

EL PATH ANALYSIS APLICADO AL HECHO EDUCATIVO

Carlos Enrique Núñez Rincón¹

A manera de presentación

A continuación se muestra la aplicabilidad del Path Analysis en un estudio sobre ciertos factores que intervienen en el rendimiento estudiantil, explícitamente el rendimiento académico en la Asignatura Matemática III que se dicta en el tercer semestre de las Carreras de Ingeniería: Mecánica, Informática, Industrial, Electrónica y Ambiental, que forman parte de la Oferta Académica de la Universidad Nacional Experimental del Táchira.

Para realizar la investigación se seleccionó una muestra aleatoria de 100 alumnos, su objetivo consistió en determinar los efectos causales directos e indirectos de las variables: aptitud, estatus socio-económico, motivación y hábitos de estudio sobre la variable rendimiento académico; las dos primeras variables son exógenas y las restantes endógenas. La metodología estadística utilizada se centró en las pautas de un Modelo Causal o Modelo LISREL (Linear Structural Relations), denominado Path Analysis o Análisis por Caminos. Modelo Matemático generado en las Ciencias Naturales y llevado al campo del Mercadeo, de las Ciencias Sociales y de la Sociología. Contexto en el que se acrecienta su uso.

Se ha utilizado el Path Analysis, puesto que es una técnica estadística multivariada útil en el análisis de las interrelaciones presentes entre las variables,

¹ El autor del artículo es Licenciado en Matemática, egresado de la Universidad de los Andes – ULA--Venezuela. Asimismo, es Magíster, y Doctor en Ciencias. Actualmente es Profesor en la Categoría de Titular, adscrito al Departamento de Matemática y Física de la Universidad Nacional Experimental del Táchira-Venezuela. cnunezr@gmail.com

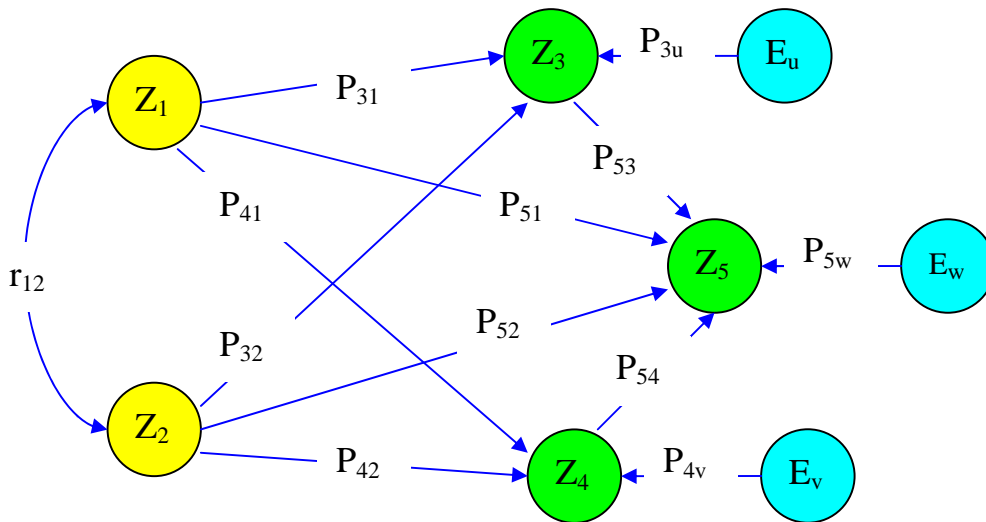
El Path Analysis Aplicado al Hecho Educativo

consideradas en el estudio, mediante regresiones. Estas interrelaciones son los efectos causales tanto directos como indirectos.

Seguidamente se expone cada uno de los pasos ejecutados en la aplicación del Modelo:

1 Hipótesis supuesta: Path diagram del modelo inicial hipotético path analysis y ecuaciones estructurales

Se plantea en el modelo que las variables pueden tener una relación causal, directa o indirecta, es decir, interactuando con otras a través de caminos correlacionados.



$$Z_3 = P_{31}Z_1 + P_{32}Z_2 + P_{3u}E_u$$

$$Z_4 = P_{41}Z_1 + P_{42}Z_2 + P_{4v}E_v$$

$$Z_5 = P_{51}Z_1 + P_{52}Z_2 + P_{53}Z_3 + P_{54}Z_4 + P_{5w}E_w$$

Z₁: Aptitud

Z₂: Estatus socio-económico

Z₃: Motivación

Z₄: Hábitos de estudio

Z₅: Rendimiento académico

Gráfico 1. Path diagram del modelo inicial hipotético path analysis y ecuaciones estructurales

Gráfico elaborado por el autor.

Carlos E. Núñez R.

En el Path Diagram o Diagrama de Caminos, inicialmente, se admite que las variables Z_1 , Z_2 , Z_3 y Z_4 influyen directamente sobre la variable Z_5 , además las variables Z_1 y Z_2 tienen un efecto indirecto sobre la variable Z_5 . También en el modelo se fijan las variables residuales E_u , E_v y E_w , o perturbaciones, representan los errores de medición o las variables que pudiesen influir en la estructura pero que no están incluidas en ella, además, no están correlacionadas entre sí ni con otras variables determinantes del modelo y repercuten únicamente de manera aleatoria sobre una variable del modelo y no sobre varias (ver gráfico 1). Su incorporación es de significativa importancia, ya que se considera un aspecto que por largo tiempo fue ignorado por los científicos sociales cuantitativos.

Por otra parte, en el Path Diagram, se observan los coeficientes path o de Wright o coeficientes de causalidad, estos corresponden a la relación entre dos variables. Se denotados por P_{ji} , el subíndice j representa a la variable endógena y el subíndice i representa la variable exógena. Para las variables exógenas el r_{12} representa el coeficiente de correlación simple de orden cero. La relación entre variables exógenas no se considera y no forma parte de las operaciones del Path Analysis. Los efectos de las variables residuales E_u , E_v y E_w , se denominan coeficientes residuales y se denotan por P_{3u} , P_{4v} y P_{5w} respectivamente.

2 Ecuaciones estructurales

Los efectos de causalidad, inherentes del modelo, se traducen en un conjunto de ecuaciones lineales. Los modelos estructurales requieren de una combinación de matemática y teoría. Aunque en el modelaje matemático existe una multiplicidad de problemas interesantes, las preguntas más difíciles son aquellas que traducen la teoría en las ecuaciones. Este proceso de traducción se denomina especificación.

El Path Analysis Aplicado al Hecho Educativo

Las Ecuaciones Estructurales representan la declaración formal del Modelo Causal. Para la investigación desarrollada la formulación básica del modelado en forma de ecuación es la siguiente:

$$Z_3 = P_{31}Z_1 + P_{32}Z_2 + P_{3u}E_u \qquad Z_4 = P_{41}Z_1 + P_{42}Z_2 + P_{4v}E_v$$

$$Z_5 = P_{51}Z_1 + P_{52}Z_2 + P_{53}Z_3 + P_{54}Z_4 + P_{5w}E_w$$

3 Fundamentación matemática

Ya establecido el sistema de ecuaciones lineales,

$$Z_3 = P_{31}Z_1 + P_{32}Z_2 + P_{3u}E_u \qquad (i)$$

$$Z_4 = P_{41}Z_1 + P_{42}Z_2 + P_{4v}E_v \qquad (ii)$$

$$Z_5 = P_{51}Z_1 + P_{52}Z_2 + P_{53}Z_3 + P_{54}Z_4 + P_{5w}E_w \qquad (iii)$$

se procede a la *evaluación de la identificación* del modelo, hecho que permite el cálculo de los P_{ji} y de los coeficientes residuales, estos se determinan en función de los coeficientes de correlación r_{ij} .

Por lo tanto, las ecuaciones se transforman matemáticamente para que los P_{ji} se expresen en términos de los coeficientes de correlación correspondientes r_{ij} , para ello se multiplica cada ecuación por Z_k , para todo $k < j$.

La fundamentación matemática de esta transformación se sustenta en la igualdad entre la covarianza y su coeficiente de correlación cuando se abordan variables estandarizadas.

A manera de ejemplo, considérese la ecuación i previamente estandarizada:

Carlos E. Núñez R.

multiplicando ambos lados de la igualdad por Z_1 , se obtiene

$$Z_1 Z_3 = P_{31} Z_1^2 + P_{32} Z_1 Z_2 + P_{3u} Z_1 E_u$$

tomando la esperanza matemática, o el valor medio estadístico de las variables en la población en consideración, se obtiene

$$E(Z_1 Z_3) = P_{31} E(Z_1^2) + P_{32} E(Z_1 Z_2) + P_{3u} E(Z_1 E_u)$$

puesto que

$$E(Z_1 Z_3) = \text{Cov}(Z_1 Z_3), \quad E(Z_1^2) = 1 \quad \text{y} \quad E(Z_1 Z_2) = \text{Cov}(Z_1 Z_2)$$

además, ya que $E(Z_1 E_u)$, generalmente se hace cero por la hipótesis asumida de la no correlación de los errores, se tiene

$$\text{Cov}(Z_1 Z_3) = P_{31} \text{Cov}(Z_1, Z_1) + P_{32} \text{Cov}(Z_1 Z_2)$$

por otra parte, puesto que

$$\text{Cov}(Z_1 Z_3) = r_{13}, \quad \text{Cov}(Z_1 Z_1) = 1 \quad \text{y} \quad \text{Cov}(Z_1 Z_2) = r_{12}$$

se obtiene

$$r_{13} = P_{31} + P_{32} r_{12}$$

donde los P_{ji} representan los coeficientes de Wright estandarizados y los r_{ij} son los coeficientes de correlación.

Ahora se multiplica la misma ecuación por Z_2 y se aplica el procedimiento antes descrito, para obtener la ecuación

$$r_{23} = P_{31} r_{12} + P_{32}$$

El Path Analysis Aplicado al Hecho Educativo

De esta forma, se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, los coeficientes path P_{31} y P_{32}

$$\begin{cases} P_{31} + r_{12}P_{32} = r_{13} \\ r_{12}P_{31} + P_{32} = r_{23} \end{cases} \quad (\text{I})$$

Del procedimiento anterior, resulta que la ecuación i es *identificable*, excepto el coeficiente residual P_{3u} .

Para determinar si el coeficiente residual P_{3u} es identificable, multipliquemos ambos lados de la ecuación i por E_u

se obtiene

$$P_{3u} = r_{3u}$$

Multiplicando, nuevamente, la ecuación i por Z_3 y procediendo de manera análoga, se obtiene

$$1 = r_{13}P_{31} + r_{23}P_{32} + P_{3u}^2 \Rightarrow P_{3u} = \sqrt{1 - r_{13}P_{31} - r_{23}P_{32}}$$

De esta manera queda *totalmente identificada* la ecuación i para P_{3u} .

De manera similar se tratan las ecuaciones ii y iii , para obtener los sistemas de ecuaciones B y C y los respectivos coeficientes residuales P_{4v} y P_{5w} .

$$\begin{cases} P_{41} + r_{12}P_{42} = r_{14} \\ r_{12}P_{41} + P_{42} = r_{24} \\ r_{13}P_{41} + r_{23}P_{42} = r_{34} \end{cases} \quad (\text{II})$$

$$\begin{cases} P_{51} + r_{12}P_{52} + r_{13}P_{53} + r_{14}P_{54} = r_{15} \\ r_{12}P_{51} + P_{52} + r_{23}P_{53} + r_{24}P_{54} = r_{25} \\ r_{13}P_{51} + r_{23}P_{52} + P_{53} + r_{34}P_{54} = r_{35} \\ r_{14}P_{51} + r_{24}P_{52} + r_{34}P_{53} + P_{54} = r_{45} \end{cases} \quad (\text{III})$$

Carlos E. Núñez R.

$$P_{4v} = \sqrt{1 - r_{14}P_{41} - r_{24}P_{42}} \quad \text{y} \quad P_{5w} = \sqrt{1 - r_{15}P_{51} - r_{25}P_{52} - r_{35}P_{53} - r_{45}P_{54}}$$

Seguidamente, se procede a resolver los sistemas obtenidos. Es de hacer notar, que estos sistemas se resuelven utilizando cualesquier método de solución, tanto manual como electrónico. En este caso, se utilizó la Regla de Cramer y el Programa de Cálculo Técnico Científico MATLAB. Nótese, que es necesario calcular los r_{ij} , es decir los coeficientes de correlación, para ello se usó el Paquete Estadístico SPSS.

Cuadro 1
Matriz de correlación de las variables del estudio

Variabes	Aptitud	Estatus socio-económico	Motivación	Hábitos de estudio	Rendimiento académico
Aptitud	1,000 **				
Estatus socio-económico	0,315 **	1,000 **			
Motivación	0,340 **	0,457 **	1,000 **		
Hábitos de estudio	0,270 **	0,623 **	0,551 **	1,000 **	
Rendimiento académico	0,601 **	0,380 **	0,643 **	0,545 **	1,000 **

** La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

Fuente: Elaborado por el autor.

Solución del sistema I, sea

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0,315 \\ 0,315 & 1 \end{vmatrix} = 0.901$$

el determinante del sistema.

ahora se calculan los coeficientes path P_{31} , y P_{32} .

El Path Analysis Aplicado al Hecho Educativo

$$P_{31} = \frac{\begin{vmatrix} r_{13} & r_{12} \\ r_{23} & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0,340 & 0,315 \\ 0,457 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{0,196}{0,901} = 0,218$$

$$P_{32} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_{13} \\ r_{12} & r_{23} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0,340 \\ 0,315 & 0,457 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{0,350}{0,901} = 0,388$$

De los sistemas II y III, utilizando el MatLab, se obtienen los siguientes resultados:

Para el sistema II:

```
>> A = [1 0.315; 0.315 1; 0.340 0.457]
```

A =

```
1.0000 0.3150
0.3150 1.0000
0.3400 0.4570
```

```
>> B = [0.270; 0.623; 0.551]
```

B =

```
0.2700
0.6230
0.5510
```

```
>> X = A\B
```

X =

```
0.1040
0.6714
```

luego

Carlos E. Núñez R.

$$P_{41} = 0,104 \quad y \quad P_{42} = 0,671$$

Para el sistema III:

$$P_{51} = 0,426, \quad P_{52} = -0,109, \quad P_{53} = 0,393, \quad y \quad P_{54} = 0,281$$

Ahora, se procede a determinar los P_{3u} , P_{4v} y P_{5w} :

$$P_{3u} = \sqrt{1 - r_{13}P_{31} - r_{23}P_{32}} = \sqrt{1 - (0,340)(0,218) - (0,457)(0,388)} = 0,865$$

$$P_{4v} = \sqrt{1 - r_{14}P_{41} - r_{24}P_{42}} = \sqrt{1 - (0,270)(0,104) - (0,623)(0,671)} = 0,744$$

$$\begin{aligned} P_{5w} &= \sqrt{1 - r_{15}P_{51} - r_{25}P_{52} - r_{35}P_{53} - r_{45}P_{54}} \\ &= \sqrt{1 - (0,601)(0,426) - (0,380)(-0,109) - (0,643)(0,393) - (0,545)(0,281)} \\ &= 0,616 \end{aligned}$$

De la solución de los tres sistemas y del cálculo de las variables residuales, se obtiene

$$Z_3 = 0,218Z_1 + 0,388Z_2 + 0,865E_u$$

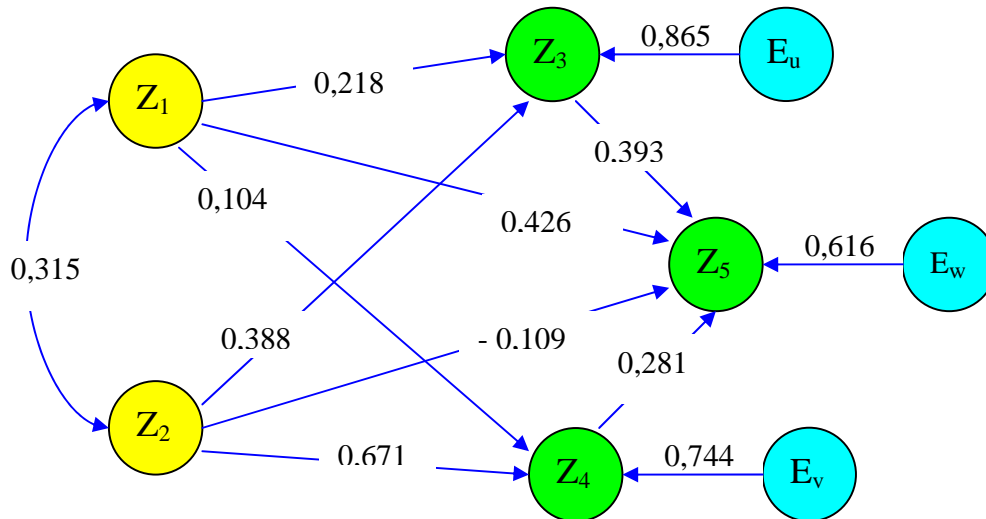
$$Z_4 = 0,104Z_1 + 0,671Z_2 + 0,744E_v$$

$$Z_5 = 0,426Z_1 - 0,109Z_2 + 0,393Z_3 + 0,281Z_4 + 0,616E_w$$

4 Path diagram obtenido

Como resultado de los cálculos efectuados en la sección anterior se obtiene el Path Diagram completo del gráfico 2.

El Path Analysis Aplicado al Hecho Educativo



Z₁: Aptitud Z₂: Estatus socio-económico Z₃: Motivación
 Z₄: Hábitos de estudio Z₅: Rendimiento académico

Gráfico 2. Path diagram obtenido: coeficientes de correlación, coeficientes path y coeficientes residuales

Gráfico elaborado por el autor.

5 Descomposición de la correlación y correlación reproducida

Con la finalidad de consolidar los efectos causales estimados entre las variables, es esencial determinar si el modelo es consistente. La determinación de la consistencia es una cualidad relevante del Path Analysis, es decir, él permite verificar su idoneidad o adecuación o bondad.

Es de hacer notar, que la presencia de inconsistencias severas, sugiere que el modelo debe revisarse antes de cualquier esfuerzo por describir los efectos causales, la revisión implica el replanteamiento del modelo con la finalidad de presentar el modelo más adecuado. Para ello, *se debe reflexionar la inclusión de*

Carlos E. Núñez R.

un camino no considerado que pudiese mejorar su consistencia. No obstante, para agregar un camino debe existir una razón teórica admisible.

A objeto de determinar la consistencia del modelo, es indispensable calcular la *correlación reproducida* para cotejarla con la *correlación observada* o correlación presente en la matriz de correlación, cuadro 1. Al realizar la comparación entre los elementos de cada matriz, la diferencia entre uno y otro debe ser bastante pequeña, digamos dentro de una aproximación del 0,05, esta norma se denomina *regla del dedo pulgar*. La presencia de disparidades mayores indica que el modelo no es sustentado por los datos.

Antes de obtener la correlación reproducida, como se podrá advertir más adelante, es fundamental descomponer las correlaciones r_{ij} obtenidas en la identificación del modelo en el inciso 3.

En la determinación de la correlación reproducida es preciso incluir todas las relaciones, es decir las especificadas, así como otras que están presentes o implícitas en el Path Diagram, a saber: efectos causales directos e indirectos, componentes espurios (spurious), y elementos de incertidumbre (unanalyzed). A continuación se presenta un ejemplo de cada tipo:

- En gráfico 1, se evidencia un efecto directo entre Z_3 y Z_4 (P_{43}) que no ha sido considerado, por lo tanto tampoco se consideran los efectos indirectos de Z_1 y Z_2 a través de Z_3 . Los efectos indirectos y directos se denotan con I y D, respectivamente.
- En la descomposición de \hat{r}_{35} todos los términos a excepción de P_{53} representan componentes espurios (ver cuadro 2), ellos son porciones de \hat{r}_{35}

El Path Analysis Aplicado al Hecho Educativo

que no se deben al efecto causal directo e indirecto de Z_3 sobre Z_5 , estos componentes se denotan con S.

- Siempre que el modelo contenga más de una variable exógena, las relaciones inexplicadas asociadas entre las variables exógenas introducirán un elemento de incertidumbre en la determinación de los efectos indirectos de las variables exógenas sobre las variables endógenas. En la descomposición de \hat{r}_{14} (ver cuadro 2), el elemento de incertidumbre es $r_{12}P_{42}$. Este tipo de elementos no son analizados o revisados, se denotan con U.

La descomposición, llamada descomposición de la correlación, no es más que expresar los r_{ij} obtenidos en la identificación del modelo (inciso 3), en función de los P_{ji} y de algunos coeficientes de la matriz de correlación. Se denotan con \hat{r}_{ij} .

A manera de ilustración, seguidamente se presenta la descomposición de \hat{r}_{13} . Al considerar la correlación entre Z_1 y Z_3 , los Path (caminos) legítimos y las componentes son:

Path	Componentes
de Z_1 a Z_3	P_{31}
de Z_1 a Z_2 a Z_3	$r_{12}P_{32}$

luego

$$\hat{r}_{13} = P_{31} + r_{12}P_{32}$$

D U

Nótese, que en la descomposición se determinan todos los caminos legítimos de una variable a otra. Las restantes descomposiciones se muestran en el cuadro 2,

Carlos E. Núñez R.

así como los efectos directos (D), indirectos (I), los elementos no analizados (U) y los espurios (S).

Cuadro 2
Descomposición de la correlación

$\hat{r}_{13} = P_{31} + r_{12}P_{32}$ D U	$\hat{r}_{14} = P_{41} + r_{12}P_{42}$ D U
$\hat{r}_{15} = P_{51} + P_{31}P_{53} + P_{41}P_{54} + r_{12}P_{32}P_{53} + r_{12}P_{52} + r_{12}P_{42}P_{54}$ D I I U U U	
$\hat{r}_{23} = P_{32} + r_{12}P_{31}$ D U	$\hat{r}_{24} = P_{42} + r_{12}P_{41}$ D U
$\hat{r}_{25} = P_{52} + P_{32}P_{53} + P_{42}P_{54} + r_{12}P_{31}P_{53} + r_{12}P_{51} + r_{12}P_{41}P_{54}$ D I I U U U	
$\hat{r}_{34} = P_{31}r_{12}P_{42} + P_{31}P_{41} + P_{32}P_{42}$ S S S	
$\hat{r}_{35} = P_{53} + P_{31}r_{12}P_{52} + P_{31}r_{12}P_{42}P_{54} + P_{31}P_{51} + P_{31}P_{41}P_{54} + P_{32}P_{52} + P_{32}P_{42}P_{54}$ D S S S S S S	
$\hat{r}_{45} = P_{54} + P_{42}P_{52} + P_{42}P_{32}P_{53} + P_{42}r_{12}P_{51} + P_{42}r_{12}P_{31}P_{53} + P_{41}P_{51} + P_{41}P_{31}P_{53}$ D S S S S S S	

Fuente: Elaborado por el autor.

Una vez, realizadas todas las descomposiciones, se procede al cálculo de la correlación reproducida. Así, por ejemplo para \hat{r}_{13} la correlación reproducida es

$$\hat{r}_{13} = P_{31} + r_{12}P_{32}$$

$$\hat{r}_{13} = 0,218 + (0,315)(0,388) = 0,340$$

En el cuadro 3 se presenta la matriz con las restantes correlaciones reproducidas, junto con las observadas en la matriz de correlación de las variables, inmersas en la investigación.

El Path Analysis Aplicado al Hecho Educativo

Cuadro 3
Comparación de las matrices de correlación observada y reproducida

Matriz de correlación de las variables del estudio

VARIABLES	Aptitud	Estatus socio-económico	Motivación	Hábitos de estudio	Rendimiento académico
Aptitud	1,000				
Estatus socio-económico	0,315	1,000			
Motivación	0,340 *	0,457 *	1,000		
Hábitos de estudio	0,270 *	0,623 **	0,551 **	1,000	
Rendimiento académico	0,601 *	0,380 *	0,643 **	0,545 **	1,000

Matriz de correlación de las variables reproducida

VARIABLES	Aptitud	Estatus socio-económico	Motivación	Hábitos de estudio	Rendimiento académico
Aptitud	1,000				
Estatus socio-económico	0,315	1,000			
Motivación	0,340 *	0,457 *	1,000		
Hábitos de estudio	0,315 *	0,704 **	0,330 **	1,000	
Rendimiento académico	0,614 *	0,402 *	0,529 **	0,472 **	1,000

* La diferencia entre la correlación reproducida y la observada es menor que 0,05.

** La diferencia entre la correlación reproducida y la observada es mayor que 0,05.

Fuente: Elaborado por el autor

Finalmente, los elementos de cada matriz se cotejan uno a uno, considerando la diferencia entre ellos dentro de una aproximación del nivel 0,05 (Regla del Dedo Pulgar). Por ejemplo, la diferencia entre $\hat{r}_{14} = 0,315$ y $r_{14} = 0,270$ es de

Carlos E. Núñez R.

0,045, más pequeño que la regla del dedo pulgar, por lo tanto el coeficiente path P_{41} , es estadísticamente significativo. Luego, el efecto directo de Z_1 a Z_4 es significativo al nivel 0,05. Este hecho se puede observar en el cuadro 3, así como las otras diferencias marcada con *.

No obstante, la diferencia entre $r_{24} = 0,623$ y $\hat{r}_{24} = 0,623$ es de 0,081 mayor que el nivel 0, 05 por lo tanto el coeficiente path P_{42} , no es estadísticamente significativo Este hecho se puede observar en el cuadro 3, así como las otras diferencias marcada con **. Estas diferencias indican que el modelo propuesto inicial no es consistente con los datos, por lo tanto el modelo debe revisarse antes de intentar cualquier descripción de los efectos causales asociados.

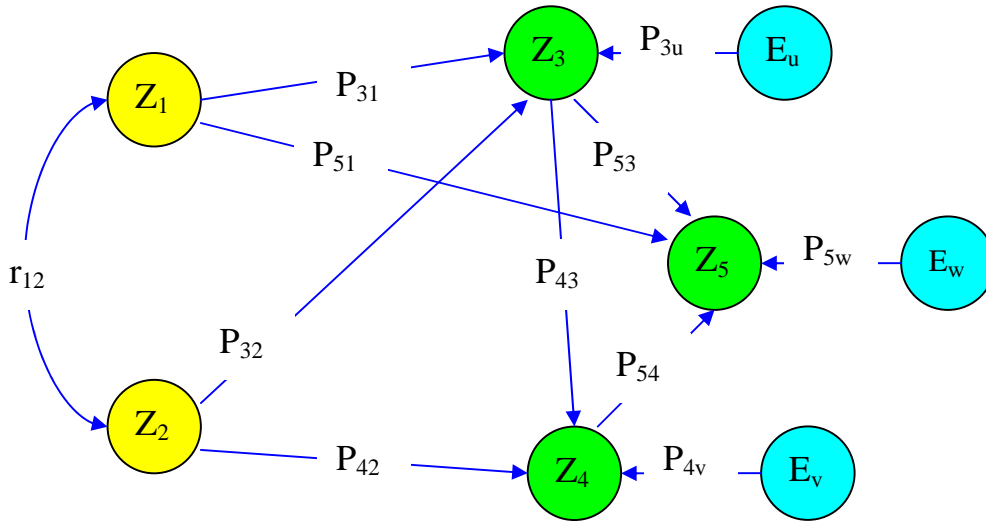
Que sean estadísticamente significativos, no significa que los coeficientes path tengan aplicabilidad práctica; es decir, puede ser estadísticamente significativo pero no de importancia práctica. En este sentido, se considera el criterio asumido sobre la aplicabilidad práctica de los efectos, un path tiene aplicabilidad práctica si es mayor que aproximadamente 0,1. De acuerdo a este enfoque, todos los P_{ji} , presentan importancia práctica a excepción de P_{52} .

Seguidamente, se hace una revisión del modelo.

6 Hipótesis supuesta: Path diagram del modelo alterno hipotético path analysis y ecuaciones estructurales

En el Path Diagram (gráfico 3), inicialmente, se admite que las variables Z_1 , Z_3 y Z_4 influyen directamente sobre la variable Z_5 , además las variables Z_1 , Z_2 y Z_3 tienen un efecto indirecto sobre la variable Z_5 y que la variable Z_2 tiene un efecto indirecto sobre la variable Z_4 .

El Path Analysis Aplicado al Hecho Educativo



$$Z_3 = P_{31}Z_1 + P_{32}Z_2 + P_{3u}E_u$$

$$Z_4 = P_{42}Z_2 + P_{43}Z_3 + P_{4v}E_v$$

$$Z_5 = P_{51}Z_1 + P_{53}Z_3 + P_{54}Z_4 + P_{5w}E_w$$

Z_1 : Aptitud

Z_2 : Estatus socio-económico

Z_3 : Motivación

Z_4 : Hábitos de estudio

Z_5 : Rendimiento académico

Gráfico 3. Path Diagram del modelo alternativo hipotético path analysis y ecuaciones estructurales

Gráfico elaborado por el autor.

Mediante un procedimiento análogo al utilizado anteriormente, se obtiene:

i) Los sistemas de ecuaciones, los valores de los coeficientes path y los coeficientes residuales

$$\begin{cases} P_{31} + r_{12}P_{32} = r_{13} \\ r_{12}P_{31} + P_{32} = r_{23} \end{cases} \begin{cases} r_{12}P_{42} + r_{13}P_{43} = r_{14} \\ P_{42} + r_{23}P_{43} = r_{24} \\ r_{23}P_{42} + P_{43} = r_{34} \end{cases} \begin{cases} P_{51} + r_{13}P_{53} + r_{14}P_{54} = r_{15} \\ r_{12}P_{51} + r_{23}P_{53} + r_{24}P_{54} = r_{25} \\ r_{13}P_{51} + P_{53} + r_{34}P_{54} = r_{35} \\ r_{14}P_{51} + r_{34}P_{53} + P_{54} = r_{45} \end{cases}$$

$$P_{31} = 0.218; \quad P_{32} = 0.388; \quad P_{42} = 0.470; \quad P_{43} = 0.338;$$

$$P_{51} = 0.409; \quad P_{53} = 0.391 \quad \text{y} \quad P_{54} = 0.194$$

Carlos E. Núñez R.

$$P_{3u} = \sqrt{1 - r_{13}P_{31} - r_{23}P_{32}} = 0,865; P_{4v} = \sqrt{1 - r_{24}P_{42} - r_{34}P_{43}} = 0,722$$

$$P_{5w} = \sqrt{1 - r_{15}P_{51} - r_{35}P_{53} - r_{45}P_{54}} = 0,630$$

luego

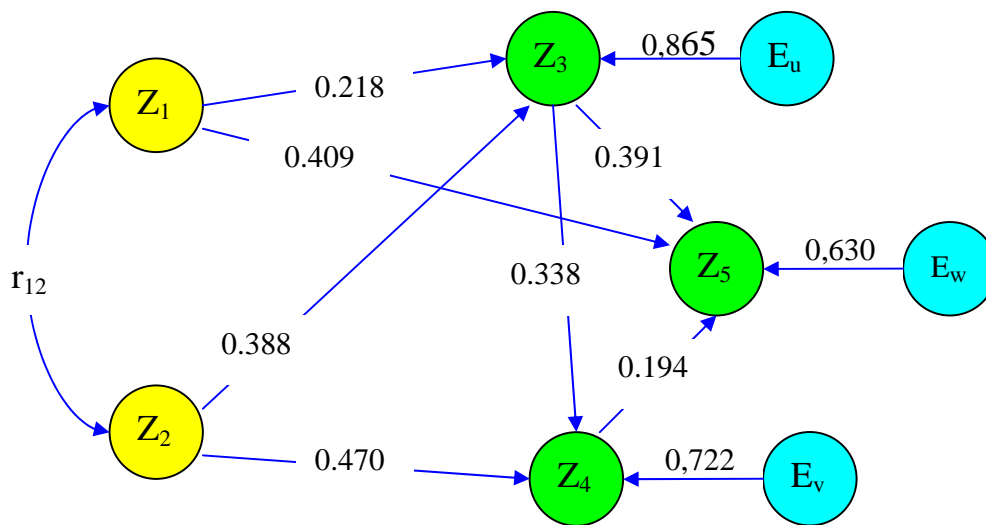
$$Z_3 = 0,218Z_1 + 0,388Z_2 + 0,865E_u$$

$$Z_4 = 0,470Z_2 + 0,338Z_3 + 0,722E_v$$

$$Z_5 = 0,409Z_1 + 0,391Z_3 + 0,194Z_4 + 0,630E_w$$

ii) Path diagram obtenido

Como resultado de los cálculos efectuados en la sección anterior se obtiene el Path Diagram completo del gráfico 4.



Z₁: Aptitud

Z₂: Estatus socio-económico

Z₃: Motivación

Z₄: Hábitos de estudio

Z₅: Rendimiento académico

Gráfico 4. Path diagram obtenido: coeficientes de correlación, coeficientes path y coeficientes residuales

Gráfico elaborado por el autor.

El Path Analysis Aplicado al Hecho Educativo

iii) Descomposición de la correlación y correlación reproducida

A continuación se descompone (cuadro 4) las correlaciones r_{ij} , obtenidas en la identificación del modelo en el inciso 3, a fin de obtener la correlación reproducida. Como se dijo anteriormente, es preciso incluir todas las relaciones, es decir las especificadas, así como otras que están presentes o implícitas en el Path Diagram.

Cuadro 4
Descomposición de la correlación

$\hat{r}_{13} = P_{31} + r_{12}P_{32}$ <div style="text-align: center; margin-top: -10px;"> D U </div>
$\hat{r}_{14} = P_{31}P_{43} + r_{12}P_{42} + r_{12}P_{32}P_{43}$ <div style="text-align: center; margin-top: -10px;"> I U U </div>
$\hat{r}_{15} = P_{51} + P_{31}P_{53} + P_{31}P_{43}P_{54} + r_{12}P_{32}P_{53} + r_{12}P_{32}P_{43}P_{54} + r_{12}P_{42}P_{54}$ <div style="text-align: center; margin-top: -10px;"> D I I U U U </div>
$\hat{r}_{23} = P_{32} + r_{12}P_{31}$ <div style="text-align: center; margin-top: -10px;"> D U </div>
$\hat{r}_{24} = P_{42} + P_{32}P_{43} + r_{12}P_{31}P_{43}$ <div style="text-align: center; margin-top: -10px;"> D I U </div>
$\hat{r}_{25} = P_{42}P_{54} + P_{32}P_{43}P_{54} + P_{32}P_{53} + r_{12}P_{51} + r_{12}P_{31}P_{43}P_{54} + r_{12}P_{31}P_{53}$ <div style="text-align: center; margin-top: -10px;"> I I I U U U </div>
$\hat{r}_{34} = P_{43} + P_{31}r_{12}P_{42} + P_{32}P_{42}$ <div style="text-align: center; margin-top: -10px;"> D S S </div>
$\hat{r}_{35} = P_{53} + P_{43}P_{54} + P_{31}P_{51} + P_{32}P_{42}P_{54} + P_{31}r_{12}P_{42}P_{54}$ <div style="text-align: center; margin-top: -10px;"> D I S S S </div>
$\hat{r}_{45} = P_{54} + P_{43}P_{53} + P_{42}P_{32}P_{53} + P_{42}r_{12}P_{51} + P_{42}r_{12}P_{31}P_{53} + P_{43}P_{31}P_{51}$ <div style="text-align: center; margin-top: -10px;"> D S S S S S </div>

Fuente: Elaborado por el autor

Carlos E. Núñez R.

iv) **Comparación de las matrices de correlación observada y reproducida**

Cuadro 5

Matriz de correlación de las variables del estudio

Variables	Aptitud	Estatus socio-económico	Motivación	Hábitos de estudio	Rendimiento académico
Aptitud	1,000				
Estatus socio-económico	0,315	1,000			
Motivación	0,340 *	0,457 *	1,000		
Hábitos de estudio	0,270 *	0,623 *	0,551 *	1,000	
Rendimiento académico	0,601 *	0,380 *	0,643 **	0,545 *	1,000

Matriz de correlación de las variables reproducida

Variables	Aptitud	Estatus socio-económico	Motivación	Hábitos de estudio	Rendimiento académico
Aptitud	1,000				
Estatus socio-económico	0,315	1,000			
Motivación	0,340 *	0,457 *	1,000		
Hábitos de estudio	0,263 *	0,624 *	0,553 *	1,000	
Rendimiento académico	0,593 *	0,397 *	0,587 **	0,501 *	1,000

* La diferencia entre la correlación reproducida y la observada es menor que 0,05.

** La diferencia entre la correlación reproducida y la observada es mayor que 0,05.

Fuente: Elaborado por el autor

Todos los efectos, a excepción del efecto directo de Z_3 a Z_5 , verifican la regla del dedo pulgar, por lo tanto los coeficientes path P_{31} , P_{32} , P_{42} , P_{43} , P_{51} y P_{54} , son estadísticamente significativos, luego los efectos que ellos producen son significativos al nivel 0,05. Por otra parte, todos los coeficientes path P_{ji} tienen aplicabilidad práctica, puesto que son mayor que 0,1

El Path Analysis Aplicado al Hecho Educativo

7 Efectos Causales del Modelo - Interpretación

Toda vez razonados, argumentados y analizados los aspectos precedentes requeridos para determinar la viabilidad del modelo, se procede a la interpretación y discusión de los efectos causales directos, indirectos y totales de las variables sujetas a estudio en el modelo.

En tal sentido, de la descomposición de la correlación señalada en el cuadro 5 y del gráfico 4, es posible caracterizar los efectos causales directos e indirectos. Estos efectos se resumen junto con los efectos totales en el cuadro 6.

Cuadro 6
Resumen de los Efectos Causales del Modelo

VARIABLE EDOGENA	VARIABLE EXOGENA	EFECTOS CAUSALES		
		Directo	Indirecto	Total
Motivación ($R^2_{3.12} = 0,252$)	Aptitud	0,218 *	-	0,218 **
	Estatus socio-económico	0,388 *	-	0,388 **
Hábitos de estudio ($R^2_{4.123} = 0,479$)	Aptitud	-	0,074	0,074 **
	Estatus socio-económico	0,470 *	0,131	0,601 **
	Motivación	0,338 *	-	0,338
Rendimiento académico ($R^2_{5.1234} = 0,603$)	Aptitud	0,409 *	0,100	0,509 **
	Estatus Socio-económico	-	0,268	0,268 **
	Motivación	0,391	0,066	0,457
	Hábitos de estudio	0,194 *	-	0,194

* El efecto directo es significativo al nivel 0,05.

** El efecto total puede estar incompleto debido a los componentes U.

R^2 : Coeficiente de determinación múltiple.

Fuente: Elaborado por el autor.

Carlos E. Núñez R.

El efecto total es el resultado de la adición del efecto directo con el indirecto. En la cálculo de estos efectos se percibe la incertidumbre, de que, si en realidad se representa el efecto total, esto se debe a que el modelo no explica las relaciones entre las variables exógenas, sólo es posible reconocer que el componente no analizado U puede representar, en parte, un efecto causal no incluido en la descripción final. En todo caso, en la descripción final, en el efecto total, será señalado si la incertidumbre se presenta, ver cuadro 6.

8 Discusión de los Resultados

El estudio arrojó un conjunto de resultados, los cuales se desarrollan bajo la óptica del análisis que antecede. Este análisis, se centra en los coeficientes path inherentes al conjunto de variables explícitas consideradas en el modelo, así, como al conjunto de variables implícitas o errores.

Es prudente señalar, que es esta discusión, sólo se consideran los resultados del análisis multivariante y los derivados de la contrastación respectiva con los aspectos precisados en los objetivos y en las bases teóricas no se incluyen, puesto que la intención, como se dijo al comienzo del artículo, es mostrar la aplicabilidad del Path Analysis al hecho educativo.

Del análisis multivariante, se describen e interpretan los niveles de relación causal y de asociación entre las variables, fundamentándose en los resultados de los cuadros 5 y 6:

- En primer lugar, el coeficiente path $P_{53} = 0,391$ es insignificante, sin embargo tiene aplicación práctica. Luego, no sustenta la influencia directa supuesta de la variable motivación (Z_3) sobre el rendimiento académico (Z_5). No obstante, existe una influencia indirecta, es decir los efectos se ejercen a través de la correlación por intermedio de la variable hábitos de estudio (Z_4).

El Path Analysis Aplicado al Hecho Educativo

Asimismo, la correlación observada inicial, de orden cero, entre estas variables se debe a los efectos indirectos de su relación con las demás variables.

- Por otra parte, las variables aptitud (Z_1) y estatus socio-económico (Z_2), tienen un efecto directo sobre la variable motivación (Z_3). El efecto de Z_2 a Z_3 , se considera apreciable.
- Asimismo, la variable estatus socio-económico presenta un efecto total apreciable sobre la variable hábitos de estudio (Z_4), debido al efecto directo e indirecto ejercido por intermedio de la variable motivación (Z_3). Adicionalmente, la variable motivación (Z_3) ejerce un efecto directo sobre Z_4 .
- Similarmente, es posible percibir la influencia indirecta, insignificante, de la variable aptitud (Z_1), sobre la variable hábitos de estudio (Z_4) y la influencia directa, poco intensa, de Z_4 sobre la variable rendimiento académico (Z_5). Este último con coeficiente path de 0,194, luego el coeficiente de correlación observado entre las variables, $r_{45} = 0,545$ se reduce a 0,194 cuando se controlan las restantes variables del modelo, que con su influencia indirecta motivan dicho grado de asociación de orden cero.
- Por otra parte, los efectos de Z_1 sobre Z_3 y de Z_4 sobre Z_5 son de carácter moderado con coeficientes path $P_{31} = 0,218$ y $P_{54} = 0,194$ respectivamente, este hecho se puede considerar teóricamente como normal.
- El efecto total de la variable Z_1 sobre la variable rendimiento académico Z_5 es apreciable, debido a los efectos directos e indirectos ejercidos por intermedio de las variables Z_3 y Z_4 . Adicionalmente, la variable estatus

Carlos E. Núñez R.

socio-económico Z_2 ejerce un efecto indirecto moderado por intermedio de la variable Z_3 y Z_4 , este hecho se puede considerar teóricamente como normal.

- La mayor influencia directa del modelo, coeficientes path más altos, se generan entre las variables estatus socio-económico (Z_2) y hábitos de estudio (Z_4); entre aptitud (Z_1) y rendimiento académico Z_5 , con coeficiente path $P_{42} = 0,470$ y $P_{51} = 0,409$, respectivamente. Estos resultados, también se pueden considerar teóricamente como normales.

A lo expuesto anteriormente, se deriva que en el modelo existe una apreciable influencia de las variables estatus socio-económico (Z_2) y aptitud (Z_1), sobre las variables hábitos de estudio (Z_4) y rendimiento académico (Z_5), respectivamente. La motivación (Z_3) presenta una influencia de aplicabilidad práctica sobre el rendimiento académico (Z_5), más no sustenta la influencia directa supuesta.

Por otra parte, se observa una influencia reducida de las variables aptitud y hábitos de estudio sobre motivación y rendimiento estudiantil, respectivamente.

En cuanto a coeficientes residuales P_{3u} , P_{4v} y P_{5w} , su cuadrado constituye la variación en las variables endógenas no explicada por las demás variables presentes en cada ecuación y son imputadas a las variables implícitas o errores.

En consecuencia, la diferencia entre 1 y el cuadrado de cada coeficiente residual produce el coeficiente de determinación múltiple ($R_{3.12}^2$, $R_{4.123}^2$ y $R_{5.1234}^2$), cuyo porcentaje es la variación total de cada variable endógena explicada en su conjunto por las variables explícitas de la ecuación considerada, esto es:

$$1 - P_{3u}^2 = 1 - (0,865)^2 = 0,252 = R_{3.12}^2$$

$$1 - P_{4v}^2 = 1 - (0,722)^2 = 0,479 = R_{4.123}^2$$

$$1 - P_{5w}^2 = 1 - (0,630)^2 = 0,603 = R_{5.1234}^2$$

El Path Analysis Aplicado al Hecho Educativo

Luego, puesto que, los porcentajes 52,2 %, 47,9 % y 60,3 %, de variabilidad total de cada variable endógena, Z_3 , Z_4 y Z_5 , son moderados, es posible afirmar que las variables exógenas consideradas, en cada ecuación, explican moderadamente la variación de cada variable endógena estudiada.

En cuanto a los niveles de asociación, entre las variables consideradas, obtenidos por el Path Analysis, se evidencian por intermedio del coeficiente de determinación múltiple, esto es, se determina su raíz cuadrada para obtener el coeficiente de correlación lineal múltiple ($R_{3.12}$, $R_{4.123}$ y $R_{5.234}$), el cual representa el grado de asociación entre una variable endógena y dos o más exógenas tomadas en conjunto. Por lo tanto:

- Como el coeficiente de determinación $R_{3.12}^2 = 0,252$, se tiene que el coeficiente de correlación $R_{3.12} = 0,502$, indica que el grado de asociación entre la variable motivación (Z_3) con las variables Z_1 y Z_2 , conjuntamente, es moderado.
- Ya que el coeficiente de determinación $R_{4.123}^2 = 0,479$, se tiene que el coeficiente de correlación $R_{4.123} = 0,692$, indica que el grado de asociación entre la variable (Z_4) con las variables Z_1 , Z_2 y Z_3 , conjuntamente, es alto.
- Además, como el coeficiente de determinación $R_{5.1234}^2 = 0,603$, se tiene que el coeficiente de correlación $R_{5.1234} = 0,777$, indica que el grado de asociación entre las variables rendimiento académico (Z_5) con las variables Z_1 , Z_2 , Z_3 y Z_4 , conjuntamente, es significativamente alto.

Carlos E. Núñez R.

De los resultados obtenidos, se puede inferir que el poder explicativo del modelo, en cuanto a las relaciones de causalidad entre las variables y a su grado de asociación, es satisfactorio.

En consecuencia, se puede afirmar que la hipótesis de la investigación, planteada, de que en el modelo las variables podían tener una relación causal directa o indirecta, es decir, interactuando con otras a través de caminos correlacionados, se ha verificado satisfactoriamente.

Finalmente, a pesar de que el modelo presentado es consistente con los datos acopiados, esto no significa, que no deba ser sometido a nuevas pruebas, es decir, se puede *conservar* bajo nuevas revisiones, agregando nuevos caminos u omitiendo algunos. Este hecho, es una de las bondades del Path Analysis, ya que, este modelo causal invita a una revisión crítica justamente porque es una herramienta muy poderosa en la verificación de teorías.

Bibliografía

Blalock, H. (1974). **Causal models in the social sciences** (4^a. ed.). Londres: Mc Macmillan.

Boudon, R. (1971). **Les mathématiques en Sociologie**. París: PUF.

Diamantopoulos, A. and Sigua, J. (2000). **Introducing LISREL**. Londres: SAGE Publications Ltd.

Díez, J. (1992). **Métodos de Análisis Causal**. (1^a. ed). Madrid: Centro de Investigaciones Sociológicas.

Estraño, A. (1986). “Hacia un modelo teórico del éxito estudiantil en Institutos Pedagógicos. Primera aproximación”. **Investigación Educativa**, 13(24), 21 – 27. Venezuela.

El Path Analysis Aplicado al Hecho Educativo

- Gondar, J. (2002). **Modelado de Ecuaciones Estructurales. Técnicas Estadísticas con SPSS.** (1ª. ed.). Madrid: DATA MININO INSTITUTE, S.L.
- González, P. (1989). “Aplicación del LISREL al análisis del rendimiento estudiantil”. **Revista Anual de la Facultad de Economía, ULA, Mérida. Economía – Nueva Etapa**, 2(4), 73 – 96. Venezuela.
- MATLAB (2001). **The language of technical computing.** Version 6.1.0.450 Release 12.1. New York: The MathWohk, Inc.
- Meeker, B. y Leik, R. (1985). **Mathematical Sociology.** New York: P. Hall.
- Meis, G. (2004). **Getting Started with the Student Edition of LISREL 8.51 for Windows.** USA: Scientific Software International, Inc.
- Núñez, C. (2003). **Factores del Desempeño del Docente de Educación Superior** Tesis Doctoral Mención Honor al Mérito, Universidad Santa María. Caracas.
- Sánchez, R. (1993). **A Path Analytic Model of the direct and indirect effects on Calculus Achievement.** Florida State University.
- Sierra, R. (1994). **Análisis Estadístico Multivariable.** Madrid: Paraninfo.
- SPSS (2001). Version 11.0 for Windows. USA.
- Tate, R. (1992). **General Linear Model Application.** Florida State University.
- Van de Geer, J. (1971). **Introduction to multivariate analysis for the social sciences.** San Francisco: W. H. Freeman.
- Wright, S. (1921). “Correlation and causation”. **Journal of agricultural research**, 20, 55-85. E.E.U.U.