Una introducción al
Cálculo Fraccionario

Autores: Dr. Pedro Arafet Padilla
MSc. Hugo Domínguez Abreu
Dr. Francisco Chang Mumañ

Facultad de Ing. Eléctrica
Universidad de Oriente
Mayo 2008

Tabla de contenidos

Cálculo fraccionario

1. Introducción

Estamos familiarizados con la idea de las derivadas. La notación usual

$$\frac{df(x)}{dx} \quad \text{o} \quad Df(x), \qquad \frac{d^2f(x)}{dx^2} \quad \text{o} \quad D^2f(x)$$

se comprende fácilmente. Estamos también familiarizados con propiedades tales como:

$D[f(x) + f(y)] = Df(x) + Df(y)$

Pero, ¿cuál sería el significado de $\frac{d^{1/2}f(x)}{dx^{1/2}}$ o $D^{1/2}f(x)$?
Muchos lectores no se han encontrado con derivadas de orden ½ antes, porque no existe aún en los textos comunes.

En 1695 L'Hôpital le preguntó a Leibnitz: -¿Qué ocurre si el orden es ½?-.
Leibnitz responde -"De esta paradoja se extraerán, algún día, consecuencias muy útiles"-.

Lacroix, en 1819, menciona, por primera vez la derivada de orden arbitrario. Más tarde Euler y Fourier trataron el tema, pero sin aplicaciones. En 1823, Abel lo aplicó a la ecuación integral relacionada con el problema de las isócronas. Esto motivó a Liouville (1832) al primer gran intento de una definición formal y consistente de la derivada fraccionaria.
En 1847 Riemann escribió un artículo modificando la definición de Liouville del operador fraccionario que se conoce hoy como la Integral de Riemann – Liouville.
En 1868 A. V. Letnikov escribió el artículo "Theory of differentiation of fractional order".

Desde 1695 – 1974 muchos científicos han contribuido: Lagrange, Laplace, de Morgan, Heaveside, Riesz, Weyl.
En 1974 aparece el primer texto dedicado al cálculo fraccionario: K. B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, 1974.

Hoy existe una vasta literatura sobre el tema llamado Cálculo Fraccionario, Cálculo Fraccional o Cálculo Generalizado (Fractional Calculus, Diferintegral Calculus). Muchos artículos científicos aparecen día a día en el mundo mostrando las más variadas aplicaciones. Las aplicaciones más comunes actualmente se encuentran en Reología, Biología Cuántica, Electroquímica, Teoría de la Dispersión, Difusión, Teoría del Transporte, Probabilidad y Estadística, Teoría del Potencial, Elasticidad, Viscosidad y Teoría de Control Automático. Ya existen paquetes en Matlab para el cálculo fraccionario y para el control automático fraccionario (este último, llamado Ninteger, gratis en internet)

Es el propósito de estas notas introducirnos en el cálculo fraccionario de la misma forma que fue "apareciendo" históricamente.

Antes de usar algunas definiciones formales o teoremas exploraremos la idea de la derivada fraccionaria echando una ojeada a algunos ejemplos de derivadas bien conocidas, de orden n, tales como $D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$ y cambiaremos el número natural n por otros números, por ejemplo, ½. En este sentido, como detectives, trataremos de ver qué estructura matemática se esconde en esta idea. Evitaremos una definición formal de la derivada fraccionaria mientras no exploremos las posibilidades de varias aproximaciones a esta noción.

2. Derivada fraccionaria de la función exponencial

Comencemos examinando las derivadas de la función exponencial e^{ax} debido a su simplicidad.

$D^1 e^{ax} = ae^{ax}$, $D^2 e^{ax} = a^2 e^{ax}$,..., $D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$, donde n es un entero. Podríamos remplazar n por ½ y escribir $D^{1/2} e^{ax} = a^{1/2} e^{ax}$ ¿Por qué no? Por qué no podemos ir más allá y hacer n un número irracional como, por ejemplo, $\sqrt{2}$, o un número complejo tal como 1 + i?

Arriesguémonos y escribamos

$$D^{\alpha} e^{ax} = a^{\alpha} e^{ax} \tag{1}$$

para cualquier valor de α, entero, irracional o complejo. Es interesante considerar el significado de (1) si α fuera un entero negativo. No hay dudas que si α fuera un entero negativo -n, se trataría de la n-ésima integral iterada. De manera que si α es un número real positivo se trata de la derivada y de la integral si α es un número real negativo.

Notemos que aún no hemos dado una definición para la derivada fraccionaria de una función general. Pero, si esta definición se encuentra, querríamos comprobarla en la función exponencial. Es bueno comentar que Liouville comenzó por ahí.

3. Funciones trigonométricas: seno y coseno.

También estamos familiarizados con las derivadas de la función seno:

$$D^0 \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x, \qquad D^1 \operatorname{sen} x = \cos x \qquad D^2 \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$$

Esta función no presenta un patrón claro para encontrar, por ejemplo, $D^{1/2} \operatorname{sen} x$. Sin embargo, trazando la gráfica de esta función se descubre un patrón. Cada vez que derivamos resulta un gráfico del sen x desplazado $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda. De manera que derivando sen x, n veces, se desplaza la gráfica $n\frac{\pi}{2}$ a la izquierda, es decir,

$$D^n \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad D^n \cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Reemplacemos el entero positivo n por un número α arbitrario. Así, obtendremos una expresión de la derivada general de la función seno y, de manera similar, podríamos tratar el coseno.

$$D^\alpha \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\alpha\pi}{2}\right), \qquad D^\alpha \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \tag{2}$$

Después de ver esto, es natural preguntarnos si lo que hemos hecho es consistente con el resultado que obtuvimos para la exponencial. Para esto consultaremos Euler,

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

y usando (1) podemos calcular

$$D^\alpha e^{ix} = i^\alpha e^{ix} = e^{i\alpha\frac{\pi}{2}} e^{ix} = e^{i\left(x+\alpha\frac{\pi}{2}\right)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\alpha\right) + i \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\alpha\right)$$

que corrobora (2).

4. Derivadas de x^α

Veamos ahora las derivadas de las potencias de x. Comencemos con x^p (p entero).

$$D^o x^p = x^p, \quad D^1 x^p = p x^{p-1}, \quad D^2 x^p = p(p-1)x^{p-2}, \ldots\ldots$$

$$D^n x^p = p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)x^{p-n} \tag{3}$$

Multiplicando numerador y denominador de (3) por (p-n)! se obtiene

$$D^n x^p = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)(p-n)(p-n-1)\cdots 1}{(p-n)(p-n-1)\cdots 1} x^{p-n}$$

$$D^n x^p = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n} \tag{4}$$

Esta es la expresión general de $D^n x^p$

Para reemplazar el entero positivo n por un número arbitrario α usamos la función Gamma. Ésta nos da un significado para p! y para (p-n)! en (4), cuando p y n no sean números naturales. La función Gamma fue introducida por Euler en el siglo XVIII para generalizar la noción de z! para valores no enteros de z. Su definición es

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

y tiene la propiedad de que $\Gamma(z + 1) = z!$.

Podemos ahora arreglar (4)

$$D^n x^p = \frac{\Gamma(p+1)x^{p-n}}{\Gamma(p-n+1)} \quad ,$$

que tiene sentido si n no es entero, de manera que podríamos escribir

$$D^\alpha x^p = \frac{\Gamma(p+1)x^{p-\alpha}}{\Gamma(p-\alpha+1)} \tag{5}$$

para cualquier α. Con (5) podemos extender la idea de la derivada fraccionaria de un gran número de funciones.

Dada cualquier función que pueda ser expandida en serie de Taylor en potencias de x.

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$$

Si asumimos que podemos derivar término a término, obtendremos

$$D^\alpha f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n D^\alpha x^n = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha} \tag{6}$$

Esta expresión obtenida es una candidata a constituir una definición de la derivada fraccionaria de una amplia variedad de funciones, aquéllas que pueden ser expandidas en serie de Taylor en potencias de x. Sin embargo, pronto veremos que conduce a contradicciones.

5. Una misteriosa contradicción

Escribamos la derivada fraccionaria de e^x según

$$D^\alpha e^x = e^x \tag{7}$$

Comparemos ahora (7) con (6) para ver si armonizan. De la serie de Taylor se sabe que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Aplicando (6) se obtiene

$$D^\alpha e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \qquad (8)$$

pero (7) y (8) no pueden armonizar a menos que α sea un número entero. Si α es un número entero la parte derecha de (8) será la serie de e^x, con diferente indexado. Sin embargo, si α no es un número entero tenemos dos funciones completamente diferentes. Hemos descubierto una contradicción que históricamente causó grandes problemas. Tal parece que nuestra expresión (1) para la derivada fraccionaria de la exponencial es inconsistente con nuestra fórmula (6) para la derivada fraccionaria de una potencia.

En este momento podríamos preguntarnos ¿qué hacemos ahora? El misterio se resolverá más tarde. Mantengámonos sintonizados.....

6. Integrales iteradas

Hemos estado tratando con derivadas repetidas. Las integrales también pueden repetirse. Pudiéramos escribir

$$D^{-1} f(x) = \int f(x)dx$$

Pero la integral no tiene límites. En lugar de eso, escribiremos

$$D^{-1} f(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad D^{-2} f(x) = \int_0^x \int_0^{t_2} f(t_1)dt_1 dt_2$$

La región de integración es el triángulo de la figura 1. Si intercambiamos el orden de integración, la parte derecha de la figura 1 muestra que

$$D^{-2} f(x) = \int_0^x \int_{t_1}^x f(t_1)dt_2 dt_1$$

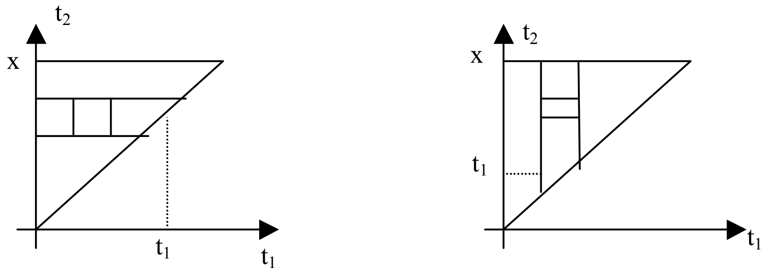

Figure 1

Puesto que $f(t_1)$ no es función de t_2, puede ser extraída de la integral, de manera que

$$D^{-2}f(x) = \int_0^x f(t_1)\left[\int_{t_1}^x dt_2\right]dt_1 = \int_0^x f(t_1)(x-t_1)dt_1$$

o también

$$D^{-2}f(x) = \int_0^x f(t)(x-t)dt$$

Usando el mismo procedimiento podemos demostrar que

$$D^{-3}f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x f(t)(x-t)^2\,dt \qquad D^{-4}f(x) = \frac{1}{2\cdot 3}\int_0^x f(t)(x-t)^3\,dt$$

y, en general,

$$D^{-n}f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\,dt$$

Ahora, como hemos hecho antes, cambiemos –n por una α arbitraria y el factorial por la función gamma. Obtenemos

$$D^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-1}}\,dt \tag{9}$$

A esta integral llegó Liouville y por eso recibe su nombre.

Esta es una expresión general (usando una integral) para derivadas fraccionarias que se puede usar como definición. Pero hay un problema. Si $\alpha > -1$ la integral es impropia. Esto ocurre debido a que cuando $t \to x$, $x - t \to 0$. La integral diverge para toda $\alpha \geq 0$. Cuando $-1 < \alpha < 0$, la integral impropia converge, de manera que si α es negativa no hay problemas. Puesto que (9) converge sólo para α negativa, se trata entonces de una verdadera integral fraccionaria.

Riemann, siendo estudiante, modifica o generaliza la Integral de Liouville cambiando el límite 0 por b, dando paso a la Integral de Riemann – Liouville

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_b^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt \qquad \text{para } \alpha < 0 \tag{10}$$

Pero, esta expresión sólo permite calcular integrales fraccionarias, no derivadas. Riemann plantea primero aplicar la Integral fraccionaria y luego derivar de forma entera, es decir,

$${}_bD_x^{\alpha} f(x) = D^n \, {}_bD_x^{\alpha-n} f(x) \qquad n = [R(\alpha)] + 1$$

Que significa encontrar la derivada de orden $\underline{\alpha}$ con los límites de $\underline{b}$ a $\underline{x}$. Ésta constituye la primera expresión para la derivada fraccionaria de orden real.

Ejemplo.- Se quiere encontrar la derivada de orden $\alpha = 6.2$

$n = [R(6.2)] + 1 = [6.2] + 1 = 7$

Por tanto, primero se deriva con orden:

$\alpha - n = 6.2 - 7 = -0.8$

y luego se deriva con orden entero e igual a 7.

Poco tiempo después Riemann - Liouville cambiaron α por $-\alpha$ y aparece una nueva definición de la derivada fraccionaria con orden fraccionario positivo

$${}_bD_x^{-\alpha} f(x) = {}_bJ_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_b^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \qquad \alpha > 0, \qquad t > 0$$

7. Se resuelve el misterio

¡La derivada fraccionaria tiene límites, pues resulta de una integral!

Ahora comenzaremos a ver qué hicimos mal. No nos sorprende que la integral fraccionaria contenga límites de integración, nadie espera que la derivada fraccionaria contenga límites. Pensamos en la derivada como una propiedad de la función. La derivada fraccionaria, simbolizada por D^{α} incorpora ambas: derivadas (α positiva) e integrales (α negativa). Las integrales tienen límites. Esto quiere decir que la derivada fraccionaria tiene también límites. La razón de la contradicción es que se usaron dos límites diferentes. Ahora podemos resolver el misterio.

Cuáles son los límites que trabajarán para la exponencial en (1). Recordemos que queremos obtener

$$ {}_{b}D_{x}^{-1}e^{ax} = \int_{b}^{x} e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} \tag{11} $$

¿Qué valor de b nos permitirá obtener esa respuesta? Dado que la integral (11) es realmente una integral

$$ \int_{b}^{x} e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}e^{ab} $$

obtendríamos la respuesta que queremos cuando $\frac{1}{a}e^{ab} = 0$

Esto es así cuando ab = -∞. De manera que si <u>a</u> es positivo entonces b = -∞. Este tipo de integral, con el límite inferior de -∞, es denominada derivada fraccionaria de Weyl. En la notación (10) podemos escribir (1) como

$$ {}_{-\infty}D_{x}^{\alpha}e^{ax} = a^{\alpha}e^{ax} $$

Ahora, qué límites servirán para la derivada de x^{p} en (5). Tenemos

$$ {}_{b}D_{x}^{-1}x^{p} = \int_{b}^{x} x^{p}dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{b^{p+1}}{p+1} $$

Otra vez queremos $\frac{b^{p+1}}{p+1} = 0$. Esto es el caso en que b = 0. Concluimos que (5) se debe escribir de una forma más clara

$$ {}_{0}D_{x}^{\alpha}x^{p} = \frac{\Gamma(p+1)x^{p-\alpha}}{\Gamma(p-\alpha+1)} $$

De manera que la expresión (5) para $D^{\alpha}x^{p}$ tiene el límite inferior cero incorporado. Sin embargo, la expresión (1) para $D^{\alpha}e^{ax}$ tiene -∞ como límite inferior. Esta discrepancia es por lo que (7) y (8) no armonizan. En (7) calculamos ${}_{-\infty}D_x^{\alpha}e^{ax}$ y en (8) calculamos ${}_{o}D_x^{a}e^{ax}$.
Si se quisiera continuar con el estudio, recomendamos lo que escribió Miller, así como el excelente libro de Oldham and Spanier.

8. Derivada fraccionaria según Grunwald-Letnikov

En 1868, Grunwald-Letnikov dieron otra definición de Derivada Fraccionaria partiendo de la definición formal de derivada entera.

Se conoce que

$$D^{1}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Generalizando

$$D^{n}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m}\binom{n}{m}f(x-mh)}{h^{n}}$$

donde $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Sustituyendo n por α y sabiendo que

$\Gamma(z + 1) = z!$.

$${}_{a}D_x^{\alpha}f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-\alpha}\sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}}(-1)^{m}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\Gamma(\alpha-m+1)}f(x-mh) \qquad \text{para } \alpha > 0$$

Existe otra definición para $\alpha \le 0$.

Por suerte se puede probar que los resultados de Riemann Liouville y Grunwald-Letnikov son equivalentes.

9. Derivada fraccionaria según Caputo (1967).

Caputo invierte el orden de la derivación en el resultado de Riemann – Liouville y aparece otra alternativa para la derivada fraccionaria

$$ {}_bD_x^{\alpha} f(t) = D^{\alpha-n} D^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_b^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \qquad n-1 < \alpha < n; \qquad n \in N $$

10.Media derivada de una función simple

Como hemos visto, se pudiera calcular la derivada de

$$ f(x) = x^n $$

según

$$ \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha} $$

Calculemos ahora la derivada de orden $\alpha = \frac{1}{2}$ de f(x) = x, es decir, n = 1.

$$ \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)} x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} $$

De manera que

$$ \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} $$

Obtengamos la primera derivada repitiendo este proceso

$$ \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)} x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1)} = 1 $$

Era el resultado esperado, es decir,

$$ \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} (x) = 1 $$

11.Derivada fraccionaria de una constante

Pudiéramos encontrar, por ejemplo, la derivada fraccionaria de f(x) = 1.

Ya conocemos que

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} x^{n} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha}$$

Supondremos $f(x) = x^{n}$ con n = 0

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}(x^{0}) = \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}(1) = \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0-\alpha+1)} x^{0-\alpha} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Si se quisiera encontrar, por ejemplo, la derivada de orden $\alpha = \frac{1}{2}$ de f(x) = 1, sería

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}(1) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

<u>Derivada de una constante C</u>

Ahora la derivada de orden $\frac{1}{2}$ de C sería

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}(Cx^{0}) = C\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}(1) = \frac{C}{\sqrt{\pi x}}$$

12. Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de una función

Las transformadas de Fourier y Laplace, que permiten transformar del dominio tiempo al dominio frecuencia, pueden ser usadas para obtener generalizaciones de la derivada válida para funciones que siguen tales transformaciones.

La Transformada de Laplace se define según

$$L[f(t)] = F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Y la Transformada Inversa

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

Una importante propiedad de la Transformada de Laplace se refiere a la n – ésima derivada de la función f(t).

$$L[D^n f(t)] = s^n L[f(t)] - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} f^{(i)}(0)$$

Si las condiciones iniciales son nulas (los términos de la sumatoria son cero) se obtiene una expresión simple

$$L[D^n f(t)] = s^n L[f(t)] = s^n F(s)$$

Generalizando

$$L[D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s)$$

De manera que la derivada generalizada se puede ahora expresar como

$$D^\alpha f(t) = L^{-1}\{s^\alpha L[(f(t)]\}$$

Un resultado muy interesante, pues aparece una nueva expresión para la derivada fraccionaria de una función f(t).

Teniendo en cuenta el resultado de la derivada fraccionaria de la exponencial

$$D^\alpha e^{at} = a^\alpha e^{at}$$

se puede comprobar la generalización de la derivada anterior.

Se sabe que $f(t) = L^{-1}\{L[f(t)]\}$, por tanto

$$D^\alpha f(t) = D^\alpha L^{-1}\{L[f(t)]\} = D^\alpha\left(\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\,ds\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} D^\alpha e^{st}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\,ds = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} s^\alpha e^{st}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\,ds =$$

$$D^\alpha f(t) = L^{-1}\{s^\alpha L[f(t)]\}$$

Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de una función con condiciones iniciales no nulas

Habíamos escrito

$$L[D^n f(t)] = s^n L[f(t)] - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} f^{(i)}(0)$$

Generalizando este resultado para cualquier orden $\alpha > 0$. Sea m el menor número natural mayor o igual a α

$$L[D^{\alpha} f(t)] = L[D^m (D^{-m-\alpha} f(t)] = s^m [D^{-m-\alpha} f(t)] - \sum_{i=1}^{m-1} s^{m-i-1} D^i [D^{-(m-\alpha)} f(t)\,|_{t=0} =$$

$$= s^m [s^{-(m-\alpha)} F(s) - \sum_{i=1}^{m-1} s^{m-i-1} D^{i-(m-\alpha)} f(0) = s^{\alpha} F(s) - \sum_{i=1}^{m-1} s^{m-i-1} D^{i-(m-\alpha)} f(0)$$

Finalmente

$$L[D^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha} F(s) - \sum_{i=1}^{m-1} s^{m-i-1} D^{i-(m-\alpha)} f(0)$$

Con este resultado se pueden generalizar los teoremas del valor inicial y final

$$f^{\alpha-1}(0) = \lim_{s\to\infty} s^{\alpha} F(s) \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$f^{\alpha-1}(\infty) = \lim_{s\to o} s^{\alpha} F(s) \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

13.Transformada fraccionaria de Fourier

Se conoce que la transformada entera de Fourier tiene la forma

$$F[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t)dt$$

y la Transformada inversa

$$F^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(\omega)d\omega$$

Esta transformada tiene una propiedad análoga para la n – ésima derivada

$$F[D^n f(t)] = (j\omega)^n F[f(t)]$$

Y la derivada puede generalizarse, de manera que esta propiedad se mantiene cierta para un orden no entero α. ($m \geq \alpha$). Entonces

$$F[D^\alpha f(t)] = (j\omega)^\alpha F[f(t)]$$

Por tanto aparece una nueva definición de derivada fraccionaria

$$D^\alpha f(t) = F^{-1}\{(j\omega)^\alpha F[f(t)]\}$$

Se pudiera demostrar esta nueva definición de la Derivada Fraccionaria de la misma forma que con la transformada de Laplace.

En estas dos generalizaciones se pueden determinar los límites de la derivada. En el caso de la Transformada de Laplace se trata de una derivada generalizada de Riemann – Liouville con el límite inferior 0. Mientras en el caso de la transformada de Fourier se trata de una derivada fraccionaria de Weyl.

Esas nuevas definiciones de la derivada generalizada permiten hacer los cálculos más cómodamente. Un ejemplo donde esto se muestra es el cálculo de las derivadas fraccionarias de orden 0, 0.1, 0.2,…. 4 de la función conocida como Campana de Gaus realizado en Matlab y que constituye el Anexo # 1.

14.Convolución

Lo visto hasta ahora sugiere que la derivada fraccionaria sea formulada en términos de convolución. El siguiente desarrollo muestra cómo, después de todo, la derivada fraccionaria de una función es su convolución con cierta función

$$\phi_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

La convolución de Laplace de esta función con f(x) nos resulta la derivada de Liouville de orden α .

$$\phi_\alpha(x) * f(x) = \int_0^x \phi_\alpha(x-t) f(t)dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} f(t)dt = D^{-\alpha} f(x)$$

Esto permite encontrar resultados de forma muy simple. Por ejemplo, si se quiere encontrar

$$L(t^{\alpha}) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \qquad \rightarrow \qquad L[\Phi_{\alpha}(t)] = L\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) = s^{-\alpha}$$

Y, como la transformada de Laplace de la convolución de dos funciones es el producto de las transformadas de Laplace de estas dos funciones, en el caso de que f(x) cumple los requerimientos conocidos, pudiéramos encontrar, de otra forma, la expresión de la derivada fraccionaria de una función f(x).

$$\Phi_{\alpha}(x) * f(x) = \int_0^x \Phi_{\alpha}(x-t)f(t)dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} f(t)dt = D^{-\alpha}f(x)$$

Entonces la transformada de la función $\Phi_{\alpha}(x)$

$$L\left(x^{\alpha}\right) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha+1}} \qquad \Rightarrow \qquad L\left(\Phi_{\alpha}(x)\right) = L\left\{\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\} = t^{-\alpha}$$

15. Fórmula Integral de Cauchy

A través de la Fórmula Integral de Cauchy también se puede arribar a la Derivada Fraccionaria, pues ésta permite realizar integraciones sucesivas.

$$F_{a,n}(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau \qquad t > a\ ;\ n \in Z_{>1}$$

La Fórmula de Cauchy es una integral de Convolución donde el núcleo de la convolución es

$$\Phi_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$F_{a,n}(t) = \Phi_{a,n}(t) * f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau$$

Generalizando, si $\alpha \in R_{>0}$ se puede definir

$$D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau$$

16. Derivada fraccionaria de funciones continuas temporales

En lugar de partir de una definición de la derivada fraccionaria vamos a invertir el problema y tomar la Transformada de Laplace como punto de partida. Intentaremos extender la secuencia:

$s^{-n} \cdots, s^{-2}, s^{-1}, 1, s, s^2, \cdots, s^n$

con el fin de incluir otros tipos de exponentes, en general, reales (e, incluso, complejos). Se ve inmediatamente que existen dos formas de obtener esta extensión dependiendo de la selección de la región de convergencia de la Transformada de Laplace (semiplanos derecho e izquierdo).

Comencemos por considerar ambos casos con potencias enteras y obtengamos las inversas correspondientes. Con estos casos formamos la siguiente tabla donde $\delta(t)$ es la función impulso de Dirac y u(t) es la función escalón de Heaviside.

	$\cdots$	s^{-n}	$\cdots$	s^{-2}	s^{-1}	1	s	s^2	$\cdots$	s^n	$\cdots$
causal Re(s) > 0	$\cdots$	$\frac{t^{n-1}u(t)}{(n-1)!}$	$\cdots$	tu(t)	u(t)	$\delta(t)$	$\delta'(t)$	$\delta''(t)$	$\cdots$	$\delta^{(n)}(t)$	$\cdots$
anti-causal Re(s) < 0	$\cdots$	$-\frac{t^{n-1}u(-t)}{(n-1)!}$	$\cdots$	-tu(-t)	u(-t)	$\delta(t)$	$\delta'(t)$	$\delta''(t)$	$\cdots$	$\delta^{(n)}(t)$	$\cdots$

Para obtener la diferintegración de una función dada sólo tenemos que establecer la convolución de ésta con la función presentada en cada fila.

Esto equivale a decir que la diferintegración de orden n (n entero) está dada por

$$f^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta^{(n)}(t-\tau)d\tau$$

donde $\delta^{(n)}(t)$ está dada, en el caso causal, por

$$\delta^{(n)}(t) = \begin{cases} \text{La } n-\text{ésima derivada de } \delta(t) & \text{si } n > 0 \\ \dfrac{t^{-n-1}u(t)}{(-n-1)!} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Para definir la derivada fraccionaria debemos generalizar para el caso de n no entera. Precisemos primero el significado de $\delta^{(\alpha)}(t) = L^{-1}(s^{\alpha})$. En el caso general, $\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + \nu \ (0 \le \nu < 1)$, de manera que solo tenemos que considerar el caso $0 < |\alpha| < 1$, pues $s^{\alpha} = s^{\lfloor \alpha \rfloor + \nu} = s^{\lfloor \alpha \rfloor} s^{\nu}$.

$$\delta^{(\alpha)}(t) = \delta^{\lfloor \alpha \rfloor}(t) * \delta^{(\nu)}(t)$$

Y la solución sería

$$\delta_{+}^{(\alpha)}(t) = \frac{t^{-\alpha-1}u(t)}{\Gamma(-\alpha)}$$ para el caso causal.

Es fácil demostrar que

$$\delta_{-}^{(\alpha)}(t) = \frac{t^{-\alpha-1}u(-t)}{\Gamma(-\alpha)}$$ es la solución para el caso anticausal.

En lo adelante consideraremos el caso causal y usaremos la notación $D^{\alpha}x(t) = x^{(\alpha)}(t)$, donde x(t) es una función de orden exponencial con Transformada de laplace X(s). Presentaremos tres interesantes propiedades de las que posee la diferintegración.

- Propiedad de semi-grupo

$$D^{\alpha}D^{\beta}x(t) = x(t) * \delta^{\alpha}(t) * \delta^{(\beta)}(t) = x(t) * \delta^{(\alpha+\delta)}(t) = D^{\alpha+\beta}x(t)$$

Si $\alpha = -\beta$ podemos concluir que la diferenciación fraccionaria y la integración fraccionaria son operaciones inversas, tal como suponíamos.

- Propiedad de la generalización de la fórmula de Cauchy

$$L[t^{\alpha}x(t)u(t)] = (-1)^{\alpha}X^{\alpha}(s)$$

con

$$X^{\alpha}(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi j}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty}(z-s)^{-\alpha-1}X(z)dz \qquad 0 < a < \mathrm{Re}(s)$$

- Propiedad de la diferintegración del producto de dos funciones

$$D^{\alpha}[x(t)\cdot y(t)] = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{(\alpha-k)}(t)y^{(k)}(t) \qquad \binom{\alpha}{k} = \frac{(-1)^{k}(-\alpha)^{k}}{k!}$$

Ésta es la fórmula de Leibnitz para la diferintegración del producto de dos funciones.

Hasta ahora hemos considerado diferintegración de funciones con Transformada de Laplace donde se excluyen, por ejemplo, la sinusoide definida en todo el tiempo u otras señales similares que tienen transformada de Fourier, pero no de Laplace.

Comenzaremos por notar que la Transformada de Fourier de la función Signo es $F[\mathrm{sgn}(t)] = \dfrac{2}{j\omega}$.

Con esto podemos presentar una tabla similar a la anterior.

$\cdots$	$(j\omega)^{-n}$	$\cdots$	$(j\omega)^{-2}$	$(j\omega)^{-1}$	1	$j\omega$	$(j\omega)^{2}$	$\cdots$	$(j\omega)^{n}$	$\cdots$
$\cdots$	$\frac{1}{2}\frac{t^{n-1}\,\mathrm{sgn}(t)}{(n-1)!}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}t\cdot\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$	$\delta(t)$	$\delta'(t)$	$\delta''(t)$	$\cdots$	$\delta^{(n)}(t)$	$\cdots$

Esta tabla nos sugiere la siguiente definición de la diferintegración de $\delta(t)$.

$$\delta_0^{(\alpha)}(t) = \frac{t^{-\alpha-1}\,\mathrm{sgn}(t)}{2\Gamma(-\alpha)}$$

Esta fórmula puede ser considerada como el significado aritmético de la diferintegración causal y anticausal si extendemos su región de convergencia de manera que incluya el eje imaginario.

17. Derivada fraccionaria de funciones periódicas

Enfrentemos el problema de la derivada fraccionaria de una función periódica $x_p(t)$. Estas funciones no tienen Transformada de Laplace, pero si tienen Transformada de Fourier. Una función periódica dada, con período T, puede ser considerada como una suma de la forma básica con versiones con diferentes atrasos. La expresión matemática sería

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

Que nos lleva a

$$D^{\alpha} x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^{(\alpha)}(t-nT) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_o^{(\alpha)}(t-nT)$$

Lo que muestra que la diferintegración de una función periódica puede ser obtenida por la convolución de ella con la diferintegración de la señal “peine”. Para obtener la correspondiente serie de Fourier debemos encontrar la diferintegración de $e^{j\omega_0 t}$ para $t \in R$

$$[e^{j\omega_o t}]^{(\alpha)} = (j\omega_o)^{\alpha} e^{j\omega_o t}$$

$$F[e^{j\omega_o t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_o)$$

Lo que nos conduce a

$$[e^{j\omega_o t}]^{(\alpha)} = F^{-1}[2*\pi(j\omega)^{\alpha}\delta(\omega-\omega_o)]$$

Transformando por Fourier la derivada fraccionaria de función periódica

$$F[D^{\alpha}x_p(t)] = (j\omega)^{\alpha}X_p(\omega) = X(\omega)(j\omega)^{\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega nT} = \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega)(j\omega)^{\alpha}\delta(\omega-\frac{2\pi n}{T}) =$$

$$F[D^{\alpha}x_p(t)] = (j\omega)^{\alpha}X_p(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\frac{2\pi n}{T})(j\frac{2\pi n}{T})^{\alpha}\delta(\omega-\frac{2\pi n}{T})$$

La transformada inversa de Fourier sería

$$D^{\alpha}x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(jn\omega_o)^{\alpha}C_n e^{jn\omega_o t}$$

Generalizando así la serie ordinaria de Fourier.

18. La función de Mittag – Leffler

En 1905 Mittag – Leffler (M-L) define la función de dos parámetros $E_{\alpha,\beta}(t)$ con E mayúscula recordando la función e de Euler.

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \qquad \alpha,\beta > 0$$

Y para un parámetro, con $\beta = 1$

$$E_{\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \qquad \alpha > 0$$

Esta función de M-L se comporta como una solución natural de ecuaciones diferenciales lineales fraccionarias, es la equivalente a la exponencial de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias. Se trata, en fin, de una generalización de la exponencial, pues

$$E_{1,1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} = e^t$$

Una función M-L que nos interesa es

$$E_\alpha(-t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

pues, su Transformada de Laplace es

$$L\left[E_\alpha(-t^\alpha)\right] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1}$$

Se podría encontrar una expresión más general

$$L\left[E_\alpha\left(\left(-\frac{t}{b}\right)^\alpha\right)\right] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + b^{-\alpha}}$$

Si hacemos $a = b^{-\alpha}$ con b>0; a>0 resulta

$$L\left[E_\alpha\left(\left(-\frac{t}{b}\right)^\alpha\right)\right] = L\left[E_\alpha(-b^{-\alpha}\cdot t^\alpha)\right] = L\left[E_\alpha(-at)\right] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + a}$$

19. Derivada fraccionaria de la exponencial causal

Este caso es excepcionalmente importante, pues aparece en el cálculo de las respuestas a impulso y escalón de sistemas lineales causales (no consideraremos el caso de derivación entera). Tenemos que

$$D^\alpha[e^{at}\cdot u(t)] = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha-1} e^{a\tau} d\tau = e^{at}\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^t \tau^{-\alpha-1} e^{-at} d\tau \qquad t \ge 0$$

Representaremos esta función por $E_\alpha(t,a)$, con $E_0(t,a) = e^{at}u(t)$, $E_\alpha(t,0) = \delta^{\alpha-1}(t)$**.** La regla generalizada de Leibnitz nos permite obtener directamente la serie de potencias para $E_\alpha(t,a)$. Solo debemos hacer x(t) = u(t) y y(t) = e^{at} en la diferintegración de un producto (ver esto)

Entonces, como $u^{(\alpha)}(t) = \delta^{(\alpha-1)}(t) = \dfrac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ (El impulso unitario es la derivada del escalón unitario)

$$E_\alpha(t,a) = e^{at}\sum_0^\infty \binom{\alpha}{k}\frac{t^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)}a^k$$ que, después de alguna manipulación se obtiene

$$E_\alpha(t,a) = t^{-\alpha}e^{at}\sum_0^\infty \frac{(-1)^k(at)^k}{k!(k-\alpha)}u(t)$$

Esto muestra que la derivada fraccionaria de la exponencial causal no es continua en el origen y tiende al infinito. Esto tiene importantes implicaciones en la aplicación a sistemas lineales. La Transformada de Laplace se puede obtener fácilmente

$$L[E_\alpha(t,a)] = \frac{s^\alpha}{s-a} \qquad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$$

Como Re(s) > Re(a), entonces podemos trabajar en la región $|s| > |a|$ y se puede escribir

$$L[E_\alpha(t,a)] = \sum_0^{+\infty} a^n s^{\alpha-n-1} \qquad |s| > |a|$$

que es un caso especial del teorema de Hardy, que plantea:

Sea la serie

$$F(s) = \sum_0^\infty a_n\Gamma(\alpha+n+1)s^{-\alpha-n-1}$$

Es convergente para Re(s) > s_o > 0 y $\alpha > -1$. Las series

$$f(t) = \sum_0^\infty a_n t^{a+n}$$

Converge para toda t > 0 y F(s) = L[f(t)]

Anexo 1

```
function [y] = fderiv(d,r,h)
% Calcula la derivada fraccionaria de una función dada como un vector
% Esta función calcula la derivada fraccionaria de order “d” de la
% función r(t). Se asume que el vector “r” contiene las muestras
% de la señal r(t) continua a la cual le calcularemos la
% derivada fraccionaria. “h” es el período de muestreo de r(t)
%  y debe ser suficientemente pequeña en el sentido del teorema
% de muestreo de Nyquist.
% “y(t)” es la derivada numérica de r(t) con el mismo muestreo de r(t)
% La derivada se realiza con la definición de Grünwald-Letnikov.
% El primer elemento del vector "r", i.e. r(1),es siempre cero.
% d     :     orden de la derivada fraccionaria
% r     :     señal muestreada a derivar
% h     :     período de muestreo

temp = 0;
for i=1:length(r)
   for j=0:i-1
      temp = temp+(-1)^j*(gamma(d+1)/(gamma(j+1)*gamma(d-j+1)))*r(i-j);
   end
   y(i) = temp;
   temp = 0;
end
y = y/(h^d);
```

Anexo 2

```
function [numF,denF]=aproximafraccional(alfa,w,nb,na)
%  Encuentra una función de transferencia entera que se
%  aproxima a una función de transferencia fraccionaria deseada
% [numF,denF]=aproximaFraccional(alfa,w,nb,na)
%    -10dec < w < +10dec   del w0
%    alfa>0 => Derivada.     alfa<0  =>   Integración
%    nb = > orden del numerador.
%     na => orden del denominador  nb=na-1
%    sys = tf(numF,denF)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 1. Definición de la función de transferencia aproximada
j = sqrt(-1);
G = zeros(size(w));
for i=1:length(w)
   G(i) = ((exp(j*(pi/2)*alfa))*(w(i)^alfa));
end
% 2. Aproximación en frecuencias
[numF,denF] = invfreqs(G,w,nb,na);
```

Anexo 3

```
%%% Derivada fraccionaria (10/3/07)
%%% Calcula y traza las graficas de las derivadas
%%%fraccionarias desde 0 : 0.1 :  4 de la Campana de Gaus

clear all;
set( gcf, 'Renderer', 'zbuffer' );

dim     = 256;
ramp    = [-dim:dim-1];
ramp    = pi * ramp/dim;
f       = exp( -(ramp.^2)/(0.5) );          % Gaus
f       = f - mean(f);                      % valor medio
F       = fftshift(fft(f));             % Transformada de Fourier
%%% orden de la derivada fraccionaria
for n = 0 : 0.1 : 4
        Fn      = (j * ramp).^n .* F;           % multiplicamos por ramp^n
        fn      = ifft( fftshift(Fn) );         % Transformada inversa de Fourier
        if( mean( abs(imag(fn)) ) > 1e-5 )      % Para señales reales
          fprintf( 1, 'Componente imaginario no cero (%f)\n', mean(abs(imag(fn))) );
          return;
        end
        fn      = fn / max(abs(fn));            % Normaliza

        t = sprintf( '%0.2f', n );              % PLOT...
        plot( real(fn) );
        text( 20,1.0, sprintf( '%0.2f', n ) );
        axis( [0 2*dim -1.2 1.2] ); axis square;
        h = line( [dim dim], [-1.2 1.2] );
        set( h, 'LineStyle', ':' );
        drawnow;
   if (n==fix(n)) & (n<4)
      pause
   end

end
```