INTEGRACIÒN NUMÈRICA DE UNA FUNCIÒN CON LÍMITES DEFINIDOS POR EL MÈTODO DE LA REGLA RECTANGULAR

Ing. Esp. Yamil Armando Cerquera
Facultad de Ingeniería
Universidad Surcolombiana

La Regla Rectangular es uno de los métodos utilizados para resolver integrales definidas en el cálculo numérico.

OBJETIVOS GENERALES

Objetivos: Resolver el problema de cálculo del área bajo la curva entre dos límites conocidos, dividiendo en N sub áreas para calcular su valor, asumiendo cada sub área como un pequeño trapecio.

1. Comprender las bases conceptuales de la integración aproximada.
2. Comprender los rasgos generales de la integración aproximada utilizando el método de los rectángulos.
3. Comprender la aproximación del error por truncamiento de la integración aproximada utilizando el método de los rectángulos, frente al valor exacto.
4. Resolver problemas de integración aproximada utilizando el método de los rectángulos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Conocer la interpretación geométrica de la integral definida.
2. Reconocer que el método de los trapecios representa, geométricamente, el área bajo una función polinomial de primer orden (lineal).
3. Deducir la fórmula de los rectángulos a partir de la interpretación geométrica de la integral definida.
4. Acotar el error cometido en la integración numérica por el método de los rectángulos.
5. Explicar la obtención de fórmulas más precisas para calcular, numéricamente, integrales definidas.
6. Aplicar el método de los rectángulos, para calcular, numéricamente, las aproximaciones de algunas integrales definidas.

OBSERVACIONES PRELIMINARES

Cuando se realiza un experimento, generalmente, se obtiene una tabla de valores que, se espera, tengan un comportamiento funcional. Sin embargo, no se obtiene la representación explícita de la función que representa la regla de correspondencia entre las variables involucradas. En estos casos, la realización de cualquier operación matemática sobre la nube de puntos, que pretenda tratarla como una relación funcional, tropezará con dificultades considerables al no conocerse la expresión explícita de dicha relación. Entre estas operaciones se encuentra la integración de funciones.

Además, es conocido que existen relativamente pocas fórmulas y técnicas de integración, frente a la cantidad existente de funciones que se pueden integrar. Es decir, un gran número de integrales de funciones elementales no puede ser expresada en términos de ellas. Entre estos casos singulares tenemos, a manera de ejemplo:

$$\int e^{x^2}dx, \int \frac{dx}{\ln(x)}, \int \sqrt{1+x^3}\,dx, \int \sin(x^2)dx, \int \sqrt{1+x^4}\,dx, ...$$

Para aclarar la contradicción antes señalada, se debe recordar la condición necesaria para que una función sea integrable. Dicha condición la mencionamos de inmediato, sin demostración:

Proposición 1 (Condición necesaria de Integrabilidad).

Si una función *f* es continua en el intervalo *[a, b]* , entonces *f* es integrable en *[a, b]*.

No obstante que las condiciones de la Proposición 1 son sumamente generales, no se tiene garantía de que, al aplicar los métodos usualmente conocidos para resolver integrales, se pueda encontrar la antiderivada de una función *f(x)* cualquiera, necesaria para obtener la integral definida.

Estos apuntes pretenden ilustrar al lector con una de las técnicas básicas que permiten resolver dicha situación, a través de la denominada “INTEGRACIÓN APROXIMADA, POR EL MÉTODO DE LOS RECTANGULOS”.

Modelo Rectangular: consistente en dividir el área que se desea encontrar en ***n*** sub-áreas en forma de rectángulos.

Para el desarrollo del modelo se toman como referencia las siguientes variables:

n: Número de sub-áreas en las cuales se divide el área a calcular
Δx ó ***dx***: Ancho o base de cada sub-área
li ó ***a***: limite inferior definido para el calculo del área
ls ó ***b***: limite superior definido para el calculo del área.

DESARROLLO:

Integración numérica de una función por el método de rectángulos

La integral definida entre los puntos **a** y **b** de una función continua y acotada ***f(x)*** representa el área comprendida debajo de esa función. En ocasiones es necesario calcular integrales (áreas) de modo numérico, es decir, sin conocer la integral explicita de la función ***f(x)***. Existen varios posibles métodos para calcular esta área. Quizás el más sencillo sea sustituir el área por un conjunto de **n** sub áreas donde cada sub área semeja un pequeño rectángulo elemental de base $dx = (b-a)/n$ y altura h, El área sería:

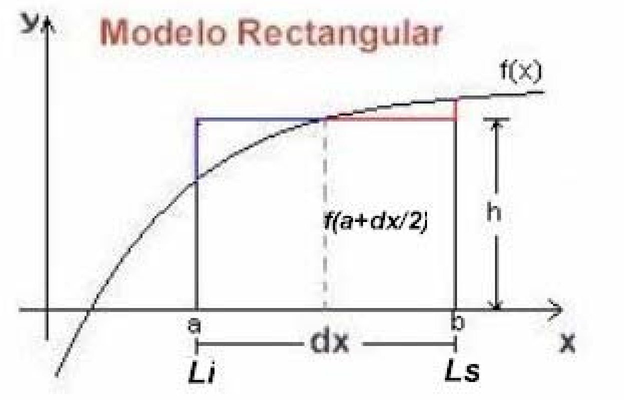

Fig 1.

$area = h * \Delta x$ (Fig 1). Donde h es el valor de la función calculada en el punto medio del área, ó sea $f(a + dx/2)$ y Δx ó dx es el ancho definido para dicha sub área. Nótese que entre mas grande es ***dx*** entonces mayor será el área que se quita y pone al área real que se desea calcular (Área colocada entre la función y las línea azul y área quitada entre la función y la línea roja). Si se toma ***Li*** como limite inferior definido para el cálculo de la integral entonces el punto sobre el eje x para el calculo de ***h*** será: $Li + \Delta x/2$. Teniendo en cuenta lo anterior el área será: $area = \Delta x * f(Li + dx/2)$

Si el área que se desea calcular se divide entre N sub áreas, donde cada una de ellas representa un pequeño rectángulo, entonces el área total será:

Área de primer rectángulo: $A_1 = h_1 * dx = h_1 * \Delta x$, donde h_1 será la función evaluada en la mitad de la sección del primer rectángulo, se podría decir entonces en términos generales que h_1 es igual a la función evaluada en x_1, $h_1 = f(x_1)$. Teniendo en cuanta lo anterior se deduce que $x_1 = (li + dx/2)$ y por lo tanto el área de ese primer rectángulo será:

$$A_1 = \Delta x * f(x_1) = \Delta x * f(li + \frac{\Delta x}{2})$$

Del mismo modo se puede decir que el área del segundo rectángulo es:

$$A_2 = \Delta x / f(x_2) = \Delta x * f(li + 3 * \frac{\Delta x}{2})$$

Área del tercer rectángulo es:

$$A_3 = \Delta x * f(x_3) = \Delta x * f(li + 5 * \frac{\Delta x}{2})$$

Área del i'esimo rectángulo es:

$$A_i = \Delta x * f(x_i) = \Delta x * f(li + (2*i-1)\frac{\Delta x}{2})$$

Área total que será la sumatoria de todas las áreas parciales y quedará así:

$$A_t = \int_{li}^{ls} f(x)dx = \Delta x * \sum_{i=1}^{n} f(li + (2*i-1)*\frac{\Delta x}{2}) \quad (1)$$

La representación gráfica de esta forma de aproximar la integral se presenta en la Fig. 2. Resulta que si **n** se hace muy grande (***dx*** muy pequeño) el error será pequeño.

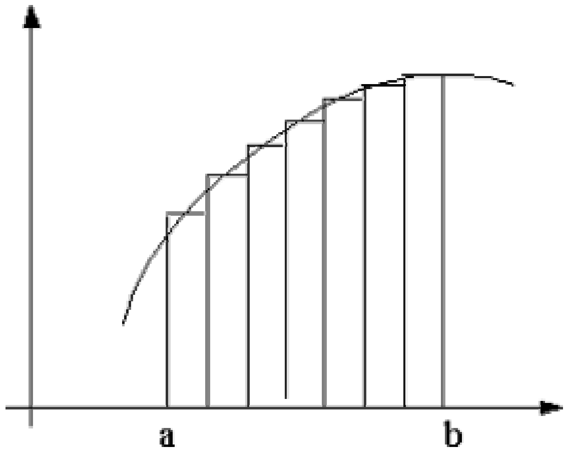

Fig. 2

Ejemplo: Utilizar la regla rectangular para aproximar la integral: $\int_0^1 e^{x^2} dx$.

Tenga en cuenta que el valor real es 1.4626...

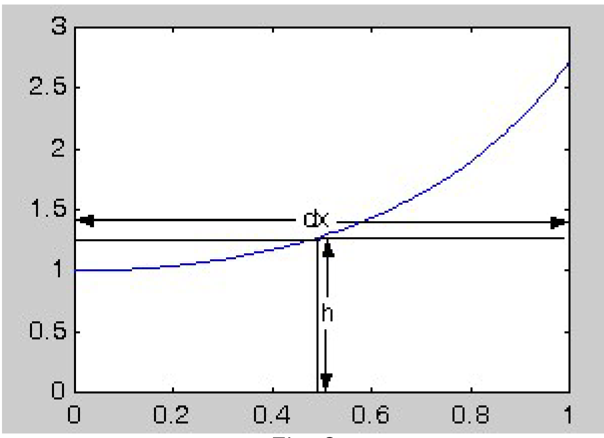

Fig. 3

Solución: Usando la fórmula directamente con los siguientes datos:

$$a = 0$$
$$b = 1$$
$$f(x) = e^{x^2}$$

Si se asume el área como un solo rectángulo, el valor de x_i será 0.5 y por lo tanto se tiene que:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx dx * f(a + dx/2) = 1 * e^{0.5^2} = 1.28402541668774$$

Observando la Fig. 3 y teniendo en cuenta el resultado obtenido con el método rectangular tomando el área como un solo rectángulo (1.2840254..), se puede comprobar que dicho valor es inferior al valor real que es de 1.4626. El valor real es el área bajo la curva, que corresponde a la función dada y el valor calculado de 1.2840… que correspondería a la forma que toma el área asumiéndola como rectángulo.

Es lógico el valor menor, en razón que es mayor el área que se pierde que la que se coloca, al construir el rectángulo (Observe la Fig. 3)

Desarrollado en MatLab se tendría el siguiente resultado.

```
»syms x
»f=exp(x^2);
»integral=int(f)
integral =
       -1/2*i*pi^(1/2)*erf(i*x)
```

ERF Error de la función.
Y = ERF(X) es el error de la función para cada elemento de X. X debe ser real. El error de la función está definido como:

erf(x) = 2/sqrt(pi) * integral desde 0 a x de exp(-t^2) dt. Analice lo anterior.

Ejemplo: Aplicar la regla rectangular para aproximar la integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$ si se subdivide en 5 intervalos.

Solución: En este caso, se identifica n=5, y la partición generada es:

P={0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0}

$dx = (1-0)/5 = 0.2$, Así, aplicando la fórmula de la regla rectangular se tiene que:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 0.2[f(0.1)+f(0.3)+f(0.5)+f(0.7)+f(0.9)]$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 0.2*\left[e^{0.1^2}+e^{0.3^2}+e^{0.5^2}+e^{0.7^2}+e^{0.9^2}\right]$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 0.2*[1.01005+1.09417+1.28403+1.63232+2.24791]$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1.453696$$

Así, se nota que con 5 intervalos, la aproximación no es tan mala. Para hacer cálculos con más sub intervalos, es conveniente elaborar un programa que aplique la fórmula con el número de sub intervalos que se desee y que permita obtener un valor más cercano al real. Debería realizar su propio programa y chequear con 50, 500, 1000, 10000 y 20000 sub intervalos, para observar el comportamiento de la aproximación.

Solución comentada del método de integración Rectangular.

```
#include "stdio.h"
#include "conio.h"
float f(float x);
float area_RECT();
long double li,ls,deltax,xi,area1=0,area2=0,area3=0;
int i,n;
void main()
{  clrscr();
   gotoxy(10,4);printf("CALCULO DE INTEGRALES POR DIFERENTES METODOS");
   gotoxy(10,10);printf("Digite el valor del limite inferior  li: "); scanf("%Lf",&li);
   gotoxy(10,11);printf("Digite el valor del limite superior ls: "); scanf("%Lf",&ls);
   gotoxy(10,12);printf("Digite el numero de Sub Áreas a trabajar n: ");
   scanf("%d",&n);
   dx=(ls-li)/n;
   /* Llamado de la rutina que calcula el área por el método rectangular  */
   area_RECT();
   gotoxy(10,14);printf("el valor de la integral RECT es : %15.10Lf ",area1);
   gotoxy(10,20);printf("Pulse una tecla para terminar ");
   getch();
}
/* Rutina que calcula el área por el método rectangular  */
float area_RECT()
{  i=1;
   while (i<=n)
   {  xi=li+(2*i-1)*dx/2;
      area1+=f(xi);
```

```
    i++;  }
  area1*=dx;
  return(area1);  }

/* La función descrita es de tipo parabólico        f(x) = x^2 - 4                    */
/* Con solo cambiar la función los métodos actúan sobre ella              */
float f(float x)
{ return (x*x-4);  }
```

O si mejor desea utilizar MatLab ó Scilab entonces el código sería así, Se debe aclarar que la función debe estar contenida en un archivo nombrado funcion.m en un directorio que este configurado en el Path del MatLab.

```
clc
format long
% echo on: Si deja activa esta función mostraría cada línea que ejecuta el programa
% La función a evaluar debe estar contenida dentro del archivo 'funcion.m' y se requiere introducir los valores de los límites, como se indica a continuación
pulsa una tecla...
pause
n= input('Digite el  número de sub áreas => n :');
a= input('Digite el Límite inferior => a :');
b= input('Digite el Límite superior => b :');
dx=(b-a)/n;
suma=0;
% Algoritmo para la sumatoria de la regla rectangular de segmentos múltiples
% pulsa una tecla...
pause
for i=1:n
        xi=a+(2*i-1)*dx/2;
        suma=suma+funcion(xi);
end
% pulsa una tecla...
pause
% Forma general de la regla trapezoidal de n sub áreas.
c=suma*dx
```