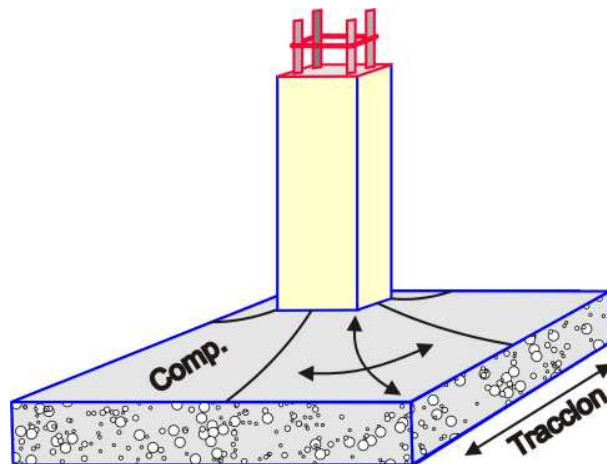
En los tres casos, las piezas trabajan básicamente a flexión, debiéndose verificar por tensión diagonal y adherencia. En los casos de zapata corrida y combinada, la resultante de cargas debe coincidir con la resultante de reacciones del terreno para equilibrio del cimiento.





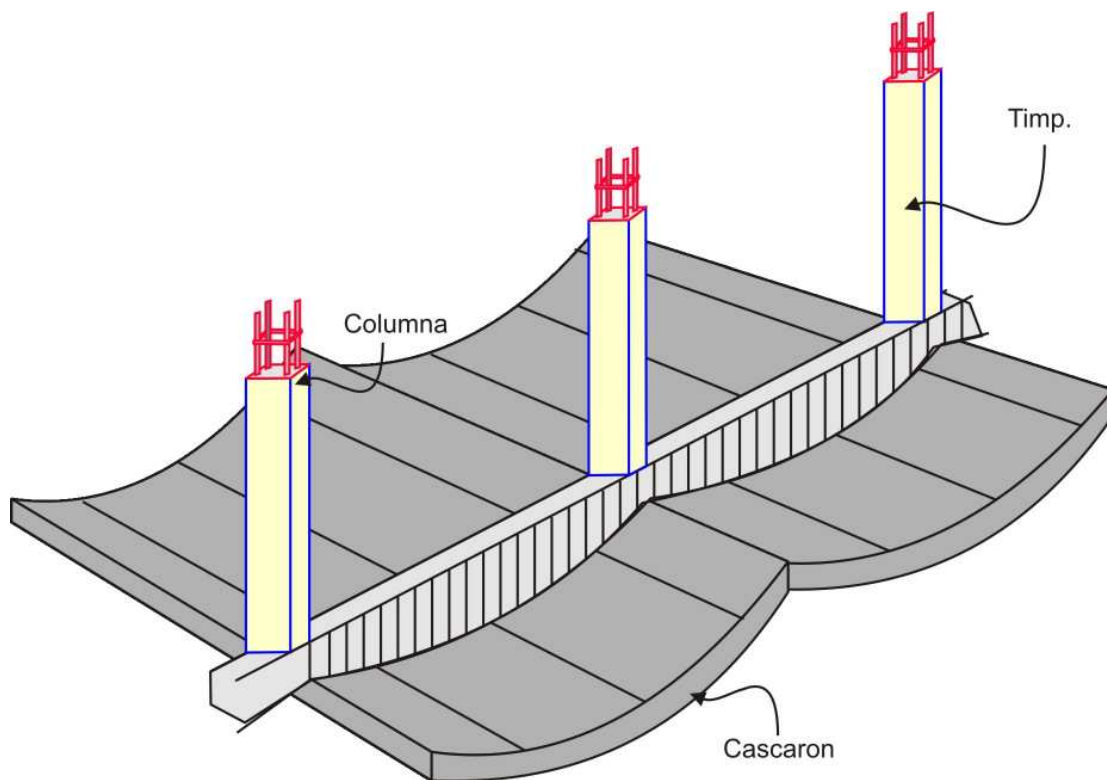
## CASCARONES

Superficie paraboloides hiperbólico, trabajo a esfuerzos directos.



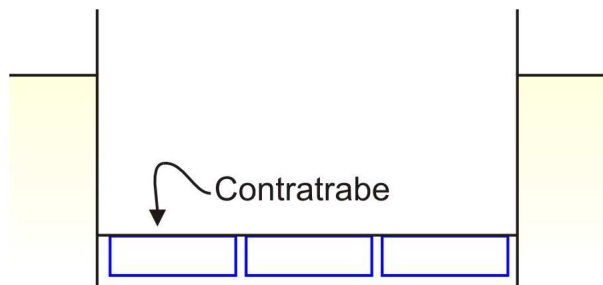
## BÓVEDA CÁSCARA

Régimen mixto de esfuerzos en membrana y flexión con un predominio de los primeros.

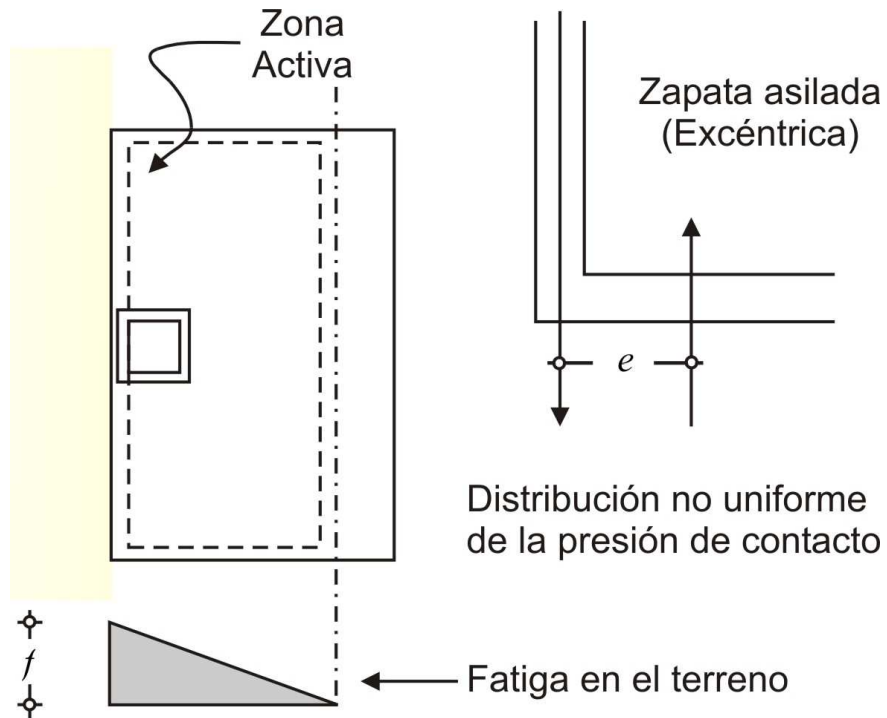


## PLATAFORMA CORRIDA

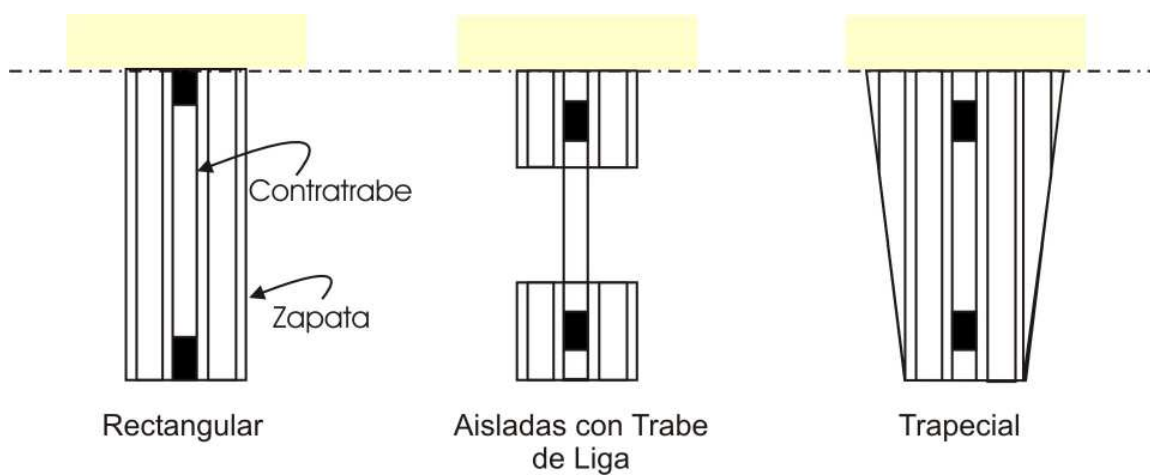
Substitución o compensada. El peso del edificio substituye el peso total o parcial del suelo extraído.



## CIMENTOS EN COLINDANCIA



## ZAPATAS COMPUESTAS

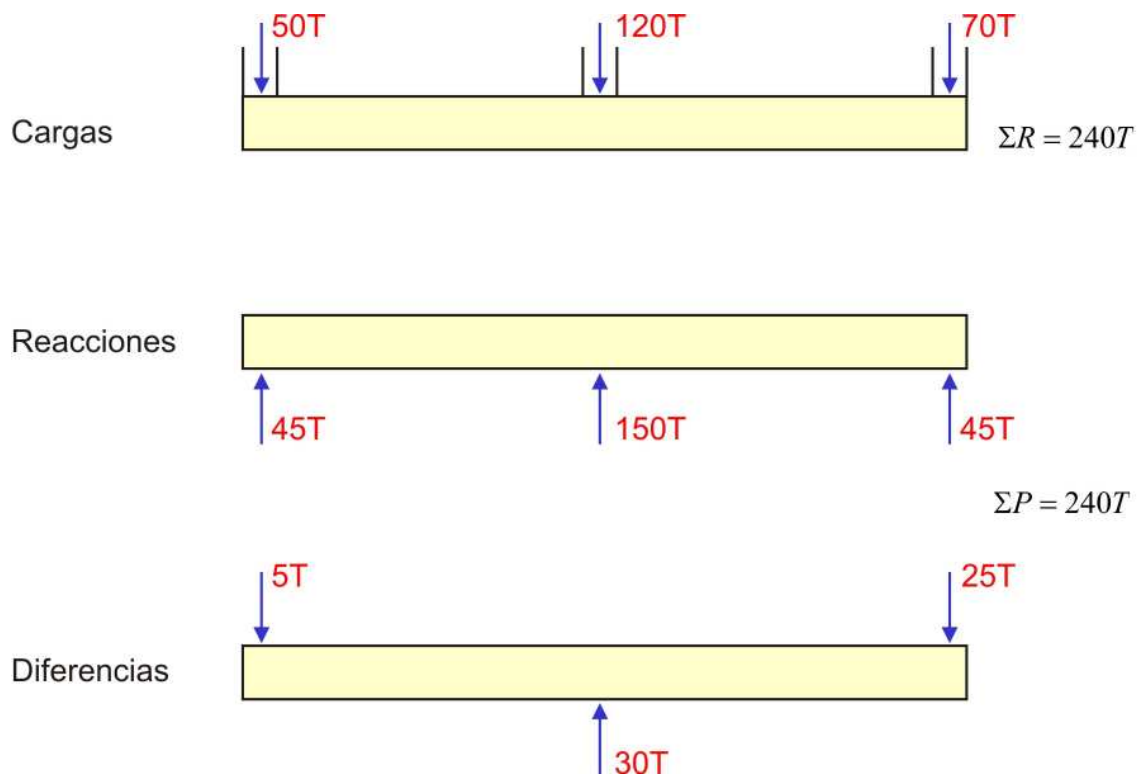


En las zapatas compuestas, la condición básica será que coincida el centro de gravedad de la base con la resultante de cargas.

### EQUILIBRIO DE FUERZAS VERTICALES EN CIMENTACIONES.

Uno de los problemas mas fuertes en las cimentaciones, es la solución al equilibrio de fuerzas verticales en cada una de las columnas; en otras palabras, a lograr la igualdad de acción entre solicitaciones verticales de columnas y reacciones virtuales provocadas por continuidad en las contra trabes de cimentación.

Suponiendo la contra trabe (ABC) como parte de un sistema de cimentación se observa lo siguiente:

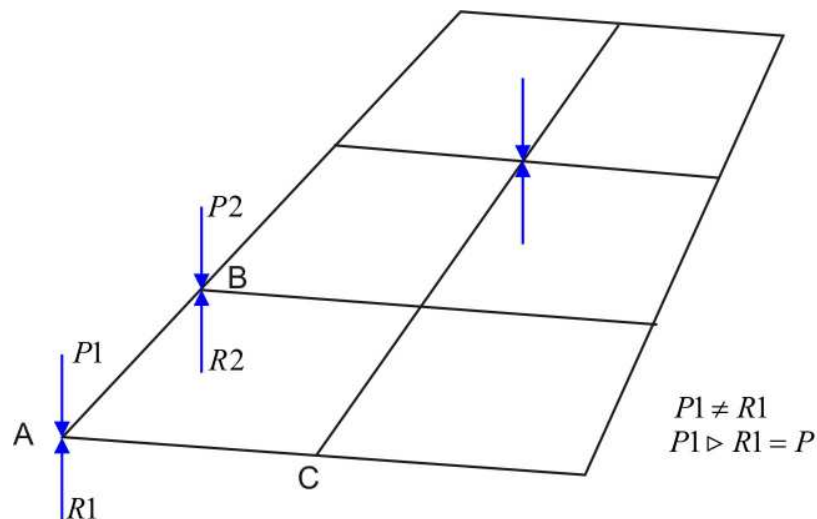


Existe equilibrio total pero no parcial del sistema de fuerzas verticales. El problema a solucionarse consiste en equilibrar las fuerzas normales el plano del

estructura, por lo cual se puede seguir distintos caminos; uno de ellos de ser expuesto por el Sr. Ing. A. Olvera en su libro “**estructuras de concreto**” por un método que designa con el nombre de equilibrio de cortantes.

### MÉTODO: EQUILIBRIO DE CORTANTES

Encontramos una cimentación por plataforma corrida a base de los hace contra trabes coladas ortogonalmente. Al efectuar el equilibrio de fuerzas verticales (carga sobre cimentación y reacciones nudos) posiblemente exista un desequilibrio en los nudos que componen el sistema.



Debido a la diferencia de fuerzas verticales, si se analiza el nudo (A) suponiendo el resto fijos, habrá sufrido un desplazamiento (¡Error! Marcador no definido.) que es posible expresar en función de las características de las contra trabes. En el caso de piezas de sección constante vale:

## Bibliografía

---

1. AYUDAS DE DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO CONFORME AL REGLAMENTO A.C.I. 318-04 (2006) : EDITORIAL NORIEGA EDITORES, QUINTA EDICION.
2. EDIFICIOS DE BAJA ALTURA (1998) : EDITORIAL INSTITUTO MEXICANO DEL CEMENTO Y DEL CONCRETO, A.C., MEXICO, PRIMERA EDICION.
3. GONZALES CUEVAS Y OSCAR M. (1989) : ASPECTOS FUNDAMENTALES DEL CONCRETO REFORZADO, EDITORIAL NORIEGA EDITORES, MEXICO, TERCERA EDICION.
4. G. NAVY, EDWARD (1990) : CONCRETO REFORZADO, UN ENFOQUE BASICO, EDITORIAL PRENTICE HALL HISPANOAMERICANA, S.A., MEXICO, PRIMERA EDICION.
5. H. NILSON ARTHUR AND WINTER GEORGE (2000) : DESIGN OF CONCRETE STRUCTURES, PRINTED BY MC GRAW-HILL, USA.
6. NOTAS DE LAS CLASES DE INGENIERIA CIVIL (1995) : UNAM, MEXICO.
7. PARKER HARRY (1986) : DISEÑO SIMPLIFICADO DE CONCRETO REFORZADO, EDITORIAL NORIEGA EDITORES, MEXICO.
8. PORTLAND CEMENT ASSOCIATION (1995) : EDITED BY S.K. GOSH AND BASILE G. RABBAT, USA, FIRST EDITION.
9. REGLAMENTO DE LAS CONSTRUCCIONES DE CONCRETO REFORZADO DEL A.C.I. 318-04 Y COMENTARIOS (2006) : INSTITUTO MEXICANO DEL CEMENTO Y DEL CONCRETO, MEXICO, PRIMERA EDICION.
10. TREMARI GOMEZ, RAUL (1990) : DISEÑO PRACTICO DE ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO, EDITADO POR LA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE GUADALAJARA.

DETROIT MICHIGAN, UNITED STATES OF AMERICA, ON DECEMBER 4TH, 2005.