El caso del Aro que avanza y luego retrocede

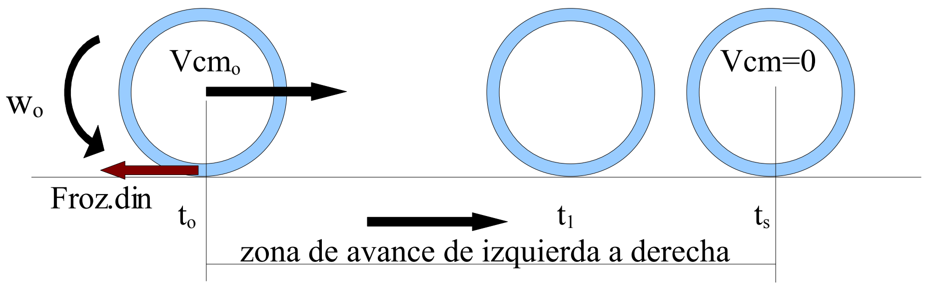
Objetivo primero:

Analizar el comportamiento de un Aro al que se lo lanza hacia adelante, a la altura del suelo áspero con cierta velocidad tanto de avance como de rotación y, luego de avanzar un cierto tiempo, el Aro en cuestión emprende el camino hacia el punto desde donde partió.

Objetivo principal:

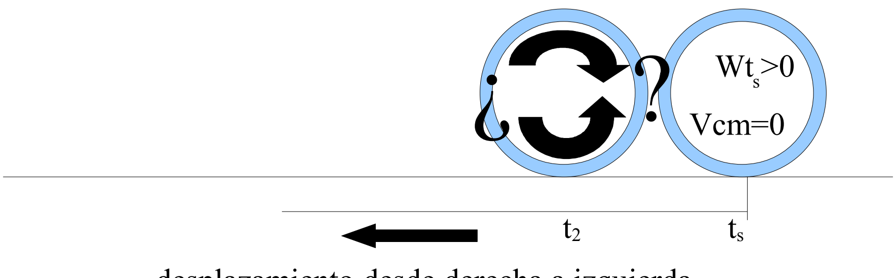
Determinar cual será el sentido de rotación del Aro en el momento en el que emprende su camino de retorno, para saber si invierte el sentido de giro respecto al inicial.

Primera etapa: Ida



Gráfica representativa del movimiento que realiza el Aro desde el momento inicial t_o (con velocidad de centro de masa conocida y velocidad angular inicial conocida) hasta la posición en la que detiene el avance*, y pasa Además por un punto intermedio en el instante t_1 que es un valor temporal inmediato anterior al instante t_s , el valor temporal t_s representa el tiempo en donde la velocidad del centro de masa es nula ***pero no podemos decir nada aún acerca de la rotación.***

Segunda etapa: Retorno



desplazamiento desde derecha a izquierda

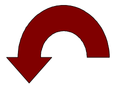
** La suposición de que el Aro se detiene en un instante es válida y fácilmente demostrable,el extremo de la función "Vcm---vs---X(t)"tiene que pasar por "cero" cuando la posición alcanza el máximo; pero en esta ocación no se demostrara, simplemente se da por aceptada.*

Desde el punto de vista energético, un objeto sólido circular (Aro) que se mueve de izquierda a derecha con $W_o \neq 0$ y $Vcm_o \neq 0$ posee una Krot. + Ktra.

$\boxed{E = Krot + Ktra = \frac{1}{2}\, I.W^2 + \frac{1}{2}\, m.Vcm^2}$ *Si el sólido no avanza pero gira, posee energía*

Estudio de la primera etapa: Ida

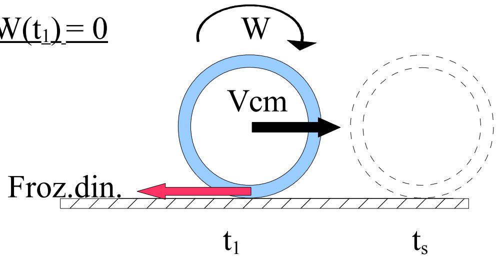
Vamos a intentar conocer el sentido de rotación en t_1 , suponiendo todas las alternativas ya que así podremos saber en que condiciones de movimiento rotacional llegará el Aro a la posición $X(t_s)$.

Sabemos por enunciado que al Aro inicialmente se le dió sentido antihorario de giro, 

y para ser coherentes con la regla de la mano derecha, su signo es positivo, entonces "W>0"

En el instante t_1 podríamos tener tres posibilidades para W cuando vale 0, >0, <0

Si $W(t_1) = 0$



$\boxed{\tau = r \times Fr = -r\,.\,Fr = I\,.\,\alpha}$

donde $\alpha < 0$ luego $w = \alpha.t$ y por tanto $w < 0$

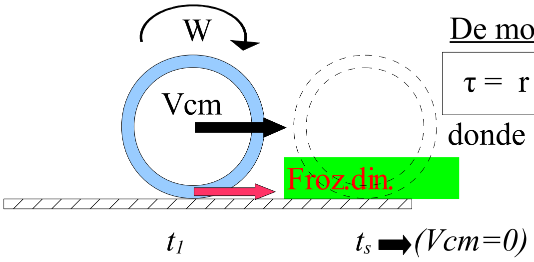
De aquí surge que girará en sentido horario

$-Froz = m.a_{cm} = -\mu.\cancel{m}.g = \cancel{m}a_{cm}$

La ecuación nos dice que $a_{cm} < 0$ y el gráfico dice que el Aro se mueve hacia la derecha, es decir, esta avanzando cada vez a menor velocidad. Ahora pensemos lo siguiente, si esta llendo hacia la derecha y además gira en sentido horario, en algún momento se dará la condición $w = v_{cm}/r$, con lo cual la Froz. es estática y en rodadura no hace trabajo pues el desplazamiento en el punto de contacto es instantaneo y vale 0. Por esto, la Energía mecánica se conservará una vez entrada en rodadura ; y como la velocidad de traslación en el momento que se da la rodadura se mantendrá también, será imposible que se detenga en algún tiempo posterior (ese tiempo lo habiamos llamado t_s) y mucho menos podría retornar.

Por ello, la opción "~~Si $W(t_1) = 0$~~" es inconsistente y absurda

Si $W(t_1) < 0$



De modo similar se tiene:

$\boxed{\tau = r \times Fr = r\,.\,Fr = I\,.\,\alpha}$ 2

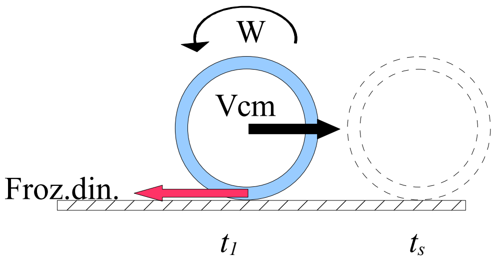
donde $\alpha > 0$ luego $w = W_o + \alpha\,.\,t$ y por tanto $w > 0$

3

Como decimos que $W(t_1) < 0$,entonces en 3 el término $\alpha\,.\,t > Wo$, además α es >0 y produce una tendencia a girar con W>0, por su parte la Froz.din continúa llevando el Aro hacia la derecha, ***todo esto se opone a la condición que se detiene en t_s***

Por ello, la opción "~~Si $W(t_1) < 0$~~" no es válida

Si $W(t_1) > 0$



Del mismo modo:

$$\boxed{\tau = r \times Fr = -r \, . \, Fr = I \, . \, \alpha} \qquad (2)$$

donde $\alpha < 0$, luego $w = W_o + \alpha \, . \, t$ y por tanto el término "$\alpha.t$" debe ser $< W_o$, y "w" es aún > 0, también $a_{cm} < 0$ y la velocidad del centro de masa es > 0 es coherente pues indica que tanto vel. angular como de traslación tienden a hacer cero sus valores .

Es oportuno considerar ahora t_s:

$$-Froz = \cancel{m}.a_{cm} = -\mu.\cancel{m}.g = ma_{cm} \text{ donde } \boxed{a_{cm} = -\mu \, . \, g}$$

Además $\boxed{Vcm(t) = Vcm_o + a_{cm} \, . \, t}$

$\downarrow$ 0 despejando t se tiene $\boxed{t_s = Vcm_o / \mu d.g}$ *depende de condiciones iniciales*

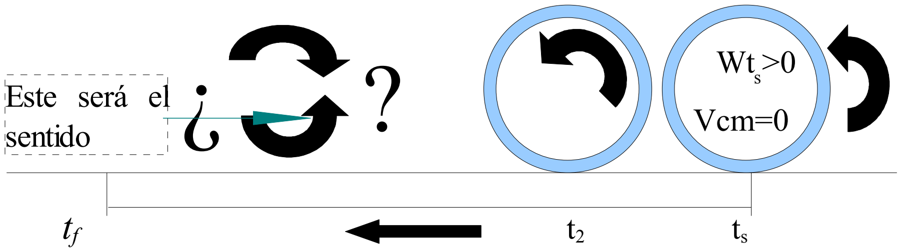
Vale pues en t_1 la condición que $\underline{W(t_1) > 0}$ recordamos que tanto α como a_{cm} son negativos e indican tendencia al giro horario y al retroceso respectivamente.

Ahora llegado el Aro a un punto en el instante t_s, se tiene Vcm=0 ; y lo que sabemos es que en un instante inmediato anterior se tiene ($\underline{W(t_1) > 0}$) , entonces al llegar a t_s podría presentar $\underline{W(t_1) \geq 0}$: *Si vale 0, entonces el Aro se habrá quedado sin energía pues sus velocidades de rotación y traslación valen cero, y no se cumple la condición del enunciado que el Aro retorna.*

Con todo esto se observa que en t_s $\underline{W(t_1) > 0}$, o sea tiene Vcm=0 y sentido de giro antihorario, es decir, igual sentido al inicial.

El planteo ahora es sencillo, pues se puede imaginar un nuevo problema en el que un Aro con W>0 se suelta sobre un superficie rugosa y nos piden hacia donde se moverá ¿izquierda o derecha?

Como las condiciones son:



desplazamiento desde derecha a izquierda

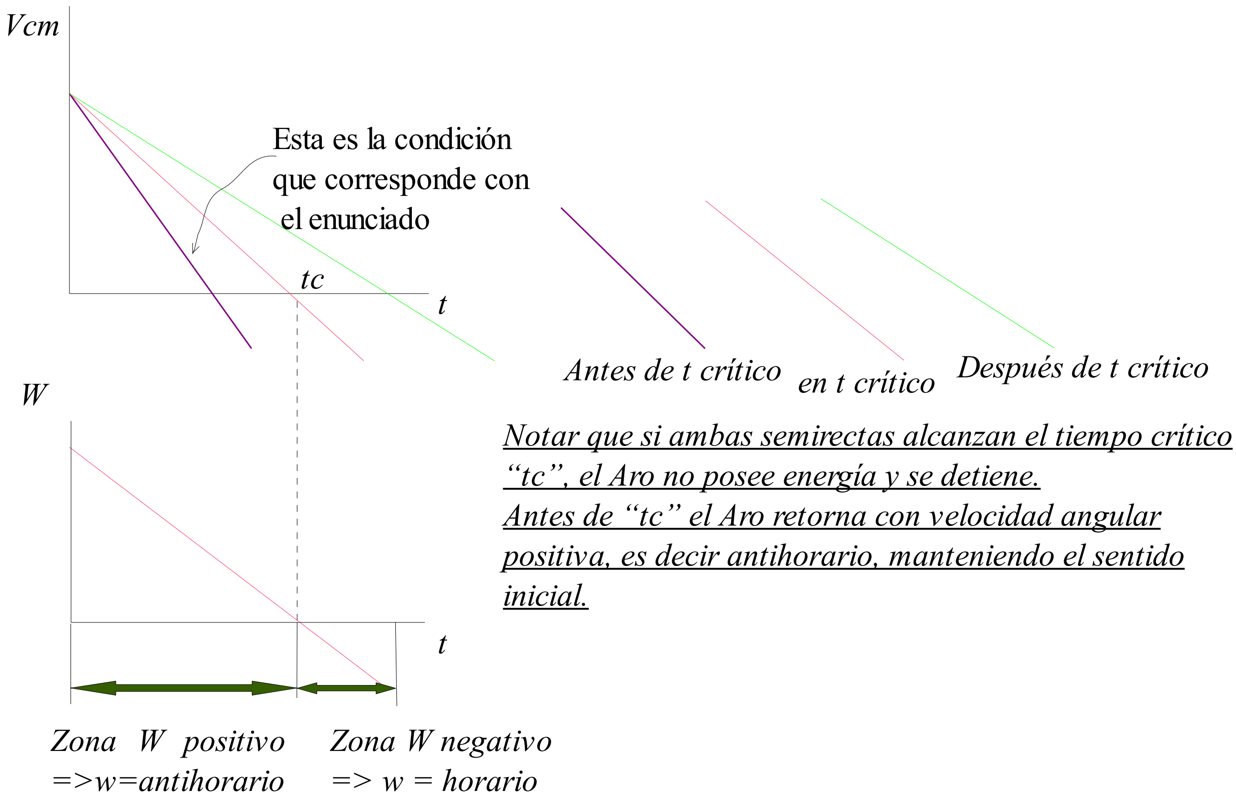
si el Aro retorna a manos de quien lo lanzó, entonces desde t_2 hasta t_f podrá darse la condición de rodadura y con ello garantizar el retorno a las manos.

Graficamente es equivalente a definir el enunciado en la siguiente forma:

Con los datos recogidos en el desarrollo, se elaboró un gráfico comparativo.

El siguiente es un gráfico que representa por un lado la velocidad del centro de masa respecto al tiempo, y por otra parte la velocidad angular del Aro. En ambos se muestra el valor de *tiempo crítico,* en el cual cambian los sentidos de movimientos. Para el caso en que los movimientos alcanzan este valor temporal simultaneamente, el Aro se detiene por no poseer energía cinética.

Como nos interesa saber que pasa con la rotación cuando el Aro retorna, nos fijamos en la situación en la que el cambio de sentido de traslación (ocurre antes de tc) y se observa que la rotación se ajusta al sector de signo positivo, lo que indica según nuestra convención prefijada de signos una rotación antihoraria, que es igual al sentido rotacional inicial.



Conclusiones

Habiendose realizado un análisis pormenorizado del caso del Aro que se aleja y luego vuelve, se ha buscado una respuesta inequívoca al planteo generado en el ámbito de una clase de la materia *Mecánica clásica* , donde se indagaba respecto a que sentido de giro tendría un Aro que es arrojado con velocidad de traslación no nula y una velocidad rotativa dada.

El resultado fue concluyente, luego de proponer alternativas y llegar en ciertos casos a inconsistencias matemáticas o al absurdo del planteo inicial, se verifica una respuesta única para el sistema dado en las condiciones de laboratorio y es que el Aro al volver al punto de partida ***rueda en el mismo sentido de rotación*** respecto al sentido de giro inicial.

– *Exposito Miguel Angel.- "Por el ojo de la cerradura" 2009 ; "Que Cauchy nos perdone" Exposito et al.-*