Integración de funciones racionales de seno y coseno.

Eleazar José García. eleagarcia95@hotmail.com

1. **Deducción de fórmulas para realizar las sustituciones.**
2. **Teorema.**
3. **Ejercicios resueltos.**
4. **Ejercicios propuestos.**
5. **Respuestas de ejercicios propuestos.**

Deducción de fórmulas para realizar las sustituciones.

Si el integrando es una función racional de $\operatorname{sen} u$ y $\cos u$, se puede reducir a una función racional de z mediante la sustitución $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2} u$.

Con la finalidad de obtener la fórmula para $\boxed{\operatorname{sen} u}$ y $\cos u$ en términos de z se utilizan las identidades siguientes: $\operatorname{sen} u = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} u \cos \frac{1}{2} u$ y $\cos u = 2 \cos^2 \frac{1}{2} u - 1$.

Entonces se tiene,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} u &= 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} u \cos \tfrac{1}{2} u \\
&= 2 \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u \cos^2 \frac{1}{2} u}{\cos \frac{1}{2} u} \\
&= 2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u \frac{1}{\sec^2 \frac{1}{2} u} \\
&= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} u}{1 + \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2} u} \\
&= \frac{2z}{1 + z^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos u &= 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} u - 1 \\
&= \frac{2}{\sec^2 \frac{1}{2} u} - 1 \\
&= \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} u} - 1 \\
&= \frac{2}{1 + z^2} - 1 \\
&= \frac{1 - z^2}{1 + z^2}
\end{aligned}$$

Como $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2} u$, entonces, $dz = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{1}{2} u \, du = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} u\right) du = \frac{1}{2}\left(1 + z^2\right) du$, por lo tanto, $du = \dfrac{2dz}{1 + z^2}$.

Los resultados anteriores se establecen como el siguiente teorema.

Teorema.

Si $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2} u$, entonces, se verifican las siguientes igualdades, las cuales pueden ser usadas para la integración de funciones racionales de seno y coseno:

$$\operatorname{sen} u = \frac{2z}{1 + z^2}, \quad \cos u = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2dx}{1 + z^2}.$$

Ejercicios resueltos.

1) Evalúe $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}$

Solución.

Haciendo el cambio $\operatorname{sen} u=\dfrac{2z}{1+z^2}$, $\cos u=\dfrac{1-z^2}{1+z^2}$, $dx=\dfrac{2dx}{1+z^2}$, entonces,

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}=\int \frac{\dfrac{2\,dz}{1+z^2}}{1+\dfrac{2z}{1+z^2}-\dfrac{1-z^2}{1+z^2}}=\int \frac{dz}{z^2+z}=\int \frac{dz}{z(z+1)}$$

Descompongamos $\dfrac{1}{z(z+1)}$ en fracciones simples :

$$\frac{1}{z(z+1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1} \quad\Rightarrow\quad z(z+1)\left(\frac{1}{z(z+1)}\right)=z(z+1)\left(\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}\right)$$

$$\Rightarrow\quad 1=A(z+1)+Bz \quad\Rightarrow\quad 1=(A+B)z+A$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad A=1 \ \text{ y } \ B=-1$$

Luego,

$$\int \frac{dz}{z(z+1)}=\int\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right)dz=\int \frac{dz}{z}-\int \frac{dz}{z+1}$$

$$=\left(\ln|z|+C_1\right)-\left(\ln|z+1|+C_2\right)+C=\ln|z|-\ln|z+1|+C_1-C_2$$

$$=\ln\left|\frac{z}{z+1}\right|+C_1-C_2=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+1}\right|+C, \qquad C=C_1-C_2$$

Por lo tanto :

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+1}\right|+C \qquad \lozenge$$

2) Calcule $\displaystyle\int \sec x\,dx$

Solución.

Puesto que, $\displaystyle\int \sec x\,dx = \int \frac{dx}{\cos x}$, y $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1+z^2}{1-z^2}$, $dx = \dfrac{2\,dx}{1+z^2}$, entonces:

$$\int \sec x\,dx = \int \left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)\left(\frac{2\,dz}{1+z^2}\right) = \int \frac{2\,dz}{1-z^2} = \int \frac{2\,dz}{(1-z)(1+z)}$$

Descomponer : $\dfrac{2\,dz}{(1-z)(1+z)}$ en fracciones simples :

$$\frac{2}{(1-z)(1+z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z} \quad \Rightarrow$$

$$(1-z)(1+z)\frac{2}{(1-z)(1+z)} = (1-z)(1+z)\left(\frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z}\right) \quad \Rightarrow \quad 2 = A(1+z) + B(1-z)$$

$$\Rightarrow \quad 2 = (A-B)z + (A+B) \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A - B = 0 \\ A + B = 2 \\ \hline 2A \quad = 2 \quad \Rightarrow \quad A = 1 \text{ y } B = 1 \end{array}\right.$$

Luego,

$$\int \frac{2\,dz}{(1-z)(1+z)} = \int \left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}\right)dz$$

$$= \int \frac{dz}{1+z} + \int \frac{dz}{1-z} = \left(\ln|1+z| + C_1\right) + \left(\ln|1-z| + C_2\right)$$

$$= \ln|1+z| + \ln|1-z| + C_1 + C_2 = \ln|(1+z)(1-z)| + C_1 + C_2 = \ln|1-z^2| + C$$

$$= \ln\left|1 - \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}x\right| + C$$

Por ende :

$$\int \sec x\,dx = \ln\left|1 - \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}x\right| + C \qquad \lozenge$$

3) Evalúe $\displaystyle\int \frac{dx}{4\,\text{sen}\,x - 3\cos x}$

Solución.

Haciendo el cambio $\boxed{\text{sen}\,u = \dfrac{2z}{1+z^2},\quad \cos u = \dfrac{1-z^2}{1+z^2},\quad dx = \dfrac{2dx}{1+z^2},}$ entonces:

$$\int \frac{dx}{4\,\text{sen}\,x - 3\cos x} = \int \frac{\dfrac{2\,dz}{1+z^2}}{4\left(\dfrac{2z}{1+z^2}\right) - 3\left(\dfrac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = \int \frac{2\,dz}{3z^2 - 8z - 3} = \int \frac{2\,dz}{(3z+1)(z-3)}$$

$$= \tfrac{1}{5}\int \frac{dz}{z-3} - \tfrac{3}{5}\int \frac{dz}{3z+1} = \tfrac{1}{5}\left(\ln|z-3| + C_1\right) - \tfrac{1}{5}\int \frac{d(3z+1)}{3z+1}$$

$$= \tfrac{1}{5}\ln|z-3| - \tfrac{1}{5}\left(\ln|3z+1| + C_2\right) + \tfrac{1}{5}C_1 = \tfrac{1}{5}\ln|z-3| - \tfrac{1}{5}\ln|3z+1| + \tfrac{1}{5}C_1 - \tfrac{1}{5}C_2$$

$$= \tfrac{1}{5}\ln\left|\frac{z-3}{3z+1}\right| + \tfrac{1}{5}C_1 - \tfrac{1}{5}C_2 = \tfrac{1}{5}\ln\left|\frac{\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 3}{3\,\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + 1}\right| + C, \qquad C = \tfrac{1}{5}C_1 - \tfrac{1}{5}C_2$$

Por consiguiente :

$$\int \frac{dx}{4\,\text{sen}\,x - 3\cos x} = \tfrac{1}{5}\ln\left|\frac{\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 3}{3\,\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + 1}\right| + C \qquad \lozenge$$

Ejercicios propuestos.

Resuelva :

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\text{sen}\,x}$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\text{sen}\,x+\cos x}$ 3) $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\,x\,\cos x}{1-\cos x}dx$ 4) $\displaystyle\int \text{sen}\sqrt{x}\;dx$ 5) $\displaystyle\int \csc x\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{sen}\,x+\text{tg}\,x}$ 7) $\displaystyle\int \frac{\text{cotg}\,x}{3+2\,\text{sen}\,x}dx$ 8) $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\,x}{1+\text{sen}^2 x}dx$ 9) $\displaystyle\int \frac{dy}{5+4\sec y}$ 10) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-2\,\text{sen}\,x}$ 12) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+3\,\text{sen}\,x}$ 13) $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\,x\;dx}{1+\text{sen}^2 x}$ 14) $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\cos x}$ 15) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\text{sen}\,x-\cos x}$

Respuestas de ejercicios propuestos.

1) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{3}}\right)+C$ 2) $\ln\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$ 3) $\cos x+\ln\left|1-\cos x\right|+C$

4) $2\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)-2\sqrt{x}\cos\left(\sqrt{x}\right)+C$ 5) $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right|+C$ 6) $-\frac{1}{4}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right|+C$

7) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{sen}x}{3+2\operatorname{sen}x}\right|+C$ 8) $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x+3-2\sqrt{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x+3+2\sqrt{2}}\right|+C$

9) $\frac{1}{5}y+\frac{4}{15}\ln\left|\frac{3\cos\left(\frac{y}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{y}{2}\right)}{3\cos\left(\frac{y}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{y}{2}\right)}\right|+C$ 10) $x-\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$ 11) $\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-2-\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-2+\sqrt{3}}\right|+C$

12) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{5\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+3}{4}\right)+C$ 13) $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+3-2\sqrt{2}}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+3+2\sqrt{2}}\right|+C$ 14) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$

15) $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1}\right|+C$

Bibliografía

[1] Rabuffetti Hebe T. *Introducción al Análisis Matemático*, décima edición.

[2] Apostol Tom M. *Calculus*, segunda edición.

[3] Larson-Hostetler. *Cálculo con Geometría Analítica*, tercera edición.

Autor:
Eleazar José García
eleagarcia95@hotmail.com
Profesión: Licenciado en Matemática
Profesor de Matemática de 4º y 5º Año dependiente del Ministerio del Poder Popular para la Educación
Profesor (contratado) de Cálculo 1 y 2 de la UNELLEZ-Núcleo San Carlos