Multiplicadores de Lagrange

R.Aguilar, A. Dorgathen
Universidad Privada Boliviana

21 de agosto de 2006

Resumen

En este trabajo se analizaran los máximos y mínimos de una función de 3 variables utilizando el método de Lagrange. Es un programa realizado en Máxima y Gnuplot que demostrarán su utilidad en el area de las matemáticas. Este trabajo no calcula los máximos o mínimos en funciones cíclicas o de grado mayor al segundo.

1 Introducción

La determinación de los puntos críticos, que pueden ser máximos o mínimos de funciones de varias variables: ϕ(n) sujetas a funciones restrictivas: γ(n); puede efectuarse a partir de otra función de la forma

$$F = \phi(x, y) + \lambda\gamma(x, y) \tag{1}$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange. Para el caso de funciones de dos variables n=(x,y); se analizan la función ϕ(x,y) sujeta a la restricción de $\gamma(x, y)$=0; se conforma la ecuación (1).

2 Puntos Críticos

Se llaman puntos críticos de una función, a aquellos puntos donde las derivadas parciales son cero o no existen. Los extremos de una función que pueden ser máximos o mínimos[1], se representan en los puntos críticos de la misma, sin embargo no necesariamente en cada punto crítico, se tendrá un extremo. Para determinar tal situación se recurre a diversos medios los cuales ya estan programados en el trabajo.

Resultado	Interpretación
mayor a 0	tiene máximos y mínimos
menor a 0	tiene punto de ensilladura
igual a 0	No existe conclusión

Tabla 1: Interpretación del hessiano

3 Método de Lagrange

Entonces: F posee tres variables: (x,y,λ); sus puntos críticos, se determinan resolviendo el sistema el sistema de ecuaciones que conforman las derivadas parciales

3.1 Como saber si la función tiene o no máximos y mínimos

Para saber si la función tiene máximos o mínimos se debe proceder a realizar el Hessiano que es el determinante de una matriz con derivadas de la función en ella.

Para obtener el Hessiano se saca el determinante de esta matriz si el resultado es:

3.2 Como saber si se tiene un máximo o un mínimo

Para saber si se tiene un máximo o un mínimo debe seguir la siguiente relación:

Si la segunda derivada de la función es mayor a cero se tiene un mínimo. Si la segunda derivada de la función es menor a cero se tiene un máximo.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0; \frac{\partial F}{\partial y} = 0; \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \qquad (2)$$

Conociendo el punto crítico se sarán las condiciones o criterios, que determinaran la existencia de extremos y su determinación como máximos y mínimos.

4 Programa

Es un programa producido en Máxima, que se basa en derivadas parciales, gráficas en gnuplot, matrices y operadores, diferentes comandos de programación, etc. Lo que se quiso lograr al programar máximos y mínimos fue poder obtener estos datos importantes de una función de 2 variables observar la gráfica de esta variable poder determinar si tiene máximos o mínimos, un punto de ensilladura o simplemente no se la puede estudiar. El programa también reconocerá si el punto obtenido es un máximo o un mínimo.
Dicho programa es el siguiente:

mi(fx,gx):=block([y],[u],
Aqui se introduce la función y su restricción.
plot3d(fx,[x,-10,10],[y,-10,10]),
Este es el comando que grafica la función.
b:diff(fx,x,2),
print(diff(fx,x,2)),
c:diff(diff(fx,x),y),
print(diff(diff(fx,x),y)),
d:diff(diff(fx,y),x),
print(diff(diff(fx,y),x)),
e:diff(fx,y,2),
print(diff(fx,y,2)),
Estos comandos realizan revivadas.
r:determinant(matrix([b,c],[d,e])),
print("hessiano",r),
Realiza el Hessiano.
if r>0 then
print("existen maximos y minimos"),
if r<0 then
print("punto de ensilladura"),
if r=0 then print("se debe realizar otro análisis"),
Da la interpretación del Hessiano.
a:fx+gx*h,
b:diff(a,x),
print(b),
c:diff(a,y),
print(c),

f:solve([b=0,c=0,gx=0],[x,y,h]),
print(f),
Aqui se determinan los máximos y mínimos.
e:diff(b,x),
if e>0 then
print("minimo")
else print("maximo"),
Dice si es un Máximo o un mínimo.
eq:fx,
subst(f,eq),
print("z",subst(f,eq))
Sustituye el máximo o el mínimo encontrado en la función original.);

5 Ejemplos

5.1 Ejemplo 1

Para la función $\phi(x)$=x^2+y^2, sujeta a la restricción x+y=2.
Hallar sus máximos y mínimos. En el programa introducimos las funciones como mifunc(x^2+y^2,x+y-2); El output nos dará los siguientes resultados: Hessiano 4 lo que quiere decir que existen máximos y mínimos en [[x=1, y=1, h=-2]] Los puntos anteriores nos dan un resultado mínimo en z de 2.

5.2 Ejemplo 2

Para la función $\phi(x)$=3x^2+4y^2-xy, sujeta a la restricción 2x+y=42.
Hallar sus máximos y mínimos. En el programa introducimos las funciones como mifunc(3x^2+4y^2-xy,2x+y-42); El output nos dará los siguientes resultados: Hessiano 47 lo que quiere decir que existen máximos y mínimos en [[x=17, y=8, h=-47]] los puntos anteriores nos dan un resultado mínimo en z de 987.

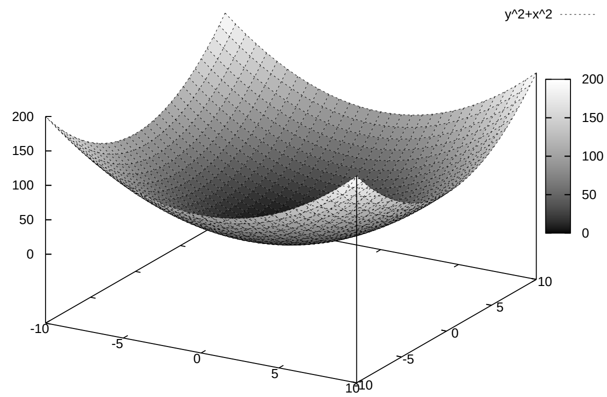

Figura 1: Ejemplo1 $\phi(x)$=x^2+y^2

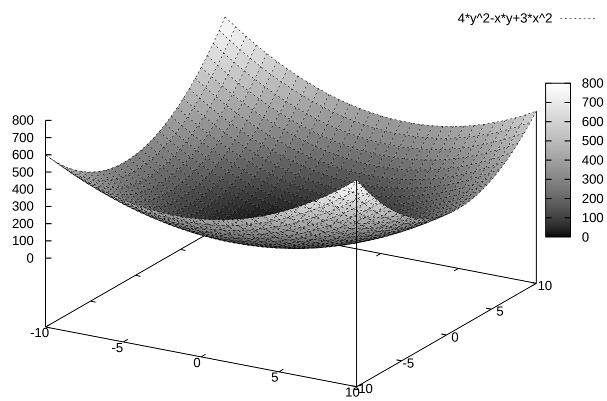

Figura 2: ejemplo2 $\phi(x)$=3x^2+4y^2-xy

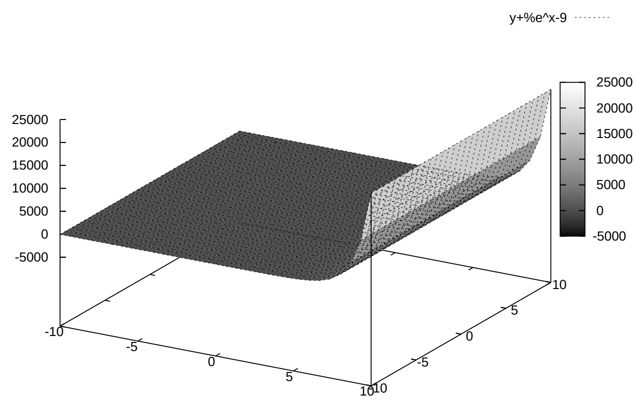

Figura 3: Ejemplo3 $\phi(x)$=e^x+y-9

5.3 Ejemplo 3

Para la función $\phi(x)$=e^x+y-9, sujeta a la restricción x+y=3.
Hallar sus máximos y mínimos. En el programa introducimos las funciones como mifunc($\phi(x)$=e^x+y-9,x+y-3); El output nos dará los siguientes resultados: Hessiano 0 lo que quiere decir que se debe hacer otro análisis.

6 Aplicación de máximos y mínimos

6.1 Aplicaciones de máximos y mínimos en economía

Los conceptos de máximos y mínimos son de fundamental importancia en economía. particularmente en la optimización de resultados. Para la determinación de máximos y mínimos de aplicación en economía, se utilizan los mismos procedimientos generales antes vistos.

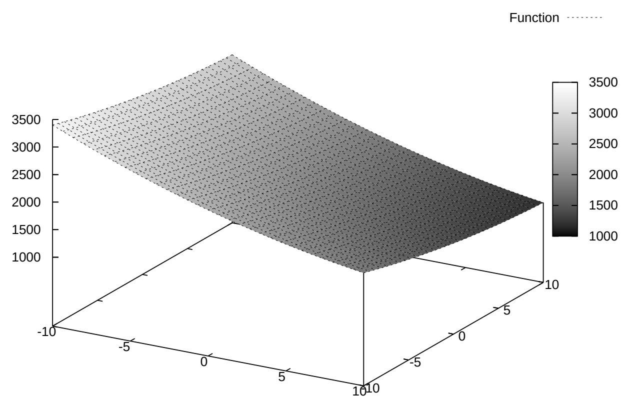

Figura 4: Ejemplo 4 C=2x^2+y^2-80x-30y+2000

6.2 Ejemplo 4

La función costo C=2x^2+y^2-80x-30y+2000, corresponde a una fábrica que produce dos artículos:A,B; cuyos números de unidades respectivamente son: x,y; se determinará el costo mínimo.
En el programa introducimos las funciones como mifunc(2x^2+y^2-80x-30y+2000,0);
El output nos dará los siguientes resultados:Hessiano 8 lo que quiere decir que existen máximos y mínimos en [[x = 20, y = 15]] los puntos anterires nos dan un resultado mínimo en z de 975.

7 Aplicación de multiplicadores

Mediante el concepto de los multiplicadores de Lagrange, es posible maximizar o minimizar funciones sujetas a restricciones, lo que en la practica significa la búsqueda de máximos y mínimos, que deben cumplir con ciertas condiciones.

8 Conclusiones

Es muy importante poder entender la programación de paquetes como el máxima para resolver problemas como es de máximos y mínimos que como se vio son muy útiles no solo en la rama de ingeniería sino tambien en otras areas matematicas como la economía.

Referencias

[1]Calculo II Victor Chungara Castro