Apuntes de Prosesos estocásticos

por
José Antonio Belinchón

Última actualización Julio 2008

Índice general

Prólogo

La idea fundamental de esta notas confecionadas a modo de resumen (personal) es la de tener a mano un recordatorio de por donde iban los tiros. Sólo se demuestran los teoremas fundamentales y se acompoña el texto con una serie de ejercios más o menos trabajados. Es decir, estas notas estan confeccionadas a modo de refrito entre las notas de clase y de distintos libros clásicos como los siguientes:

1. Richard Durrett. Probability: Theory and Examples. Wadsworth & Brooks 1991.
2. Z. Brzeźniak and T. Zastawniak. Basic Stochastic Processes. Springer SUMS 2005
3. Grinstead, C.M. Introduction to probability. http://www.dartmouth.edu/.
4. Novo, V. Problemas de Cálculo de Probabilidades y Estadística UNED 1993.
5. Quesada, V. et al. Lecciones de Cálculo de Probabilidad. Ed. díaz de Santos 1988.
6. Montero, J. et al Ejercicios y Problemas de Cálculo de Probabilidades. Ed. díaz de Santos 1988.

ADVERTENCIA: No están concluidas y es muy posible que hayan sobrevivido numerosas erratas.

Capítulo 1

Variables aleatorias.

1.1. Eventos y Probabilidad. Axiomática de Kolmogorov.

Definición 1.1.1 *Definimos **espacio muestral** Ω como el conjunto de resultados posibles.*

Supondremos que $\Omega \neq \varnothing$.

Ejemplo 1.1.1 1. *En el lanzamiento de un dado $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.*

2. *Cualquier proceso de contar, el número de coches que pasa por una calle $\Omega = \mathbb{N}$.*

Definición 1.1.2 *Se llama **suceso** aleatorio A, a cualquier subconjunto del espacio muestral Ω, i.e. $A \subset \Omega$.*

Definición 1.1.3 ***Suceso complementario*** A^c,

suceso unión $A \cup B$, el suceso intersección $A \cap B$.

Si $A \cap B = \emptyset$ entonces decimos que son incompatibles.

Dados $\{A_i\}$ decimos que forman un sistema completo de sucesos si son mutuamente excluyentes y $\cup A_i = \Omega$.

Definición 1.1.4 ***Espacio de sucesos***, $\mathfrak{F}$.

Ideas intuitivas:

Son las combinaciones de los resultados del experimento que nos interesa.

El conjunto de los sucesos aleatorios asociados a un experimento aleatorio con espacio muestral Ω.

Definición formal:

$\mathfrak{F}$ es una colección de subconjuntos de Ω ($\mathfrak{F} = \wp(\Omega)$) que verifican:

1. $\varnothing \in \mathfrak{F}$,

2. *si* $A \in \mathfrak{F}, \Longrightarrow A^c = \Omega \backslash A \in \mathfrak{F}$,
3. $(A_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathfrak{F}$ *es una colección numerable, entonces* $\left(\bigcup A_i\right) \in \mathfrak{F}$.

Observación 1.1.1 *Una familia* $\mathfrak{F}$ *que verifica estas tres propiedades de dice que forma una* $\sigma-$*álgebra.*

Si la propiedad tres es finita (en vez de infinita "numerale") entonces $\mathfrak{F}$ *es un álgebra.*

Propiedades 1.1.1 *Vemos que se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Si* $(A_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathfrak{F}$, *entonces* $\bigcap A_i \in \mathfrak{F}$.
2. *La intersección de* $\sigma-$*álgebras forma otra* $\sigma-$*álgebra, pero no así la unión*

En efecto. Vemos que $\left(\bigcap A_i\right)^c \in \mathfrak{F}$, pero observamos que $\left(\bigcap A_i\right)^c = \bigcup A_i^c \in \mathfrak{F}$, ya que cada $(A_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathfrak{F}$ y por lo tanto su complementario.

Con respecto a la segunda propiedad observamos que sólo tenemos que demostrar que en realidad se verifican las tres propiedades de $\sigma-$álgebra. ■

Definición 1.1.5 *Dado* $\mathcal{A} \in \wp(\Omega)$, *donde* $\mathcal{A}$ *es una colección de subconjuntos de* Ω, *definimos* $\sigma(\mathcal{A})$ *como la intersección de todas las* $\sigma-$*álgebras (y por lo tanto la más pequeña) en* Ω *que contienen a* $\mathcal{A}$

Definición 1.1.6 *Ya fijados* $(\Omega, \mathfrak{F})$ *entonces* P *es una* ***probabilidad*** *sobre* $\mathfrak{F}$ *si:*

$$P : \mathfrak{F} \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R},$$

que verifica:

1. $P(\Omega) = 1$,
2. *si* $\{A_i\}_{i=1}^{n} \in \mathfrak{F}$, $A_i \cap A_j = \varnothing \Longrightarrow P(\cup A_i) = \sum_i P(A_i)$.
   En otras palabras, P *es una medida en* $(\Omega, \mathfrak{F})$ *con medida de* Ω, $P(\Omega) = 1$.

La idea intuitiva de probabilidad viene de la de frecuencia i.e.

$$frec(A) = \frac{\textit{población de } A}{\textit{población total}}$$

Propiedades 1.1.2 1. $P(\Omega \backslash A) = P(A^c) = 1 - P(A)$,

   - $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 0$.

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
   - *Si* $A \cap B = \varnothing \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3. *Principio de inclusión-exclusión:*

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

4. $P(A \backslash B) = P(A) \backslash P(A \cap B)$, *observar que:* $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$.

5. *Si* $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$.

Observación 1.1.2 *A continuación expondremos una lista de propiedades siguiendo el esquema de teoría de la medida.*

Proposición 1.1.1 *Si* $\{A_i\}_{i=1}^n \in \mathfrak{F}$ *(conjunto numerable de sucesos)*

$$P(\cup A_i) \leq \sum_i P(A_i)$$

Teorema 1.1.1 *Lema de continuidad. Si* $\{A_i\}_{i=1}^\infty \in \mathfrak{F}$ / $A_i \subset A_{i+1}$*, (sucesión monótona creciente) entonces*

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} P(A_i) = P(\cup_i^\infty A_i)$$

Corolario 1.1.1 *Sea* $A_i \supset A_{i+1}$*, sucesión monótona decreciente, entonces*

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} P(A_i) = P(\cap_i^\infty A_i)$$

Corolario 1.1.2 *Para un número infinito de sucesos:*

$$P(\overset{\infty}{\cup} A_i) \leq \sum_i^\infty P(A_i)$$

1.2. Variable aleatoria.

Definición 1.2.1 ***V.A.*** *Sea* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$*. Decimos que* X

$$\begin{aligned} X : (\Omega, \mathfrak{F}) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B}) \\ : \omega &\longmapsto X(\omega) = x \end{aligned}$$

($\mathbb{B}$ *representa los Borel de* $\mathbb{R}$*) es una* ***variable aleatoria*** *si*

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathbb{B}\} \in \mathfrak{F}$$

i.e. la imagen inversa de cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ *es un suceso de* Ω*.*

X *es una v.a. en* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *sii* X *es una fución medible de* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *en* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$

Tenemos dos tipos de variables aleatorias:

1. *Discreta.*
2. *Continua.*

Ejemplo 1.2.1 *La función indicadora de* A*. es v.a. i.e.*

$$\mathbb{1}_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

además verifica las siguientes propiedades:

1. $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$,
2. $\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap B}$,
3. *si* $A \cap B = \varnothing$, *entonces,* $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$,
4. $\mathbb{1}_{A^c} \cdot \mathbb{1}_{B^c} = \mathbb{1}_{A^c\cap B^c} = 1 - \mathbb{1}_{A\cup B}$.

Proposición 1.2.1 *Si* X, Y *son v.a. y* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *entonces:*

$$\begin{aligned} &\mu X + \lambda Y \text{ es v.a.} \\ &XY \text{ es v.a.} \end{aligned}$$

i.e. es un anillo.

Proposición 1.2.2 *Criterio para determinar si* X *es v.a.*

Sea $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función cualquiera, definimos* $\left\{B \subset \mathbb{R} : Y^{-1}(B) \subset \mathfrak{F}\right\}$, *entonces este conjunto es* $\sigma-$*álgebra en* $\mathbb{R}$.

X es v.a. significa que la $\sigma-$álgebra, $\left\{B \subset \mathbb{R} : X^{-1}(B) \subset \mathfrak{F}\right\}$, contiene a los borelianos. Para comprobar que contiene a los Borel, basta con probar que contiene a los intervalos o aún mejor, que contiene a los intervalos $(\infty, x]$ ó $(-\infty, x)$. En general se sigue el criterio:

$$X \text{ es v.a. si } \{X \leq t\} \in \mathfrak{F}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ ó } X \text{ es v.a. si } \{X < t\} \in \mathfrak{F}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Propiedades 1.2.1 *Si* X *es v.a y* f *una función medible, entonces la composición es v.a. i.e.* $f \cdot X$ *es v.a.*

Lo mismo sucede si consideramos $(X_i)_{i=1}^n$ *v.a., entonces* $f(X_i)$ *es v.a.*

Definición 1.2.2 ***Límites de sucesiones***.

Sean $(X_i)_{i=1}^n$ *v.a en* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, *entonces:*

1. $\inf X_n = Y$ *es v.a.*
2. $\sup X_n$ *es v.a.*
3. $\overline{\lim} X_n = \inf\{\sup X_n\}$ *es v.a.,*
4. $\underline{\lim} X_n = \sup\{\inf X_n\}$ *es v.a.,*

Lema 1.2.1 *Sean* X, Y *dos v.a. definidas en* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, *entonces* $\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\} \in \mathfrak{F}$.

Definición 1.2.3 ***Convergencia casi segura***. *Sean* $(X_i)_{i=1}^n$ *v.a en* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, *entonces decimos que* X_n *converge casi seguramente (c.s.) si*

$$P\left(\left\{\overline{\lim} X_n = \underline{\lim} X_n\right\}\right) = 1.$$

Definimos $\lim X_n$ *tal que* $\overline{\lim} X_n = \underline{\lim} X_n$.

1.3. Distribución de probabilidad de una v.a..

Sean X v.a. definida en $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Lo que nos interesa de X es la probabilidad con la que toma valore en $\mathbb{R}$.

Definición 1.3.1 *Decimos que μ_X es una **distribución de probabilidad** si*

$$\mu_X(B) = P(X \in B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\}) = P\left(X^{-1}(B)\right),$$

donde, claro está, $X^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$. μ_X contiene toda la información relevante de la v.a. X.

Ejemplo 1.3.1 *Dado $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ i.e. descripción del archiconocido ejemplo del dado, donde rescribimos Ω como $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, tomamos $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ y considermos que $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}$.*

Consideramos ahora las v.a.

$$X(\omega_i) = i, \qquad Y(\omega_i) = \begin{cases} 2 & i \in [5,6] \\ -1 & i \in [1,4] \end{cases},$$

viendo que las $\sigma-$álgebras que forman son

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \mathcal{P}(\Omega) = \mathfrak{F}, \\ \sigma(Y) &= \{\varnothing, \Omega, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6\}\}, \end{aligned}$$

y ahora nos preguntamos por μ_X, μ_Y.

Vemos que

$$\mu_X(B) = P(X \in B), \qquad i.e. \qquad \mu_X(B) = \frac{\#(B \cap \{1,2,3,4,5,6\})}{6},$$

por lo tanto

$$\mu_X(B) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} \delta_i,$$

donde δ_i representa la delta-Dirac. Mientras que para la v.a. Y vemos que

$$\mu_Y(B) = \frac{4}{6}\delta_{-1} + \frac{2}{6}\delta_2,$$

ya que

$$\begin{aligned} \mu_Y(2) &= P(Y \in 2) = P(Y = 2) = P(\{\omega_5, \omega_6\}) = \frac{2}{6}, \\ \mu_Y(-1) &= P(Y \in -1) = P(Y = -1) = P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}) = \frac{4}{6}, \end{aligned}$$

viendo así que por ejemplo

$$\mu_Y(\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}) = 0.$$

En general se tiene

$$\mu_X = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)\, \delta_i, \qquad / \qquad \mu_X = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)\, \delta_i = 1.$$

Ejemplo 1.3.2 *En* $(\Omega = [-1,1], \mathfrak{F} = \mathbb{B}, P = Lebesgue)$ *, definimos la v.a.* $X(\omega) = \omega^2$*, queremos calcular* μ_X*.*

Para ello consideramos la definición i.e.

$$\mu_X = P(X \in B)$$

y vemos que pasa en los intervalos siguientes: pensar gráficamente i.e. $[-1,1] \xrightarrow{\omega^2} [0,1]$

1. $[1,\infty]$
$$\mu_X([1,\infty]) = P(X \geq 1) = P(\{\pm 1\}) = 0,$$
2. *de igual forma vemos que en el intervalo* $[-\infty, 0]$ *, tenemos*
$$\mu_X([-\infty,0]) = P(X \leq 0) = P(\{0\}) = 0,$$
3. *por último vemos que pasa en un intervalo* $[a,b] \subset [0,1]$
$$\begin{aligned} \mu_X([a,b]) &= P(a \leq X \leq b) = P\left(\left\{\omega : a \leq \omega^2 \leq b\right\}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right) = \\ &= \sqrt{b} - \sqrt{a}, \end{aligned}$$

En general tenemos que

$$\mu_X(B) = \int_B \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$

para cualquier Borel B.

Ejemplo 1.3.3 *En* $(\Omega = [-1,1], \mathfrak{F} = \mathbb{B}, P = Lebesgue/2)$ *, definimos la v.a.* $X(\omega) = \omega^4$*, queremos calcular* $\mu_X([a,b])$*.*

Para ello consideramos la definición i.e.

$$\mu_X = P(X \in B)$$

y seguimos los mismos que en el ejemplo anterior i.e.

$$\begin{aligned} \mu_X([a,b]) &= P(a \leq X \leq b) = P\left(\left\{\omega \in \Omega : a \leq \omega^4 \leq b\right\}\right) = \\ &= P\left(\left\{\omega \in \Omega : -\sqrt[4]{b} \leq \omega^4 \leq \sqrt[4]{a}\right\}\right) \cup P\left(\left\{\omega \in \Omega : \sqrt[4]{a} \leq \omega^4 \leq \sqrt[4]{b}\right\}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a}\right) = \sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a}. \end{aligned}$$

Definición 1.3.2 *Sean* X, Y *dos v.a. definidas en* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *, entonces decimos que son iguales en distribución si* $\mu_X = \mu_Y$*, utilizándose la notación*

$$X \stackrel{d}{=} Y.$$

Al ser la definición de μ_X, distribución de probabilidad, $\mu_X(B) = P(X \in B)$, algo complicadilla de manejar, a efectos prácticos, consideraremos la siguiente defición.

Definición 1.3.3 *La* ***función de distribución*** *de la v.a.* X*,* $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$*, definida por*

$$F_X(t) = \mu_X((-\infty, t]) = P_X(X \leq t), \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

la función de distribución asigna a cada número real t*, la probabilidad acumulada hasta ese valor* t*.*

Observación 1.3.1 *La idea que anda por detrás es la siguiente.*

Debemos pensar en X v.a. como una generalización de la función inversa de F, i.e.

$$X = F^{-1},$$

tal y como sospechábamos a partir del ejemplo (1.3.2). Ver el ejemplo (1.3.4).

Propiedades 1.3.1 *Si F es la función de distribución de X entonces se verifica:*

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$; $P_X(a < X < b) = F(b) - F(a)$
2. *F es cont. por la derecha en cada punto de $\mathbb{R}$*
3. *F es monótona no decreciente*
4. $F(-\infty) = 0$, *i.e.* $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$, *y que* $F(\infty) = 1$.

Ejemplo 1.3.4 *En $(\Omega = (0,1), \mathfrak{F} = \mathbb{B}, P = Lebesgue)$, definimos la v.a.*

$$X(\omega) = \sup\{y \in \mathbb{R} : F(y) \leq \omega\}, \qquad \omega \in (0,1),$$

queremos calcular F_X. Vemos que

$$\begin{aligned} F \quad &: \quad \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \\ &: \quad y \longrightarrow F(y) \in [0,1] \leq \omega, \end{aligned}$$

tenemos

$$\{\omega \in (0,1) : X(\omega) \leq t\} = \{\omega \in (0,1) : \omega \leq F(t)\}$$

esto nos da la idea de $X = F^{-1}$,

$$\begin{aligned} F_X(t) \quad &: \quad = P(\{\omega \in (0,1) : X(\omega) \leq t\}) = P(\{\omega \in (0,1) : \omega \leq F(t)\}) = \\ &= \quad m_{Lebesgue}((0, F(t))) = F(t) - 0 = F(t) \end{aligned}$$

por lo que

$$F = F_X.$$

Ejemplo 1.3.5 *Sean $(X_i)_{i=1}^n$ v.a.i.i.d. con función de distribución común $F(x)$. Escribir la función de distribución de la v.a.*

$$Z_n = \min(X_1, ..., X_n).$$

Vemos que hay que calcular (por definición)

$$F_{Z_n}(t) = P(Z_n \leq t),$$

observándose que

$$P(Z_n > t) = P(\min(X_1, ..., X_n) > t),$$

al tratarse de v.a.i.i.d., entonces

$$\begin{aligned} P(Z_n > t) \quad &= \quad P(X_1 > t, ..., X_n > t) = \prod_{i=1}^n P(X_i > t) = \\ &= \quad \prod_{i=1}^n \left[1 - F_{X_i}(t)\right] = (1 - F(t))^n, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$F_{Z_n}(t) = 1 - (1 - F(t))^n.$$

Definición 1.3.4 *Si X es v.a. discreta se define la **función de masa***

$$p:\mathbb{R}\longrightarrow[0,1]$$

tal que

$$p(x)=P_X(x)=P\left[\omega\in\Omega:X(\omega)=x\right]$$

Definición 1.3.5 *Si X es v.a. continua, se llama **función de densidad** f de X a cualquier función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, tal que*

1. $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$,
2. *f contiene a lo sumo un número finito de discontinuidades i.e. f es integrable Riemann*
3. $\int_{\mathbb{R}} f dx=1$,

A partir de $f\longmapsto F$

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)dx$$

Teorema 1.3.1 *Sea X v.a. continua, con función de densidad f y función de distribución F*

1. *F es continua,*
2. *Si f es continua en x, entonces F es derivable en x, tal que $F'(x)=f(x)$.*
3. $\forall\left[a,b\right]$
$$P\left(X\in(a,b)\right)=\int_{a}^{b}f(t)dt=F(b)-F(a).$$

En general para modelización serán útiles las siguientes observaciones.

Ejemplo 1.3.6 *En $(\Omega,\mathfrak{F},P)$, definimos la v.a $X(\omega_i)=i$ donde $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ i.e. descripción del ejemplo del dado, donde rescribimos Ω como $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$, tomamos $\mathfrak{F}=\mathcal{P}(\Omega)$ y considermos que $P(\{\omega_i\})=\frac{1}{6}$. Definimos ahora la v.a. Y en $(\Omega=(0,1),\mathfrak{F}=\mathbb{B},P=Lebesgue)$, tal que $X\overset{d}{=}Y$. Entonces sabemos que $\mu_X=\mu_Y$ (mismos valores con las mismas probailidades) y que por lo tanto $F_X=F_Y$.*

Es decir, este ejemplo concreto del lanzamiento del dado lo hemos traducido a un problema de teoría de la medida y muchos procesos aleatorios se ajustan a esta modelización.

Teorema 1.3.2 *Toda v.a. es una transformación de una uniforme. Dicho de otra forma. Sea X v.a. en $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ entonces existe $G:(0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$, tal que $X\overset{d}{=}G(U)$, donde $U[0,1]$ es la uniforme y G es una función medible Borel.*

Observación 1.3.2 *La moraleja de todo esto es:*

1. *para especificar una v.a. X basta con dar su función de distribución, i.e. simplemente una función $F:\mathbb{R}\longrightarrow[0,1]$ que verifique las propiedades del teorema (1.3.1).*

2. *Sabemos que existe X tal que $F_X = F$,*
3. *para analizar X, sólo necesitaré conocer μ_X (valores y probabilidades) o F_X (resumen de μ_X) donde $X = F^{-1}$, y por último,*
4. *Toda v.a. X, es una transformación de una uniforme $U[0,1]$, donde*

$$F_U(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)du,$$

con

$$f(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ 1 & u \in [0,1] \\ 0 & u > 1 \end{cases},$$

por lo tanto

$$F_U(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0] \\ t & t \in [0,1] \\ 0 & t \in (1, \infty) \end{cases}.$$

Terminaremos mostrando algunos ejemplos.

Ejemplo 1.3.7 *Tenemos unas variables $X_1, X_2, ...$ i.i.d., uniformes en el conjunto $[0,1] \cup [2,3]$. Consideramos la variable*

$$Z = \text{máx}(X_1, X_2, X_3, X_4)$$

queremos calcular

$$P(Z > 3/2).$$

Solución. Vemos que

$$P(Z \leq 3/2) = P(\text{máx}(X_1, X_2, X_3, X_4) \leq 3/2) = P(X_1 \leq 3/2, X_2 \leq 3/2, X_3 \leq 3/2, X_4 \leq 3/2),$$

pero al ser v.a.i.i.d. entonces

$$P(X \leq 3/2) = P(X \leq 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^4,$$

y por lo tanto

$$P(Z > 3/2) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

Consideremos ahora la variable

$$Z = \text{máx}(X_1, X_3, X_5, X_7, X_9)$$

queremos calcular

$$P(Z > 3/2).$$

Cómo antes vemos que

$$\begin{aligned} P(Z \leq 3/2) &= P(\text{máx}(X_1, X_3, X_5, X_7, X_9) \leq 3/2) = \\ &= P(X_1 \leq 3/2, X_3 \leq 3/2, X_5 \leq 3/2, X_7 \leq 3/2, X_9 \leq 3/2), \end{aligned}$$

y por la misma razón que antes i.e. al tratarse de v.a.i.i.d entonces

$$P(X \leq 3/2) = P(X \leq 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^5,$$

así que

$$P(Z>3/2)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejemplo 1.3.8 *Tenemos unas variables $X_1, X_2, ...$ i.i.d., uniformes en el conjunto $[0,1]$. Consideramos la variable*

$$Z=\text{mín}\left(\text{máx}\left(X_1,X_2\right),\text{máx}\left(,X_3,X_4\right)\right)$$

queremos calcular

$$P\left(Z>1/2\right).$$

Solución. Vemos que

$$\begin{aligned}
P(Z>1/2) &= P\left(\text{mín}\left(\text{máx}\left(X_1,X_2\right),\text{máx}\left(,X_3,X_4\right)\right)>1/2\right)= \\
&= P\left(\text{máx}\left(X_1,X_2\right)>1/2,\text{máx}\left(,X_3,X_4\right)>1/2\right)= \\
&\overset{i.i.d.}{=} P\left(\text{máx}\left(X_1,X_2\right)>1/2\right)^2 \\
&= \left(1-P\left(\text{máx}\left(X_1,X_2\right)\leq 1/2\right)\right)^2 \\
&= \left(1-P\left(X\leq 1/2\right)^2\right)^2 \\
&= \left(1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{16}
\end{aligned}$$

Si ahora consideramos

$$Z=\text{máx}\left(\text{mín}\left(X_1,X_2\right),\text{mín}\left(,X_3,X_4\right)\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}
P(Z\leq 1/2) &= P\left(\text{máx}\left(\text{mín}\left(X_1,X_2\right),\text{mín}\left(,X_3,X_4\right)\right)\leq 1/2\right) \\
&= P\left(\text{mín}\left(X_1,X_2\right)\leq 1/2,\text{mín}\left(,X_3,X_4\right)\leq 1/2\right) \\
&\overset{i.i.d.}{=} P\left(\text{mín}\left(X_1,X_2\right)\leq 1/2\right)^2 \\
&= \left(1-P\left(\text{mín}\left(X_1,X_2\right)>1/2\right)\right)^2 \\
&= \left(1-P\left(X>1/2\right)^2\right)^2 \\
&= \left(1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{16}
\end{aligned}$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejemplo 1.3.9 *Sea X una v.a. tal que su cdf (cumulative distributuion function) es F_X y por lo tanto su pdf (probability density function) es f_X. Sea $Y=aX+b$, $a,b\in\mathbb{R}^+$. Calcular F_Y, f_Y.*

Solución. Vemos que por definición

$$F_Y(y):=P(Y\leq y)$$

así que

$$P(Y\leq y)=P(aX+b\leq y)=P\left(X\leq\frac{y-b}{a}\right):=F_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Sea $y = g(x) = ax + b$, entonces $x = g^{-1}(y) = h(y) = \frac{y-b}{a}$, y $\frac{dx}{dy} = 1/a$, por lo tanto

$$f_Y(y) = \left|\frac{dx}{dy}\right| f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Si $X \sim U[0,1]$, entonces

$$f_X = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & resto \end{cases},$$

de esta forma

$$f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \begin{cases} 1/a & b \leq y \leq a+b \\ 0 & resto \end{cases}$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejemplo 1.3.10 *Sea X una v.a. tal que*

$$f_X = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & resto \end{cases},$$

encontrar $Y = g(X)$, *tal que*

$$f_Y = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & resto \end{cases}.$$

Solución. Vemos que por definición

$$F_X = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi)\, d\xi = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} e^{-\xi} d\xi \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x > 0 \\ 0 & resto \end{cases},$$

de esta forma vemos que $Z = 1 - e^{-x}$. Recordamos que si X es una v.a. tal que $Y = F_X$ entonces Y está unifórmemente distribuida en $(0,1)$ ya que

$$f_Y = \frac{dx}{dy} f_X = f_X \frac{1}{dF_X(x)/dx} = \frac{f_X}{f_X} = 1,$$

así que la variable $Z = 1 - e^{-X}$, está unifórmemente distribuida en $(0,1)$.

Por otro lado vemos que

$$F_Y = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{2\sqrt{\eta}} d\eta \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{y} & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & resto \end{cases}.$$

encontrando por lo tanto que $W = \sqrt{Y}$, está unifórmemente distribuida en $(0,1)$ y que $Z = W$, llegando a

$$Y = \left(1 - e^{-X}\right)^2,$$

De igual forma podemos ver que si

$$X \sim f_X = \frac{1}{2} e^{-|t|},$$

entonces si definimos $Y = X^2$, vemos que

$$P(Y \geq 1),$$

se calcula de la siguiente forma

$$P(Y \geq 1) = P\left(X^2 \geq 1\right) = P(X \geq 1) + P(X \leq -1) = 2P(X \geq 1) = \int_1^{\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{e},$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Capítulo 2

Esperanza y Varianza.

2.1. Esperanza.

Sea X una v.a. en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, f describe la función de masa o densidad si X es discreta o continua respectivamente

Definición 2.1.1 ***Esperanza.*** *Si $X \geq 0$ (i.e. $P(\{\omega : X(\omega) \geq 0\}) = 1$) definimos la esperanza de la v.a. X como*

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP.$$

Este valor de la esperanza de X, puede ser ∞.

De forma análoga podemos definir la esperanza de X como sigue:

$$\mu := E[g(X)] = \begin{cases} \sum g(x_i) f(x_i) & X \text{ v.a.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x_i) f(x_i) dx & X \text{ v.a.c.} \end{cases}$$

donde esta última igualdad se puede formular mediante el siguiente teorema:

Teorema 2.1.1 *En las condiones anterores se tiene*

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(t) d\mu_X(t).$$

Demostración. La idea de la demostración se sigue de los teoremas al uso en teoría de la medida i.e. definir la integral para funciones indicatrices (simples) y luego y generalizando mediante los teoremas de convergencia etc... para funciones más complejas. ■

Si $g(X) = X$, entonces

$$E(X) = \sum x_i f(x_i), \quad \text{ó} \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_i) dx$$

En general si $X = X^+ - X^-$, (analogía con la teoría de la medida) definimos $E(X)$ de la siguiente forma:

$$E(X) = E(X^+) - E(X^-)$$

siempre y cuando alguna de estas dos partes no sea ∞.

Observación 2.1.1 *Dada X, si $E(|X|) < \infty$, entonces al ser $0 \leq X^{+} \leq |X|$ y $0 \leq X^{-} \leq |X|$ entonces $\exists\, E(X)$.*

Si $X \in \mathbb{L}^{1}(P)$, entonces $\exists\, E(X)$.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1.1 *Como siempre consideramos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y X v.a. en dicho espacio.*

1. *Sea $A \in \mathcal{F}$, y sea $X = \mathbb{1}_A$ entonces definimos la esperanza de X como*
$$E(X) = \int_A \mathbb{1}_A dP = P(A).$$
2. *Sea $X = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbb{1}_{A_j}$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $A_j \in \mathcal{F}$ entonces*
$$E(X) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P(A_j).$$
3. *$\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ y $P(\{\omega_j\}) = p_j$ donde obviamente $\sum p_j = 1$, $p_j \geq 0$. Entonces definimos la esperanza de X como*
$$E(X) = \int_\Omega X dP = \sum_j X(\omega_j) p_j$$
i.e. valores por probabilidades.

Proposición 2.1.1 *Sean X, Y v.a. y $a, b \in \mathbb{R}$*

1. $E[a] = a$,
2. $E[aX + b] = aE[X] + b$,
3. $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$, *entonces*
$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y], \tag{2.1}$$
4. $X \geq 0, \Longrightarrow E[X] \geq 0$,
5. $X \geq Y, \Longrightarrow E[X] \geq E[Y]$,
6. $E(|X+Y|) \leq E(|X|) + E(|Y|)$,
7. ***Desigualdad de Jensen**:*
$$|E[X]| \leq E[|X|],$$
en general, sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa, entonces
$$\varphi(E[X]) \leq E[\varphi(X)].$$
8. $E(|X|) \leq E(|X|^p)^{1/p} \leq E\left(|X|^{1/q}\right)^{1/q}$, *con $1 \leq p \leq q$. En particular si $p = 2$ entonces $E(|X|) \leq E\left(|X|^2\right)^{1/2}$.*

9. ***Desigualdad de Hölder.***
$$E\left(|XY|\right) \leq E\left(|X|^{p}\right)^{1/p} E\left(|Y|^{1/q}\right)^{1/q},$$
con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$
En particular si $p=q=2$ *entonces obetenemos la* ***desigualdad de Cauchy-Schwarz***
$$E\left(|XY|\right) \leq E\left(|X|^{2}\right)^{1/2} E\left(|Y|^{1/2}\right)^{1/2}.$$

10. *Si* X, Y *son v.a.i. entonces:*
$$E[XY] = E[X]\, E[Y].$$
más abajo definiremos el concepto de independenia.

Observación 2.1.2 *Tener en cuenta que*
$$P(X=x, Y=y) = P(X=x)\, P(Y=y)$$
$$\begin{aligned} E[XY] &= \sum xyP(X=x, Y=y) = \sum xyP(X=x)\, P(Y=y) = \\ &= \sum xP(X=x)\, yP(Y=y) = \sum xP(X=x) \sum yP(Y=y) = E[X]\, E[Y]. \end{aligned}$$

Teoremas básicos.

Teorema 2.1.2 ***Covergencia monótona****: Si* (X_n) *v.a. no decreciente tal que*
$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \qquad \Longrightarrow \qquad E[X_n] \longrightarrow E[X].$$

Corolario 2.1.1
$$\sum E[X_n] = E\left[\sum X_n\right].$$

Corolario 2.1.2 *Si* (X_n) *v.a. no decreciente tal que* $X_n \geq Y$*, con* Y *integrable, entonces:*
$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X].$$

Teorema 2.1.3 ***Fatou.***

1. *Sea* (X_n) *v.a. tal que* $X_n \geq Y$*, con* Y *integrable, entonces:*
$$E\left(\lim_{n\to\infty} \inf X_n\right) \leq \underline{\lim} E[X_n].$$

2. *Sea* (X_n) *v.a. tal que* $X_n \leq Y$*, con* Y *integrable, entonces:*
$$E\left(\overline{\lim} X_n\right) \geq \overline{\lim} E[X_n].$$

Teorema 2.1.4 ***Convergencia dominada*** *(Lebesgue).*

Sea (X_n) *v.a. tal que* $|X_n| \leq Y$*, con* Y *integrable, además, si* $\lim_{n\to\infty} X_n = X$*, entonces* X *es integrable y* $\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$*, ó* $E[\lim |X_n - X|] = 0.$

Sólo después de haber probado estos teorema se puede establecer el siguiente teorema que nos permite calcular esperanzas.

Teorema 2.1.5 *Cálculo de esperanzas. Sea como siempre* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *nuestro espacio de probabilidad y sea* X *una v.a.. Denotamos por* μ_X *la distribución de probabilidad de* X. *(*μ_X *es probabilidad definida en* $(\mathbb{R}, Borel)$*). Sea* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ */* $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *o bien* $E(|g(x)|) < +\infty$, *entonces*

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu_X(x),$$

en particular se tiene que

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x d\mu_X(x).$$

La idea de la demostración es muy parecida a las demostraciones al uso en teoría de la medida i.e. se prueba para funciones indicadores y luego se extiende a funciones simples vía teorema de convergencia etc...

Extendemos estos conceptos al caso multidimensional e introducimos el concepto de independencia.

Definición 2.1.2 *Distribución conjunta de probabilidad. Sean* $(X_i)_{i=1}^n$ *una vs.as. en* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Definimos la distribución conjunta de probabilidad*

$$\mu_{(X_1,....,X_n)}(B) = P((X_1, ..., X_n) \in B),$$

i.e. como la probabilidad definida en Borel de $\mathbb{R}^n$.

De forma análoga al caso unidimensional podemos definir la esperanza i.e.sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función medible, entonces

$$E(f(X_1, ..., X_n)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(u_1, ..., u_n) d\mu_{(X_1,....,X_n)}(u_1, ..., u_n)$$

si

$$\begin{array}{rcl} f(u_1, ..., u_n) & \geq & 0, \qquad \text{ó} \\ f(X_1, ..., X_n) & \in & \mathbb{L}^1, \qquad \text{i.e.} \qquad E(f(X_1, ..., X_n)) < \infty. \end{array}$$

2.2. Varianza.

Definición 2.2.1 ***Varianza.*** *Definimos* $E[X] = \mu$ *y la varianza de la v.a.* X *como:*

$$\sigma^2[X] := var(X) = E\left[(X - E[X])^2\right]$$

si desarrollamos esta expresión entonces obtenemos definiciones equivalentes:

$$var(X) = E\left[X^2\right] - E[X]^2$$

$$var(X) = \sum (x - \mu)^2 f(x_i) = \sum x_i^2 f(x_i) - E(X)^2$$

$$var(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 f(x_i)$$

Proposición 2.2.1 *Supongamos que son independientes, entonces*

$$\begin{array}{rcl} \sigma^2[aX + b] & = & a^2\sigma^2[X] \\ var(aX + bY) & = & a^2 var(X) + b^2 var(Y) \qquad \Longrightarrow \qquad var(X - Y) = var(X) + var(Y), \end{array}$$

La varianza de la suma suma de v.a. pero que no son independientes

$$var(X + Y) = var(X) + 2cov(X, Y) + var(Y),$$

más abajo definiremos el concepto de covarianza.

Si son independientes 2 a 2 entonces se verifica

$$var\left(\sum X_i\right) = \sum var\left(X_i\right) + 2\sum cov\left(X_i, X_j\right),$$

si son independientes, entonces

$$var\left(\sum a_i X_i\right) = \sum a_i^2 var\left(X_i\right).$$

Proposición 2.2.2

$$var(X) = E\left[X^2\right] - E\left[X\right]^2$$

Demostración.

$$var(X) = E\left[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right] = E\left[X^2\right] - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E\left[X^2\right] - E\left[X\right]^2,$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Definición 2.2.2 ***Desviación típica***

$$\sigma = \sqrt{var(X)}$$

Observación 2.2.1 *Sea X v.a. con función de distribución F*

$$\begin{aligned} E(X) &\approx \text{centro de gravedad,} \\ var(X) &\approx \text{momento de inercia.} \end{aligned}$$

Definición 2.2.3 *Sean X, Y v.a. tales que $E(X) = \mu$, $E(Y) = \gamma$. Definimos su* ***covarianza*** *como*

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E\left(\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right) = \\ &= E\left(\left(X - \mu\right)\left(Y - \gamma\right)\right) = E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Si son independientes entonces $cov(X,Y) = 0$.

Observación 2.2.2

$$cov\left(X,X\right) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E\left[X^2\right] - E\left[X\right]^2 = var(X)$$

Definición 2.2.4 *Coeficiente de correlación.*

$$\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)}\sqrt{var(Y)}}.$$

ρ verifica las siguientes propiedades:

1. $\rho \in [-1, 1]$,
2. $\rho = 0 \Longleftrightarrow cov(X,Y) = 0$, *decimos entonces que están* ***incorreladas*** *(es más débil que la independencia)*
3. $|\rho| = 1 \Longleftrightarrow cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \sqrt{var(X)}\sqrt{var(Y)} \Longleftrightarrow Y = aX + b.$

2.3. Independencia.

Definición 2.3.1 ***Independencia.***

1. *De sucesos* (A, B). *Decimos que* A, B *son independientes si*
$$P(A \cap B) = P(A) P(B).$$
2. *De 2 v.a.. Sean* $(X_i)_{i=1}^2$ *una vs.as. en* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *decimos que son independientes si*
$$P(X_1 \in C, X_2 \in D) = P(X_1 \in C) P(X_2 \in D)$$
para C, D *borel de* $\mathbb{R}^n$.
3. *De* $\sigma-$*álgebras. Decimos que* $\mathcal{F}, \mathcal{G}$, *dos* $\sigma-$*álgebras son independientes si* $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{G}$, *se tiene que* A, B *son independientes.*

Observación 2.3.1 *Significado de la independencia. Noción de probabilidad condicionada.*

Definición 2.3.2 *Independencia de familias.*

1. *De eventos.Sea* $\mathcal{A} = \{A_i\}$ *familia de sucesos en* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Decimos que son independientes si para cualquiera subfamilia "finita"* $\{A_{n_i}\}$ *se tiene*
$$P(\cap A_{n_i}) = \prod_i P(A_{n_i})$$
2. *De v.a.Sean* $(X_i)_{i=1}^n$ *una vs.as. en* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *decimos que son independientes si*
$$P(X_1 \in A_1, ..., X_n \in A_n) = \prod_i P(A_i \in A_i)$$
para C, D *borel de* $\mathbb{R}^n$.
3. *De* $\sigma-$*álgebras. Decimos que* $\mathcal{F}_i$, $\sigma-$*álgebras son independientes si* $\forall A_i \in \mathcal{F}_i$, *se tiene que* A_i, A_j *son independientes, i.e.* $P(\cap A_{n_i}) = \prod_i P(A_{n_i})$.

Definición 2.3.3 ***Independencia*** *y medida producto*
$$\mu_{(X,Y)}(C) = P((X, Y) \in C)$$

Proposición 2.3.1 *Si* X, Y *son independientes entonces*
$$\mu_{(X,Y)} = \mu_{(X)} \otimes \mu_{(Y)}$$

Por ejemplo si $n = 2$, entonces
$$\begin{aligned} \mu_{(X,Y)}(A \times B) &= P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B) = \\ &= \mu_{(X)}(A) \mu_{(Y)}(B) = \left(\mu_{(X)} \otimes \mu_{(Y)}\right)(A \times B) \end{aligned}$$

Teorema 2.3.1 *Sean* X, Y *dos v.a. independientes. Entonces*

1. $d\mu_{(X,Y)} = d\mu_{(X)} \otimes d\mu_{(Y)}$,

2. $E(h(X,Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} h(u,v)d\mu_{(X,Y)} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} hd\mu_{(X)} \right) d\mu_{(Y)}$,
3. $E(XY) = E(X)E(Y)$, *este punto es un caso particular del anterior.*

Corolario 2.3.1 *Teorema de Fubinni. X, Y independientes entonces integral iterada.*

Ejemplo 2.3.1 *Veremos un ejemplo en el que $E(XY) \implies E(X)E(Y)$, pero no al revés. Consideramos las v.a. X,Y tales que*

$Y\backslash X$	-1	0	1	
-1	0	$1/5$	0	$1/5$
0	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$3/5$
1	0	$1/5$	0	$1/5$
	$1/5$	$3/5$	$1/5$	

en este caso

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 = E(Y) \\ E(XY) &= 0 \end{aligned}$$

pero no son independientes, así que la moraleja es que hay que tener cuidado de antemano si no se advierte que dichas variables sean independientes.

Observar que

$$P(X = 1, Y = 1) = 0 < P(X = 1) P(Y = 1).$$

Teorema 2.3.2 *Sean X,Y dos v.a. independientes, entonces*

$$P(X + Y \leq t) = \int_{\mathbb{R}} F_X(t - y) \, d\mu_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} P(X \leq t - y) \, d\mu_Y(y).$$

Teorema 2.3.3 *Sean X,Y dos v.a. independientes y continuas y con funciones de densidad (f_X, f_Y), entonces $X+Y$ es continua con función de densidad dada por*

$$F_{X+Y}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_X(t - z) \, f_Y(z) dz.$$

2.4. Desigualdades de Markov y Chebychev.

Teorema 2.4.1 *Desigualdades de **Markov** y **Chebychev**.*

- ***Markov**: Sea $X \geq 0$, v.a. tal que $\exists$, $E(X)$, entonces $\forall t$.*

  $$P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t},$$

  de forma genérica tenemos

  $$P(g(X) \geq t) \leq \frac{E(g(X))}{t},$$

  e incluso

  $$P(g(X) \geq t) \leq \frac{E(g(X)^k)}{t^k}.$$

- ***Chebychev**: Sea $X \geq 0$, v.a. tal que $\exists$, $var(X)$, entonces denotamos, $Z = (X - E(X))^2$, de esta forma $Z \geq 0$ y $E(Z) = var(X)$, para todo t*

$$P((X - E(X))^2 \geq t^2) \leq \frac{var(X)}{t^2}$$

y por lo tanto

$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{var(X)}{t^2}, \qquad P(|X - E(X)| > t\sigma(X)) \leq \frac{1}{t^2}$$

o equivalentemente

$$P(|X - E(X)| < t) \geq 1 - \frac{var(X)}{t^2}.$$

i.e. que la probabilidad de alejarse de la media está controlada por la varianza.

Podemos encontrar otras versiones del teorema de Chebychev, como la siguiente:

Proposición 2.4.1 ***Desigualdad de Chebychev***[1]. *Sea el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y X v.a. en dicho espacio. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, creciente. Entonces $\forall \lambda \in \mathbb{R}$*

$$P(X > \lambda)\, \varphi(\lambda) \leq E(\varphi(X)).$$

En efecto. Consideramos

$$\varphi(X) = \varphi(X)\left(\mathbb{1}_{X>\lambda} + \mathbb{1}_{X\leq\lambda}\right) \geq \varphi(X)\, \mathbb{1}_{X>\lambda} \geq \varphi(X)\, \mathbb{1}_{X\geq\lambda},$$

al ser creciente, entonces

$$\varphi(X) \geq \varphi(\lambda)\, \mathbb{1}_{X\geq\lambda},$$

tomando esperanzas entonces:

$$E(\varphi(X)) \geq E(\varphi(\lambda)\, \mathbb{1}_{X\geq\lambda}) = E(\varphi(\lambda))\, E(\mathbb{1}_{X\geq\lambda}),$$

por lo tanto

$$E(\varphi(X)) \geq E(\varphi(\lambda))\, P(X \geq \lambda),$$

tal y como queríamos hacer ver. ∎

Veremos a continuación algunos sencillos ejemplos.

Ejercicio 2.4.1 *Chebychev: Supongamos que X es v.a. tal que $E(X) = 25$ y $\sigma(X) = 2$, entonces estimar*

1. $P(X \leq 35)$
2. $P(X \geq 20)$

Solución. Consideramos la desigualdad de Chebychev para aproximar tales probabilidades:

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Como sabemos que $\mu = 25$ y $\sigma = 2$ entonces

$$X \leq 35 \iff \mu + k\sigma = 35 \iff k = 5$$

[1] Algunos autores prefieren llamar a esta desigualdad, desigualdad de Markov en vez de Cheby.

así ($k=5$)

$$1-\frac{1}{k^2}=1-\frac{1}{5^2}\backsimeq 0{,}96$$

y ($k=5$)

$$\mu-k\sigma=15$$

por lo tanto

$$P(15\leq X\leq 35)\geq 0{,}96\Longrightarrow P(X\leq 35)\geq 0{,}96$$

ya que

$$P(X\leq 35)\geq P(15\leq X\leq 35)\geq 0{,}96$$

Para contestar a la segunda pregunta operamos de igual forma:

$$X\geq 20\Longleftrightarrow \mu-k\sigma=20\Longleftrightarrow k=2{,}5$$

por lo tanto

$$P(X\geq 20)\geq P(20\leq X\leq 30)\geq 0{,}84$$

como queríamos hacer ver. ■

Ejercicio 2.4.2 *Sea X tal que $E(X)=80$, utilizar Cheby para estimar la desviación típica si sabemos que*

$$P(75\leq X\leq 85)\geq 0{,}9$$

Solución. Sabemos que Cheby nos dice:

$$P(\mu-k\sigma\leq X\leq \mu+k\sigma)\geq 1-\frac{1}{k^2}=0{,}9$$

por lo tanto

$$1-\frac{1}{k^2}=0{,}9\Longleftrightarrow k=\sqrt{10}$$

y por consiguiente:

$$P(80-\sqrt{10}\sigma\leq X\leq 80+\sqrt{10}\sigma)\geq 0{,}9$$

$$80-\sqrt{10}\sigma=75$$
$$80+\sqrt{10}\sigma=85$$

por lo tanto

$$\sigma=\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

como queríamos hacer ver. ■

Ejercicio 2.4.3 *Una v.a. tiene de media 14 y $\sigma=\sqrt{2}$. Encontrar una cota inferior de la prob. de que dicha variable $\in(10,18)$.*

Solución. Cheby nos dice:

$$P(\mu-k\sigma\leq X\leq \mu+k\sigma)\geq 1-\frac{1}{k^2}$$

por lo tanto

$$P(14 - k\sqrt{2} \leq X \leq 14 + k\sqrt{2}) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$P(10 \leq X \leq 18) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

por consiguiente:

$$k\sqrt{2} = 4 \Longleftrightarrow k = 2\sqrt{2}$$

$$P(10 \leq X \leq 18) \geq 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{7}{8}$$

como queríamos hacer ver. ■

2.5. Ejemplos.

Ejercicio 2.5.1 *Tenemos una máquina compuesta de 10 elementos independientes* $(C_i)_{i=1}^{10}$, *con* $P(C_i = fallo) = 0{,}05$. *Estimar la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre el número de elementos que fallan y el número medio de fallos en un periodo* T *resulte:*

1) menor que 2.

2) mayor que 2.

Solución. Si designamos por X el número de fallos en el periodo T, entonces $X \in Bin(10, p = 0{,}05)$, por lo que su esperanza y varianza son

$$E[X] = np = 0{,}5, \qquad var(X) = npq = 0{,}475.$$

si tenemos en cuenta la desigualdad de Cheby entonces encontramos que

$$P(|X - E[X]| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{var(X)}{\varepsilon^2},$$

de esta forma encontramos que:

1)

$$P(|X - 0{,}5| < 2) \geq 1 - \frac{0{,}475}{4} \approx 0{,}88,$$

2)

$$P(|X - 0{,}5| > 2) \leq \frac{0{,}475}{4} \approx 1 - 0{,}88.$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejercicio 2.5.2 *Sea* $P(A) = \frac{1}{2}$, *queremos acotar la probabilidad de que* $X = \#A$, $P(40 < X < 60)$, *si* $n = 100$. *Suponemos que los sucesos son independientes.*

Solución. Vemos que $X \in Bin(n = 100, p = \frac{1}{2})$, de esta forma su esperanza y varianza son

$$E[X] = np = 50, \qquad var(X) = npq = 25.$$

por lo tanto y aplicando Cheby, vemos que

$$P\left(\left|X-E\left[X\right]\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{var(X)}{\varepsilon^{2}},$$

por lo que que

$$P\left(\left|X-50\right|<10\right)\geq 1-\frac{25}{100},$$

donde se ha tomado $\varepsilon = máx X - E(X) = 60 - 50 = 10$. ■

Ejercicio 2.5.3 *Tenemos unas variables $X_1, X_2, ...$ i.i.d., uniformes en el conjunto $[0,1] \cup [2,3]$. Calcular $var(X_3)$.*

Solución. Vemos que la función de densidad es:

$$f_X\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_{[0,1]}\left(x\right)+\mathbb{1}_{[2,3]}\left(x\right)\right),$$

observándose que

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_X\left(x\right)dx=1,$$

por lo tanto

$$E\left(X\right)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X\left(x\right)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 xdx+\int_2^3 xdx\right)=\frac{3}{2},$$

y calculamos ahora

$$E\left(X^{2}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^{2}f_X\left(x\right)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 x^{2}dx+\int_2^3 x^{2}dx\right)=\frac{10}{3},$$

de esta forma vemos que

$$var\left(X\right)=E\left(X^{2}\right)-E\left(X\right)^{2}=\frac{13}{12}$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Capítulo 3

Funciones Generatrices.

3.1. Funciones generatrices de probabilidad.

Definición 3.1.1 *Definimos la **función generatriz de probabilidad** como:*

$$G_X(s) = E\left[s^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)s^k = \int s^k f_X.$$

Observación 3.1.1 *Vemos que*

1.
$$\begin{aligned} G_X(1) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)1^k = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = 1, \\ G_X(0) &= P(X=0). \end{aligned}$$

2.
$$E(X) = G_X'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)k,$$
$$var(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2.$$

   donde

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)s^k, \\ G_X'(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)ks^{k-1}, \\ G_X''(s) &= \sum_{k=2}^{\infty} P(X=k)k(k-1)s^{k-2}. \end{aligned}$$

3.
$$\lim_{s\to 1} G_X''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} P(X=k)k(k-1) = E(X(X-1)),$$

   en genral se tiene

4.
$$\lim_{s\to 1} G_X^{k)}(s) = \sum_{k=2}^{\infty} P(X=k)k(k-1)....(k-n+1) = E(X(X-1)....(X-n+1)).$$

Ejemplo 3.1.1 *1. Sea $X \sim Poisson(\lambda)$, queremos calcular $G_X(s)$.*

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)s^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}s^k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}.$$

2. Sea $X \sim Geom(p)$, queremos calcular $G_X(s)$.

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)s^k = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}s^k = \sum_{j=0}^{\infty} p(1-p)^j s^{j+1} = \\ &= ps\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j s^j = \frac{ps}{1-(1-p)s}. \end{aligned}$$

vemos que la $BN(n,p)$, binomial negativa, es la suma de geométricas independientes entonces

$$G_{(X_1,\dots,X_n)}(s) = \prod_{j=1}^{n} G_{X_j}(s) = \left(\frac{ps}{1-(1-p)s}\right)^n.$$

3. Sea $X \sim U(0,...,N)$, queremos calcular $G_X(s)$:

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{N} P(X=k)s^k = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} s^k = \frac{1}{N}\left(\frac{s-s^{N+1}}{1-s}\right).$$

Teorema 3.1.1 *Sean X,Y v.a. con valores $\{0,1,2,...\}$, $X \overset{d}{=} Y$ sii $G_X = G_Y$.*

Lema 3.1.1 *Abel. Si $u_k \geq 0$, entonces*

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k s^k, \qquad \lim_{s\to 1} f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

Ejemplo 3.1.2 *Sea $X \sim Poisson(\lambda)$, sabemos que $G_X(s)$ tiene la siguiente expresión.*

$$G_X(s) = e^{\lambda(s-1)},$$

queremos calcular $var(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Sabemos que

$$var(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2,$$

así que deberemos calcular estas derivadas i.e.

$$G_X'(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)}, \qquad G_X''(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)},$$

y calculamos ahora su límite i.e.

$$\begin{aligned}\lim_{s\to1} G_X'(s) &= \lim_{s\to1} \lambda e^{\lambda(s-1)} = \lambda = E(X),\\ \lim_{s\to1} G_X''(s) &= \lambda^2 = E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)\end{aligned}$$

por lo tanto

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda,$$

entonces

$$var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda,$$

tal y como queríamos hacer ver.

Suma de v.a.i.

Teorema 3.1.2 $G_{X+Y} = G_X \cdot G_Y$.

Teorema 3.1.3 *Sean* $(X_i)_{i=1}$ *v.a.i.i.d. y sea* $Y = \sum_{i=1}^N X_i$*. entonces*

$$G_Y(s) = G_N\left(G_X(s)\right).$$

Ejemplo 3.1.3
1. *Sean* $X_i \sim Poisson(\lambda_i)$*, sabemos que* $G_{X_i}(s)$ *tiene la siguiente expresión.*$G_{X_i}(s) = e^{\lambda_i(s-1)}$*, queremos calcular la* $G_{\sum X_i}$*,*
$$G_{\sum X_i} = \prod G_{X_i} = e^{\sum \lambda_i(s-1)} \sim Poisson(\sum \lambda_i)$$
2. *Sean* $X_i \sim Bernoulli(p)$*, queremos conocer la dostribución de la suma de* $n - Bernoullis$*. Sabemos de antemano que*
$$\sum X_i \sim Bin(n,p)$$
i.e. se trata de una binomial. Pero con funciones generatrices vemos que
$$G_{\sum X_i} = \prod G_{X_i} = \left(G_{X_i}\right)^n = (ps + (1-p))^n,$$

Convergencia[1].

Definición 3.1.2 *Decimos que* $\{X_i\} \xrightarrow{L} X$ *(**convergencia en Ley**) si* $\{F_n\} \longrightarrow F$ *tal que* F_n *es la sucesión de funciones de distribución de* X_n*.*

Observación 3.1.2 *No es suficiente que* $\{F_n\} \longrightarrow F$ *puntualmente para asegurar la convergencia en ley. Es preciso que* F *sea función de distribución.*

Teorema 3.1.4 $\{X_i\} \xrightarrow{L} X \Longleftrightarrow G_{X_i}(s) \longrightarrow G_X(s), \forall s \in (0,1)$.

De esta forma se puede demostrar por ejemplo que

$$B(n,p) \longrightarrow Poisson(\lambda = np)$$

que es una versión preliminar del TCL.

3.2. Función generatriz de momentos.

Extendemos la teoría y definimos FGM.

Definición 3.2.1 *Definimos la **función generatriz de momentos** como:*

$$M_X(\theta) := E\left[e^{\theta X}\right] = \int e^{\theta X} f_X(x)\,dx = \sum e^{\theta X} p_i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} E\left[X^k\right]$$

por lo tanto

$$M_X(0) = E(1) = 1.$$

Observación 3.2.1 *Sabemos que*

$$E[g(X)] = \int g(x) f_X dx$$

y por lo tanto

$$E\left[e^{\theta X}\right] = \int e^{\theta X} f_X(x)\,dx$$

Ejemplo 3.2.1 *Sea* $E\left(X^k\right) = 0{,}8,\ k = 1,2,3\ldots$ *Encontrar* $M_X(t)$ *y* $P(X=0), P(X=1)$.

Vemos que por definición

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E\left[X^k\right] = 1 + 0{,}8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = 0{,}2 + 0{,}8 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = 0{,}2 + 0{,}8e^t.$$

Igualmente vemos que por definición

$$M_X(t) = \sum e^{tx_i} p_X(x_i)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} P(X=0) &= 0{,}2, \\ P(X=1) &= 0{,}8. \end{aligned}$$

vemos que $X \sim Bernoulli(p)$.

Observación 3.2.2 *Vemos que*

$$\alpha_k = E\left[X^k\right] = \frac{d^k}{d\theta^k} M_X(\theta)_{|\theta=0}.$$

$$\begin{aligned} M'(0) &= \alpha_1 = E[X], \\ M''(0) &= \alpha_2 = E\left[X^2\right], \\ var(X) &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 = M''(0) - M'(0)^2, \\ &\vdots \\ M^{(k}(0) &= \alpha_k. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.2 *Por definición sabemos que* $M_X(\theta) = E\left[e^{\theta X}\right]$ *y que* $G_X(s) = E\left[s^X\right]$*, entonces se ve que si hacemos* $s = e^{\theta}$*, obtenemos:*

$$M_X(\theta) = G_X(e^{\theta})$$

Teorema 3.2.1

1. $M_X(\theta) = M_Y(\theta) \Longleftrightarrow X = Y,$
2. X, Y *v.a.i. entonces* $M_{X+Y}(\theta) = M_X(\theta) M_Y(\theta)$,
3. $\{X_i\} \xrightarrow{L} X$ *sii* $M_{X_i}(\theta) \longrightarrow M_X(\theta)$.

Ejemplo 3.2.3

1. ***Bernoulli.*** *Sea* $X \sim Bernoulli(p)$*, queremos calcular* $M_X(t)$.

$$M_X(t) = \sum_i e^{tx_i} p_X(x_i) = e^{t0} p_X(0) + e^{t1} p_X(1) = (1-p) + pe^t,$$

vemos que

$$M_X'(0) = p, \qquad M_X''(0) = p,$$

y por lo tanto

$$E[X] = p, \qquad var(X) = p(1-p).$$

Sean ahora $(X_i) \sim Bernoulli(p)$*, definimos,* $Y = \sum_i X_i$*, entonces*

$$M_Y(t) = \prod_i \left(q + pe^t\right) = \left(q + pe^t\right)^n \sim Bin(n,p),$$

tal y como veremos a continuación.

2. ***Binomial.*** *Sea* $X \sim Bin(n,p)$*, queremos calcular* $M_X(t)$.

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^t p\right)^k q^{n-k} = \left(q + pe^t\right)^n,$$

vemos que

$$M_X'(0) = np, \qquad M_X''(0) = np + n(n-1)p^2,$$

y por lo tanto

$$E[X] = np, \qquad var(X) = npq.$$

3. ***Poisson.*** *Sea* $X \sim Poisson(\lambda)$*, queremos calcular* $M_X(t)$.

$$M_X(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tk} \frac{(\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda(e^{-t}-1)},$$

vemos que

$$M_X'(0) = \lambda, \qquad M_X''(0) = \lambda^2 + \lambda,$$

y por lo tanto

$$E[X] = \lambda, \qquad var(X) = \lambda.$$

Sean ahora $(X_i) \sim Poisson(\lambda_i)$*, definimos,* $Y = \sum_i X_i$*, entonces*

$$M_Y(t) = \prod_i e^{\lambda_i(e^{-t}-1)} = e^{\Lambda(e^{-t}-1)},$$

donde $\Lambda = \sum \lambda_i$.

4. ***Exponencial***. *Sea $X \sim \exp(\lambda)$, queremos calcular $M_X(t)$.*
$$M_X(t) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{tx} dx = \left[\frac{\lambda}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x} \right]_0^\infty = \frac{\lambda}{t-\lambda}, \qquad \lambda > t,$$
vemos que
$$M_X'(0) = \lambda^{-1}, \qquad M_X''(0) = 2\lambda^{-2},$$
y por lo tanto
$$E[X] = \lambda^{-1}, \qquad var(X) = \lambda^{-2}.$$
Sean ahora $(X_i) \sim \exp(\lambda_i)$, definimos, $Y = \sum_i X_i$, entonces
$$M_Y(t) = \prod_i \left(\frac{\lambda_i}{t-\lambda_i} \right) = \left(\frac{\lambda}{t-\lambda} \right)^n \sim \Gamma(n, \lambda).$$

5. ***Normal***.*Sea $X \sim N(0,1)$, queremos calcular $M_X(t)$.*
$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{tx} dx = e^{t^2/2},$$
Sean ahora $(X_i) \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, definimos, $Y = \sum_i X_i$, entonces
$$Y \sim N\left(\sum_i \mu_i, \sum_i \sigma_i^2 \right).$$

6. $Y = aX + b$.
$$M_Y(t) = E\left(e^{t(aX+b)}\right) = e^{tb} M_X(at).$$

3.3. Función característica.

Definición 3.3.1 ***Función característica***.
$$\varphi_X(\omega) = \int e^{i\omega x} f_X dx = E\left(e^{itX}\right)$$
i.e. se trata de la TF.

Observación 3.3.1 *Se verifica:*

1. *Siempre existe $\varphi(\omega)$,*
2. *$\varphi(0) = 1$, ya que $\varphi(0) = \int f_X dx = 1$,*
3. *$|\varphi(\omega)| \leq 1$.*

Observación 3.3.2 *Vemos que*

1. ***FGP***
$$G_X(s) = E\left[s^k\right] = \int s^k f_X dx$$

2. ***FGM***
$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int e^{tX} f_X dx, \qquad s = e^t,$$

3. ***FC***
$$\varphi_X(\omega) = E\left(e^{i\omega X}\right) = \int e^{i\omega x} f_X dx, \qquad t = i\omega,$$

Teorema 3.3.1 *Si existe*
$$\alpha_k = \int x^k f_X \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \exists\ \varphi^{(n}(0) = i^n \alpha_n \\ \exists\ \varphi^{(n}(\omega) = i^n \int e^{i\omega x} x^n f_X dx \end{cases}.$$

Teorema 3.3.2 *Si existe $\varphi^{(n}(\omega)$, entonces*
$$\exists \qquad \alpha_{2n} = \frac{\varphi^{(2n}(0)}{i^{2n}},$$
Si existe $\varphi^{(2n-1}(t)$, entonces
$$\exists \qquad \alpha_{2n-2} = \frac{\varphi^{(2n-2}(0)}{i^{2n-2}}.$$

Teorema 3.3.3 *1.* $\varphi_X(\omega) = \varphi_Y(\omega) \Longleftrightarrow X = Y,$

2. *X,Y v.a.i. entonces* $\varphi_{X+Y}(\omega) = \varphi_X(\omega)\,\varphi_Y(\omega)\,,$

3. $\{X_i\} \xrightarrow{L} X$ *sii* $\varphi_{X_i}(\omega) \longrightarrow \varphi_X(\omega)\,.$

3.4. Ejemplos

Ejercicio 3.4.1 *Dada la v.a. X con función de densidad, f_X*
$$f_X(x) = \frac{a}{2} e^{-a|x|}, \qquad a > 0,$$
determinar su función característica.

Solución. Sea
$$\phi(t) = E\left[e^{itx}\right] = \int e^{itx} f_X dx$$
por lo tanto y atendiendo a la función f_X, tenemos que:
$$\phi(t) = \frac{a}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{itx} e^{ax} dx + \int_{0}^{\infty} e^{itx} e^{-ax} dx\right] = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{it+a} - \frac{1}{it-a}\right) = \frac{a^2}{a^2+t^2}.$$
Vemos que al ser $f_X(x)$ simétrica, entonces $\phi(t)$ es real. ■

Ejercicio 3.4.2 *Calcular los valores de α que hacen que ϕ es función carácterística, donde.*
$$\phi(\alpha, t) = e^{-t^{\alpha}}.$$

Solución. Atendiendo a las propiedades de $\phi(\alpha, t)$ vemos que básicamente se debe cumplir:

$$\phi(\alpha, 0) = 1, \qquad |\phi(\alpha, t)| \leq 1$$

así que:

1. $\alpha = 1, \Longrightarrow \phi(\alpha, 0) = e^{-t}$, de esta forma vemos que no se cumple la condición $|\phi(1, t)| \leq 1$.
2. $\alpha = 2, \Longrightarrow \phi(\alpha, 0) = e^{-t^2}$, de esta forma vemos que
$$\phi(\alpha, t) = e^{-t^2} \in N(0, \sqrt{2}).$$
3. $\alpha > 2$, Argumentamos de la siguiente forma:
$$\begin{array}{rcll} \phi' & = & -\alpha t^{\alpha-1} e^{-t^{\alpha}}, & \phi'(0) = 0 \\ \phi'' & = & f(\alpha, t), & \phi''(0) = 0 \end{array}$$
de esta forma vemos que si fuera FC al existir, la segunda derivada y ser nula en cero, entonces el momento de segundo orden sería cero y al ser cero la esperanza de de la v.a. sería nula, pero esto no puede ser por la primera de las propiedades, por lo que llegamos a una contradicción y por lo tanto no puede serlo para $\alpha > 2$.

Tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejercicio 3.4.3 *Sea X una v.a. uniforme en $[-1,1]$, i.e. $X \sim U[-1,1]$. Escribir su función de densidad $f_X(x)$ y calcula su función generatriz de momentos.*

Solución. La función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_A(x) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{(|x| \leq 1)}(x),$$

y por lo tanto

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_X(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{tx} dx = \frac{1}{2t}\left(e^t - e^{-t}\right)$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejercicio 3.4.4 *Sea $X \sim U[a,b]$. Calcular su FGM y dada Y v.a. tal que $f_Y = G$, entonces $Z = G(Y) \sim U[0,1]$, Calcular la FGM de Z.*

Solución. Por definición la FGM es:

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_a^b e^{tx} f_X(x) dx,$$

donde

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & resto \end{cases},$$

por lo tanto

$$M_X(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx} dx = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

observando que si $[a,b]=[0,1]$, entonces

$$M_X(t)=\frac{e^t-1}{t},\qquad\qquad M_X(0)=1.$$

Con respecto a la segunda cuestión, vemos que

$$M_Z\left(t\right)=E\left[e^{tZ}\right]=E\left[e^{tG(Y)}\right]=\int_{\mathbb{R}}e^{tG(Y)}g(y)dy$$

donde $dG(y)=g(y)$, por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}}e^{tG(Y)}g(y)dy=\left[\frac{e^{tG(Y)}}{t}\right]_{-\infty}^{\infty}=\frac{e^t-1}{t}:=M_X(t)$$

donde $X\sim U\left[0,1\right]$. ■

Ejercicio 3.4.5 *Sean X,Y v.a.i.i.d. que toman valores en $\mathbb{N}$. Sea $G(s)$ su función generatriz de probabilidad común. Escribir, en términos de $G(s)$, la probabilidad de que $X+Y$ sea un número par o cero.*

Solución. La función generatriz es:

$$G_{X+Y}\left(s\right)=G_X\left(s\right)G_Y\left(s\right)=G\left(s\right)^2.$$

los coeficientes de $G\left(s\right)^2$ son las probabilidades de que $X+Y$ tome sucesivos valores $0,1,2,...$ i.e.

$$G\left(s\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}P\left(X+Y=n\right)s^n=P\left(X+Y=0\right)s^0+P\left(X+Y=1\right)s^1+P\left(X+Y=2\right)s^2+....,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}G\left(1\right)^2&=P\left(X+Y=0\right)+P\left(X+Y=1\right)+P\left(X+Y=2\right)+....,\\G\left(-1\right)^2&=P\left(X+Y=0\right)-P\left(X+Y=1\right)+P\left(X+Y=2\right)+....,\end{aligned}$$

de esta forma llegamos a que

$$P\left(X+Y\quad\text{es par o cero}\right)=\frac{1}{2}\left(G\left(1\right)^2+G\left(-1\right)^2\right),$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejercicio 3.4.6 *Sea $E\left(X^k\right)=\frac{1}{k+1},\ k=1,2,3...$ Encontrar $M_X(t)$.*

Solución. Vemos que por definición

$$\begin{aligned}M_X\left(t\right)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}E\left[X^k\right]=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}\frac{t^k}{k!}=1+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2!\left(3\right)}t^2+....=\\&=1+\frac{1}{2!}t+\frac{1}{3!}t^2+....=\frac{1}{t}\left(1+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3+....\right)=\\&=\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}=\frac{1}{t}\left(e^t-1\right),\end{aligned}$$

y por lo tanto $X\sim U\left[0,1\right]$. ■

Ejercicio 3.4.7 *Determinar la densidad cuya FC viene dada por*

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1-|t| & |t|<1 \\ 0 & |t|>1 \end{cases},$$

Solución. Vemos que por definición

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-itx}(1-|t|)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\cos(1-t)\,dt = \frac{1-\cos x}{\pi x^2},$$

y comprobamos que $f_X(x) \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1,$$

al ser $\varphi(t)$ continua y acotada entonces es característica. ■

Capítulo 4

Convergencia

4.1. Series aleatorias. Convergencia.

Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ v.a. definidas en $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Definición 4.1.1 *Decimos que* $\{X_i\} \xrightarrow{c.s.} X$ *(**convergencia casi segura**) si*

$$P(\omega \in \Omega : \lim_{n \longrightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1.$$

En análisis esta convergencia corresponde a la convergencia en casi todo punto.

Definición 4.1.2 *Decimos que* $\{X_i\} \xrightarrow{C} X$ *(convergencia cuadrática) si*

$$E(|X_n - X|^2) \longrightarrow 0.$$

Definición 4.1.3 *Decimos que* $\{X_i\} \xrightarrow{P} X$ *(**convergencia en probabilidad**) si* $\forall \varepsilon > 0$,

$$P(\omega \in \Omega : |X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0.$$

equivaléntemente

$$P\left(|X_n - X| < \varepsilon\right) \longrightarrow 1.$$

En análisis esta convergencia corresponde a la convergencia en medida.

Definición 4.1.4 *Decimos que* $\{X_i\} \xrightarrow{L} X$ *(**convergencia en Ley**) si* $\{F_n\} \longrightarrow F$ *tal que* F_n *es la sucesión de funciones de distribución de* X_n.

Observación 4.1.1 *No es suficiente que* $\{F_n\} \longrightarrow F$ *puntualmente para asegurar la convergencia en ley. Es preciso que* F *sea función de distribución.*

Ejemplo 4.1.1 *Sea la sucesión de funciones de distribución de* X_n, *dada por*

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < n \\ 1 & x \geq n \end{cases}$$

como vemos $F_n \longrightarrow F = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $X_n \overset{L}{\not\longrightarrow} X = 0$, ya que $F(x) = 0$, no puede ser función de distribución. Sin embargo

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & 0 \leq x \leq 0, \qquad \theta > 0, \\ 1 & x \geq \theta, \end{cases}$$

que en realidad se reduce a

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq \theta, \end{cases}$$

vemos que $X_n \xrightarrow{L} X$.

Proposición 4.1.1 *Si $\{X_i\} \xrightarrow{C} X$, entonces $\{X_i\} \xrightarrow{P} X$.*

Demostración. Recordamos que la desigualdad de Markov nos dice:

$$P((X) > \lambda) \leq \frac{E(X)}{\lambda}$$

entonces si definimos $Z = |X_n - X|^2$,

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) = P(|X_n - X|^2 > \varepsilon^2) \leq \frac{E(|X_n - X|^2)}{\varepsilon^2} \longrightarrow 0$$

este es precisamente el argumento de la ley débil de los grandes números. ■

Proposición 4.1.2 *Si $\{X_i\} \xrightarrow{c.s.} X$, entonces $\{X_i\} \xrightarrow{P} X$.*

Si $\{X_i\} \xrightarrow{P} X$, entonces $\{X_i\} \xrightarrow{L} X$.

$$\{X_i\} \xrightarrow{c.s.} X \qquad \Longrightarrow \qquad \{X_i\} \xrightarrow{P} X \qquad \Longrightarrow \qquad \{X_i\} \xrightarrow{L} X.$$

Teorema 4.1.1 ***(Bernoulli)*** *En una serie de pruebas independientes, la frecuencia relativa del suceso A converge en probabilidad a $P(A)$ cuando el número de pruebas tiende a infinito.*

Este teorema justifica la utilización de la probabilidad como modelo matemático de la frecuanecia relativa y da consistencia teórica a la ley de estabilidad de frecuencias.

Teorema 4.1.2 *Sean $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ v.a. i.i.d. (independientes e identicamente distribuidas) definidas en $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Si $E[X_n] = \mu$ y $\sigma[X_n] = \sigma < \infty$, i.e. son finitas entonces*

$$\left\{ \frac{\sum X_n}{n} \right\} \xrightarrow{P} \mu$$

Teorema 4.1.3 ***Levy-Cramer***. *Sean $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ v.a., tal que F_n es la sucesión de funciones de distribución de X_n y φ_n las funciones características. Decimos que $\{X_i\} \xrightarrow{L} X$, sii $\varphi_n \to \varphi$, donde φ es la función característica de X.*

Corolario 4.1.1 *$\{X_i\} \longrightarrow k$ sii*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \varphi_n = e^{itk}.$$

Ejemplo 4.1.2 *Se define para cada $n = 1, 2, 3...$ la variable aleatoria X_n discreta con valores $\frac{1}{n}$ y $\frac{-1}{n}$ y probabilidad*

$$P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = p, \quad P\left(X_n = -\frac{1}{n}\right) = q$$

tal que $p + q = 1$:

1. $\{X_n\} \xrightarrow{P} X = 0,$
2. $\{X_n\} \xrightarrow{c.s.} X = 0.$

En efecto. En primer lugar veamos $\{X_n\} \xrightarrow{P} X = 0$, si $\forall \varepsilon > 0$ y $\forall \delta > 0$ $\exists n_0 = n(\varepsilon, \delta)$ tal que $\forall n > n_0$ se cumple

$$P\left(|X_n - 0| > \varepsilon\right) < \delta \Longleftrightarrow P\left(|X_n - 0| < \varepsilon\right) > 1 - \delta$$

considerando $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ $\forall n > n_0$

$$P\left(|X_n - 0| < \varepsilon\right) = P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) + P\left(X_n = -\frac{1}{n}\right) = p + q = 1 \geq 1 - \delta$$

entonces $\{X_n\} \xrightarrow{P} X = 0$.

En segundo lugar vemos que:

$$P\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} X_n = 0\right) = P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) + P\left(X_n = -\frac{1}{n}\right) = p + q = 1$$

entonces $\{X_n\} \xrightarrow{c.s.} X = 0$.

Además sabemos que si $\{X_n\} \xrightarrow{c.s.} X \Longrightarrow \{X_n\} \xrightarrow{P} X$. ■

Ejemplo 4.1.3 *Sea $X \in N(0,1)$ y consideramos $\{X_n\}$, tal que $X_{2k+1} = -X$, $X_{2k} = X$; para todo $k = 0, 1, 2....$ Comprobar si:*

1. $\{X_n\} \xrightarrow{L} X,$
2. $\{X_n\} \xrightarrow{P} X,$
3. $\{X_n\} \xrightarrow{c.s.} X.$

Veámoslo. Debido a la simetría de $X \in N(0,1) \Longrightarrow -X \in N(0,1)$ se estudia la convergencia teniendo en cuanta las funciones características, i.e.

$$\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}, \qquad \varphi_{-X}(t) = e^{-t^2/2},$$

y por lo tanto

$$\varphi_n(t) = e^{-t^2/2}, \Longrightarrow \qquad \lim_{n \longrightarrow \infty} \varphi_n(t) = e^{-t^2/2},$$

que es continua en $t = 0$. Al ser función característica de $X \in N(0,1)$, entonces nos asegura la convergencia en ley.

Con respecto a la convergencia en probabilidad, vemos que:

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \longrightarrow \infty} P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0$$

si tomamos $\varepsilon = 1$

$$\begin{aligned} P\left(|X_n - X| > 1\right) &= P\left(|-2X| > 1\right) = P\left(|X| > \frac{1}{2}\right) = \\ P\left(|X| \leq \frac{1}{2}\right) + P\left(X > \frac{1}{2}\right) &= 0{,}3830 \ \forall k = 0, 1, ... \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\{X_n\} \overset{P}{\nrightarrow} X$$

i.e. no converge en probabilidad.

Por último vemos que como $\{X_n\} \overset{P}{\nrightarrow} X \Longrightarrow \{X_n\} \overset{c.s.}{\nrightarrow} X$ i.e. tampoco converge casi seguro. ■

4.2. Ejercicios.

Ejercicio 4.2.1 *Consideramos $\{X_n\}$ v.a.i.i.d pertenecientes a una uniforme $U(0, \theta)$. Demostrar que*

$$\text{máx}\{X_1, ..., X_n\} \xrightarrow{P} \theta.$$

Solución. Sea

$$Z_n = \text{máx}\{X_1, ..., X_n\}$$

como $Z_n(\omega) \leq \theta, \forall \omega$, tomamos $\forall \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} P\left(|Z_n - \theta| > \varepsilon\right) &= P\left((\theta - Z_n) > \varepsilon\right) = P\left(Z_n < \theta - \varepsilon\right) = \\ &= P\left(X_1 < \theta - \varepsilon, ..., X_n < \theta - \varepsilon\right) = \\ &= \prod P\left(X_i < \theta - \varepsilon\right) = F\left(\theta - \varepsilon\right)^n = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

viendo que $\frac{\theta - \varepsilon}{\theta} < 1$. De esta forma concluimos que

$$P\left(|Z_n - \theta| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0$$

y que por lo tanto $\text{máx}\{X_1, ..., X_n\} \xrightarrow{P} \theta$, tal y como queríamos hacer ver.

Para estudiar su convergencia en distribución, vemos que si X es una representación genérica de (X_n) su función de densidad viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/\theta & \forall x \in (0, \theta), \\ 0 & resto, \end{cases},$$

y F su función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x/\theta & x \in (0, \theta), \\ 1 & x \geq \theta, \end{cases}$$

entonces la función de distribución de Z_n será

$$G_n(x) = P\left(\text{máx}\{X_1, ..., X_n\} \leq x\right) = \cap P\left(X_i \leq x\right) = \left(F(x)\right)^n, \text{ i.e.}$$

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ (x/\theta)^n & x \in (0, \theta), \\ 1 & x \geq \theta, \end{cases}$$

viendo que

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = G(x) = \begin{cases} 0 & x < \theta, \\ 1 & x \geq \theta, \end{cases}$$

que es una delta-Dirac. ■

Ejercicio 4.2.2 *Sea $\{X_n\}$ tales que $P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $k = 1, ...n$. Estudiar la convergencia en ley.*

Solución. Vemos que X_n toma los siguientes valores;

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right), \qquad P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

entonces la función característica de X_n será

$$\phi_{X_n} = E\left[e^{itX_n}\right] = \frac{1}{n}\sum e^{ikt/n},$$

entonces haciendo el c.v. $u = e^{it/n}$, vemos que

$$\phi_{X_n} = \frac{1}{n}\sum u^k = \frac{1}{n}\left(\frac{u\left(u^n - 1\right)}{u-1}\right) = \frac{e^{it/n}\left(e^{it}-1\right)}{n\left(e^{it/n}-1\right)}$$

por lo que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \phi_{X_n}(t) = \frac{e^{it}-1}{it}$$

que es la función característica de la uniforme $U(0,1)$. Por lo tanto

$$X_n \xrightarrow{L} U$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejercicio 4.2.3 *Sea T una v.a. $U\left[-\frac{1}{c}, \frac{1}{c}\right]$, y sea $Y = cT$. Sea*

$$X_k = \begin{cases} -1 & -1 < Y < -1/k, \\ 0 & -1/k \leq Y < 1/k, \\ 1 & 1/k < Y < 1, \end{cases}$$

estudiar la convergencia en probabilidad y casi segura.

Solución. Sea $Y \in U[-1,1]$, entonces X_k es

$$\begin{aligned} P\left(X_k = -1\right) &= \int_{-1}^{-1/k} \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right), \\ P\left(X_k = 0\right) &= \int_{-1/k}^{0} \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2k}, \\ P\left(X_k = 1\right) &= \int_{1/k}^{1} \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$F_k(x) = \begin{cases} 0 & x < -1, \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right) & -1 \leq x < 0, \\ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{k}\right) & 0 < x < 1, \\ 1 & x \geq 1, \end{cases}$$

por lo tanto

$$\lim_{n \to \infty} F_k(x) = \begin{cases} 0 & x < -1, \\ 1/2 & -1 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1, \end{cases},$$

y por lo tanto

$$X_k \xrightarrow{L} X, \qquad X = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}, \qquad \text{tal que} \qquad P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{2},$$

supongamos además que X está definida tal que

$$X = \begin{cases} -1, & -1 \leq Y < 0, \\ 1, & 0 \leq Y < 1, \end{cases}$$

entonces $X_k \xrightarrow{c.s.} X$,

$$|X_k - X| = \begin{cases} 1, & -1/k \leq Y \leq 1/k, \\ 0, & \textit{resto}, \end{cases}$$

entonces para todo $\varepsilon > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{k \longrightarrow \infty} P\left(\cup^{\infty}\left(|X_k - X| \geq \epsilon\right)\right) &\leq \lim_{k \longrightarrow \infty} P\left(\cup^{\infty}\left(-1/k \leq Y \leq 1/k\right)\right) = \\ &= \lim_{k \longrightarrow \infty} P\left(-1/k \leq Y \leq 1/k\right) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0, \end{aligned}$$

de esta forma demostramos que hay convergencia casi segura y por lo tanto también en probabilidad. ∎

Ejercicio 4.2.4 *Sea $\{X_n\}$ una v.a. con distribución geométrica de parámetro $p = \lambda/n$. Calcular la función característica de X_n. Si definimos ahora $Z_n = X_n/n$, estudiar la convergencia en ley a la función $\Gamma\left(p = 1, a = \lambda\right)$.*

Solución. Vemos que $X \in Geo(p)$ y que por lo tanto $q = 1 - p$.

$$\phi_X(t) = p\sum_{x=0}^{\infty} q^x e^{itx} = p\sum_{x=0}^{\infty}\left(qe^{it}\right)^x = \frac{p}{1 - qe^{it}}$$

y de esta forma

$$\phi_{X_n}(t) = \frac{\lambda}{n}\left(1 - \frac{n-\lambda}{n}e^{it}\right)^{-1}$$

y por lo tanto y con respecto a la segunda de las cuestiones vemos que

$$\phi_{Z_n}(t) = \frac{\lambda}{n}\left(1 - \frac{n-\lambda}{n}e^{it/n}\right)^{-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda/n}{1 - \frac{n-\lambda}{n}e^{it/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{\lambda e^{it/n} - \frac{n-\lambda}{n}e^{it/n}it} = \frac{\lambda}{\lambda - it} = \left(1 - i\frac{t}{\lambda}\right)^{-1} = \phi_\Gamma(t),$$

tal y como queríamos probar. ∎

Ejercicio 4.2.5 *Sea* $\{X_n\}$ *una v.a. tal que*

$$P(X_n = \pm 2) = P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{4n}, \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

estudiar la convergencia en probabilidad y casi segura.

Solución. Vemos que $\forall \varepsilon > 0$,

$$P(|X_n| > \varepsilon) \leq P(|X_n| > 0) = 1 - P(|X_n| = 0) = \frac{1}{n}$$

por lo que $X_n \to 0$. Al tratarse de v.a.i. la convergencia c.s. a $(X = 0)$ es equivalente a la condición de convergencia completa

$$\sum P(|X_n| > \varepsilon) < \infty, \qquad \sum p_n < \infty \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

viendo que

$$\sum P(|X_n| > \varepsilon) = \sum \frac{1}{n} = \infty$$

y por lo tanto **no** hay convergencia casi segura. ■

Ejercicio 4.2.6 *Sea* $\{X_n\}$ *una v.a. tal que*

$$E[X_n] = \frac{1}{n}, \qquad var(X_n) = \frac{1}{n^2},$$

estudiar la convergencia casi segura utilizando la desigualdad de Cheby.

Solución. Teniendo en cuenta que la condición de convergencia completa $\sum P(|X_n| > \varepsilon) < \infty$, es suficiente para la c.s. y esto se cumple por Cheby i.e.

$$\sum P(|X_n| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum E\left[X_n^2\right] = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum \left(var(X_n) + E[X_n]^2\right) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum \frac{2}{n^2} < \infty,$$

tal y como queríamos hacer ver.

También podemos pensar de la siguiente manera:

$$\sum P(|X_n| > \varepsilon) = \sum P(|X_n - E[X_n]| > \varepsilon) \leq \frac{var(X_n)}{\varepsilon^2} \to 0$$

pero así probaríamos la convergencia en probabilidad. ■

Ejercicio 4.2.7 *Sea* $\{X_n\}$ *una v.a. tal que*

$$P(X_n = \pm 1) = 1 - \frac{1}{2^n}, \qquad P(X_n = \pm 2^n) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

estudiar la convergencia en probabilidad y casi segura.

Solución. Vemos claramente que $E[X_n] = 0$.

$$\phi_{X_n}(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) e^{it} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) e^{-it} + \frac{1}{2^{n+1}} \left(e^{2^n it} + e^{-2^n it}\right)$$

y de esta forma

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{X_n}(t) \longrightarrow \frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)$$

por lo que X_n es una v.a. discreta,.$P\left(X=\pm 1\right)=\frac{1}{2}$, de esta forma llegamos a la conclusión de que

$$X_n \xrightarrow{L} X$$

sin embargo con respecto a los otros tipos de convergencias no podemos decir nada. ■

Ejercicio 4.2.8 *Sea* $\{X_n\}$ *una v.a. tal que*

$$P\left(X_n=\pm 1\right)=\frac{1}{2^{n+1}}, \qquad P\left(X_n=0\right)=1-\frac{1}{2^n}$$

estudiar la convergencia en probabilidad y casi segura.

Solución. Vemos claramente que $E\left[X_n\right]=0$, $var\left(X_n\right)=E\left[X_n^2\right]=\frac{1}{2^n}$. Aplicamos por lo tanto Cheby.

$$\sum P\left(\left|X_n\right|>\varepsilon\right)=\sum P\left(\left|X_n-E\left[X_n\right]\right|>\varepsilon\right)\leq\frac{var(X_n)}{\varepsilon^2}=\frac{1}{\varepsilon^2 2^n}\to 0,$$

pero así probaríamos la convergencia en probabilidad.

Con respecto a la convergencia c.s. aplicamos Borel-Canteli. $X_n \longrightarrow 0$, consideramos $A_n=\left(\left|X_n\right|>\varepsilon\right)$.

$$P(A_n)=P(X_n=1)+P(X_n=-1)=\frac{1}{2^n}$$

entonces

$$\sum P(A_n)=\sum\frac{1}{2^n}<\infty,$$

y BC nos dice que

$$P(A_n\ \infty\ \text{veces})=0$$

y por lo tanto $X_n \longrightarrow 0$, c.s. tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejercicio 4.2.9 *Sea* $\{X_n\}$ *una v.a.i. tal que*

$$P\left(X_n=\pm 2^n\right)=\frac{1}{3}, \qquad S_n=\sum X_i$$

estudiar la convergencia en probabilidad

$$\frac{S_n}{4^n}\xrightarrow{P} 0.$$

Solución. Vemos claramente que $E\left[X_n\right]=0, var\left(X_n\right)=E\left[X_n^2\right]=\frac{2}{3}4^n$. Como las (X_i) son v.a.i. entonces vemos que

$$var(S_n)=var\left(\sum X_i\right)=\sum var(X_i)=\frac{2}{3}\sum 4^i, \qquad \frac{2}{3}\sum 4^i=\frac{4^{n+1}-1}{3},$$

aplicamos por lo tanto Cheby.

$$\sum P\left(\left|\frac{S_n}{4^n}\right|>\varepsilon\right)=\sum P\left(\left|S_n\right|>\varepsilon 4^n\right)\leq\frac{var(S_n)}{\varepsilon^2 4^{2n}}=\frac{\frac{4^{n+1}-1}{3}}{\varepsilon^2 4^{2n}}\to 0,$$

probando así la convergencia en probabilidad. ■

Ejercicio 4.2.10 *Sea F_n la función de distribución uniforme en $[k/2^n]$, $k = 0, 1, 2, ...$ Probar que $F_n \to F$ (en distribución). ¿F?.*

Solución. Vemos que
$$\varphi_n(t) = \int_{-1}^{1} e^{itx} dF_n(x) = \frac{e^{it} - 1}{2^n \left(e^{it/2^n} - 1\right)},$$
de tal forma que
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \frac{e^{it} - 1}{it},$$
por el teorema de continuidad de Levy, F_n converge en distribución a la uniforme en $(0, 1)$. ■

Ejercicio 4.2.11 *Considera la sucesión de variables i.i.d. (X_j). Estas variables toman los valores $+1$ y -1 con probabilidad $1/2$. Sea ahora la siguiente variable aleatoria:*
$$H_n = \sum_{i=1}^{n} 2^i X_i,$$

1. *Comprobar que $\forall \varepsilon > 0$, y si $\alpha > 1$, entonces*
$$P\left(\left|\frac{H_n}{2^{\alpha n}}\right| > \varepsilon\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. *¿Qué pasa si $\alpha = 1$?.*

Solución. con probabilidad $1/2$. Sea ahora la siguiente variable aleatoria:
$$E(X_i) = 0, \qquad var(X_i) = 1,$$
así que que la variable H_n tendrá
$$\begin{aligned} E(H_n) &= 0, \\ var(H_n) &= var\left(\sum_{i=1}^{n} 2^i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} 2^{2i} var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} 2^{2i} = \frac{2^{2(n+1)-2^2}}{3}, \end{aligned}$$
por lo tanto utilizando la desigualdad de Cheby vemos que
$$P\left(\left|\frac{H_n}{2^{\alpha n}}\right| > \varepsilon\right) = P\left(|H_n| > \varepsilon 2^{\alpha n}\right) \leq \frac{var(H_n)}{\varepsilon^2 2^{2\alpha n}},$$
observándose que
$$\frac{var(H_n)}{\varepsilon^2 2^{2\alpha n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
tal y como queríamos hacer ver.

Si $\alpha = 1$, la desigualdad de Chebyshev no nos proporciona información útil para ε pequeño. Pero en realidad es que $P(|H_n| > \varepsilon 2^n)$ no puede tender a 0 cuando $n \to \infty$ para todo $\varepsilon > 0$. Argumentemos, por ejemplo, de la siguiente forma: con probabilidad $1/4$, los dos últimos lanzamientos son $+1$ y, por tanto,
$$H_n = \sum_{i=1}^{n-2} 2^i X_i + 2^{n-1} + 2^n,$$

de esta forma vemos que

$$\sum_{i=1}^{n-2} 2^i X_i < 2^{n-1} - 2,$$

y por lo tanto con probabilidad $1/4$

$$\frac{H_n}{2^{\alpha n}} > 1$$

viendo así que no hay convergencia. ■

Capítulo 5

Leyes de los grandes números.

5.1. Leyes de los grandes números.

Ideas intuitivas.

1. Supongamos que tenemos una cierta población Ω y estudiamos una cierta característica (el suceso A) con frecuencia relativa p i.e. $frec(A) = p$. Obtenemos al azar e independientemente elementos de esta población $(X_1, ..., X_n)$, nos preguntamos la proporción de $\{X_i\}_{i=1}^n$ con característica A i.e. $\frac{\#\{X_i\}_{i=1}^n}{n}$, la idea intuitiva es que
$$\frac{\#\{X_i\}_{i=1}^n}{n} \backsimeq p, \text{ i.e. } \quad frec(A) = p$$
sólo cuando n es muy grande.

   Hemos partido de esta idea intuitiva para definir probabilidad y fundamentar las leyes de la probabilidad. Las leyes de los grandes números transforma esta idea en un teorema.

2. Tenemos una cierta población Ω. Si Z es una variable en Ω obtenemos una muestra de Ω $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ y consideramos
$$\frac{\sum_i^n Z(\omega_i)}{n} \longrightarrow \mu := E(Z).$$

   (1) es un caso particular de (2).

5.1.1. Ley débil.

Teorema 5.1.1 *Sean $\{X_i\}_{i=1}^n$ una sucesión de v.a. i.i.d. entonces:*
$$\frac{\sum_i^n X_i}{n} \longrightarrow \mu \quad \text{ya que} \quad P\left(\left|\frac{\sum_i^n X_i}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0$$
$\forall\varepsilon > 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Equivalentemente
$$P\left(\left|\frac{\sum_i^n X_i}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right) \longrightarrow 1.$$

Demostración. Los dos ingredientes necesarios para la demostración del teorema son:

1. La desigualdad de Cheby i.e.
$$P(|Z - E[Z]| > \lambda) \leq \frac{var(Z)}{\lambda^2}$$
2. Como nuestras variables son independientes entonces
$$var\left(\sum X_i\right) = \sum var(X_i) = n \cdot var(X)$$
ya que todas tienen la misma distribución. En particular si $var(X) = \sigma^2$ entonces:
$$var\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(n \cdot \sigma^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$
3. Si $E[X] = \mu$
$$E\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n}(n \cdot \mu) = \mu$$

Por lo tanto aplicando Cheby a $Z = \frac{\sum X_i}{n}$
$$P(|Z - \mu| > \lambda) \leq \frac{var(Z)}{\lambda^2}$$
entonces:
$$P\left(\left|\frac{\sum X_i}{n} - \mu\right| > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}\frac{\sigma^2}{n} \longrightarrow 0$$
cuando $n \longrightarrow \infty$. Como queríamos demostrar. ∎

Observación 5.1.1 *La moraleja del teorema es la siguiente:*
$$\frac{\sum X_i}{n} \longrightarrow \mu$$
cuando $n \longrightarrow \infty$.
$$E\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \mu, \qquad var\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$
alejarse de la media tiene una probabilidad muy pequeña

De forma alternativa pero similar pedemos ver esta ley como sigue (ver referencias del prólogo):

Definición 5.1.1 *Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una sucesión de v.a. tal que $E(X_n) = \mu_n < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$. Definimos*
$$\overline{X}_n = \frac{\sum_i^n X_i}{n}$$
decimos que $\{X_i\}_{i=1}^n$ obedece la ***Ley débil*** *(LD) sii $\left(\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)\right) \xrightarrow{P} 0$, donde*
$$E(\overline{X}_n) = \frac{\sum_i^n E(X_i)}{n}$$

Teorema 5.1.2 *Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una sucesión de v.a.i. (independientes) tal que*

1. *i.d. (identicamente distribuidas),*
2. *X_n tiene media y varianza finitas $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces*

$\{X_i\}_{i=1}^n$ obedece la LD.

Teorema 5.1.3 *(**Chebychev**). Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una sucesión de v.a.i. tal que*

$$var(X_n) = \sigma_n^2 \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces $\{X_i\}_{i=1}^n$ obedece la LD.

Teorema 5.1.4 *Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una sucesión de v.a.i. dos a dos, tal que, $E[X_i] = a_i$. Si $var(X_n) \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\left(\frac{1}{n}\sum X_i - \frac{1}{n}\sum a_i\right) \xrightarrow{P} 0.$$

Observación 5.1.2 *Si las $\{X_i\}_{i=1}^n$ son v.a.i.i.d. entonces $E[X_i] = a_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$ y por lo tanto*

$$\sum \frac{a_i}{n} = a \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) \xrightarrow{P} a.$$

Demostración. $\forall i \in \mathbb{N}$, definimos la v.a.

$$Z_n = \sum \frac{X_i}{n}, \qquad \Longrightarrow \qquad E[Z_n] = \sum \frac{a_i}{n},$$

al ser v.a. i. dos a dos, entonces

$$var\left(\sum X_i\right) = \sum var(X_i) \leq nc,$$

entonces aplicando Cheby, llegamos a

$$P\left(\left|\left(\frac{1}{n}\sum X_i - \frac{1}{n}\sum a_i\right)\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(|Z_n - E[Z_n]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{var(Z_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum var(X_i) \longrightarrow 0,$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Teorema 5.1.5 *(**Markov**). Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una sucesión de v.a. tal que*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} var(X_n) = 0$$

entonces $\{X_i\}_{i=1}^n$ obedece la LD.

Teorema 5.1.6 *Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una sucesión de v.a.i. tal que, $E[X_i] = a_i$. Si*

$$\frac{1}{n^2}\sum var(X_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

entonces

$$\left(\frac{1}{n}\sum X_i - \frac{1}{n}\sum a_i\right) \xrightarrow{P} 0.$$

Teorema 5.1.7 *(**Khintchine**). Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una sucesión de v.a. tal que*

1. *i.i.d.,*
2. *$E(X_n) = \mu\ \forall n \in \mathbb{N}$,*

entonces $\{X_i\}_{i=1}^n$ obedece la LD.

Ejemplo 5.1.1 *Sea $p \in (0,1)$ la probabilidad de que un votante vote a un candidato determinado y supongamos que la respuesta de cada votante sea independiente. Determinar el número de votos que hay que escrutar de forma que exista una probabilidad mayor o igual a $0,95$ de que la discrepancia entre la frecuanecia relativa de votos favorables y la probabilidad desconicida p sea menos o igual que $0,1$.*

En efecto. Sea

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el votante vota al candidato} \\ 0 & \text{si el votante NO vota al candidato} \end{cases}$$

definimos

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_i^n X_i}{n}$$

como la frecuencia relativa y

$$P\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \leq 0{,}1\right) \geq 0{,}95 \Longleftrightarrow P\left(\left|\overline{X}_n - p\right| > 0{,}1\right) \leq 0{,}05.$$

Por otro lado si tenemos en cuanta la desigualdad de Cheby.:

$$P\left(\left|\overline{X}_n - p\right| > 0{,}1\right) \leq \frac{var(\overline{X}_n)}{(0{,}1)^2} = \frac{pq}{n\,(0{,}01)} \leq \frac{1}{4n\,(0{,}01)} \leq 0{,}05$$

entonces

$$n \geq \frac{1}{4\,(0{,}05)\,(0{,}01)} = 500$$

así pues $n \geq 500$ votos.

Observamos que $n - Bernoullis \longrightarrow Bin(n,p) \Longrightarrow var(Bin(n,p)) = npq$ y por otro lado sabemos que $var(\overline{X}_n) = \frac{var(X_i)}{n^2} = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}$. ■

5.1.2. Ley Fuerte.

Proposición 5.1.1 ***Borel-Cantelli**.*

- *(sucesos)*

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < +\infty \Longrightarrow P(\text{“en infinitos } A_i\text{”}) = 0$$

- *(para v.a.). Sean $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ v.a. positivas i.e. $val(X_i) \subset [0,\infty)$*

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(X_i) < +\infty \Longrightarrow P(\lim_{i\longrightarrow\infty} X_i = 0) = 1$$

Lema 5.1.1 *Sean $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ v.a. i.i.d.. Seguieremos la siguiente notación. $i = 1, ..., n$*

$$0 = \mu_1 = E(X_i), ..., \mu_2 = E(X_i^2), ..., \mu_3 = E(X_i^3), ..., \mu_4 = E(X_i^4).$$

Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Entonces

$$E(S_n) = 0, ..., E(S_n^2) = n\mu_2, ..., E(S_n^3) = n\mu_3, ..., E(S_n^4) \leq 3n^2\mu 4.$$

Teorema 5.1.8 *Sean $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ v.a. i.i.d. tal que $E(X_i^4) < \infty$. Entonces:*

$$P\left(\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sum X_i}{n}=\mu\right)=1$$

De forma alternativa y más clara:

Definición 5.1.2 *Sea $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ una sucesión de v.a. tal que $E(X_n)=\mu_n<\infty, \forall n\in\mathbb{N}$. Definimos*

$$\overline{X}_n=\frac{\sum_i^n X_i}{n}$$

decimos que $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ obedece la Ley Fuerte (LF) sii $\left(\overline{X}_n-E(\overline{X}_n)\right)\xrightarrow{c.s.}0$, donde

$$E(\overline{X}_n)=\frac{\sum_i^n E(X_i)}{n}$$

Teorema 5.1.9 *(**Kolgomorov**). Una condición sufiente para que se verifique la LF (ley fuerte) es que $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ sucesión de v.a.i. / $E(X_n)=\mu_n$, $var(X_n)=\sigma_n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{n^2}<\infty$$

entonces $\{X_i\}$ obedece la LF.

Corolario 5.1.1 *Sea $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ sucesión de v.a.i. tal que $E(X_n)=0$, $var(X_n)=\sigma_n^2\leq c\ \ \forall n\in\mathbb{N}$, entonces $\{X_i\}$ obedece la LF.*

Teorema 5.1.10 *(**Khintchine**). Sea $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ sucesión de v.a.i.i.d / $E(X_n)=\mu<\infty, \forall n\in\mathbb{N}$, entonces $\{X_i\}$ obedece la LF.*

Resumen 5.1.1 *Estos dos teoremas (leyes débil y fuerte) apoyan la idea de que cuando $n\longrightarrow\infty$,*

$$\frac{\sum X_i}{n}\backsimeq\mu\quad y\quad frec\backsimeq P.$$

Si $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ verifica la LF entonces también la LD ya que la LF exige convergencia c.s. mientras que la LD en probabilidad y como ya sabemos lo uno implica lo otro.

Ejemplo 5.1.2 *Sean $\{X_n\}$ v.a.i. con función de masa*

$$P\left(X_n=-na\right)=P\left(X_n=na\right)=\frac{1}{2n^2},\ \ y\quad P\left(X_n=0\right)=1-\frac{1}{n^2}\ si\ a>0$$

estudiar si $\{X_n\}$ verifica las LD y LF.

En efecto. Sabemos por Cheby que al ser $\{X_n\}$ v.a.i. entonces basta con que exista cierta constante $M<\infty$ tal que $var(X_n)\leq M\ \forall n\in\mathbb{N}$. Vemos que:

$$\begin{aligned}E(X_n)&=-na\left(\frac{1}{2n^2}\right)+0\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+na\left(\frac{1}{2n^2}\right)=0\\E(X_n^2)&=(na)^2\left(\frac{1}{2n^2}\right)+0\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+(na)^2\left(\frac{1}{2n^2}\right)=a^2\\var(X_n)&=E(X_n^2)-E(X_n)=a^2\end{aligned}$$

por lo tanto $\{X_n\}$ verifica la LD i.e.

$$\frac{\sum_n X_n}{n} \xrightarrow{P} 0$$

Para ver si verificala ley Fuerte vemos que por Kolgomorov al ser $\{X_n\}$ v.a.i. entonces basta con probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{var(X_n)}{n^2} < \infty$$

en este caso y como ya hemos visto esta condición se verifica trivialmente entonces $\{X_n\}$ verifica la LF i.e.

$$\frac{\sum_n X_n}{n} \xrightarrow{c.s.} 0$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejemplo 5.1.3 *Sean $\{X_n\}$ v.a.i. con función de masa*

$$P\left(X_n = -n\left(\ln n\right)^{1/2}\right) = P\left(X_n = n\left(\ln n\right)^{1/2}\right) = \frac{1}{2n^2}, \quad y \quad P\left(X_n = 0\right) = 1 - \frac{1}{n^2}$$

estudiar si $\{X_n\}$ verifica las LD y LF.

En efecto. Como en el ejemplo anterior por Cheby tenemos que ver si $var(X_n) \leq M \; \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} E(X_n) &= -n\left(\ln n\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2n^2}\right) + 0\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n\left(\ln n\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2n^2}\right) = 0 \\ E(X_n^2) &= n^2\left(\ln n\right)\left(\frac{1}{2n^2}\right) + 0\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n^2\left(\ln n\right)\left(\frac{1}{2n^2}\right) = \ln n \\ var(X_n) &= E(X_n^2) - E(X_n) = \ln n \end{aligned}$$

por lo tanto

$$var(X_n) = \ln n \longrightarrow \infty$$

i.e. no se verifican las hipótesis del teorema de Cheby pero esto no significa que dicha sucesión no verifique la LD.

Por el teorema de Kolmogorov. Puesto que $\{X_n\}$ v.a.i. es suficiente con que se verifique que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{var(X_n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} < \infty$$

para verlo aplicamos el criterio integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 < \infty$$

por lo tanto la serie converge. Así $\{X_n\}$ verifica la LF y también la LD. ■

5.2. Ejercicios.

Ejercicio 5.2.1 *Sean $\{X_n\}$ v.a.i. tales que*

$$P\left(X_n = \pm n^{1/4}\right) = \frac{1}{2},$$

estudiar si $\{X_n\}$ verifica las LD y LF

Solución. Vemos que
$$E\left[X_n\right]=0, \qquad var(X_n)=E\left[X_n^2\right]=\frac{1}{2}\left(2n^{1/2}\right)=n^{1/2},$$
por lo que
$$var\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right)=\frac{1}{n^2}var\left(\sum X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^{1/2},$$
tenemos que demostrar que
$$var\left(\overline{X}_n\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Teniendo en cuenta que
$$\int_0^1 x^{1/2}dx=\frac{2}{3}, \qquad \int_0^1 x^{1/2}dx\approx\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{1/2}\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n} i^{1/2}\frac{1}{n^{3/2}} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} i^{1/2}\approx n^{3/2}\frac{2}{3},$$
de esta forma vemos que
$$var\left(\overline{X}_n\right)=\frac{1}{n^{1/2}}\frac{2}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} var\left(\overline{X}_n\right)=0$$
por lo que concluimos que verifica la LD.

En general si
$$P\left(X_n=\pm n^{\alpha}\right)=\frac{1}{2},$$
vemos que por la condición de suficiencia de Kolgomorov, si $\alpha<1/2$, entonces se verifica la ley fuerte (LF). Recordamos que si
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{n^2}<\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{S_n}{n}\xrightarrow{c.s.}0.$$
Para analizar el cumplimiento de la LD utilizaremos el criterio de convergencia degenerada. Por simetría vemos que
$$\begin{array}{llll}\sum P\left(\left|X_n\right|>n\right) \longrightarrow 0, & \Longleftrightarrow & \alpha\leq 1, & \\ \frac{1}{n^2}\sum\int X_i^2dP \longrightarrow 0, & \Longrightarrow & \frac{1}{n^2}\sum\int X_i^2dP=\frac{1}{n^2}\sum k^{2\alpha} & \end{array}$$
donde
$$\sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha}\propto\frac{n^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}, \qquad \alpha\geq 0$$
llegando a la conclusión de que sólo se cumple si $\alpha<1/2$.

En resumen:
$$\begin{array}{lllllll}\alpha<1/2, & \Longrightarrow & LF, & i.e. & \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{n^2}<\infty & \Longrightarrow & \frac{S_n}{n}\xrightarrow{c.s.}0. \\ \alpha\geq 1/2, & \not\Longrightarrow & LD, & i.e. & \frac{1}{n^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2<\infty & \Longrightarrow & \frac{S_n}{n}\xrightarrow{P.}0.\end{array}$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejercicio 5.2.2 *Sean $\{X_n\}$ v.a.i. tales que*
$$P\left(X_n=\pm1\right)=\frac{1}{4n}=P\left(X_n=\pm2\right), \qquad P\left(X_n=0\right)=1-\frac{1}{n},$$
estudiar si $\{X_n\}$ verifica las LD y LF

Solución. Vemos que

$$E[X_n] = 0, \qquad var(X_n) = E\left[X_n^2\right] = \frac{10}{4n},$$

por lo que si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s.} 0.$$

tenemos que demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{4n^3} < \infty$$

viendo así que sí se verifica LF. ■

Ejercicio 5.2.3 *Sean $\{X_n\}$ v.a.i. tales que*

$$P\left(X_n = \pm e^{2n}\right) = \frac{1}{2e^n}, \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{e^n},$$

estudiar si $\{X_n\}$ verifica las LD y LF

Solución. Vemos que

$$E[X_n] = 0,$$

y teniendo en cuenta el siguiente resultado:

Observación 5.2.1 *Sean $\{X_n\}$ v.a.i. tales que $E[X_n] = \mu$, si $\{X_n\} \xrightarrow{c.s.} \mu$, entonces se verifica LF.*

De esta forma sólo habrá que probar que $\{X_n\} \xrightarrow{c.s.} 0$, i.e. $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup^{\infty} |X_n| > \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup^{\infty} |X_n| \neq 0\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} (X_n \neq 0)\right) = 0,$$

donde esta última igualdad es consecuencia de que

$$\sum P(|X_n| \neq 0) = \sum \frac{1}{2e^n} < \infty$$

y por lo tanto se verica LF. ■

Ejercicio 5.2.4 *Sean $\{X_n\}$ v.a.i. tales que*

$$P(X_n = \pm 2^n) = \frac{1}{2^{2n+1}}, \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{2^{2n}},$$

estudiar si $\{X_n\}$ verifica las LD y LF

Solución. Vemos que

$$E[X_n] = 0, \qquad var(X_n) = E\left[X_n^2\right] = \frac{1}{2^{2n+1}}\left(2^{2n} + 2^{2n}\right) = 1,$$

entonces teniendo en cuenta el teorema de Markov, lo único que tenemos que comprobar es $\frac{1}{n^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2 < \infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2 = 0,$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Para ver que también se verifica la LF aplicamos el teorema de Kolgomorov i.e. sólo nos queda por probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s.} 0.$$

pero

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{n^2} = \sum\frac{1}{n^2} < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s.} 0.$$

por lo que X_n verifica la LF. ■

Ejercicio 5.2.5 *Sean $\{X_n\}$ v.a.i. tales que*

$$P\left(X_n = \pm 2^n\right) = \frac{1}{2^{2n+1}}, \qquad P\left(X_n = \pm 1\right) = 1 - \frac{1}{2^{2n}},$$

estudiar si $\{X_n\}$ verifica las LD y LF

Solución. En este caso definimos

$$X_n^1 = \begin{cases} X_n & |X_n| = 1 \\ 0 & |X_n| \neq 1 \end{cases} \qquad X_n^2 = \begin{cases} 0 & |X_n| = 1 \\ X_n & |X_n| \neq 1 \end{cases}$$

de esta forma

$$X_n = X_n^1 + X_n^2$$

si, X_n^1, X_n^2 verifican la LGN entonces X_n, también lo hará. Vemos que

$$E\left[X_n^1\right] = 0, \qquad var(X_n^1) = E\left[X_n^{1(2}\right] = 1 - \frac{1}{2^n},$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum\frac{1-\frac{1}{2^n}}{n^2} < \sum\frac{1}{n^2} < \infty$$

por lo que podemos asegurar que X_n^1 verifica LF.

Para ver si X_n^2 verifica LF estudiamos si $X_n^2 \xrightarrow{c.s.} 0$, $\forall\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\cup^{\infty}\left|X_n^2\right| > \varepsilon\right) = 1 - \prod^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq \sum\frac{1}{2^n} < \delta, \qquad \Longrightarrow \qquad X_n^2 \xrightarrow{c.s.} 0,$$

de esta forma probamos que X_n verifica LF.

De forma genérica, haciendo esta argumentación lo que hemos conseguido en realidad es

$$X_n^{'} = X_n \mathbb{1}_{|X_n|<1},$$

pero como

$$\sum P\left(X_n' \neq X_n\right) < \infty$$

entonces X_n', X_n tienen el mismo comportamiento pero $\left(X_n'\right)$ v.a.i.i.d. tales que $E\left[X_n'\right] = \mu < \infty$, y por lo tanto $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s.} 0$. ■

Ejercicio 5.2.6 *Sean $\{X_n\}$ v.a.i. tales que*

$$P\left(X_n = \pm 2^n\right) = \frac{1}{2^n}, \qquad P\left(X_n = 0\right) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

estudiar si $\{X_n\}$ verifica las LD y LF

Solución. En este caso utilizaremos un argumento completamente distinto, apelaremos al teorema de Borel-Canteli.

Puesto que $\sum P\left(X_n \neq 0\right) < \infty$, entonces por B-C, con probabilidad 1, $X_n = 0$, salvo a lo más un número finito de términos, y por lo tanto se verifica LFGN.

Observamos que este razonamiento no exige la independenca de la sucesión.

De forma genérica si tenemos

$$P\left(X_n = \pm n\right) = p_n, \qquad P\left(X_n = 0\right) = 1 - 2p_n,$$

si $\sum p_n > \infty$, no cumpliría las condiciones necesarias pero si $\sum p_n < \infty$, entonces podríamos apelar a B-C. ■

Ejercicio 5.2.7 *Sean $\{X_n\}$ v.a.i.i.d. tales que siguen una Cauchy. Sea Y_n*

$$Y_n = \sum \frac{X_i}{n}$$

estudiar si $\{Y_n\}$ verifica las LD y LF.

Solución. X_i sigue una Cauchy, por lo que su función característica es: $\varphi = e^{-|t|}$. La función carácterística de Y_n será:

$$E\left[\exp\left(itY_n\right)\right] = E\left[\exp\left(it\sum \frac{X_i}{n}\right)\right] = e^{-|t|}$$

por lo que Y_n es otra Cauchy, pero $\nexists E\left[Y_n\right]$ por lo que no se verifica ningua de las hipótesis de los teoremas de los GN. ■

Ejercicio 5.2.8 *Sean $\{X_n\}$ v.a.i.i.d. tales que siguen una* $\exp(n)$. *Estudiar si $\{X_n\}$ verifica las LD y LF.*

Solución. X_i sigue una $\exp(n)$, por lo que

$$var(X_n) = \frac{1}{n^2}, \qquad \sum \frac{1}{n^2} < \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum var(X_n) = 0$$

por lo tanto verifica LD.

Para que verifique la LF bastará con probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum \frac{1}{n^4} < \infty$$

por lo que podemos asegurar que X_n verifica LF. ∎

Ejercicio 5.2.9 *Sean $\{X_n\}$ v.a.i. tales que (X_{2n}) siguen una $U[0,1]$ Definimos*

$$X_{2n+1} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \qquad P(X_{2n+1} = 0) = P(X_{2n+1} = 1) = \frac{1}{2}.$$

Definimos $S_n = \sum X_n$, estudiar si

$$\frac{S_n}{2n} \xrightarrow{c.s.} \frac{1}{2}.$$

Solución. Vemos que $E[X_i] = \frac{1}{2}, \forall i$. Entonces LF nos dice que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s.} \frac{1}{2}$, por lo tanto

$$\frac{S_n}{2n} = \frac{1}{2n}\sum X_i = \frac{1}{n}\left(\frac{X_1 + X_2}{2} + ... + \frac{X_{n-1} + X_n}{2}\right)$$

definimos $Y_i = \frac{X_{i-1}+X_i}{2}, \forall i$, viendo así que

$$\frac{1}{n}\sum Y_i \longrightarrow \frac{1}{2}$$

donde (Y_i) son v.a.i.i.d. tales que $E[Y_i] = 1/2$, entonces LF garantiza la convergencia pedida. ∎

Ejercicio 5.2.10 *Sea (a_n) tal que $\sum \frac{a_n^2}{n} < \infty$. Sean $\{X_n\}$ v.a.i. tales que*

$$P(X_n = a_n) = 1 - \frac{1}{n}, \qquad P(X_n = b_n) = \frac{1}{n}.$$

queremos calcular b_n tal que $E[X_n] = 0$. Demostrar que así (X_n) verifica la LGN.

Solución. Vemos que $E[X_i] = 0, \forall i, \Longleftrightarrow$

$$a_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) + b_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \Longleftrightarrow b_n = a_n(1-n),$$

de esta forma vemos que

$$var(X_n) = a_n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + a_n^2\left(\frac{(1-n)^2}{n}\right) = a_n^2(n-1).$$

Si tenemos en cuenta Kolgomorov,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty \qquad \Longrightarrow$$

(X_n) verifica LF.Entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2(n-1)}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n} < \infty$$

por hipótesis, por lo tanto (X_n) verifica LF. ∎

Ejercicio 5.2.11 *Vamos a ir apostando al resultado de una moneda que sale cara con probabilidad p. En cada jugada, ganamos* 1 *euro o perdemos* 1 *euro dependiendo de si hemos acertado o no lo que sale en la moneda. En las jugadas "impares"* $(1, 3, 5, \ldots)$ *apostamos a que sale cara, y en las jugadas "pares"* $(2, 4, 6, \ldots)$, *a que sale cruz. Llamemos P_n al dinero que hemos ganado (o perdido) tras n lanzamientos de la moneda. Prueba que*

$$\frac{P_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$$

cuando $n \to \infty$, y determina el valor de μ.

Solución. Llamamos X_j a la ganancia o pérdida en el lanzamiento j. Las X_j toman valores ± 1, pero con probabilidad p de $+1$ si j es par y $1-p$ si j impar. Así que si escribimos P_n como $\sum_{j=1}^{n} X_j$, se trata de una suma de variables independientes, pero no idénticas.

Otra opción es considerar unas variables Y_j (éstas sí, idénticas) que toman valores ± 1 (con probabilidad p de $+1$), y escribir P_n como $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\, Y_j$. Pero ahora P_n no es una suma de variables i.i.d.

Hay varias formas de sortear estas dificultades:

1. En la versión con las X_j (que tienen media $E(X_j) = 1-2p$ si j par y $2p-1$ si j impar; mientras que la varianza es siempre 1), podemos escribir

$$\frac{P_{2n}}{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2n} X_j = \frac{2}{2n}\left[\frac{X_1+X_2}{2} + \ldots\ldots + \frac{X_{2n-1}+X_{2n}}{2}\right] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j$$

   donde las Z_j ya son i.i.d. con media 0 (y una cierta varianza finita). La ley débil nos da entonces la conclusión (bueno, si el índice no es par, entonces "sobra" una variable en la suma, y hay que observar que esa contribución se hace pequeña con n).

2. También podríamos aplicar directamente la versión de la ley débil en la que las variables no eran idénticas pero los promedios de las medias de las variables tendían a un cierto número (0, en este caso).

3. O, en cualquiera de las dos versiones (con las X_j o las Y_j), calcular directamente la media de P_n (que es 0, salvo la pequeña corrección si n no es par, pero que se hace tan pequeña como queramos si n es suficientemente grande) y su varianza, y aplicar la desigualdad de Chebyshev.

■

Ejercicio 5.2.12 *Vamos a ir apostando al resultado de una moneda M_1 que sale cara con probabilidad p. En cada jugada,*

1. *lanzamos primero una moneda regular M_2, que nos dice si apostaremos a cara o a cruz en el siguiente paso.*

2. *Lanzamos la moneda M_1. Si en el primer paso ha salido cara, ganamos* 1 *euro si en M_1 sale cara (y perdemos* 1 *euro si sale cruz). Si ha salido cruz en la moneda M_2, entonces ganamos* 1 *euros si en M_1 sale cruz y perdemos* 1 *euro si sale cara.*

Llamemos P_n al dinero que hemos ganado (o perdido) tras n lanzamientos de la moneda. Prueba que

$$\frac{P_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$$

cuando $n \to \infty$, y determina el valor de μ.

Solución. Si consideramos unas variables ε_j que toman valores ± 1 con probabilidad $1/2$ (que recogen nuestra apuesta) y unas variables X_j que tambien toman valores ± 1, pero ahora con probabilidad p de $+1$ (éstas recogen si sale cara o cruz en M_1), entonces la ganancia o perdida en la partida j se puede escribir como $Z_j = \varepsilon_j X_j$, que es una variable de media 0, ya que

$$E(Z_j) = E(\varepsilon_j X_j) = E(\varepsilon_j)E(X_j) = 0$$

por la independencia y una cierta varianza finita

$$var(Z_j) = E(Z_j^2) = E(\varepsilon_j^2 X_j^2) = E(\varepsilon_j^2)E(X_j^2) = 1 \times 1 = 1$$

de nuevo por la independencia.

Así, P_n es una suma de variables i.i.d. y la ley débil nos permite concluir el resultado.

Alternativamente, si llamamos Z_j a la ganancia o pérdida en la partida j, condicionando adecuadamente o enumerando los casos, podemos descubrir que Z_j toma valores ± 1 con probabilidad $1/2$. Por tanto tiene media 0 y varianza 1. De nuevo aplicamos la ley débil para concluir. ■

Capítulo 6

Toerema del límite central.

6.1. Teorema central del Límite.

Estos teoremas expresan el hecho de que en condiciones muy generales la distribución de la suma de $n - v.a.i.$ tienen una distribución normal cuando $n \longrightarrow \infty$.

La versión más básica de este tipo de teoremas se debe a Moivre y nos dice que

$$Bin(n,p) \longrightarrow N(np, \sqrt{npq})$$

Veremos dos enunciados más generales de este teorema:

Teorema 6.1.1 *Sean $\{X_i\}_{i=1}^n$ v.a. i.i.d. tal que $\mu := E(X_i), \sigma := \sigma(X_i) < +\infty$, cuando $n \longrightarrow \infty$,*

$$\frac{\left|\frac{\sum X_i}{n} - \mu\right|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Longrightarrow \begin{cases} E\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \mu, \\ \\ var\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n} \end{cases}$$

Normalizando a la Gauss si

$$Z = \frac{\sum X_i}{n} - \mu$$

siendo X cualquier distribución

$$E(Z) = 0 \quad y \quad \sigma^2(Z) = 1$$

i.e.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P\left(\frac{\frac{\sum X_i}{n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq t\right) = P(Z \leq t)$$

donde $Z \in N(0,1)$.

Teorema 6.1.2 *(Lévy-Lindeberg). Sea $\{X_n\}$ v.a.i.i.d. y sea $S_n = \sum X_i$. Si X_n tiene media y varianza $\neq 0$, finitas, entonces:*

$$\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}\right)_{n \longrightarrow \infty} \xrightarrow{L} N(0,1)$$

Si $\mu = E(S_n)$ y $\sigma = \sigma(X_n)$ entonces:

$$\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{L} N(0,1)$$

i.e. cuando $n \longrightarrow \infty$, la distribución $\left(\sum X_i\right) \backsimeq N(np, \sqrt{npq})$,

$$\left(\frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\frac{\sigma\sqrt{n}}{n}}\right) \xrightarrow{L} N(0,1)$$

lo que significa que la v.a. media muestral

$$X_n = \frac{S_n}{n} = \frac{\sum_i X_i}{n} \backsimeq N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$$

Teorema 6.1.3 *Lyapunov. Sea $\{X_n\}$ v.a.i. y sea $S_n = \sum X_i$. Si X_n tiene*

$$E\left[X_n\right] = 0, \qquad E\left[X_n^2\right] = \sigma_n^2 < \infty, \qquad E\left[X_n^3\right] < \infty,$$

Sea

$$s_n^2 = \sum \sigma_n^2$$

si

$$\lim \frac{E\left[\left|X_n^3\right|\right]}{s_n^3} = 0$$

entonces

$$\left(\frac{\sum_i X_i}{s_n}\right)_{n\longrightarrow\infty} \xrightarrow{L} N(0,1)$$

Observación 6.1.1 *Como se puede observar este teorema es bastante restrictivo ya que exige la existencia de momentos de orden 3. Los teoremas de Lindergerg y Feller dan condiciones suficientes para garantizar la convergencia de sumas normalizadas de v.a.i. con media y varianza $\neq 0$, finitas tiendan hacia una $N(0,1)$.*

Ejemplo 6.1.1 *Un juego consiste en apostar una cantidad c de dinero a un número de entre 10 (equiprobables) de forma que si sale ese número entonces gana 5c y si no sale el número apostado entonces pierde la cantidad apostada c. Calcular la probabilidad de no perder dinero después de 50 apuestas.*

Definimos la variable

$$X = \begin{cases} -c & P(X=-c) = \frac{9}{10} \\ \\ 5c & P(X=c) = \frac{1}{10} \end{cases}$$

calculamos la esperanza y la varianza

$$\begin{aligned} E(X) &= -c\left(\frac{9}{10}\right) + 5c\left(\frac{1}{10}\right) = c, \\ E(X^2) &= c^2\left(\frac{9}{10}\right) + 25c^2\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{17c^2}{5}, \\ var(X) &= \frac{17c^2}{5} - \frac{4c^2}{25} = \frac{81c^2}{25}. \end{aligned}$$

Como $n = 50$, entonces la variable $Y = \sum X_i$ tal que $\{X_i\}$ son i.i.d. entonces $Y \backsimeq N(\mu, \sigma)$, entonces

$$\begin{aligned} \mu &= 50\left(\frac{-2c}{5}\right) = -20c \\ \sigma^2 &= 50\left(\frac{81c^2}{25}\right) = 162c^2 \Longrightarrow \sigma = \sqrt{162c^2} = 9c\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$Y \in N(-20c, 29{,}01c)$$

por lo tanto

$$P(Y \geq 0) = P\left(\frac{Y+20c}{9c\sqrt{2}} \geq \frac{20c}{9c\sqrt{2}}\right) = P\left(\frac{Y+20c}{9c\sqrt{2}} \geq \frac{10}{9}\sqrt{2}\right) = 5{,}8056 \times 10^{-2}$$

$$\left(\frac{10}{9}\sqrt{2}\right) \approx 1{,}5713$$

$$P(Z \geq 1{,}5713) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1{,}5713}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = 5{,}8056 \times 10^{-2}$$

donde $\frac{Y+20c}{9c\sqrt{2}} = Z \in N(0,1)$.

6.2. Ejemplos

Ejercicio 6.2.1 *La longitud Y de ciertas piezas en cm sigue una normal $N(20, 0{,}30)$. El distribuidor acepta un lote de* 1000 *si después de elegir* 10 *piezas al azar encuentra que su longitud media no es menor que* 19,85*cm. Calcular la probabilidadde que rechace el lote.*

Solución. Y_i es la longitud de la pieza $(i = 1, ..., 10)$ i.e. $n = 10$; $Y_i \in N(20, 0{,}30)$.

Definimos la variable media muestral $\overline{Y}$,

$$\overline{Y} = \frac{\sum_i^{10} Y_i}{n}, \quad \mu = E(Y_i) \quad \text{y} \quad \sigma = \sigma(Y_i)$$

sabemos que:

$$\begin{aligned} E(\overline{Y}) &= 20 \\ \sigma^2(\overline{Y}) &= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \Longrightarrow \sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}3}{\sqrt{10}} = 0{,}09 \end{aligned}$$

definimos:

$$X = \frac{\overline{Y} - 20}{0{,}09} \in N(0,1)$$

$$\begin{aligned} P\left(\overline{Y} < 19{,}85\right) &= P\left(\frac{\overline{Y} - 20}{0{,}09} < \frac{19{,}85 - 20}{0{,}09}\right) = \\ P\left(X < -1{,}66\right) &= 0{,}0485 \end{aligned}$$

$$P\left(X < -1{,}66\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1{,}66} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = 0{,}0485$$

también se puede llegar a este resultado mirando las tablas de la $N(0,1)$. ■

Ejercicio 6.2.2 *Una fábrica produce lámparas para motos mediante dos procesos A y B. Las lamparas producidas mediante el proceso A tienen 3800h de media y una desviación de 400h mientras que las de B tienen 4600 de media y 900 de desviación. La garantia esta fijada en 3000h. Si la vida media de la lámpara es menor a las 3000h entonces el fabricante debe suministrar otra lámpara. Calcular:*

1. *$P(A), P(B)$ i.e. cual de los dos procesos cumple mejor las especificaciones de calidad*
2. *¿que pasa si la vida media pasa de 3000 a 3600h?*
3. *Probabilidad de que una lámpara elegida al azar de B tenga una vida mayor que otra de A.*

Solución. Sean x, y los valores de tiempo de vida de las lámparas producidas por el proceso A y B respectivamente, definimos:

$$X \in N(3800, 400), \quad Y \in N(4600, 900), \quad \xi \in N(0, 1)$$

1.
$$P(X < 3000) = P\left(\frac{X - 3800}{400} < \frac{3000 - 3800}{400}\right) = P(\xi < -2) = 0{,}02275$$
$$P(\xi < -2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-2} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = 0{,}02275$$
$$P(Y < 3000) = P\left(\frac{Y - 4600}{900} < \frac{3000 - 4600}{900}\right) = P(\xi < -1{,}77) = 0{,}0384$$
$$P(\xi < -1{,}77) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1{,}77} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = 0{,}0384$$
por lo tanto el proceso A se ajusta mejor a las especificaciones.

2.
$$P(X < 3600) = P\left(\frac{X - 3800}{400} < \frac{3600 - 3800}{400}\right) = P(\xi < -0{,}5) = 0{,}30854$$
$$P(\xi < -0{,}5) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-0{,}5} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = 0{,}30854$$
$$P(Y < 3600) = P\left(\frac{Y - 4600}{900} < \frac{3600 - 4600}{900}\right) = P(\xi < -1{,}11) = 0{,}1335$$
$$P(\xi < -1{,}11) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1{,}11} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = 0{,}1335$$
por lo tanto, ahora el proceso B se ajusta mejor a las nuevas especificaciones.

3. $Y - X \in N(4600 - 3800, \sqrt{400^2 + 900^2}) = N(800, 984.89)$
$$P(Y - X > 0) = P\left(\frac{Y - X - 800}{984.89} > \frac{0 - 800}{984.89}\right) = P(\xi > -0{,}81) = 0{,}791$$
$$P(\xi > -0{,}81) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-0{,}81}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = 0{,}79103$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejemplo 6.2.1 ***Ejercicio 6.2.3*** *El gasto mensual de una familia en un determinado artículo es una v.a. $Y \in N(4000, 200)$. Se seleccionan muestras de tamaños $4, 9, 25$ y 100. En cada caso, calcular la probabilidad de que la media de gasto familiar para los distintos tamaños esté comprendida entre 3900 y 4100.*

Solución. Sea $Y_i \in N(4000, 200)$ entonces $\overline{Y}$:=media muestral

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} \in N(4000, \frac{200}{\sqrt{n}})$$

entonces

$$X = \frac{\overline{Y} - 4000}{\frac{200}{\sqrt{n}}} \in N(0,1)$$

1. $n = 4 \Longrightarrow \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{4} \in N(4000, \frac{200}{\sqrt{4}}) = N(4000, 100)$

$$\begin{aligned} P\left(3900 < \overline{Y} < 4100\right) &= P\left(\frac{3900-4000}{100} < X < \frac{4100-4000}{100}\right) = \\ P(-1 &< X < 1) = 0{,}6826 \end{aligned}$$

$$P(-1 < X < 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = 0{,}6826$$

2. $n = 9 \Longrightarrow \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{9} \in N(4000, \frac{200}{\sqrt{9}}) = N(4000, 66{,}6)$

$$\begin{aligned} P\left(3900 < \overline{Y} < 4100\right) &= P\left(\frac{3900-4000}{66{,}6} < X < \frac{4100-4000}{66{,}6}\right) = \\ P(-1{,}50 &< X < 1{,}50) = 0{,}8664 \end{aligned}$$

$$P(-1{,}5 < X < 1{,}5) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1{,}5}^{1{,}5} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = 0{,}8664$$

3. $n = 25 \Longrightarrow \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{25} \in N(4000, \frac{200}{\sqrt{25}}) = N(4000, 40)$

$$\begin{aligned} P\left(3900 < \overline{Y} < 4100\right) &= P\left(\frac{3900-4000}{40} < X < \frac{4100-4000}{40}\right) = \\ P(-2{,}50 &< X < 2{,}50) = 0{,}9876 \end{aligned}$$

$$P(-2{,}50 < X < 2{,}50) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2{,}50}^{2{,}50} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = 0{,}9876$$

4. $n = 100 \Longrightarrow \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{100} \in N(4000, \frac{200}{\sqrt{100}}) = N(4000, 20)$

$$\begin{aligned} P\left(3900 < \overline{Y} < 4100\right) &= P\left(\frac{3900-4000}{20} < X < \frac{4100-4000}{20}\right) = \\ P(-5 &< X < 5) \simeq 1 \end{aligned}$$

$$P(-5 < X < 5) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-5}^{5} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx \simeq 1$$

como queríamos hacer ver. ■

Ejercicio 6.2.4 *Un agricultor asegura que la calidad de las manzanas que vende es tal que el diámetro en mm sigue una $N(75, \sqrt{10})$. Se toma una muestra de 36 manzanas midiendo su diámetro. La partida se rechaza si la media no alcanza los 73mm.*

1. *Calcular la probabilidad de que sean aceptadas con $\mu = 74$ y $\sigma = \sqrt{10}$.*

2. *Calcular la probabilidad de que sea rechazada la partida con* $\mu = 75$ *y* $\sigma = \sqrt{10}$.

Solución. Como en los ejemplos anteriores vemos que:

1. $Y \in N(74, \sqrt{10})$ y $n = 36$, por lo tanto:
$$\overline{Y} \in N\left(74, \frac{\sqrt{10}}{6}\right)$$
entonces
$$\begin{aligned} P\left(\overline{Y} \geq 73\right) &= P\left(\frac{\overline{Y}-74}{\sqrt{10}/6} \geq \frac{73-74}{\sqrt{10}/6}\right) = \\ P\left(X > -1{,}89\right) &= 0{,}5 + 0{,}4706 = 0{,}97062 \end{aligned}$$
$$P(X > -1{,}89) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1{,}89}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = 0{,}97062$$

2. $Y \in N(75, \sqrt{10})$ y $n = 36$, por lo tanto:
$$\overline{Y} \in N\left(75, \frac{\sqrt{10}}{6}\right)$$
entonces
$$P\left(\overline{Y} < 73\right) = P\left(\frac{\overline{Y}-74}{\sqrt{10}/6} \geq \frac{73-75}{\sqrt{10}/6}\right) = P\left(X < -3{,}79\right) \backsimeq 0{,}000007$$
$$P(X < -3{,}79) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-3{,}79} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = 7{,}5324 \times 10^{-5}$$

como queríamos hacer ver. ■

Ejercicio 6.2.5 *El número de piezas correctas que se elaboran en una sección de cierta fábrica cuadruplica el número de piezas defectuosas. Calcular aproximadamente:*

1. *La probabilidad de que de* 200 *piezas producidas en un día haya entre* 40 *y* 50 *defectuosas.*
2. *Las piezas que deben producirse en un día para con un 0.90 de probabilidades asegurar más de* 100 *correctas.*

Solución. Sabemos que el número X_n de piezas defectuosas, de entre n fabricadas sigue una distribución $Bin(n, \frac{1}{5})$ y que el número de piezas correctas $Y_n \in Bin(n, \frac{4}{5})$. Suponiendo la independencia entre pieza y pieza, definimos la variable Z como una normal tipificada, entonces:

1.
$$\begin{aligned} P\left(40 \leq X \leq 50\right) &\backsimeq P\left(\frac{39,5-200\frac{1}{5}}{\sqrt{200\frac{1}{5}\frac{4}{5}}} \leq Z \leq \frac{50,5-200\frac{1}{5}}{\sqrt{200\frac{1}{5}\frac{4}{5}}}\right) = \\ P\left(-0{,}0838 \leq Z \leq 1{,}8562\right) &= 0{,}50168 \end{aligned}$$
$$P\left(-0{,}08 \leq Z \leq 1{,}858\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-0{,}0838}^{1{,}8562} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = 0{,}50168$$

2.
$$P\left(Y_n \geq 100\right) \backsimeq P\left(Z \geq \frac{99{,}5 - n\frac{4}{5}}{\sqrt{200\frac{1}{5}\frac{4}{5}}}\right) = 0{,}90$$

viendo las tablas
$$\frac{99{,}5 - n\frac{4}{5}}{\sqrt{200\frac{1}{5}\frac{4}{5}}} \backsimeq 1{,}284 \Longrightarrow 99{,}5 - n\frac{4}{5} = 4\sqrt{2}\,(1{,}284)$$
$$n = \frac{5\,(-7{,}2408 + 99{,}5)}{4} = 115{,}33$$
por lo tanto $n = 116$.

Observa que en ambos casos hemos utilizado la corrección del 0,5. ■

Ejercicio 6.2.6 *¿Cuantos lanzamientos independientes de una moneda equilibrada serán necesarios hacer para que se verifique:*
$$P\left(0{,}49 \leq \textit{proporción de caras} \leq 0{,}51\right) \geq 0{,}99?.$$

Solución. Sea $n = \#$ lanzamientos y $p = q = \frac{1}{2}$. Definimos
$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si sale cara} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$
de esta forma tenemos que:
$$P(X_i) = \frac{1}{2}\forall i, \qquad \overline{X}_n = \frac{\sum X_i}{n},$$
$\overline{X}_n$ (proporción de caras).

Modelizamos el experimento mediante una Bernoulli, i.e. $X_i \in Bernoulli$, sabemos que $E[X] = p$, y que $var(X) = pq$, por lo que $\sigma = \sqrt{pq}$,de esta forma $E[X_i] = \frac{1}{n}np$, y que $var(X) = \frac{1}{n^2}npq$, por lo que $\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \frac{\sqrt{npq}}{n}$. Así llegamos a que
$$\frac{a-\mu}{\sigma} = \frac{(a-p)\,n}{\sqrt{npq}}$$
y por lo tanto
$$P\left(0{,}49 \leq \overline{X}_n \leq 0{,}51\right) = P\left(\frac{0{,}49n - n(0{,}5)}{\sqrt{(0{,}25)n}} \leq Y \leq \frac{0{,}51n - n(0{,}5)}{\sqrt{(0{,}25)n}}\right)$$
$$P\left(-0{,}02\sqrt{n} \leq Y \leq 0{,}02\sqrt{n}\right) \geq 0{,}99$$
donde $Y \in N(0,1)$. Para evaluar esta integral tendremos en cuenta que:
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right) := \phi$$
de esta forma
$$P\left(-0{,}02\sqrt{n} \leq Y \leq 0{,}02\sqrt{n}\right) = \phi(0{,}02\sqrt{n}) - \phi(-0{,}02\sqrt{n})$$
si tenemos en cuenta la simetría de la función entonces:
$$\begin{aligned} \phi(0{,}02\sqrt{n}) - \phi(-0{,}02\sqrt{n}) &= \phi(0{,}02\sqrt{n}) - \left[1 - \phi(0{,}02\sqrt{n})\right] = \\ 2\phi(0{,}02\sqrt{n}) - 1 &= 0{,}99 \Longrightarrow \\ \phi(0{,}02\sqrt{n}) &= 0{,}995 \end{aligned}$$

si tenemos en cuenta las tablas entonces vemos que

$$\phi(0{,}02\sqrt{n}) = 0{,}995 \Longleftrightarrow (0{,}02\sqrt{n}) = 2{,}58$$

de esta forma podemos calcular n

$$n = \left(\frac{2{,}58}{0{,}02}\right)^2 = 16641$$

como queríamos hacer ver. ■

Ejercicio 6.2.7 *Supongamos que extraemos una muestra aleatoria simple de una población que se distribuye según una uniforme* $U[0,2]$ *. Encontrar aproximadamente la probabilidad de que la media muestral se encuentre entre* 0,8 *y* 1,1 *si el tamaño de la muestra es* 48.

Solución. Sea $\{X_i\}_{i=1}^{48}$ v.a.i.i.d. $\in U[0,2]$,entonces

$$E(X_i) = 1, \quad var(X_i) = \frac{1}{3}$$

definimos

$$\overline{X} = \frac{\sum_i X_i}{48} \Longrightarrow E(\overline{X}) = 1 \quad var(\overline{X}) = \frac{1}{3}\frac{1}{48} = \frac{1}{144}$$

entonces

$$\begin{aligned} P\left(0,8 \leq \overline{X} \leq 1,1\right) &= P\left(\frac{0{,}8-1}{\frac{1}{12}} \leq \overline{X} \leq \frac{1{,}1-1}{\frac{1}{12}}\right) = \\ P\left(-2{,}4 \leq \overline{X} \leq 1{,}2\right) &= 0{,}87673 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2{,}4}^{1{,}2} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = 0{,}876\,73$$

alternativamente mediante las tablas

$$\begin{aligned} P\left(-2{,}4 \leq \overline{X} \leq 1{,}2\right) &= \phi(1{,}2) - \phi(-2{,}4) = \phi(1{,}2) + \phi(2{,}4) - 1 \\ &= 0{,}8849 + 0{,}9918 - 1 = 0{,}8767 \end{aligned}$$

como queríamos hacer ver. ■

Ejercicio 6.2.8 *Se elige un punto aleatorio* $(X_1, ..., X_n)$ *con* $n = 100$ *en el espacio aleatorio de dimensión* 100. *suponiendo que las variables aleatorias* $(X_1, ..., X_n)$ *son idependientes e i.d. (v.a.i.i.d.) según la uniforme* $U[-1,1]$ *. Encontrar aproximadamente la probabilidad de que el cuadrado de la distancia del punto al origen sea menos que* 40.

Solución. Tenemos que calcular la

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i^2 \leq 40\right)$$

haciendo $X_i^2 = Z$, la función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \forall x \in [-1,1] \\ 0 & resto \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mu &: = E(Z_i) = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{3}, \quad , E(Z_i^2) = \int_{-1}^{1} \frac{x^4}{2} dx = \frac{1}{5} \Longrightarrow \\ \sigma^2 &: = var(Z_i) = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{45}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$E\left(\sum_{i=1}^{100} Z_i\right) = n\mu = \frac{100}{3}, \qquad var\left(\sum_{i=1}^{100} Z_i\right) = n\sigma^2 = \frac{400}{45}$$

así pues mediane el TCL

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} Z_i \le 40\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} Z_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le \frac{40 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = P(Y \le 2{,}236)$$

$$P(Y \le 2{,}236) = 0{,}9873$$

como queríamos hacer ver. ■

Ejercicio 6.2.9 *Sean $X_i = 1, ..., n$ los resultados de medir con un aparato una determinada magnitud μ. Supongamos que las v.a. $\{X_i\}_i$ están idénticamente distribuidas i.d. con media μ y varianza σ^2.*

1. *Calcular el n tal que el 95 % de los casos en que realizamos estas mediciones la diferencia entre μ y $\bar{\mu} = (\sum X_i)/n$ sea inferior a $0{,}01\sigma$ i.e.*
$$(\mu - \bar{\mu}) < 0{,}01\sigma.$$
2. *Si estimamos la magnitud por $\bar{\mu} = \sum p_i X_i$ con $\sum p_i = 1$. ¿Cual debe ser ahora la condición para que el 95 % de los casos en que realizamos estas mediciones la diferencia entre μ y $\bar{\mu}$ sea inferior a $0{,}01\sigma$ i.e.*
$$(\mu - \bar{\mu}) < 0{,}01\sigma.$$

Solución. Para calcular el n tal que $(\mu - \bar{\mu}) < 0{,}01\sigma$ pensamos en las siguiente estimación:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i - \mu\right| < 0{,}01\sigma\right) \ge 0{,}95$$

i.e.

$$P\left(\left|\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right| < \frac{0{,}01n\sigma}{\sqrt{n}\sigma}\right) \ge 0{,}95$$

por el T.C.L la variable $Z \in N(0,1)$, debemos buscar un n tal que

$$P(Z \le 0,01\sqrt{n}) \ge 0{,}95$$

encontrando que (mirando las tablas)

$$0,01\sqrt{n} = 1{,}65 \Longrightarrow n \ge (165)^2$$

Con respecto a la segunda pregunta debemos observar que en este caso no podemos aplicar el T.C.L ya que las v.a. no están i.d. al haberse definido como $\{p_i X_i\}_i$ por esta razón recurrimos a la desigualdad de Cheby ya que si

$$E\left(\sum p_i X_i\right) = \mu \quad \text{y} \quad var\left(\sum p_i X_i\right) = \sigma^2\left(\sum p_i^2\right)$$

entonces

$$P\left(|X-E| \geq t\right) \leq \frac{var(X)}{t^2}$$

i.e.

$$P\left(\left|\sum p_i X_i - \mu\right| \geq 0{,}001\sigma\right) \leq \frac{\sigma^2\left(\sum p_i^2\right)}{(0{,}01)^2\sigma^2} \leq 0{,}05$$

implica que

$$\left(\sum p_i^2\right) \leq 5\cdot 10^{-6}$$

como queríamos hacer ver. ∎

Ejercicio 6.2.10 *Sea $(X_i)_{i=1}^{100} \in U\left[-5,5\right]$, sea $S_{100} = \sum X_i$. Determinar aproximadamente la posibilidad de que la v.a. S_{100} sea en valor absoluto mayor que 3.*

Solución. Vemos que

$$E\left[X_i\right]=0, \qquad var(X_i) = E\left[X_i^2\right] = \frac{(5+5)^2}{12} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma = \frac{5}{\sqrt{3}},$$

teniendo encuenta el TCL la v.a.

$$\frac{S_n - nE\left[X_i\right]}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n\sqrt{3}}{50} \in N(0,1),$$

de esta forma llegamos a que

$$\begin{aligned} P\left(|S_{100}|>3\right) &= P\left(S_{100}<-3\right) + P\left(S_{100}>3\right) = \\ &= P\left(\frac{S_n\sqrt{3}}{50} < -3\frac{\sqrt{3}}{50}\right) + P\left(\frac{S_n\sqrt{3}}{50} > 3\frac{\sqrt{3}}{50}\right) = \\ &= P\left(Z<-0{,}103\right) + P\left(Z>0{,}103\right) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$P\left(|S_{100}|>3\right) \approx 2P\left(Z>0{,}103\right) = 0{,}9204$$

ta y como queríamos hacer ver. ∎

Ejercicio 6.2.11 *Se lanzan tres monedas*

$$A;\begin{cases} P(C)=1 \\ P(X)=0 \end{cases}, \qquad B;\begin{cases} P(C)=2/3 \\ P(X)=1/3 \end{cases}, \qquad D;\begin{cases} P(C)=1/2 \\ P(X)=1/2 \end{cases},$$

y denotamos por Y_n al número de caras total que han salido después de lanzar las tres monedas $n-$veces. Determinar, n tal que

$$P\left(\left|Y_n - E\left[Y_n\right]\right| > \frac{1}{6}\right) < \frac{1}{10}.$$

Solución. Llamaremos X_i al número de caras obtenidas en el lánzamiento i-ésimo.

$$\begin{aligned} P\left(X_i=1\right) &= 1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \\ P\left(X_i=2\right) &= 1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\ P\left(X_i=3\right) &= 1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

de esta forma tenemos que

$$Y_n = \frac{\sum X_i}{n}$$

y aplicando TCL, tenemos que

$$\frac{\sum X_i - \sum E\left[X_i\right]}{\sigma\left(\sum X_i\right)} \longrightarrow N(0,1)$$

Calculamos la espe y la var de X_i, siendo éstas:

$$E\left[X_i\right] = \frac{13}{6}, \qquad var(X_i) = \frac{17}{36},$$

por lo tanto

$$P\left(|Z| > \frac{\sqrt{n}}{6\sigma}\right) < 0{,}1$$

entonces

$$F\left(\frac{\sqrt{n}}{6\sigma}\right) = 0{,}95$$

de esta forma estimamos n

$$\frac{\sqrt{n}}{6\sigma} = 1{,}645 \Longrightarrow n = (1{,}645)^2 \cdot 17 \geq 46.$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejercicio 6.2.12 *¿Qué probabilidad de ganar tiene un individuo que apuesta a que el número de caras en 100 tiradas de una moneda insesgada difiera de* 50 *al menos en* 4*?.*

Solución. Vemos que

$$P(C) = P(X) = \frac{1}{2},$$

por lo que $X \in Bernoulli$, $E\left[X\right] = np$, $var(X) = npq$. así que en este caso con $n = 100$, tenemos que

$$E\left[X\right] = 50, \qquad var(X) = 25, \qquad \sigma = 5.$$

Queremos calcular la probabilidad de que

$$P\left(\left|\sum X_i - 50\right| \geq 4\right)$$

El TCL nos dice que

$$P\left(\left|\frac{\sum X_i - 50}{5}\right| \geq \frac{4}{5}\right) = 0{,}7881$$

vemos que $\left(\frac{4}{5}\right) = 0{,}8$, así que hechando mano de las tablas llegamos al resultado obtenido. ■

Ejercicio 6.2.13 *Se lanza una moneda 100 veces, calcular la probabilidad de que el número de caras total esté comprendido entre* $(50, 60)$ *, i.e.*

$$P\left(50 < \sum X_i < 60\right) = ??$$

Solución. Sea $Y_n = \sum X_i$, donde $Y_n \in Bin(n,p) = Bin(100, 1/2)$, por lo que

$$E[X] = 50, \qquad var(X) = 25, \qquad \sigma = 5.$$

El teorema de Moivre permite aproximar Y mediante una dsitribución $N(50,5)$ o lo que es lo mismo

$$P(50 < Y < 60) = P(0 < Z < 2) = 04772$$

observar que $Z = \frac{Y-50}{5}$. ■

Ejercicio 6.2.14 *Sea (X_i) v.a.i. tal que*

$$P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{4}, \qquad P(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n^3}, \qquad P(X_n = 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n^3}$$

con $n \geq 2$. Estudiar si (X_i) verifica el TCL.

Solución. Sea $\left(X_n'\right)$ la v.a. truncada en 1, i.e. $X_n' = X_n \mathbb{1}_{|X_n| \leq 1}$, entonces conseguimos que X_n' sean v.a.i.i.d. tales que $var(X_n') = \frac{1}{2}$. Por el TCL se verifica

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} \sum X_n' \xrightarrow{L} N(0,1).$$

Como

$$\sum P(X_n \neq X_n') < \infty$$

entonces ambas series son equivalentes en el límite, por lo que se cumple que $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} \sum X_n' \xrightarrow{L} N(0,1)$.

$$\frac{\frac{S_n}{n} - E}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{L} N(0,1),$$

donde

$$s_n^2 = \frac{n}{2} + \sum j^{-1} \sim \frac{n}{2} + \log n \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{s_n}{\sqrt{n/2}} \longrightarrow 1,$$

por lo que

$$\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{L} N(0,1).$$

■

Ejercicio 6.2.15 *Sea (Y_i) v.a.i.i.d tal que*

$$E[Y_i] = 0, \qquad var(Y_i) = 1.$$

Sea Z_n v.a.i. tal que

$$P(Z_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}, \qquad P(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2},$$

definimos $X_n = Y_n + Z_n$ con $S_n = \sum X_i$. Estudiar si (X_i) verifica el TCL. y si existe a_n tal que $\frac{S_n}{a_n} \xrightarrow{L} N(0,1)$.

Solución. Vemos que (Y_n) verifica TCL. definimos $S_n' = \sum Y_i$ entonces

$$\frac{S_n'}{\sqrt{n}} \xrightarrow{L} N(0,1),$$

por otro lado

$$P\left(Z_n \neq 0\right) < \infty$$

entonces X_n, Y_n son equivalentes en el límite por lo que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{L} N(0,1),$$

y como se verifivica que $var(S_n) = \sqrt{2n}$, no se verifica que $\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{L} N(0,1)$ y de aquí X_n no cumple TCL. ■

Ejercicio 6.2.16 *Se lanza un dado simétrico 12000 veces. Sea S el número de veces que aparece el 6. Calcular (a,b) para que*

$$P\left(1900 < S < 2200\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2} du.$$

Solución. Sea

$$S = \sum_{i=1}^{12000} X_i$$

tal que

$$\begin{aligned} E\left[X_i\right] &= \frac{1}{6} = \mu, \\ var(X_i) &= E\left[X_i^2\right] - E\left[X_i\right]^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36}, \\ \sigma &= \frac{\sqrt{5}}{6}, \end{aligned}$$

normalizamos

$$\frac{\frac{S_n}{n} - E}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{L} N(0,1),$$

por lo que

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n - 2000}{\sigma\sqrt{12000}} := \tilde{N}$$

$$P\left(\tilde{a} \leq \tilde{N} \leq \tilde{b}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} e^{-x^2/2} dx$$

donde

$$\tilde{a} = \left(n\mu + a\sigma\sqrt{n}\right), \qquad \tilde{b} = \left(n\mu + b\sigma\sqrt{n}\right)$$

donde $n\mu = 2000$, por lo que

$$\begin{aligned} a\sigma\sqrt{n} &= \tilde{a} - n\mu = -100, \qquad a = -\frac{100}{\sigma\sqrt{n}}, \\ b\sigma\sqrt{n} &= 200, \qquad b = \frac{200}{\sigma\sqrt{n}} \end{aligned}$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejercicio 6.2.17 *Sea (X_i) v.a.i. tal que $(X_i) \in Poisson(\lambda_n > 0)$, con $\sum \lambda_n = \infty$, $S_n = \sum X_n$. Calcular la función caracterísatica de*

$$Y_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{var(S_n)}}$$

y estudiar si verifica TCL.

Solución. Tenemos que

$$E[X_n] = var(X_n) = \lambda_n,$$

$$\phi_{X_n}(t) = \exp\left(\lambda_n\left(\exp(it) - 1\right)\right),$$

al ser las X_n v.a.i. entonces

$$var(S_n) = \sum \lambda_n = B_n^2, \qquad \sigma(S_n) = B_n,$$

las

$$Y_n = \sum \frac{1}{\sigma(S_n)}(X_n - \lambda_n)$$

por lo que

$$\begin{aligned}\phi_{Y_n}(t) \overset{indp}{=} \prod \phi_{X_n - \lambda_n}\left(\frac{t}{B_n}\right) &= \prod \exp\left(-\lambda_n i\left(\frac{t}{B_n}\right)\right)\exp\left(\lambda_n \exp\left(i\frac{t}{B_n} - 1\right)\right) = \\ &= \exp B_n^2\left(\exp\left(i\frac{t}{B_n}\right) - i\frac{t}{B_n} - 1\right)\end{aligned}$$

haciendo un desarrollo de Taylor $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \ldots.$

$$\phi_{Y_n}(t) \longrightarrow \exp(-t^2/2) := \phi_{N(0,1)}(t)$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejercicio 6.2.18 *Lanzamos muchas veces una moneda de tal forma que la $P(C) = 0,1$. Los lanzamientos son independientes y llamaremos a la variable T_1 al número de lanzamientos hasta que sale cara por primera vez. Contamos, desde ese momento, el número de lanzamientos hasta que salga la siguiente. Sea T_2 ese número de lanzamientos así hasta 40. Sea $T = \sum_{i=1}^{40} T_i$, queremos calcular la probabilidad de que*

$$P(400 < T < 490)$$

Solución.

$$P(400 < T < 490) = \sum_{i=400}^{490} \binom{i-1}{39} p^{40}(1-p)^{i-40}$$

utilizando el TCL tenemos que

$$\frac{T - E[T]}{\sigma(T)} \xrightarrow{L} N(0,1)$$

donde (T_i)

$$E[T_i] = \frac{1}{p} = 10, \qquad var(T_i) = \frac{1-p}{p^2} = 90,$$

y por lo tanto

$$E[T] = 10 \cdot 40 = 400, \qquad var(T) = 90 \cdot 40 = 3600, \qquad \sigma(T) = 60,$$

de esta forma

$$\begin{aligned} P\left(400 < T < 490\right) &= P\left(0 \leq T - 400 \leq 90\right) = P\left(0 \leq \frac{T-400}{60} \leq \frac{90}{60}\right) = \\ &= P\left(0 \leq \frac{T-400}{60} \leq \frac{3}{2}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2} du = \\ &= F\left(\frac{3}{2}\right) - F(0) \approx 0{,}43 \end{aligned}$$

sin embargo al ser $n = 40$, i.e. un número muy pequeño la aproximación por el TCL no es muy buena en este caso. ■

Ejercicio 6.2.19 *Una máquina tiene $i-$piezas, que denotamos por C_i, que son substituibles en cuanto se produce un fallo. Cada pieza i tiene una vida media X_i tal que*

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \exp\left(A - x\right) & x > A > 0 \\ 0 & resto \end{cases}$$

1. *Comprobar que*
$$\frac{1}{n} \sum X_i \xrightarrow{c.s.} 1 + A.$$
2. *Calcular el número de piezas de recambio necesario para asegurarnos el funcionamiento de la máquina durante $T > 100A$, con una probabilidad de $0,95$.*

Solución. Aplicando Kolgomorov vemos que (X_n) verifica la LF tal que $E\left[X_i\right] = 1 + A$, entonces

$$\frac{1}{n} \sum X_i \xrightarrow{c.s.} E\left[X_i\right].$$

Con respecto a la segunda pregunta, vemos que tenemos que calcular un n tal que

$$P\left(\sum X_i \geq 100A\right) \geq 0,95.$$

Vemos que $(X_i - A) \sim \exp\left(\lambda = 1\right)$, por lo que

$$E\left[X_i\right] = 1 + A, \qquad var\left[X_i\right] = 1,$$

y por lo tanto, definimos

$$Y = \frac{\sum X_i - n\left(1 + A\right)}{1} \in N\left(0, 1\right),$$

entonces (mirando las tablas) vemos que

$$100A - n\left(1 + A\right) \simeq -1,65,$$

de esta forma llegamos a que

$$n \simeq \frac{(1,65 + 100A)}{1 + A},$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Capítulo 7

Camino aleatorio y martingalas

7.1. Camino aleatorio

El objeto matemático es $(X_1, ..., X_n)$ v.a.i. tales que $P(X_i = 1) = p,\ P(X_i = -1) = 1 - p,$

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad S_n = S_{n-1} + X_n$$

donde S_0 es un dato inicial.

Un primer ejemplo es el de la ruleta. Un jugador empieza con una fortuna a, y apuesta cada vez siempres 1 al rojo. Denotamos por S_n la fortuna acumulada en tiempo n. Por lo tanto $S_0 = a$

$$S_1 = a + \begin{cases} 1 \text{ rojo} \\ \\ -1 \text{ negro o } 0. \end{cases}$$

en general tenemos que

$$S_n = S_{n-1} + \begin{cases} 1 \text{ rojo} \\ \\ -1 \text{ negro o } 0. \end{cases}$$

con

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ rojo} \\ \\ -1 \text{ negro o } 0. \end{cases}$$

Definición 7.1.1 *Si $p = q = 1/2$ entonces el **camino es simétrico**. Si $p \neq q$ entonces **asimétrico**.*

Nos interesa conocer la variable S_n para un $n-$fijo, en el ejemplo anterior tenemos que $S_n \in [-n, n]$. Al mismo tiempo queremos saber $P(S_n = 0)$. Por ejemplo si $n = 2$

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 2 \\ & & & \nearrow & \\ & & 1 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 0 & & & & 0 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & -1 & & \\ & & & \searrow & \\ & & & & -2 \end{array}$$

vemos que si $n=2$ es par, entonces $S_n=\{-2,0,2\}$ sólo puede tomar estos valores mientras que si n es impar no puede tomar por ejemplo el cero, $n=3$, entonces $S_n=\{-3,-1,1,3\}$. Vamos tomando una idea de los posibles valores

$$\begin{aligned}
\text{Si } n \text{ es par } P(S_n=k) &= 0, \text{ si } k \text{ es impar,}\\
\text{Si } n \text{ es impar } P(S_n=k) &= 0, \text{ si } k \text{ es par,}\\
\text{Si } n \text{ y } k \text{ par } \left(\frac{n+k}{2}\right) &\in Z,\ P(S_n=k)=\binom{2}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n+k}{2}}
\end{aligned}$$

Proposición 7.1.1 *Tenemos un camino asimétrico con $S_0=0$. La probabilidad de regresar infinitas veces al cero, $S_0=0$, es 0. Si es simétrico entonces es 1.*

Nos preguntamos ahora por

$$\begin{aligned}
E[S_n] &= E\left[S_0+\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=a+nE[X_1]=a+n(p-q),\\
var(S_n) &= var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=n\left(E\left(X_1^2\right)-E(X_1)^2\right)=n\left(1-(p-q)^2\right)=4npq,\\
\sigma(S_n) &= 2\sqrt{npq},
\end{aligned}$$

donde $(p+q)^2=1, X_1^2=1$.

Teorema 7.1.1 *Consideramos un camino aleatorio con $S_0=0$.*

1. *Si es simétrico, i.e. $p=q$, entonces*
   - **i** *La probabilidad de regresar infinitas veces al cero es 1*
   - **ii** *La esperanza del tiempo del primer regreso es ∞*
2. *Si el camino es asimétrico entonces*
   - **i** *La probabilidad de regresar infinitas veces al cero es 0*
   - **ii** *La esperanza condicionada del tiempo del primer regreso condicionada con regresar alguna vez es*

$$\frac{4pq}{|p-q|(1-|p-q|)}$$

Teorema 7.1.2

$$P(S_n \text{ regrese al menos } 1 \text{ vez a } 0)=\begin{cases} 1 \text{ si } p=q\\ 1-|p-q| \text{ si } p\neq q\end{cases}$$

La ruina del jugador.

Partimos de con una fortuna inicial a, y apostamos 1 a rojo siempre hasta que la fortuna sea N o nos hayamos arruinado.

$$F_n=F_{n-1}+X_n=F_{n-1}+\begin{cases} 1 \text{ rojo} & p\\ -1 \text{ negro o } 0. & q\end{cases}$$

queremos saber la probabilidad de que $F_n=0$ i.e. el jugador se arruine. Supondremos que $p=q$.

7.2. Martingalas

Definición 7.2.1 ***Esperanza condicionada***. *Partiendo de la definición de probabilidad condicionada*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

definimos la esperanza condicionada

$$\begin{aligned} E(X \mid B) &= \frac{E(X\mathbb{1}_B)}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP, \\ E(\mathbb{1}_A \mid B) &= \frac{E(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B)}{P(B)} = P(A \mid B), \\ E(\mathbb{1}_C) &= P(C). \end{aligned}$$

Ejemplo 7.2.1 *Lanzamos tres monedas de 10, 20 y 50 céntimos. Definimos la v.a.* ξ *que cuenta el valor obtenido de lasua de las monedas que han salido cara i.e.* $val(\xi) \in [0, 80]$ *.¿Cuál es el valor esperado si al lanzar las tres monedas sabemos que han salido dos caras?.*

Sea B la v.a. que define el evento salir dos caras, por lo tanto

$$B = \{CCX, CXC, XCC\}$$

son las tres posibiladades que tenemos con igual probabilidad i.e. $1/8 = \left(1/2^3\right)$ *. De esta forma vemos que*

$$\begin{aligned} \xi(CCX) &= 10 + 20 = 30, \\ \xi(CXC) &= 10 + 50 = 60, \\ \xi(XCC) &= 20 + 50 = 70, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$E(\xi \mid B) = \frac{1}{P(B)} \int_B \xi dP = \frac{1}{3/8}\left(\frac{30}{8} + \frac{60}{8} + \frac{70}{8}\right) = \frac{160}{3}.$$

Definición 7.2.2 *Sea* $\Omega = \{B_1, ..., B_n\}$ *definimos la* ***probabilidad total***

$$P(A) = \sum P(A \mid B_i) P(B_i)$$

y la esperanza total como

$$E(X) = \sum E(X \mid B_i) P(B_i)$$

Tenemos ahora una σ-álgebra, $\mathcal{G}$, que está generada por una partición finita $\mathcal{P} = \{B_1, ..., B_n\}$, donde $\#\mathcal{G} = 2^N$ eventos. Tenemos que

$$E(X \mid \mathcal{G}) = \sum E(X \mid B_i) \mathbb{1}_{B_i}$$

Ejemplo 7.2.2 *Boreles etc...* $\mathcal{P} = \{B_1, ..., B_n\} = \{[0, 1/3], (1/3, 2/3), [2/3, 1]\}$ *, donde* $\mathcal{G}$ *es la unión de elementos de* $\mathcal{P}$ *y* $\#\mathcal{G} = 2^N = 8$*. Entonces*

$$E(X \mid [0, 1/3]) = \frac{E\left(X\mathbb{1}_{[0,1/3]}\right)}{P([0, 1/3])} = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP = \frac{1}{1/3} \int_0^{1/3} x^2 dx = \frac{1}{27}$$

donde $X = x^2$.

Ejemplo 7.2.3 *Veremos una pequeña variación del ejemplo anterior en la que $X = \xi = 2x^2$, pero esta vez condicionamos con respecto a una v.a. η discreta que toma los siguientes valores*

$$\eta = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1/3) \\ 2 & x \in [1/3, 2/3) \\ 0 & x \in [2/3, 1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(\xi \quad | \quad [0, 1/3]) &= \frac{1}{P(B)} \int_B X dP = \frac{1}{1/3} \int_0^{1/3} 2x^2 dx = \frac{2}{27}, \\ E(\xi \quad | \quad [1/3, 2/3)) &= \frac{1}{1/3} \int_{1/3}^{2/3} 2x^2 dx = \frac{14}{27}, \\ E(\xi \quad | \quad [2/3, 1]) &= \frac{1}{1/3} \int_{2/3}^{1} 2x^2 dx = \frac{38}{27}, \end{aligned}$$

Ejemplo 7.2.4 *Veremos una pequeña variación del ejemplo anterior en la que $\xi = 2x^2$, pero esta vez condicionamos con respecto a una v.a. η continua que toma los siguientes valores*

$$\eta = \begin{cases} 2 & x \in [0, 1/2) \\ x & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

la táctica en este caso es algo diferente.

En primer lugar vemos que en $[0, 1/2)$, η puede ser tratada como v.a. discreta por lo que

$$E(\xi \mid [0, 1/2)) = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP = \frac{1}{1/2} \int_0^{1/2} 2x^2 dx = \frac{1}{6},$$

observándose (y esto es fundamental) que

$$\int_A E(\xi \mid \eta) dP = \int_A \xi dP,$$

i.e.

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{6} dx = \frac{1}{12} = \int_0^{1/2} 2x^2 dx.$$

Sin embargo con respecto al segundo intervalo, debemos observar que si

$$E(\xi \mid \eta) = \xi, \qquad \forall x \in [1/2, 1]$$

entonces

$$\int_A E(\xi \mid \eta) dP = \int_A \xi dP,$$

por lo tanto llegamos a la conclusión de que

$$E(\xi \mid \eta) = \begin{cases} 1/6 & x \in [0, 1/2) \\ 2x^2 & x \in [1/2, 1] \end{cases}.$$

Observación 7.2.1 *Detrás de todo esto está el teorema de Radon-Nykodin.*

$$\int_A \zeta dP = \int_A \xi dP$$

con $\zeta = E(\xi \mid \eta)$.

Vemos que podemos interpretar $E(X \mid \mathcal{G})$ de dos maneras:

1. $E(X \mid \mathcal{G})$ es la v.a. $\mathcal{G}-$medible que mejor aproxima en sentido $\mathbb{L}^2$ a X. i.e. aquella que minimiza $E\left(|X-Y|^2\right)$.
2. $E(X \mid \mathcal{G})$ es la única v.a. que cumple
$$E\left(Y\mathbb{1}_A\right)=E\left(X\mathbb{1}_A\right)$$
i.e. $E\left(|X-Y|\,\mathbb{1}_A\right)=0$, condición de perpendicularidad.

Proposición 7.2.1 *Se verifican las siguientes propiedades*

1. *Si X es $\mathcal{G}$-medible, entonces $E(X \mid \mathcal{G})=X$,*
2. *Si X es independiente de $\mathcal{G}$, entonces $E(X \mid \mathcal{G})=E(X)=const$,*
3. $E\left(E(X \mid \mathcal{G}) \mid H\right)=E\left(X \mid H\right), \;\; H\subset\mathcal{G}$
4. $E\left(E(X \mid \mathcal{G})\right)=E\left(X\right)$
5. $E(aX+b \mid \mathcal{G})=aE(X \mid \mathcal{G})+b$.

Definición 7.2.3 ***Filtración de información****.*

Sean $(X_i)_{i=1}^n$ v.a.i.d (no se exige independencia, sólo igualdad de distribuciones). Definimos $\mathcal{F}_1=\sigma(X_1)$, i.e. las variables que s eexpresan en función de X_1 i.e. que si conocemos X_1 tenemos el valor de esa variable. $\mathcal{F}_2=\sigma(X_1,X_2)$, ..., $\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,....,X_n)$. Añadimos $\mathcal{F}_0=\sigma(\emptyset,\Omega)$,

Decimos que la sucesión $(\mathcal{F}_i)$ de σ-álgebras es una filtración asociada a $(X_i)_{i=1}^n$ si
$$\mathcal{F}_1\subset.......\subset\mathcal{F}_n$$

Ejemplo 7.2.5 *Sean (X_i) v.a.i. tales*
$$X_i=\begin{cases} 1 \text{ rojo } p \\ \\ -1 \text{ negro o } 0,\; q.\end{cases}$$
y sea $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$, entonces $\mathcal{F}_i=\sigma\left(X_1,...,X_i\right)$ son las v.a. que quedan fijadas al conocer los resultados hasta el tiempo i.

Definición 7.2.4 ***Martingala****. Decimos que la sucesión (X_i) de v.a. es una martingala si*

1. *X_n es $\mathcal{F}_n-$medible, para $n=1,2,...$*
2. *$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)=X_n$, para $n=1,2,....$*

Vemos que la primera de las propiedades nos dice que X_n sólo depende de la información disponible en tiempo n. Mientras que la segunda nos dice que la mejor estimación (aproximación) de X_{n+1} conocida la información disponible en tiempo n es X_n. De esta forma, si
$$E(X_k \mid \mathcal{F}_n)=X_n, \qquad k\geq n,$$

entonces

$$E(X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = X_{k-1},$$

si condicionamos sobre $k-2$ entonces

$$E(X_k \mid \mathcal{F}_{k-2}) = E\left(E(X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-2}\right) = E(X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-2}) = X_{k-2},$$

en particular si $n = 0$,

$$E(X_k \mid \mathcal{F}_0) = X_0,$$

donde $E(Z \mid \mathcal{F}_0) = E(Z)$ así que $X_0 = E\left(X_k\right)$.

Veamos una serie de ejmplos para intentar aclarar este concepto.

Ejemplo 7.2.6 *Sean $(X_i)_{i=1}^n$ v.a.i. tales qie $E(X_i) = 0$, para todo $i = 1, .., n$. Definimos*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

y la filtración asociada $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$. Veamos que S_n es una martingala.

1. *S_n es adaptada a la filtración $\mathcal{F}_n$ ya que $E(|S_n|) < \infty$, i.e.*

$$E(|S_n|) = E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \left|E\left(X_i\right)\right| < \infty.$$

2. *Vemos igualmente que*

$$E(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = S_n,$$

donde

$$E(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) + E(S_n \mid \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}) + S_n = S_n,$$

por lo tanto S_n es martingala con respecto a la filtración $\mathcal{F}_n$.

Ejemplo 7.2.7 *En este ejemplo X es una v.a. y $\mathcal{F}_1 \subset .... \subset \mathcal{F}_n$ uma filtración donde definimos*

$$X_n = E(X \mid \mathcal{F}_n)$$

para todo $n = 1, 2, ...$

Al igual que en el ejemplo anterior, vemos que

$$|X_n| = |E(X \mid \mathcal{F}_n)| \leq E\left((|X_n| \mid \mathcal{F}_n)\right)$$

entonces

$$E\left(|X_n|\right) \leq E\left(E\left|X_n\right| \mid \mathcal{F}_n\right)) = E\left(|X|\right) < \infty.$$

De igual forma vemos que

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E\left(E(X \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right) = E(X \mid \mathcal{F}_n) = X_n$$

ya que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ y por lo tanto X_n es martingala con respecto a la filtración $\mathcal{F}_n$.

De la definición de martingala se desprende con facilidad el siguiente resultado.

Lema 7.2.1 *Si ξ_n es martingala entonces*

$$E(\xi_i) = E\left(\xi_j\right)$$

para todo $i \neq j, i, j = 1, 2, ...$

En efecto. Basta con observar que por definición

$$\xi_n = E(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n), \qquad para \quad n = 1, 2, ...$$

por lo que tomando esperanzas en ambos lados de la igualdad obtenemos

$$E(\xi_n) = E\left(E(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\right) = E\left(\xi_{n+1}\right)$$

siendo cierto el resultado *para* $\quad n = 1, 2, ...$ ■

Ejemplo 7.2.8 *Sean $(X_i)_{i=1}^n$ v.a.i. Definimos el camino aleatorio simétrico*

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

tal que

$$P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}.$$

Queremos hacer ver que

$$S_n^2 - n,$$

es martingala con respecto a la filtración asociada $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$.

En primer lugar observamos que

$$S_n^2 - n = \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 - n,$$

donde

$$|S_n| = \left|\sum_{i=1}^n X_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |X_i| < n,$$

observar que la v.a. $X_i = \pm 1$. De esta forma vemos que

$$E\left(\left|S_n^2 - n\right|\right) \leq E\left(S_n^2\right) + n \leq n^2 + n < \infty,$$

por lo tanto $S_n^2 - n$ es integrable.

De igual forma vemos que

$$S_{n+1}^2 = (X_{n+1} + S_n)^2 = X_{n+1}^2 + 2X_{n+1}S_n + S_n^2,$$

por lo que

$$\begin{aligned} E\left(S_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right) &= E\left(X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right) + 2E\left(X_{n+1}S_n \mid \mathcal{F}_n\right) + E\left(S_n^2 \mid \mathcal{F}_n\right) = \\ &= E\left(X_{n+1}^2\right) + 2S_nE\left(X_{n+1}\right) + S_n^2, \end{aligned}$$

ahora bien, si tenmos en cuenta que

$$E\left(X_{n+1}^2\right)=1,\quad E\left(X_{n+1}\right)=0,$$

entonces

$$E\left(S_{n+1}^2\mid\mathcal{F}_n\right)=1+S_n^2,$$

así que

$$E\left(S_{n+1}^2-(n+1)\mid\mathcal{F}_n\right)=S_n^2-n.$$

El siguiente ejemplo dará pié a una serie de resultados y teoremas.

Ejemplo 7.2.9 *Sean (X_i) v.a.i. tales $P(X_i=\pm1)=1/2$. La fortuna inicial es $X_0=a$. Tenemos una estrategia de apuestas, regla para apostar en tiempo n (por rojo)*

$$f\left(X_1,....,X_{n-1}\right)=\lambda_n$$

donde λ_n es el montante de la apuesta en tiempo n. Obviamente λ_n es $\mathcal{F}_{n-1}$ medible.

La fortuna en tiempo n es X_n. ($\lambda_n<0$ es apuesta por negro).

$$\begin{aligned}X_1&=X_0+\lambda_1X_1,\\ X_2&=X_1+\lambda_2X_2=X_0+\lambda_1X_1+\lambda_2X_2=X_0+\sum_{i=1}^{2}\lambda_iX_i,\\ &\vdots\\ X_n&=X_{n-1}+\lambda_nX_n=X_0+\sum_{i=1}^{n}\lambda_iX_i,,\end{aligned}$$

Teorema 7.2.1 *(X_n) es martingala.*

Corolario 7.2.1 *Si X_n es la fortuna en tiempo n siguiendo cualquier estrategia entonces*

$$E\left(X_k\right)=X_0$$

que es la fortuna inicial.

Definición 7.2.5 ***Tiempo de parada*** *asociado a una filtración. T es una regla de parada, se trata de un v.a. en $(\Omega,\mathcal{F},P)$ que toma valores en $\mathbb{N}$, $(T=n)\in\mathcal{F}_n$.*

7.3. Ejemplos.

7.3.1. Camino aleatorio.

Ejemplo 7.3.1 *Dos partículas realizan caminos aleatorios simétricos simultáneos e independientes que comienzan en el origen. Demuestra que la probabilidad de que se encuentren en la misma posición tras n pasos es*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\qquad \textit{y deduce que}\qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

Solución. Sean $(X_i)_{i=1}^n$, definimos

$$U_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

y sean $(Y_i)_{i=1}^n$, definimos

$$V_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

con $p = \frac{1}{2}$

$$P(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2} = P(Y_i = \pm 1)$$

$$P(U_n = V_n) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 .$$

Sabemos que

$$P(S_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}$$

entonces si $p = q = 1/2$, la expresión anterior queda reducida a:

$$P(S_n = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{\frac{n+k}{2}}$$

si n y k son ambos pares o impares.

Consideremos el caso $n = 3$. Entonces tanto U_3 como V_3 sólo pueden tomar los siguientes valores; $\{3, 1, -1, -3\}$, entonces

$$\begin{aligned} P(U_3 = V_3) &= \sum_{k=-3,-1,1,3} P(U_3 = k, V_3 = k) \underset{indpend.}{=} \sum_{k=-3,-1,1,3} P(U_3 = k) P(V_3 = k) = \\ \underset{i.d.}{=} \sum_{k=-3,-1,1,3} P(U_3 = k) &= \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 \left[\binom{3}{0}^2 + \binom{3}{1}^2 + \binom{3}{2}^2 + \binom{3}{3}^2\right] = \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k}^2 \end{aligned}$$

de esta forma se completa para el caso general n ■

Ejemplo 7.3.2 *Considera un camino aleatorio en los enteros con barreras absorbentes en* 0 *y en* $N \in \mathbb{N}$*, en el que en cualquier tiempo la partícula da un salto de* -1 *con probabilidad* α*, permanece donde estaba con probabilidad* β*, o da un salto de* $+1$ *con probabilidad* γ*, donde* $\alpha, \beta, \gamma > 0$ *y* $\alpha + \beta + \gamma = 1$*. La condición de absorción significa que si en un tiempo* n *la partícula está en nivel* N *(respectivamente,* 0*), en el paso siguiente continúa en ese nivel.*

Supongamos que la partícula comienza en tiempo 0 *en el nivel* a*,* $0 \leq a \leq N$*. Demuestra que la probabilidad de que la partícula quede atrapada en el nivel* N *es:*

$$\frac{a}{N} \quad (si\ \alpha = \gamma) \qquad \frac{(\alpha/\gamma)^a - 1}{(\alpha/\gamma)^N - 1} \quad (si\ \alpha \neq \gamma).$$

Demostración. Se puede pensar en este problema como en una cadena de Markov. Pensemos en un caso sencillo en el que $N = 5$

$$X_n = \begin{cases} 1 & \gamma \\ 0 & \beta \\ -1 & \alpha \end{cases}$$

Definimos las matrices como

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 \\
0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 \\
0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & \gamma \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 5 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{array} &
\left(\begin{array}{cccc|cc}
\beta & \gamma & 0 & 0 & \alpha & 0 \\
\alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 \\
0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha & \beta & 0 & \gamma \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

por lo tanto

$$
N = (I-Q)^{1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta & \gamma & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \right)^{-1}
$$

$$
T = NI = \mu \begin{pmatrix}
\left(\gamma - 3\beta + 3\beta^2 - \beta^3 + \gamma^2 + \gamma^3 - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma - \alpha\gamma^2 - \beta\gamma^2 + \beta^2\gamma + 2\alpha\beta\gamma + 1\right) \\
\left(-\alpha^2\gamma + \alpha\beta^2 + \alpha\beta\gamma - 2\alpha\beta - \alpha\gamma + \alpha - \beta^3 + \beta^2\gamma + 3\beta^2 - \beta\gamma^2 - 2\beta\gamma - 3\beta + \gamma^2 + \gamma + 1\right) \\
\left(-\alpha^2\beta + \alpha^2 + \alpha\beta^2 + \alpha\beta\gamma - 2\alpha\beta - \alpha\gamma^2 - \alpha\gamma + \alpha - \beta^3 + \beta^2\gamma + 3\beta^2 - 2\beta\gamma - 3\beta + \gamma + 1\right) \\
\left(\alpha - 3\beta + \alpha^2 + \alpha^3 + 3\beta^2 - \beta^3 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta - \alpha^2\gamma + 2\alpha\beta\gamma + 1\right)
\end{pmatrix}
$$

donde $\mu = \frac{1}{\alpha^2\gamma^2 - 3\alpha\beta^2\gamma + 6\alpha\beta\gamma - 3\alpha\gamma + \beta^4 - 4\beta^3 + 6\beta^2 - 4\beta + 1}$

$$
P = NR = \mu \begin{array}{c}
\begin{array}{c|c} \qquad\qquad 0 \qquad\qquad & \qquad\qquad N \qquad\qquad \end{array} \\
\left(\begin{array}{c|c}
-\alpha\left(3\beta - 3\beta^2 + \beta^3 + 2\alpha\gamma - 2\alpha\beta\gamma - 1\right) & \gamma^4 \\
\alpha\left(-\gamma\alpha^2 + \alpha\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha\right) & -\gamma^3\beta - 1 \\
-\alpha^3(\beta - 1) & \gamma\left(\beta^2\gamma - 2\beta\gamma - \alpha\gamma^2 + \gamma\right) \\
\alpha^4 & -\gamma\left(3\beta - 3\beta^2 + \beta^3 + 2\alpha\gamma - 2\alpha\beta\gamma - 1\right)
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
$$

esto quiere decir que la probabilidad de caer en el estado absorvente 0 estando en $a = 1$ es

$$
P = \frac{-\alpha\left(3\beta - 3\beta^2 + \beta^3 + 2\alpha\gamma - 2\alpha\beta\gamma - 1\right)}{\alpha^2\gamma^2 - 3\alpha\beta^2\gamma + 6\alpha\beta\gamma - 3\alpha\gamma + \beta^4 - 4\beta^3 + 6\beta^2 - 4\beta + 1}
$$

mientras que la de caer en N estando en $a = 1$ es

$$
P = \frac{\gamma^4}{\alpha^2\gamma^2 - 3\alpha\beta^2\gamma + 6\alpha\beta\gamma - 3\alpha\gamma + \beta^4 - 4\beta^3 + 6\beta^2 - 4\beta + 1}
$$

mientras que los tiempos medios de caer en un estado absorvente vienen dados por la matriz T.

Si $\alpha = \gamma$, entonces obtenemos

$$
T = \begin{pmatrix}
\frac{\beta-1}{-\beta^2-\beta\gamma+2\beta+\gamma^2+\gamma-1} \\
-\frac{\gamma-\beta+1}{-\beta^2-\beta\gamma+2\beta+\gamma^2+\gamma-1} \\
-\frac{\gamma-\beta+1}{-\beta^2-\beta\gamma+2\beta+\gamma^2+\gamma-1} \\
\frac{\beta-1}{-\beta^2-\beta\gamma+2\beta+\gamma^2+\gamma-1}
\end{pmatrix}
$$

$$
P = \begin{pmatrix}
-\gamma\frac{\beta^3-3\beta^2-2\beta\gamma^2+3\beta+2\gamma^2-1}{\beta^4-4\beta^3-3\beta^2\gamma^2+6\beta^2+6\beta\gamma^2-4\beta+\gamma^4-3\gamma^2+1} & \frac{\gamma^4}{\beta^4-4\beta^3-3\beta^2\gamma^2+6\beta^2+6\beta\gamma^2-4\beta+\gamma^4-3\gamma^2+1} \\
\gamma\frac{\beta^2\gamma-2\beta\gamma-\gamma^3+\gamma}{\beta^4-4\beta^3-3\beta^2\gamma^2+6\beta^2+6\beta\gamma^2-4\beta+\gamma^4-3\gamma^2+1} & -\gamma^3\frac{\beta-1}{\beta^4-4\beta^3-3\beta^2\gamma^2+6\beta^2+6\beta\gamma^2-4\beta+\gamma^4-3\gamma^2+1} \\
-\gamma^3\frac{\beta-1}{\beta^4-4\beta^3-3\beta^2\gamma^2+6\beta^2+6\beta\gamma^2-4\beta+\gamma^4-3\gamma^2+1} & \gamma\frac{\beta^2\gamma-2\beta\gamma-\gamma^3+\gamma}{\beta^4-4\beta^3-3\beta^2\gamma^2+6\beta^2+6\beta\gamma^2-4\beta+\gamma^4-3\gamma^2+1} \\
\frac{\gamma^4}{\beta^4-4\beta^3-3\beta^2\gamma^2+6\beta^2+6\beta\gamma^2-4\beta+\gamma^4-3\gamma^2+1} & -\gamma\frac{\beta^3-3\beta^2-2\beta\gamma^2+3\beta+2\gamma^2-1}{\beta^4-4\beta^3-3\beta^2\gamma^2+6\beta^2+6\beta\gamma^2-4\beta+\gamma^4-3\gamma^2+1}
\end{pmatrix}
$$

Estudiaremos el caso $\alpha=\beta=\gamma=1/3$, obteniendo los siguientes resultados

$$P=\begin{pmatrix} \gamma\frac{\gamma^3+\gamma^2-3\gamma+1}{-\gamma^4+2\gamma^3+3\gamma^2-4\gamma+1} & \frac{\gamma^4}{-\gamma^4+2\gamma^3+3\gamma^2-4\gamma+1} \\ \gamma\frac{\gamma-2\gamma^2}{-\gamma^4+2\gamma^3+3\gamma^2-4\gamma+1} & -\gamma^3\frac{\gamma-1}{-\gamma^4+2\gamma^3+3\gamma^2-4\gamma+1} \\ -\gamma^3\frac{\gamma-1}{-\gamma^4+2\gamma^3+3\gamma^2-4\gamma+1} & \gamma\frac{\gamma-2\gamma^2}{-\gamma^4+2\gamma^3+3\gamma^2-4\gamma+1} \\ \frac{\gamma^4}{-\gamma^4+2\gamma^3+3\gamma^2-4\gamma+1} & \gamma\frac{\gamma^3+\gamma^2-3\gamma+1}{-\gamma^4+2\gamma^3+3\gamma^2-4\gamma+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \qquad T=\begin{pmatrix} -\frac{\gamma-1}{\gamma^2-3\gamma+1} \\ \frac{1}{\gamma^2-3\gamma+1} \\ \frac{1}{\gamma^2-3\gamma+1} \\ -\frac{\gamma-1}{\gamma^2-3\gamma+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejemplo 7.3.3 *Una partícula realiza un camino aleatorio en los enteros (con $p=P(X_n=+1)$) comenzando desde $S_0=0$. Prueba (sugerencia: condicionar sobre el primer movimiento) que si $p\neq 1/2$, entonces la probabilidad de alcanzar el nivel N o el nivel $-N$ antes de volver a visitar el nivel de partida 0 es*

$$(p-q)\,\frac{p^N+q^N}{p^N-q^N}$$

¿Cuánto vale esa probabilidad en el caso simétrico $p=q$?.

Solución. Siguiendo la sugerencia vemos que condicionando sobre el primermovimiento

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A\mid S_1=1)\,P(S_1=1)+P(A\mid S_1=-1)\,P(S_1=-1)= \\ &= P(A\mid S_1=1)\,p+P(A\mid S_1=-1)\,q \end{aligned}$$

donde

$$P(A\mid S_1=1)=P(B\mid S_0=1)$$

donde B representa el suceso llegar a N antes que a 0. (recordar la ruina del jugador).

$$\begin{aligned} P(A\mid S_1=1) &= 1-\frac{(q/p)^N-(q/p)}{(q/p)^N-1} \\ P(A\mid S_1=-1) &= 1-\frac{(p/q)^N-(p/q)}{(p/q)^N-1} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} P(A) &= \left(1-\frac{(q/p)^N-(q/p)}{(q/p)^N-1}\right)p+\left(1-\frac{(p/q)^N-(p/q)}{(p/q)^N-1}\right)q= \\ &= \frac{-p+q}{(q/p)^N-1}+\frac{-q+p}{(p/q)^N-1}=\frac{(-p+q)\,p^N}{q^N-p^N}+\frac{(-q+p)\,q^N}{p^N-q^N}=(p-q)\,\frac{p^N+q^N}{p^N-q^N}. \end{aligned}$$

Si $p=q$ entonces

$$P(A)=\frac{1}{N}\frac{1}{2}+\frac{1}{N}\frac{1}{2}=\frac{1}{N}$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejemplo 7.3.4 *Denotemos por $\mathcal{N}$ el número de veces que un camino asimétrico (con $p=P(X_n=+1)$) vuelve a visitar el punto de partida. Denotemos por α la cantidad $|p-q|$. Demuestra que la variable aleatoria discreta $\mathcal{N}$ tiene función de masa*

$$P(\mathcal{N}=k)=\alpha(1-\alpha)^k$$

para $k=0,1,2,\ldots$

Deduce que el número medio de visitas a 0 es $1-\alpha/\alpha$.

Ejemplo 7.3.5 *Damos un nivel $N \in \mathbb{N}$. Consideremos un camino aleatorio en los enteros (con $p = P(X_n = +1)$) que parte de un nivel a, $0 \leq a \leq N$, y que tiene una barrera absorbente en el nivel 0 y con una barrera retenedora en el nivel N. Es decir:*

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} &= N \mid S_n = N) = p, \qquad P(S_{n+1} = N-1 \mid S_n = N) = (1-p), \\ P(S_{n+1} &= 0 \mid S_n = 0) = 1, \qquad P(S_{n+1} = \pm 1 \mid S_n = N) = 0. \end{aligned}$$

Denotemos por $e(a)$ el tiempo medio que transcurre hasta que el camino aleatorio queda absorbido en el nivel 0. Demuestra que

$$e(a) = a(2N - a + 1)$$

si $p = 1/2$.

Solución. Planteamiento: $e(a)$ es el tiempo medio que transcurre hasta que el camino aleatorio queda absorbido en el nivel 0. Sea T la v.a. que registra el número n en el que por primera vez se alcanza N ó 0.

Si se comienza en a

$$e(a) = E\left(T_a\right) = \frac{1}{2}\left(e(a+1)+1\right) + \frac{1}{2}\left(e(a-1)+1\right)$$

por lo tanto, si manipulamos

$$0 = \frac{1}{2}\left(e(a+1) - e(a) + 1\right) + \frac{1}{2}\left(e(a-1) - e(a) + 1\right)$$

de esta forma vemos que

$$e(a+1) - e(a) = e(a) - e(a-1) - 2$$

donde

$$e\left(0\right) = 0, \qquad e\left(N\right) = 0$$

por lo que

$$\begin{aligned} e(1) - e(0) &= e(1) - e(0) - 2 \cdot 0, \\ e(2) - e(1) &= e(1) - e(0) - 2 \cdot 1, \\ e(3) - e(2) &= e(1) - e(0) - 2 \cdot 2, \\ &\vdots \\ e(a) - e(a-1) &= e(1) - e(0) - 2(a-1) \end{aligned}$$

así que

$$e(a) - e(0) = \left[e(1) - e(0)\right] a - 2\sum_{i=0}^{a-1} i$$

con $\sum_{i=0}^{a-1} i = a\left(a-1\right)/2$

$$e(a) = e(1)a - a\left(a-1\right)$$

vemos igualmente que

$$0 = e(N) = e(1)N - N\left(N-1\right) \qquad \Longrightarrow \qquad e(1) = N-1$$

por lo que

$$e(a) = \left(N-1\right)a - a\left(a-1\right) = a\left(N-a\right).$$

Pero en este ejercicio estamos suponiendo que $e(0) = 0$ y $e(N) \neq 0$ por lo que deberemos obtener la relación entre $e(N)$ y $e(N-1)$, llegando así a obtener la relación buscada. ■

Ejemplo 7.3.6 *Consideramos el camino aleatorio*

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$$

que arranca en $S_0 = 0$*, para el que* $P\left(X_j = 1\right) = p, \forall j = 1, 2, ...$ *Calcular*

$$P\left(S_4 = 2, S_8 = 0, S_{12} = 2\right).$$

Solución. Consideramos sucesivamente

$$\begin{aligned} P\left(S_4 = 2, S_8 = 0, S_{12} = 2\right) &= P\left(S_{12} = 2 \mid S_4 = 2, S_8 = 0\right) P\left(S_4 = 2, S_8 = 0\right) = \\ &= P\left(S_{12} = 2 \mid S_4 = 2, S_8 = 0\right) P\left(S_8 = 0 \mid S_4 = 2\right) P\left(S_4 = 2\right) \end{aligned}$$

y pasamos a calcular cada una de estas probabilidades

$$P\left(S_{12} = 2 \mid S_4 = 2, S_8 = 0\right) = P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i = 2 \mid \sum_{i=1}^{4} X_i = 2, \sum_{i=1}^{8} X_i = 0\right)$$

observamos que al ser $\sum_{i=1}^{8} X_i = 0$, entonces en el sumatorio

$$\sum_{i=1}^{12} X_i = \sum_{i=1}^{8} X_i + \sum_{i=9}^{12} X_i = \sum_{i=9}^{12} X_i = 2,$$

entonces

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i = 2 \mid \sum_{i=1}^{4} X_i = 2, \sum_{i=1}^{8} X_i = 0\right) &= P\left(\sum_{i=9}^{12} X_i = 2 \mid \sum_{i=1}^{8} X_i = 0\right) \\ &\underset{ind}{=} P\left(\sum_{i=9}^{12} X_i = 2\right) \\ &\underset{v.i.i.d}{=} P\left(\sum_{i=1}^{4} X_i = 2\right) \end{aligned}$$

porlo tanto

$$P\left(S_4 = 2\right) = 4p^3 q$$

i.e. existen 4 formas de llegar hasta la posición 2 empezando en $S_0 = 0$ (pensar en los diagramss de árboles) por ejemplo los caminos posibles son:

1. empezar en 0, pasar a 1, pasar a 2, pasar a 3 y de allí pasar a 2, i.e.$p^3 q$
2. empezar en 0, pasar a 1, pasar a 2, pasar a 1 y de allí pasar a 2, i.e.$p^2 qp$
3. empezar en 0, pasar a 1, pasar a 0, pasar a 1 y de allí pasar a 2, i.e.pqp^2
4. empezar en 0, pasar a -1, pasar a 0, pasar a 1 y de allí pasar a 2, i.e.qp^3.

De igual forma se prueba que

$$P\left(S_8 = 0 \mid S_4 = 2\right) = 4pq^3$$

y por último

$$P\left(S_4 = 2\right) = 4p^3 q$$

así que la probabilidad buscada es:

$$P\left(S_4 = 2, S_8 = 0, S_{12} = 2\right) = \left(4p^3 q\right)\left(4pq^3\right)\left(4p^3 q\right) = 4^3 p^7 q^5,$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

7.3.2. Martingalas y todo eso.

Ejemplo 7.3.7 *Calcular la esperanza condicionada cuando* $\xi = 2x^2$, *y* η *toma los siguientes valores*

$$\eta = 1 - |2x - 1|$$

para todo $x \in [0,1]$.

Solución. El truco está en ver que existe una simetría en $x = 1/2$ de tal forma que

$$\eta(x) = \eta(1-x), \qquad A = 1 - A$$

por lo tanto

$$E(\xi \mid \eta)(x) = E(\xi \mid \eta)(1-x)$$

así que

$$\begin{aligned} \int_A 2x^2 dx &= \int_A x^2 dx + \int_A x^2 dx = \\ &= \int_A x^2 dx + \int_{1-A} (1-x)^2\, dx = \int_A x^2 dx + \int_A (1-x)^2\, dx = \\ &= \int_A \left(x^2 + (1-x)^2\right) dx. \end{aligned}$$

Ahora bien, si tenemos en cuenta que

$$\int_A E(\xi \mid \eta) dP = \int_A \xi dP,$$

entonces llegamos a la conclusión de que

$$E(\xi \mid \eta)(x) = x^2 + (1-x)^2,$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejemplo 7.3.8 *Calcular la esperanza condicionada cuando* $\xi = 2x^2$, *y* η *toma los siguientes valores*

$$\eta = \begin{cases} 2x & x \in [0, 1/2) \\ 2x - 1 & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Solución. Detrás de todo esto está el teorema de Radon-Nykodin.

$$\int_{B \cup \left(B + \frac{1}{2}\right)} \zeta dP = \int_{B \cup \left(B + \frac{1}{2}\right)} \xi dP$$

con $\zeta = E(\xi \mid \eta)$. i.e.

$$\begin{aligned} \int_{B \cup \left(B + \frac{1}{2}\right)} \xi dP &= \int_{B \cup \left(B + \frac{1}{2}\right)} 2x^2 dx = \int_B 2x^2 dx + \int_{B + \frac{1}{2}} 2x^2 dx = \\ &= \int_B 2x^2 dx + \int_B 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 dx = 2\int_B \left(x^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right) dx, \end{aligned}$$

de esta forma la función ζ debe satisfacer la relación

$$\zeta(x) = \zeta\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

para todo $x \in [0,1/2)$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_{B\cup\left(B+\frac{1}{2}\right)} \zeta dP &= \int_B \zeta(x)\,dx + \int_{B+\frac{1}{2}} \zeta(x)\,dx = \int_B \zeta(x)\,dx + \int_B \zeta\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \\ &= \int_B \zeta(x)\,dx + \int_B \zeta(x)\,dx = 2\int_B \zeta(x)\,dx,\end{aligned}$$

por lo que

$$\zeta(x) = x^2 + \left(x+\frac{1}{2}\right)^2,$$

para todo $x \in [0,1/2)$. De igual forma procedemos cuando $x \in [1/2,1]$, por lo tanto llegamos a la conclusión de que

$$E(\xi \mid \eta) = \begin{cases} x^2 + \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 & x \in [0,1/2) \\ x^2 + \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 & x \in [1/2,1] \end{cases},$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejemplo 7.3.9 *Tenemos una baraja francesa, que consta de 52 cartas, la mitad rojas y la otra mitad negras. Las cartas están situadas boca abajo en un montón bien barajado. En cada movimiento, el jugador descubre una carta de la baraja, observa su color y la deposita en la mesa. En cierto momento (y sólo una vez), el jugador dirá "¡roja en la siguiente!". Ganará si, efectivamente, la carta que se descubre es efectivamente roja. Llamemos $(\mathcal{F}_n)$ a la filtración que recoge la información sobre las primeras n extracciones. Llamemos R_n al número de cartas rojas que quedan en el montón justo después de descubrir la $n-$ésima carta. Calcula*

$$E(R_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$$

y comprueba que la sucesión de variables aleatorias (X_n), dada por

$$X_n = \frac{R_n}{52-n}$$

para cada n, es una martingala.

Solución. Situémonos justo antes de la extracción n: quedan $52-n+1$ cartas (pues se han descubierto $n-1$ de las 52 originales), de las cuales, $R_n - 1$ son rojas. Así que, si sale roja en la siguiente, lo que se produce con probabilidad

$$\frac{R_{n-1}}{52-n+1},$$

la variable R_n toma el valor $R_{n-1}-1$. Y si sale negra (esto tiene probabilidad $1 - R_{n-1}/(52-n+1)$), entonces R_n vale R_{n-1}. De manera que

$$\begin{aligned}E(R_n \quad | \quad \mathcal{F}_{n-1}) &= (R_{n-1}-1)\frac{R_{n-1}}{52-n+1} + R_{n-1}\left(1-\frac{R_{n-1}}{52-n+1}\right) = \\ &= R_{n-1} - \frac{R_{n-1}}{52-n+1}.\end{aligned}$$

Obsérvese que (X_n) es $\mathcal{F}_n-$medible. Ahora calculamos

$$\begin{aligned}E(X_n \quad | \quad \mathcal{F}_{n-1}) &= E\left(\frac{R_n}{52-n} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \frac{1}{52-n}E(R_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \frac{1}{52-n}\left[R_{n-1} - \frac{R_{n-1}}{52-n+1}\right] = \\ &= \frac{R_{n-1}}{52-(n-1)} = X_{n-1},\end{aligned}$$

por lo tanto X_n es martingala para cada n. ■

Ejemplo 7.3.10 *Sea $Y_1, Y_2, ...$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d., cada una de las cuales toma los valores 1 y -1 con probabilidades p y q. Llamemos $S_n = Y_1 + ... + Y_n$, con $S_0 = 0$. Comprueba que la sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ dada por*

$$X_n = \left(\frac{p}{q}\right)^{S_n}$$

es martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n)$ asociada a las Y_j y deduce que

$$E\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{S_n}\right) = 1.$$

Solución. Vemos que las $(Y_i)_{i=1}^{n}$ son v.a.i. tales que

$$P(Y_i = 1) = p, \qquad P(Y_i = -1) = q,$$

y que además hemos fijado $S_0 = 0$, de tal forma que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

pero queremos hacer ver que X_n es martingala con respecto a la filtración $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$. Cómo en los ejemplos anteriores tendremos que ver que X_n es medible y que $E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$.

Por lo tanto.

1. X_n es $\mathcal{F}_n-$medible
$$X_n = \left(\frac{p}{q}\right)^{S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i} = \psi(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$$
i.e. es una función de las v.a. $Y_1, Y_2, ..., Y_n$.
2. $E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$, vemos que
$$X_n = \left(\frac{p}{q}\right)^{S_n} = \left(\frac{p}{q}\right)^{S_{n-1}+Y_n} = \left(\frac{p}{q}\right)^{S_{n-1}} \left(\frac{p}{q}\right)^{Y_n} = X_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{Y_n}$$
por lo tanto
$$\begin{aligned} E(X_n \quad \mid \quad & \mathcal{F}_{n-1}) = E\left(X_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{Y_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = && X_n \text{ es } \mathcal{F}_n - \text{medible}, \\ &= \quad X_{n-1}E\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{Y_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = && \text{lineal} \\ &= \quad X_{n-1}E\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{Y_n}\right) && Y_n \text{ es independiente de } \mathcal{F}_{n-1}, \end{aligned}$$
por lo tanto
$$E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}E\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{Y_n}\right)$$
ahora veamos con un poco más de detalle el cálculo de
$$E\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{Y_n}\right).$$

Sabemos que $P(Y_i = 1) = p, \qquad P(Y_i = -1) = q$, por lo tanto

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{Y_n} = \begin{cases} \frac{p}{q} & p \\ \frac{q}{p} & q \end{cases}$$

por lo tanto

$$E\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{Y_n}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)p + \left(\frac{q}{p}\right)q = p + q = 1$$

de esta forma vemos que es martingala.

Tal y como queríamos hacer ver. ■

Ejemplo 7.3.11 *De nuevo las Y_n son variables que toman valores ± 1, pero ahora con probabilidad $1/2$ cada uno de ellos. Tomamos una sucesión de números $(a_1, a_2, ...)$ y consideramos la sucesión de variables aleatorias (X_n) dadas por*

$$X_0 = 0, \qquad X_n = X_{n-1} + a_n Y_n,$$

para cada $n \geq 1$. Comprueba que la sucesión (Z_n) dada por

$$Z_n = X_n^2 - b_n, \qquad\qquad b_n = \sum_{j=1}^{n} a_j^2,$$

es $\mathcal{F}_n$-martingala y deduce que

$$E\left(X_n^2\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j^2.$$

Solución. Vemos que las $(Y_i)_{i=1}^n$ son v.a.i. tales que

$$P(Y_i = 1) = \frac{1}{2} = P(Y_i = -1),$$

y que además hemos fijado $X_0 = 0$, de tal forma que

$$X_n = X_{n-1} + a_n Y_n$$

pero queremos hacer ver que Z_n es martingala con respecto a la filtración $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$. Cómo en los ejemplos anteriores tendremos que ver que Z_n es medible y que $E(Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = Z_{n-1}$.

Por lo tanto vemos que

$$\begin{aligned} E(X_n^2 - b_n \quad | \quad \mathcal{F}_{n-1}) &= E((X_{n-1} + a_n Y_n)^2 - b_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \\ &= E(X_{n-1}^2 + 2a_n X_{n-1} Y_n + a_n^2 Y_n^2 - b_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \\ &= X_{n-1}^2 + a_n^2 E\left(Y_n^2\right) + 2a_n X_{n-1} E(Y_n) - b_n = \\ &= X_{n-1}^2 + a_n^2 - b_n \\ &= X_{n-1}^2 - b_{n-1} \\ &= Z_{n-1} \end{aligned}$$

donde $E\left(Y_n^2\right) = 1$, y $E(Y_n) = 0$. ■

Ejemplo 7.3.12 *Sean Y_n variables aleatorias i.i.d., tales que $Y_n > 0$ y $E(Y_i)_{i=1}^n = 1$. Comprueba que la sucesión (X_n) dada por*

$$X_0 = 0, \qquad X_n = \prod_{j=1}^n Y_j,$$

para cada $n \geq 1$, es martingala.

Solución. Vemos que las $(Y_i)_{i=1}^n$ son v.a.i.i.d. tales que $Y_n > 0$ y $E(Y) = 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} E(X_n \quad | \quad \mathcal{F}_{n-1}) &= E\left(\prod_{j=1}^n Y_j \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} Y_j E(Y_n), \qquad \text{por ser independientes de } \mathcal{F}_{n-1} \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} Y_j \qquad \text{ya que } E(Y_i) = 1 \\ &= X_{n-1} \end{aligned}$$

por lo tanto es martingala. ■

Ejemplo 7.3.13 *Sean Y_n variables aleatorias i.i.d. que toman valores ± 1 con probabilidad $1/2$ cada una. Comprueba que la sucesión (X_n) dada por*

$$X_0 = 0, \qquad X_n = \frac{e^{a(\sum Y_i)}}{\cosh{(a)}^n},$$

para cada $n \geq 1$, es martingala.

Solución. Vemos cómo antes que

$$\begin{aligned} E(X_n \quad | \quad \mathcal{F}_{n-1}) &= E\left(\frac{e^{a(\sum Y_i)}}{\cosh{(a)}^n} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\ &= \frac{1}{\cosh{(a)}^n} E\left(e^{a(\sum Y_i)} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{\cosh{(a)}^n} e^{a\left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i\right)} E\left(e^{aY_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{\cosh{(a)}^n} e^{a\left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i\right)} E\left(e^{aY_n}\right) \end{aligned}$$

observamos ahora que

$$E\left(e^{aY_n}\right) = \frac{1}{2}\left(e^a + e^{-a}\right) = \cosh(a)$$

por lo tanto

$$E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \frac{1}{\cosh{(a)}^{n-1}} e^{a\left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i\right)} = X_{n-1}$$

demostrando de esta forma que es martingala. ■

Capítulo 8

Distribuciones.

8.1. Distribuciones discretas

8.1.1. Bernoulli.

1. Función generatriz
$$G_X(s) = q + ps.$$

2. Función de masa
$$p_k = P(X = k) = p^k q^{1-k} = p^k (1-p)^{1-k} \qquad \text{con} \quad k = 0, 1.$$

3. Función característica y generatriz de momentos
$$\varphi_X(t) = q + pe^{it}, \qquad M_X(t) = q + pe^t.$$

4. Esperanza y varianza
$$E[X] = p, \quad var[X] = pq, \quad \sigma = \sqrt{pq}$$

5. Resumen

p_k	$\varphi_X(t)$	$M_X(t)$	$E[X]$	$var[X]$
$p^k q^{1-k}$	$q + pe^{it}$	$q + pe^t$	p	pq

8.1.2. Binomial.

Probabilidad de obtener exactamente $k - éxitos$.

1. Función generatriz
$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} s^k = (q + ps)^n.$$

2. Función de masa
$$Bin(n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad \text{con} \quad k = 0, 1, ...$$

3. Función característica y generatriz de momentos

$$\varphi_X(t) = \left(q + pe^{it}\right)^n, \qquad M_X(t) = \left(q + pe^t\right)^n.$$

4. Esperanza y varianza

$$E(X) = np, \quad var(X) = npq, \quad \sigma = \sqrt{npq}$$

5. Resumen

p_k	$\varphi_X(t)$	$M_X(t)$	$E[X]$	$var[X]$
$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$\left(q + pe^{it}\right)^n$	$\left(q + pe^t\right)^n$	np	npq

Teorema 8.1.1 *Suma de binomiales independientes es otra binomial.*

$$\sum X_i \in Bin\left(\sum n_i, p\right).$$

8.1.3. Geométrica.

Tiempo de espera hasta que aparece el suceso X por primera vez.

1. Función generatriz

$$G_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p^k q^{k-1} s^k = \frac{ps}{1 - qs}.$$

2. Función de masa

$$Geo(p) = (1 - p)^{k-1}\, p \qquad \text{con} \quad k = 1, \ldots.$$

3. Función característica y generatriz de momentos

$$\varphi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}, \qquad M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}.$$

4. Esperanza y varianza

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad var(X) = \frac{q}{p^2}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{q}{p^2}}.$$

5. Resumen

p_k	$\varphi_X(t)$	$M_X(t)$	$E[X]$	$var[X]$
$(1-p)^{k-1}\, p$	$\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$	$\frac{pe^t}{1-qe^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$

8.1.4. Binomial negativa.

Si en vez de buscar la probabilidad de k éxitos en n ensayos ($n-$fijo) consideramos la variable X igual al número de fallos antes del éxito $n-$ésimo entonces encotramos la binomial negativa.

Observación 8.1.1 *Geométrica es un caso particular de una binomial negativa*

$$Geo \simeq BinN\,(1, p).$$

1. Función generatriz
$$G_X(s) = \left(\frac{p}{1-qs}\right)^n.$$

2. Función de masa
$$BinN(n,p) = \binom{n+k-1}{k} p^n q^k \qquad \text{con} \quad k = 0,1,....$$

3. Función característica y generatriz de momentos
$$\varphi_X(t) = \left(\frac{p}{1-qe^{it}}\right)^n, \qquad\qquad M_X(t) = \left(\frac{p}{1-qe^{t}}\right)^n.$$

4. Esperanza y varianza
$$E(X) = \frac{n}{p}, \quad var(X) = \frac{nq}{p^2}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{nq}{p^2}}$$

5. Resumen

p_k	$\varphi_X(t)$	$M_X(t)$	$E[X]$	$var[X]$
$\binom{n+k-1}{k} p^n q^k$	$\left(\frac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$	$\left(\frac{p}{1-qe^{t}}\right)^n$	$\frac{n}{p}$	$\frac{nq}{p^2}$

8.1.5. Poisson.

1. Función generatriz
$$G_X(s) = \exp(\lambda(s-1)).$$

2. Función de masa
$$Poisson(\lambda) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} \qquad \text{con} \quad k = 0,....$$

3. Función característica y generatriz de momentos
$$\varphi_X(t) = e^{\lambda}\left(e^{it}-1\right), \qquad\qquad M_X(t) = e^{\lambda\left(e^t-1\right)}.$$

4. Esperanza y varianza
$$E(X) = \lambda, \quad var(X) = \lambda, \quad \sigma = \sqrt{\lambda}$$

Teorema 8.1.2 *La suma de Poissones independientes es otra Poisson de parámetro $\lambda = \sum \lambda_i$*

Observación 8.1.2 *Binomial ≈Poisson*

$$Bin(n,p) \rightrightarrows Poiss(\lambda) \ / \ \lambda = np \leq 5 \, y \ \ p \leq 0{,}1.$$

8.1.6. Hipergeométrica

1. Función de masa
$$f_X(x) = \frac{\begin{pmatrix} k \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-k \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}$$

2. Esperanza y varianza
$$E(X) = \frac{kn}{N}, \quad var(X) = \frac{N-n}{N-1} n \frac{k}{N}\left(1 - \frac{k}{N}\right),$$

8.2. Variables continuas (v.a.c.).

8.2.1. Uniforme en $[a, b]$.

1. Función de distribución.
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ t/b - a & t \in [a,b] \\ 1 & t > b \end{cases}$$

2. Función de densidad.
$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in [a,b] \\ 0 & t \notin [a,b] \end{cases}$$

3. Función característica y generatriz de momentos
$$\varphi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it\,(b-a)}, \qquad M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t\,(b-a)}.$$

4. Esperanza y varianza.
$$E(X) = \frac{1}{2}(a+b), \quad var(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2.$$

8.2.2. Gamma.

1. Función de densidad $\gamma(p, a)$.
$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & resto \end{cases}$$
donde
$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

2. Función característica y generatriz de momentos
$$\varphi_X(t) = \left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-p}, \qquad M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{a}\right)^{-p}.$$

3. Esperanza y varianza.
$$E(X) = \frac{p}{a}, \quad var(X) = \frac{p}{a^2}.$$

8.2.3. Exponencial.

1. Función de distribución.
$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda t) & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$
donde $\lambda > 0$.

2. Función de densidad.
$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda t) & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \qquad ó \qquad f_X(t) = \lambda \exp(-\lambda t) I_{(0,\infty)}(x)$$
vemos que
$$\exp(\lambda) = \gamma(p = 1, \lambda).$$

3. Función característica y generatriz de momentos
$$\varphi_X(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1}, \qquad M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}.$$

4. Esperanza y varianza.
$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Teorema 8.2.1 *Sea X v.a. exponencial, entonces:*
$$P(X > a + t \mid X > a) = P(A > t),$$
i.e. X tiene la propiedad de no memoria.

Teorema 8.2.2 $(X_i)_{i=1}^n \in \exp(\lambda)$ *v.a.i.i.d., entonces*
$$\sum X_i \in \gamma(n, \lambda).$$

8.2.4. Beta

1. Función de densidad.
$$f_X(t) = \frac{1}{B(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} I_{(o,1)}(x),$$

2. Esperanza y varianza.
$$E(X) = \frac{p}{p+q}, \quad var(X) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$$

8.2.5. Normal.

1. Función de distribución.
$$F_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx \quad \forall x \in R$$

2. Función de densidad.
$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \forall x \in R$$

3. Función característica y generatriz de momentos
$$\varphi_X(t) = e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, \qquad M_X(t) = e^{t\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

4. Esperanza y varianza.
$$E(X) = \mu, \quad var(X) = \sigma^2$$

Si $X \in N(\mu, \sigma^2)$, tipificando la variable i.e.
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \Longrightarrow Z \in N(0,1)$$

Observación 8.2.1 *Aproximación Normal de una binomial. Versión más simple del TCL (ver capítulo 7)*
$$\begin{array}{ccc} Binomial & \approx & Normal. \\ Bin(n,p) & \approx & N(np, \sqrt{npq}) \end{array}$$

Si $Bin(n,p)$ tal que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, entonces podemos aproximar dicha binomial mediante una distribución normal.

La probabilidad binomial $P(k)$ puede aproximarse por la probabilidad normal
$$P(k) \approx P(k - 0{,}5 \leq X \leq k + 0{,}5)$$

Teorema 8.2.3 *Si $\{X_i\}_{i=1}^n$ son v.a. independientes tales que $X_i \in N(\mu_i, \sigma_i)$ $\forall i = 1, ..., n$ entonces*
$$\sum_i X_i \in N\left(\sum_i \mu_i, \sqrt{\sum_i \sigma_i}\right).$$

Teorema 8.2.4 *Si $\{X_i\}_{i=1}^n$ son v.a. independientes tales que $X_i \in N(\mu, \sigma)$ i.e. son v.a.i.i.d., entonces*
$$\frac{\sum_i X_i}{n} \in N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right).$$

8.2.6. Cauchy

1. Función de densidad.
$$f_X(t) = \frac{1}{\pi\sigma} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-p}{\sigma}\right)^2}.$$

2. Función característica
$$\varphi_X(t) = e^{itp - \sigma|t|}.$$

3. Esperanza y varianza.
$$\nexists \qquad E(X) =, \quad \nexists \qquad var(X) = .$$

8.2.7. χ_n^2. Chi-cuadrado

χ_n^2. Distribución **Chi-cuadrado** con n-grados de libertad. Consideramos $(X_1, ..., X_n)$ v.a.i.i.d. que siguen una $N(0,1)$. Definimos

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2. \tag{8.1}$$

1. Función de densidad.

$$f_X(t) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{1}{2}x} x^{\frac{n}{2}-1} I_{(o,\infty)}(x) \qquad \forall x \in R$$

   viéndose que

$$\chi_n^2 = \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

2. Función característica y generatriz de momentos

$$\varphi_X(t) = (1-2it)^{-n/2}, \qquad M_X(t) = (1-2t)^{-n/2}.$$

3. Esperanza y varianza.

$$E(X) = n, \quad var(X) = 2n.$$

8.2.8. t-Student

t-Student, con n-grados de libertad, t_n.

Definición 8.2.1 *Considermos $X \in N(0,1)$ e $Y \in \chi_n^2$ de tal forma que (X,Y) son independientes, definimos*

$$t_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi_n^2/n}} \tag{8.2}$$

El cálculo de la función de densidad es fácil ya que al tratarse de v.a.i. entonces $f_{XY} = f_X f_Y$.

1. Función de densidad.

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Función característica y generatriz de momentos

$$\varphi_X(t) = (1-2it)^{-n/2}, \qquad M_X(t) = (1-2t)^{-n/2}.$$

3. Esperanza y varianza.

$$E(X) = 0, \text{ si } n > 1, \quad var(X) = \frac{n}{n-2}, \text{ si } n > 2.$$

4.

$$t_{n;1-\alpha} = -t_{n;\alpha}$$

8.2.9. F Fisher-Snedecor

F Fisher-Snedecor. $F_{m,n}$ con m y n grados de libertad. Sea $X \in \chi^2_m$, e $Y \in \chi^2_n$ v.a.i. entonces definimos

$$F_{m,n} = \frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}} = \frac{Xn}{Ym} = \frac{\chi^2_m/m}{\chi^2_n/n}. \tag{8.3}$$

1. Función de densidad.

$$f_X(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m-2}{2}} \left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Esperanza y varianza.

$$E(X) = \frac{m}{m-2}, \;\; m>2, \;\; var(X) = 2\left(\frac{n}{n-2}\right)^2 \frac{m+n-2}{m\,(n-4)}, \;\; n>4.$$

3. Propiedades

   a) Si $X \in F_{m,n} \Longrightarrow \frac{1}{X} \in F_{n,m}$

$$\begin{aligned} F_{m;n;1-\alpha} &= \frac{1}{F_{n;m;1-\alpha}} \\ F_{m;n;1-\alpha} &= \frac{1}{F_{m;n;\alpha}} \end{aligned}$$