

3. FLEXIÓN EN VIGAS RECTAS

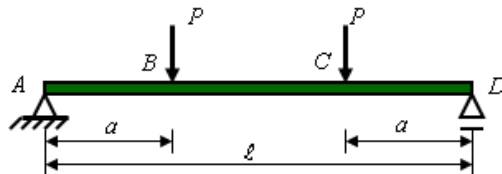
3.1.- Conceptos Básicos

- ✓ Una viga se encuentra sometida a Flexión Pura cuando el momento Flector es la única fuerza al interior de la sección.

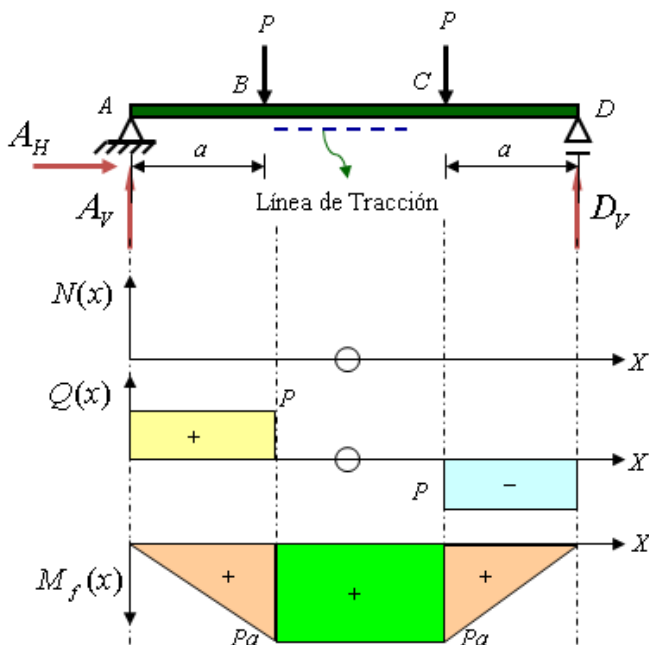


Ejemplo:

- ✓ Una viga simplemente apoyada de luz "L" y solicitada por dos cargas "P", ubicadas a una distancia "a" de cada uno de los apoyos.



- Calculemos las reacciones en los apoyos y a continuación los diagramas de esfuerzos internos (N, Q y M_f).



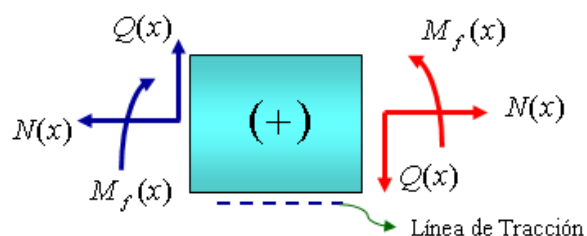
Equilibrio:

$$i) \sum F_x = 0 \Rightarrow A_H = 0$$

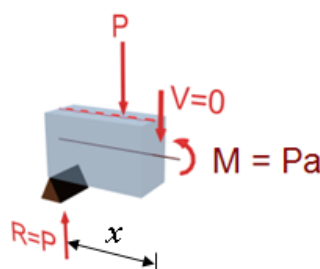
$$ii) \sum M_a = 0 \Rightarrow D_V \ell = Pa + P(\ell - a) \\ \Rightarrow D_V = P$$

$$iii) \sum F_y = 0 \Rightarrow A_V + D_V = 2P \Rightarrow A_V = P$$

Esfuerzos Internos:



- Analicemos los esfuerzos en el Tramo BC:



Equilibrio:

$$i) \sum F_y = 0 \Rightarrow Q_y(x) = P - P \Rightarrow Q_y(x) = 0 \quad a \leq x \leq \ell - a$$

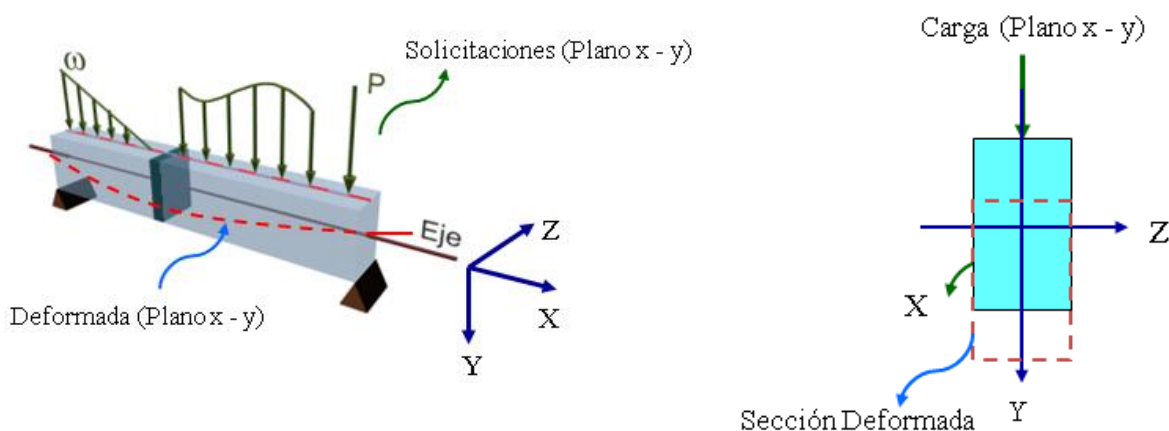
$$ii) \sum M_o = 0 \Rightarrow M_f = Px - P(x - a) \Rightarrow M_f(x) = Pa \quad a \leq x \leq \ell - a$$

- El Tramo BC se encuentra en **Flexión Pura**.
- Una viga se encuentra en **Flexión Compuesta**, cuando el **Momento Flector** está acompañado por un esfuerzo **Normal**, para producir una fuerza al interior de la sección.



3.2.- Flexión Simple

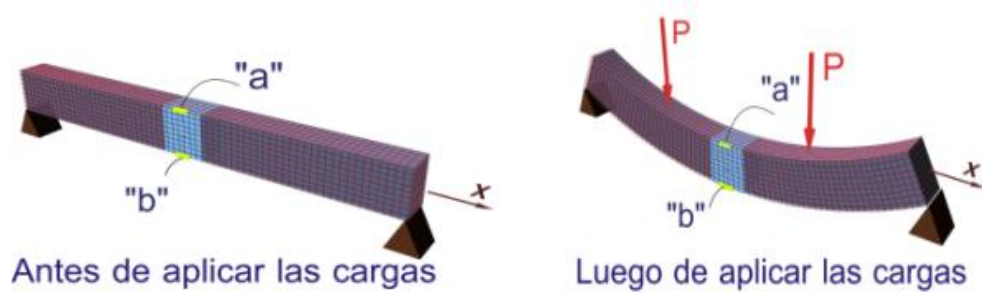
- ✓ Se dice que la Flexión es Simple cuando la deformada del eje de la barra es una curva contenida en el plano de las solicitaciones.
- ✓ Si el plano de las solicitaciones pasa por uno de los ejes principales de inercia de la sección transversal, entonces la Flexión se denomina **Simple** ó **Plana**.



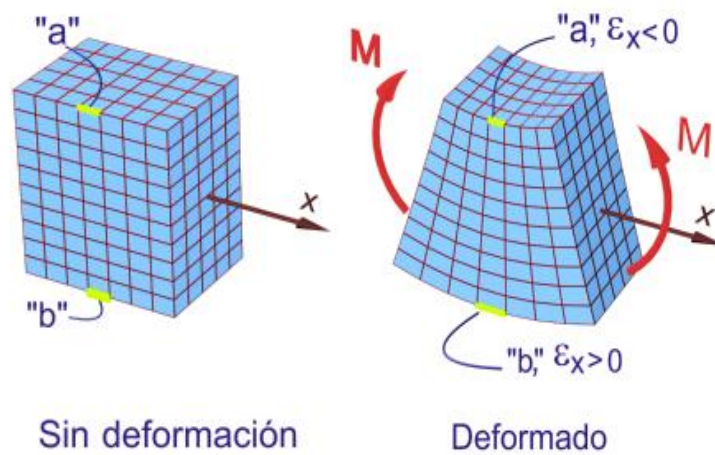
3.2.1.- Hipótesis Fundamentales de la Teoría de la Flexión

- Durante la Flexión de las barras **las secciones permanecen planas** (Bernoulli).
- En la **Flexión Pura** se identifica un **Eje Neutro**, es decir, una fibra longitudinal que permanece sin deformarse.
- Las **Tensiones de Corte** en dirección “x” e “y” son despreciables.
- No hay Tensiones Normales** en la dirección “y”.

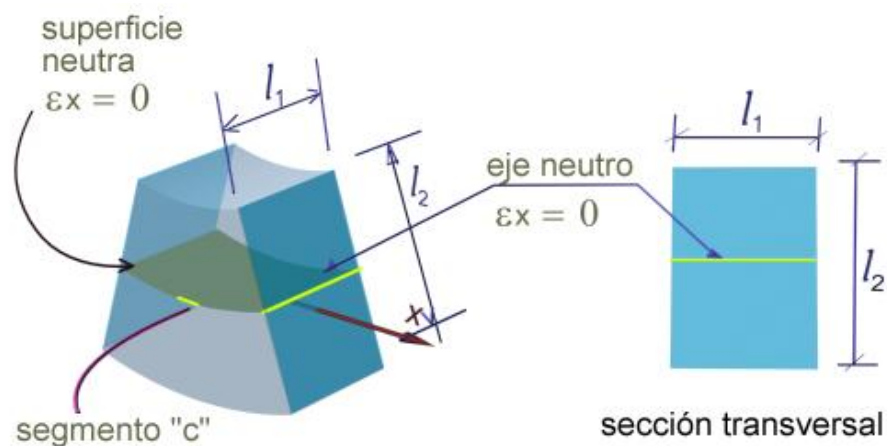
- ✓ En la superficie de la viga del ejemplo anterior se ha trazado una cuadrícula sobre su superficie para apreciar las deformaciones que producen las solicitaciones.
- ✓ Se resaltan dos secciones (“a” y “b”), para destacar las deformaciones que se producen por las cargas aplicadas.



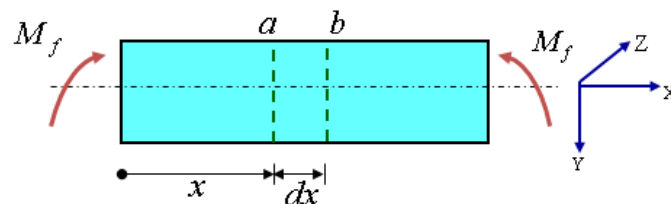
- ✓ Analicemos una pequeña porción del tramo central de viga sometida a Flexión Pura

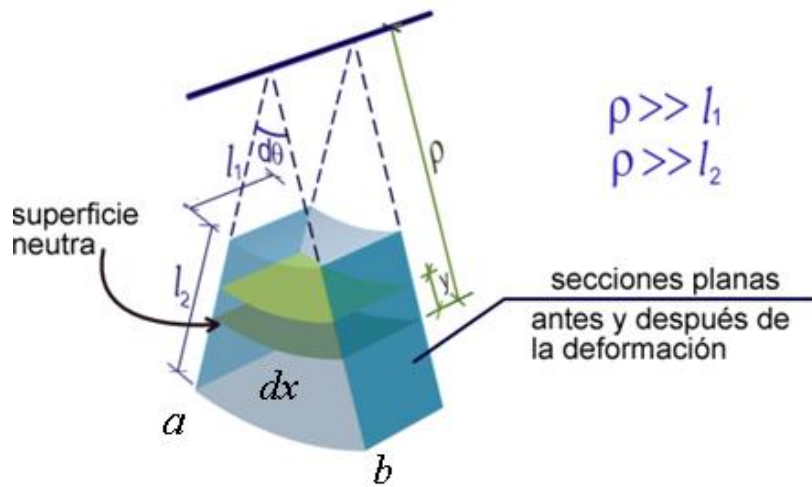


- ✓ Existe una sección "c" dentro de la viga que no se acorta ni se alarga, es decir, $\epsilon_x = 0$, tal como lo muestra la figura adjunta.



3.2.2.- Ecuaciones Básicas



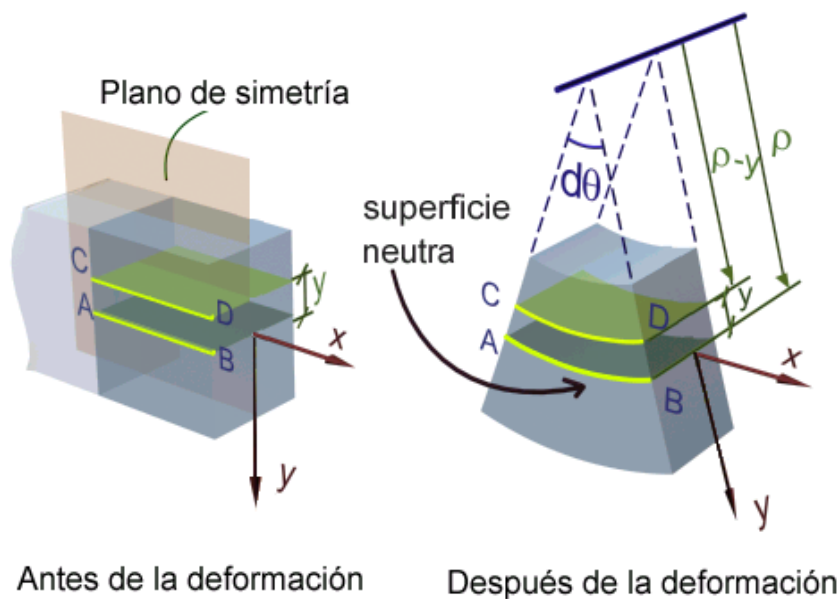


- La ecuación (1) representa el Giro Relativo entre dos secciones

$$dx = \rho d\theta \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (1)$$

- Determinaremos la deformación unitaria de una fibra a una distancia “y” con respecto al Eje Neutro.

$$\left. \begin{array}{l} \ell_{ab_i} = dx \\ \ell_{ab_f} = (\rho + y)d\theta \end{array} \right\} \Rightarrow \epsilon_x = \frac{\ell_{ab_f} - \ell_{ab_i}}{\ell_{ab_i}}$$



$$\Rightarrow \epsilon_x = \frac{(\rho + y)d\theta - dx}{dx} \quad \text{con} \quad dx = \rho d\theta$$

$$\Rightarrow \epsilon_x = \frac{y}{\rho} \quad (2) \leftarrow \text{Ecuación de Compatibilidad}$$

- Considerando un material en rango lineal elástico (Ley de Hooke)

$$\sigma_x = E\epsilon_x \Rightarrow \sigma_x = \frac{Ey}{\rho} \quad (3) \leftarrow \text{Ecuación de Tensiones}$$

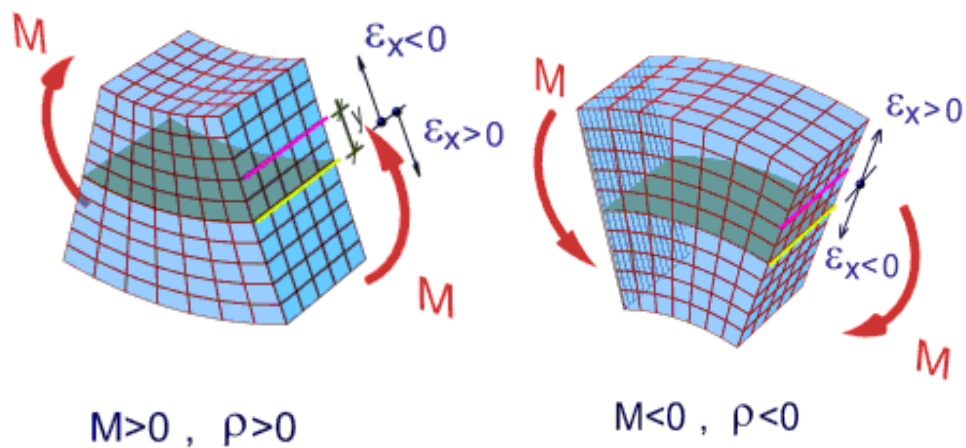
- Como el Módulo de Elasticidad del material es constante y su radio de curvatura, también lo es, se puede señalar que:

$$\varepsilon_x = \kappa y \Rightarrow \sigma_x = k^* y = \text{cte.} \cdot y$$

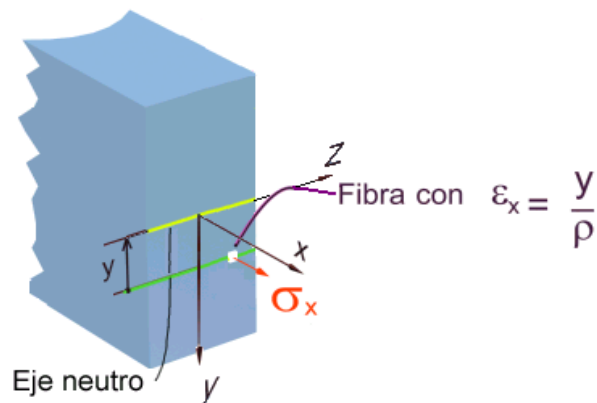
Donde:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} : \text{Curvatura del Eje Neutro (E.N.)}$$

- Por lo tanto, se puede señalar que las deformaciones unitarias normales y las tensiones normales varían linealmente con la distancia “y”, siendo máximas en las fibras extremas.
- Veamos como varía el radio de curvatura con las diferentes tipos de momentos Flectores.



3.2.3.- Ecuaciones de Equilibrio



$$i) \sum F_x = 0 \Rightarrow F_x = \int_{F_x} dF_x = \int_A \sigma_x dA = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0$$

- Sea S_z , el momento estático de la sección con respecto al eje “z”:

$$\Rightarrow S_z = \int_A y dA = 0 \quad (*)$$

- La ecuación (*) indica que la Línea Neutra en la Flexión pasará por el Centro de Gravedad de la Sección.

$$ii) \sum M_z = 0 \Rightarrow M_z = \int_{F_x} y dF_x = \int_A y \sigma_x dA \Rightarrow M_z(x) = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA$$

- Sea I_z , el momento de inercia de la sección con respecto al eje “z”:

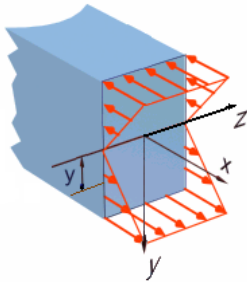
$$\Rightarrow I_z = \int_A y^2 dA$$

$$\Rightarrow M_z(x) = \frac{E}{\rho} I_z \quad (4)$$

$$\Rightarrow \frac{M_z(x)}{EI_z} = \frac{1}{\rho} = \kappa \quad (5)$$

- De la ecuación (4) y (3) se puede obtener:

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{M_z(x)}{I_z} y \quad (6) \leftarrow \text{Ecuación Fundamental I de la Flexión (Navier)}$$



$$\sigma_x = \frac{E y}{\rho}$$

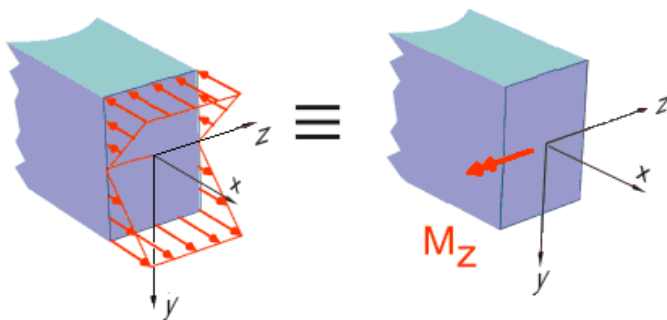
En la figura se aprecia que las tensiones varían linealmente con la distancia “y”, teniendo tracciones para las distancia “y” positivas y compresiones para las distancias “y” negativas.

$$iii) \sum M_y = 0 \Rightarrow M_y = \int_{F_x} z dF_x = \int_A z \sigma_x dA \Rightarrow M_y = \frac{E}{\rho} \int_A y z dA = 0$$

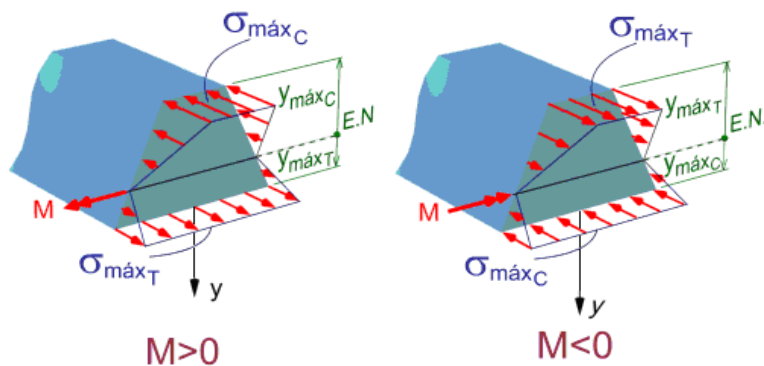
- Sea I_{yz} , el Producto de Inercia de la sección:

$$\Rightarrow I_{yz} = \int_A y z dA$$

- Debido a que $I_{yz} = 0$, los ejes “z” e “y” deberán ser **Ejes Principales de Inercia** de la sección y el **Momento Flector** deberá encontrarse en el plano que pasa por uno de éstos ejes.



$$\Rightarrow \begin{cases} M_y = M_x (\text{Torsor}) = 0 \\ N = Q_y = Q_z = 0 \end{cases}$$



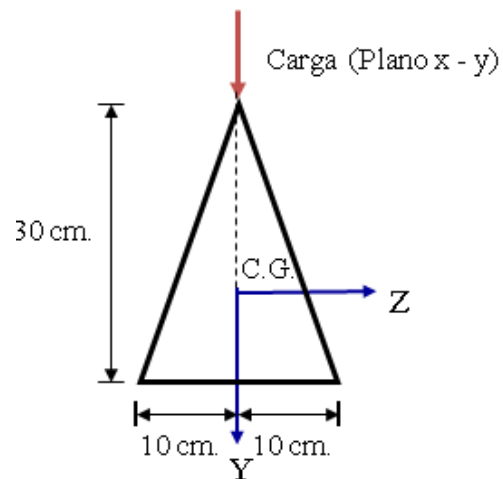
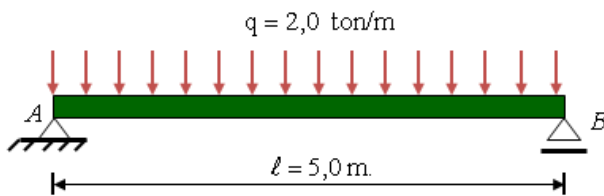
- Se define W_z , como el **Momento Resistente de la sección** con respecto al eje “z”

$$\Rightarrow W_z = \frac{I_z}{y^{\text{máximo}}}$$

$$\therefore \sigma_x^{\text{máx}} = \frac{M_z}{I_z} y^{\text{máx}} = \frac{M_z}{W_z} \quad (7)$$

Ejemplo:

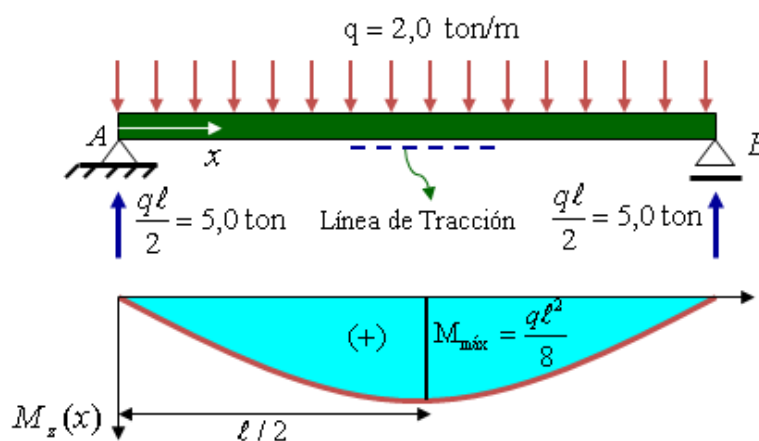
- ✓ Una viga simplemente apoyada de luz 5,0 m. se encuentra solicitada por una carga uniformemente repartida de 2,0 ton/m. Si la sección de la viga es triangular de base 20 cm. y altura 30 cm. Se pide determinar las Máximas tensiones Normales que se desarrollan en la viga y el lugar donde ocurren. Indicación: El plano de carga coincide con el eje de Simetría de la sección.



Solución:

- El **Plano de carga** pasa por el Centroide y coincide con el **Eje de Simetría** de la Sección.
- El **Eje “y”** por ser de Simetría es un **Eje Principal de Inercia**.
- De i) y ii) se deduce que la **Flexión es Simple**.

1.- Cálculo del Momento Máximo:



Tramo AB $0 \leq x \leq \ell$

$$M_z(x) = \frac{q\ell}{2}x - \frac{qx^2}{2} = 5,0x - x^2 \quad \frac{dM_z(x)}{dx} = \frac{q\ell}{2} - qx = 5,0 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\ell}{2} \quad M_{\text{máx}} = M_z\left(x = \frac{\ell}{2}\right) = \frac{q\ell^2}{8}$$

$$\Rightarrow M_{\text{máx}} = 6,25 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$\Rightarrow M_{\text{máx}} = 6,25 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

2.- Cálculo de Inercia:

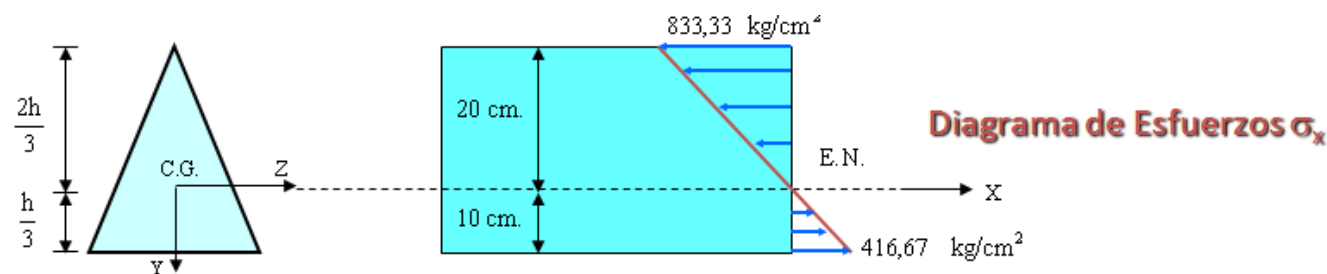
$$\Rightarrow I_z = \int_A y^2 dA = \frac{1}{36}bh^3 = 15000 \text{ cm}^4$$

3.- Cálculo de las Tensiones Normales Máximas:

- Determinaremos las tensiones normales al centro de la luz de la viga, que es la sección donde ocurre el Momento Flector Máximo.

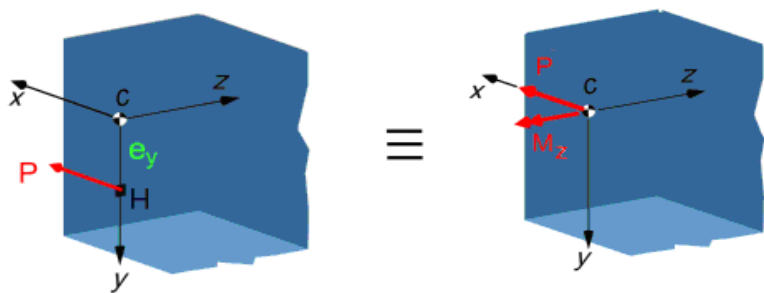
$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{M_z(x)}{I_z} y = \frac{6,25 \times 10^5}{15000} y = 41,67 y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\text{máx}}^T = \sigma_x(y=10) = 416,67 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_{\text{máx}}^C = \sigma_x(y=-20) = -833,33 \text{ kg/cm}^2 \end{cases}$$

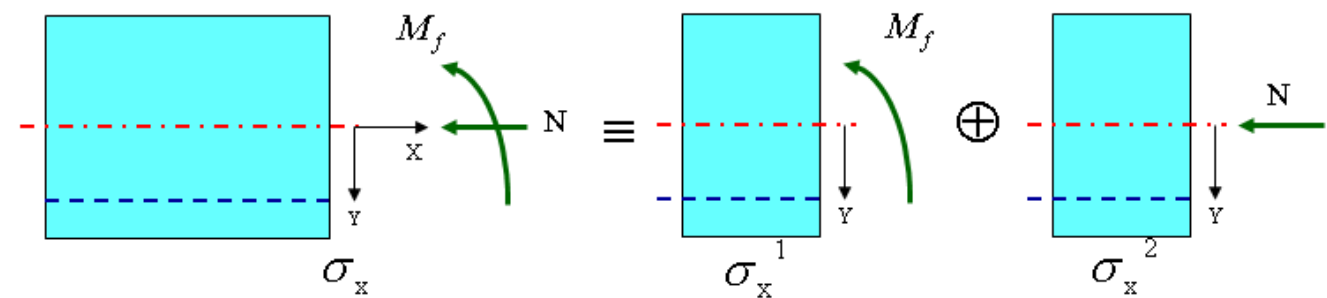


3.3.- Flexión Compuesta

- ✓ La Flexión Compuesta ocurre, como ya se señaló, cuando adicionalmente al Momento Flector existe un Esfuerzo Normal actuante en la Sección.



- ✓ Para calcular la distribución de Tensiones Normales debido a la Flexión Compuesta, utilizaremos el Principio de Superposición.



$$\Rightarrow \sigma_x(y) = \underbrace{\sigma_x^1(y)}_{\text{Flexión Pura}} + \underbrace{\sigma_x^2(y)}_{\text{Compresión Pura}}$$

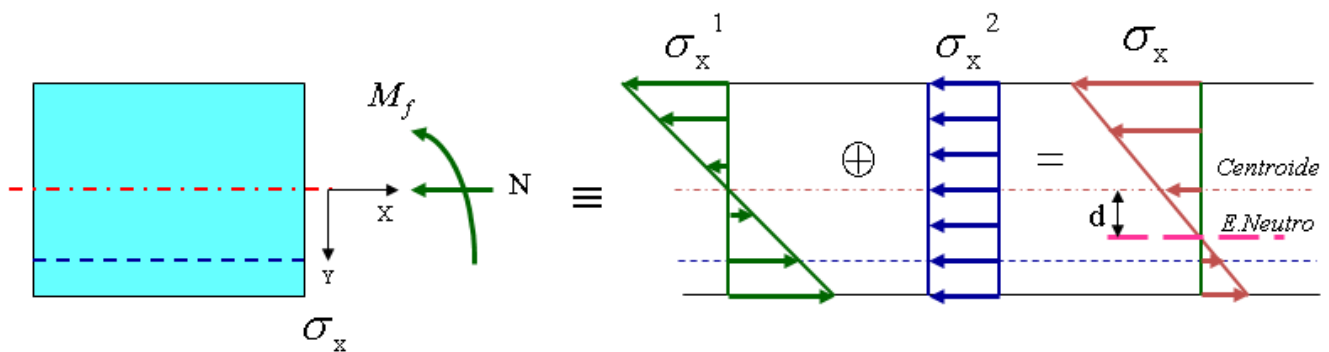
Para Flexión Pura:

$$\Rightarrow \sigma_x^1(y) = \pm \frac{M_z}{I_z} y$$

Para Carga Axial Pura:

$$\Rightarrow \sigma_x^2(y) = \pm \frac{N}{A}$$

$$\Rightarrow \sigma_x(y) = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} y \quad (8)$$



Nota:

- El **Eje Neutro no coincide** con el **Centroide** y las distancias se toman desde el Centro de Gravedad.
- La distancia “**d**” se puede obtener haciendo $\sigma_x = 0$

3.3.1.- Ecuaciones de Equilibrio

$$i) \sum F_x = 0 \Rightarrow N = \int_{F_x} dF_x = \int_A \sigma_x dA$$

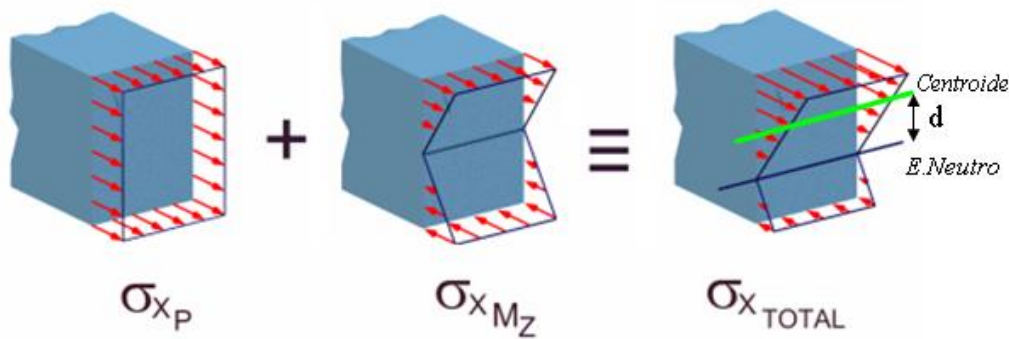
$$ii) \sum M_z = 0 \Rightarrow M_z = \int_{F_x} y dF_x = \int_A y \sigma_x dA$$

Observación:

- El **Eje Neutro no coincide** con el **Centro de Gravedad** de la sección, puesto que:

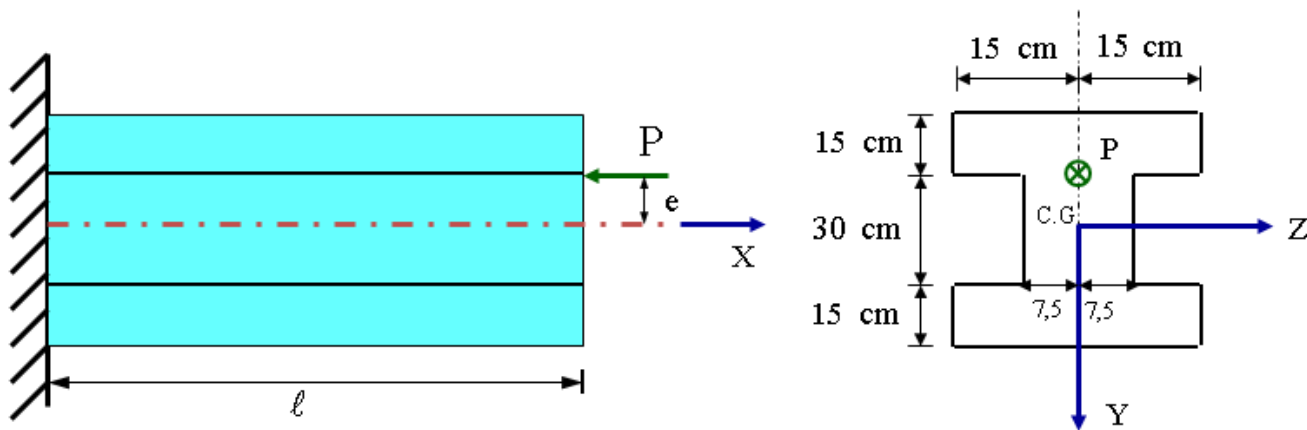
$$\Rightarrow \int_A \sigma_x dA = N \neq 0$$

- Veamos que ocurre si la fuerza “N” es de Tracción y el Momento Flector “Mz” es Negativo (como vector en la dirección positiva del eje “z”).



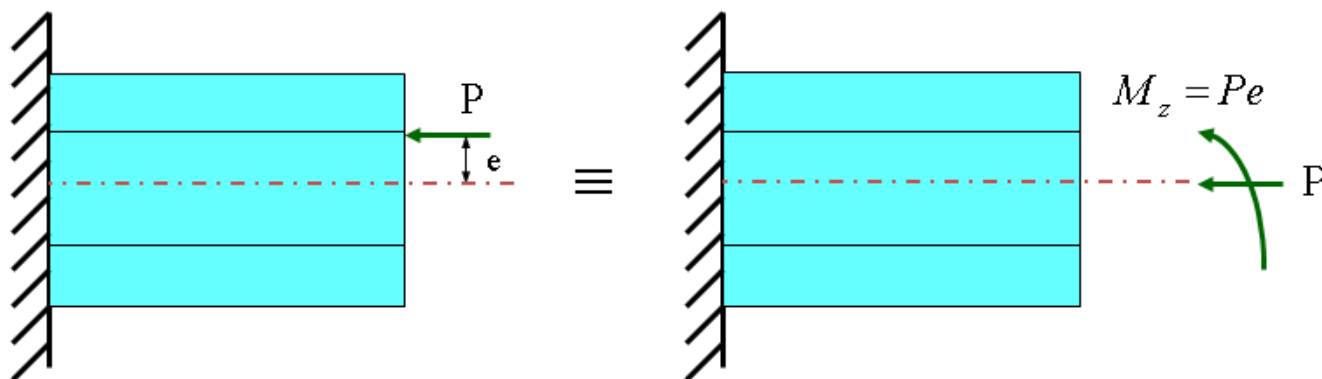
Ejemplo:

- ✓ Una viga con un extremo empotrado y el otro en voladizo de luz 5,0 m. se encuentra solicitada por una carga puntal excéntrica 50 ton. Si la sección de la viga es un perfil “I” de alas iguales de 30x60x15 cms., tal como lo muestra la figura adjunta. Se pide determinar las Máximas Tensiones Normales que se desarrollan en la viga y el lugar donde ocurren. Indicación: El plano de carga coincide con el eje de Simetría de la sección.



Solución:

- ✓ La carga “P” al estar excéntrica me genera un Momento Flector c/r al eje “z”, al desplazar la carga al centroide (Resultado de un Sistema de Fuerzas Coplanares)



- ✓ La sección es **Simétrica**, entonces el eje “y” es **Principal** y el **Plano de carga** coincide con el eje Principal, por lo que la Componente de la Flexión es **Simple**.

La Distribución de Tensiones Normales viene dada por:

$$\Rightarrow \sigma_x(y) = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} y$$

$$\Rightarrow \sigma_x(y) = -\frac{P}{A} + \frac{Pe}{I_z} y \quad (*)$$

Las Propiedades de la Sección son:

$$\Rightarrow \begin{cases} I_z = 506.250 \text{ cm}^4 \\ A = 1.350 \text{ cm}^2 \\ e = 15 \text{ cm} \end{cases}$$

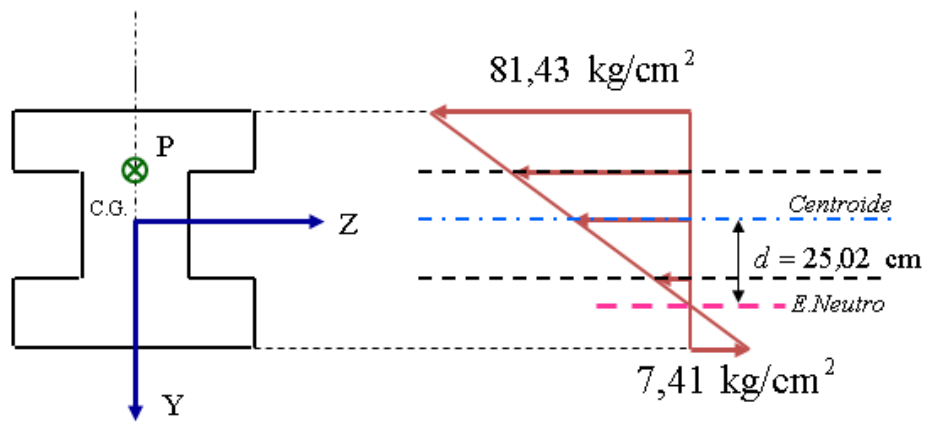
Reemplazando los datos en la ecuación (*): $\Rightarrow \sigma_x(y) = -37,03 + 1,48y$

Tensiones Normales Máximas en las Fibras Extremas:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\text{máx}}^T = \sigma_x(y = 30) = 7,41 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_{\text{máx}}^C = \sigma_x(y = -30) = -81,43 \text{ kg/cm}^2 \end{cases}$$

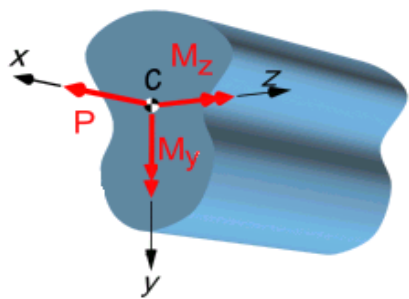
Lo que se desplaza el Eje Neutro se obtiene de: $\Rightarrow \sigma_x(y) = 0$

$$\therefore \sigma_x(y) = -37,03 + 1,48y = 0 \Rightarrow y = 25,02 \text{ cm}$$



3.4.- Flexión Desviada

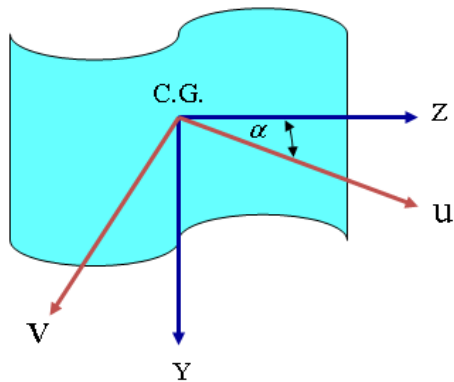
- ✓ La Flexión Desviada ocurre si la deformada de la viga no está contenida en uno de los planos principales de la sección.



- ✓ A continuación recordaremos los conceptos de Ejes Principales de Inercia de una Sección.

3.4.1.- Ejes Principales de una Sección:

Momentos de Inercia c/r a los Ejes Z-Y:

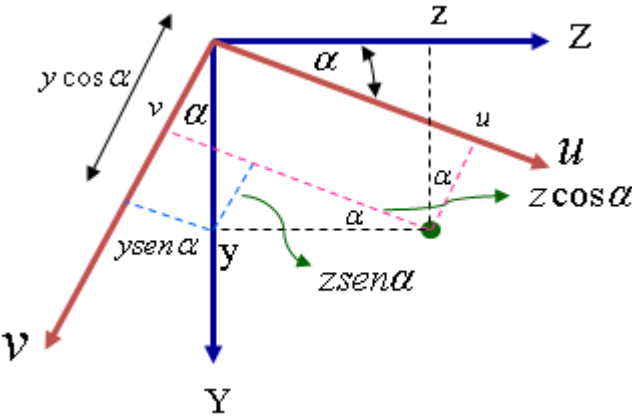


$$\Rightarrow \begin{cases} I_z = \int_A y^2 dA \\ I_y = \int_A z^2 dA \\ I_{yz} = \int_A yz dA \end{cases}$$

Momentos de Inercia c/r a los Ejes u-v:

$$\Rightarrow \begin{cases} I_u = \int_A v^2 dA \\ I_v = \int_A u^2 dA \\ I_{uv} = \int_A uv dA \end{cases}$$

Rotación de Ejes:



$$\Rightarrow \begin{cases} u = z \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha \\ v = -z \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

En forma Matricial:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}}_R \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}$$

Reemplazando en el valor de los Momentos de Inercias de los ejes rotados

$$\Rightarrow I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (-z \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha)^2 dA = \int_A (z^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 2zy \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + y^2 \cos^2 \alpha) dA$$

$$\Rightarrow I_u = I_y \operatorname{sen}^2 \alpha + I_z \cos^2 \alpha - I_{yz} \operatorname{sen} 2\alpha \quad (9)$$

$$\Rightarrow I_v = I_y \cos^2 \alpha + I_z \operatorname{sen}^2 \alpha + I_{yz} \operatorname{sen} 2\alpha \quad (10)$$

$$\Rightarrow I_{uv} = \left(\frac{I_z - I_y}{2} \right) \operatorname{sen} 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha \quad (11)$$

- ✓ Al hacer variar el ángulo α , las magnitudes de I_u , I_v e I_{uv} también varían.
- ✓ Las ecuaciones (9), (10) y (11), son las **Ecuaciones de Transformación de Momentos de Inercia** y corresponden a ecuaciones paramétricas, cuyo parámetro es el ángulo α .
- ✓ El máximo Momento de Inercia se obtiene derivando la ecuación (9) con respecto al parámetro e igualando a cero.

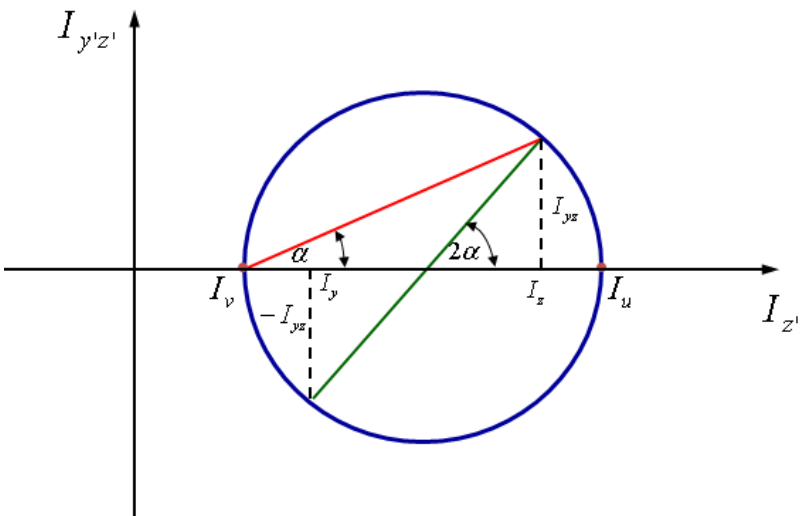
El máximo ocurre cuando:

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = -(I_y - I_z)\text{sen}(2\alpha) + 2I_{yz}\cos(2\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \text{tg}(2\alpha_p) = \frac{2I_{yz}}{(I_y - I_z)} \quad (12)$$

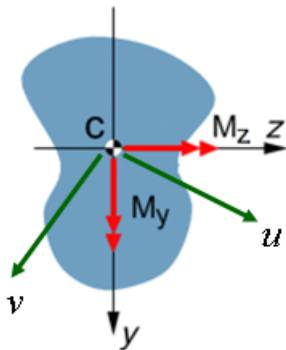
- ✓ El subíndice “p” indica que el ángulo α define la orientación de los planos principales.
- ✓ Para el ángulo α_p obtenido de la ecuación (12), las expresiones de I_u e I_v alcanzan valores extremos.
- ✓ Al igual que las tensiones y las deformaciones, las Ecuaciones de transformación de Momentos de Inercias pueden ser representadas en un **Círculo de Mohr de Inercias**.

Condición para Ejes Principales de Inercia



$$\Rightarrow \begin{cases} I_u \rightarrow \text{Máximo} \\ I_v \rightarrow \text{Mínimo} \\ I_{uv} \rightarrow \text{es nulo} \end{cases}$$

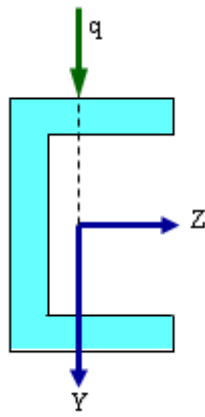
3.4.2.- Flexión Desviada



(u,v) ejes Principales de Inercia

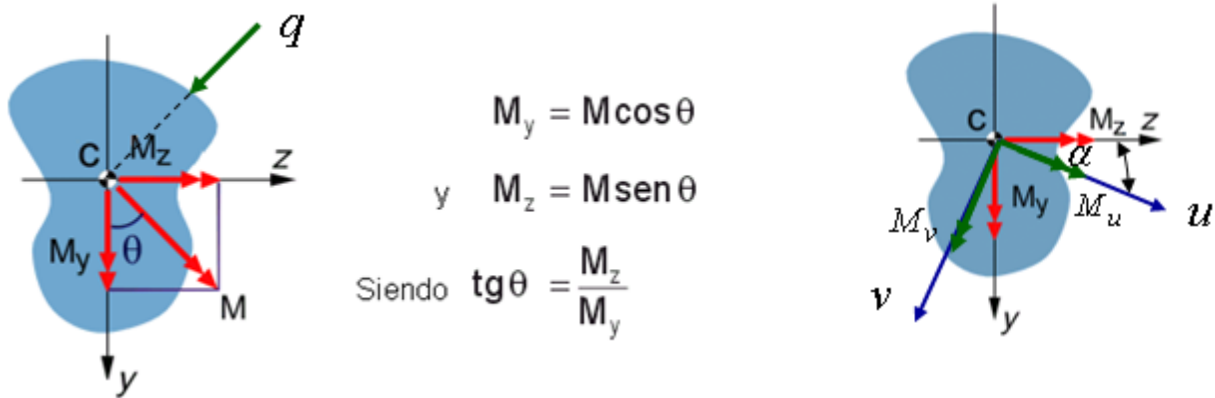
Observaciones:

1. Si un Eje es de Simetría en la sección, entonces el eje es principal, puesto que la simetría indica necesariamente que el eje es centroidal.
2. Si el plano de carga es de simetría, entonces la Flexión es Simple.
3. La condición anterior es suficiente pero no necesaria, en efecto, el plano de carga puede no ser de simetría y la flexión es simple, puesto que sin eje es principal no necesariamente es por ser de simetría.



- ✓ En este caso, el **Plano de Carga no es de Simetría**, pero pasa por un Eje Principal de Inercia, por lo que la **Flexión es Simple**.

3.4.2.1- Análisis General de la Flexión Desviada



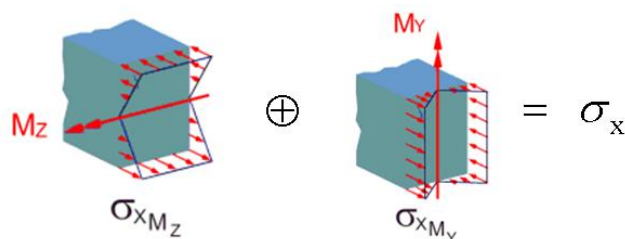
- ✓ Se determina el Momento Flector que genera la sollicitación. El **Plano** donde actúa el **Momento Flector** es **“Perpendicular”** al **Plano de las Solicitaciones**.
- ✓ Para determinar el Momento Flector que actúa en los Ejes Principales de Inercia, existen dos alternativas:
 - Proyectar el Momento Flector (M) a los Ejes “Z” e “Y” y determinar los Momentos Flectores “Mz” y “My”. A continuación, a través de la Matriz de Rotación para el estado Plano, proyectar los Momentos “Mz” y “My” a los Ejes “u” y “v” y determinar los momentos “Mu” y “Mv”.

$$\begin{bmatrix} M_u \\ M_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sena} \\ -\text{sena} & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_z \\ M_y \end{bmatrix}$$

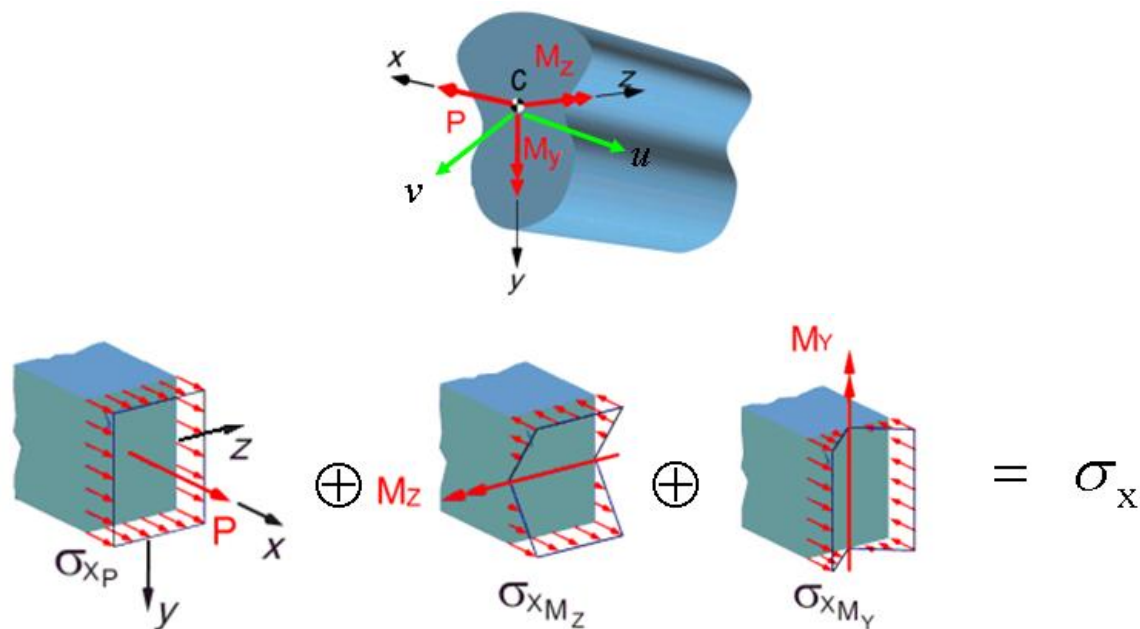
- Proyectar el Momento Flector (M) a los Ejes “u” e “v” y determinar los Momentos Flectores “Mu” y “Mv”.

- ✓ Se calculan la distribución de las Tensiones Normales como:

Flexión Biaxial $\Rightarrow \sigma_x(u, v) = \pm \frac{M_u}{I_u} v \pm \frac{M_v}{I_v} u \quad (13)$



3.4.2.2- Ecuación General de la Flexión



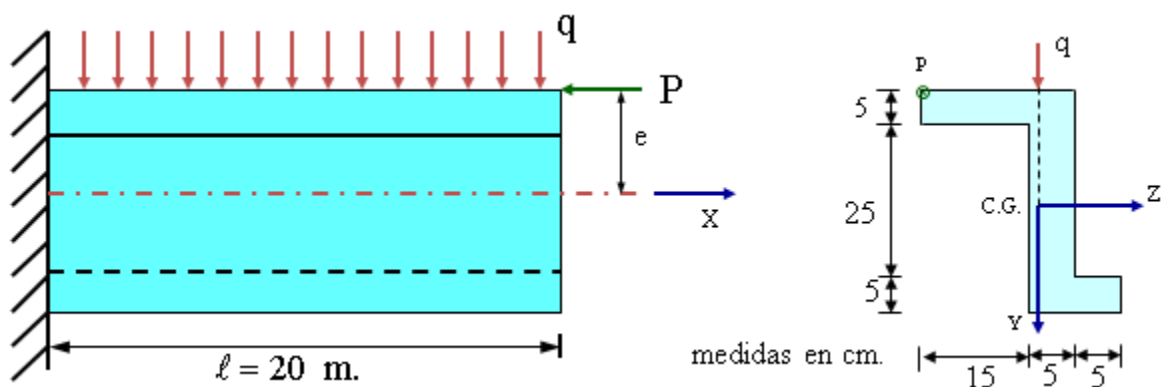
- ✓ Para determinar la distribución de las Tensiones Normales en la sección, se realiza de la misma manera que para la Flexión Biaxial, con la salvedad que se le adiciona la componente del Esfuerzo Axial (P), el que debe estar ubicado en el Centroide de la Sección.

Flexión Biaxial Compuesta

$$\Rightarrow \sigma_x(u, v) = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_u}{I_u} v \pm \frac{M_v}{I_v} u \quad (14)$$

Ejemplo:

- ✓ Una viga con un extremo empotrado y el otro en voladizo de luz 20,0 m. se encuentra solicitada por una carga puntal excéntrica de 5 ton y una carga uniformemente distribuida de 15 kg/m. Si la sección de la viga es un perfil “Z” de alas desiguales, tal como lo muestra la figura adjunta. Se pide determinar las Máximas Tensiones Normales que se desarrollan en la viga y el lugar donde ocurren. Indicación: El plano de carga distribuida coincide con el eje “y” de la sección.



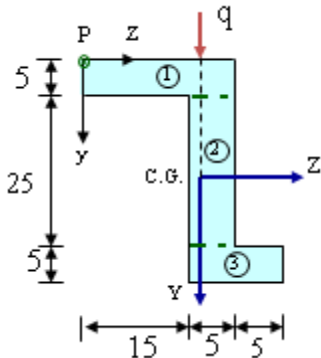
Solución:

- ✓ La carga “P” al estar excéntrica me genera Momentos Flectores c/r a los eje “z” e “y”, al desplazar la carga al Centroide.
- ✓ La carga uniformemente distribuida me genera un Momento Flector c/r al eje “z”.

- ✓ Los Ejes “z” e “y” no son Ejes Principales de Inercia, entonces se desarrolla ***Flexión Desviada***.

La Distribución de Tensiones Normales viene dada por:

$$\Rightarrow \sigma_x(u,v) = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_u}{I_u} v \pm \frac{M_v}{I_v} u$$



1.- Cálculo de Centroides:

Elemento	Ai	zi	yi	Ai*zi	Ai*yi	Ai*zi*yi
1	100	10	2,5	1000	250	2500
2	125	17,5	17,5	2187,5	2187,5	38281,25
3	50	20	32,5	1000	1625	32500
$\Sigma =$	275			4187,5	4062,5	73281,25

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = 14,773 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \bar{z} = \frac{\sum A_i \bar{z}_i}{\sum A_i} = 15,227 \text{ cm}$$

2.- Cálculo de Inercias:

Elemento	Base bi	Altura hi	Área Ai	Centroides		Inercias Centroidales		
				zi	yi	Izi	Iyi	Iziyi
1	20	5	100	10	2,5	15270,317	6065,771	-19994,835
2	5	25	125	17,5	17,5	7440,169	906,078	10162,707
3	10	5	50	20	32,5	15816,977	1555,613	21252,583
$\Sigma =$						38527,462	8527,462	11420,455

$$\Rightarrow I_{\bar{z}} = \sum_{i=1}^3 I_{\bar{z}_i} = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{b_i h_i^3}{12} + (\bar{y} - \bar{y}_i)^2 A_i \right]$$

$$\Rightarrow I_{\bar{y}} = \sum_{i=1}^3 I_{\bar{y}_i} = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{h_i b_i^3}{12} + (\bar{z} - \bar{z}_i)^2 A_i \right]$$

$$\Rightarrow I_{\bar{y}\bar{z}} = \sum_{i=1}^3 I_{\bar{y}_i \bar{z}_i} = \sum_{i=1}^3 \left[A_i (\bar{z}_i \bar{y}_i - \bar{z} \bar{y}) \right]$$

2.1- Inercias Principales:

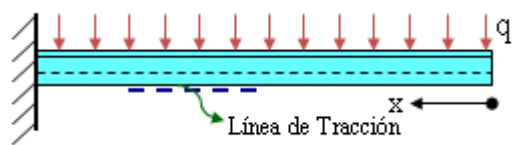
$$\Rightarrow \operatorname{tg}(2\alpha_p) = \frac{2I_{yz}}{(I_y - I_z)} = -0,761 \Rightarrow \alpha = -18,642^\circ$$

$$\Rightarrow I_u = I_y \operatorname{sen}^2(-18,642^\circ) + I_z \cos^2(-18,642^\circ) - I_{yz} \operatorname{sen}2(-18,642^\circ) \Rightarrow I_u = 42.380,23 \text{ cm}^4$$

$$\Rightarrow I_u + I_v = I_y + I_z = 47.054,90 \text{ cm}^4 \Rightarrow I_v = 4.674,69 \text{ cm}^4$$

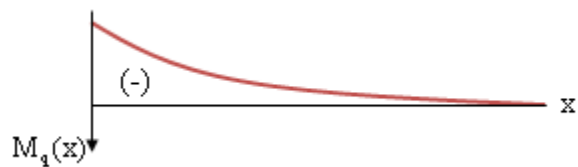
$$\Rightarrow I_{uv} = \left(\frac{I_z - I_y}{2} \right) \operatorname{sen}2(-18,624^\circ) + I_{yz} \cos 2(-18,624^\circ) \Rightarrow I_{uv} \approx 0$$

3.- Cálculo de Momento Flector Máximo debido a la carga “q”:

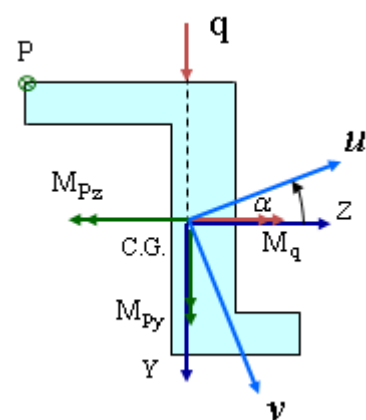


Tramo AB $0 \leq x \leq \ell = 20,0 \text{ m}$.

$$M_{qz}(x) = -\frac{qx^2}{2} = -0,0075x^2 \Rightarrow x = \ell \quad M_{\text{máx}} = M_{qz}(x = \ell) = \frac{q\ell^2}{2} \Rightarrow M_{\text{máx}} = 3,00 \text{ ton} \cdot \text{m}$$



4.- Proyección de Momentos Flectores a los Ejes Principales:



Determinemos los Momentos Flectores en los Ejes “z” e “y”

$$\Rightarrow M_z = M_q - M_{pz} = \frac{q\ell^2}{2} - P\bar{y} = 2,261 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

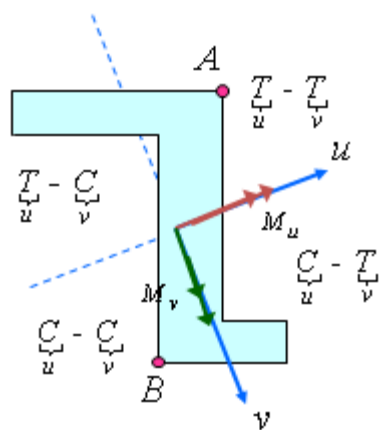
$$\Rightarrow M_y = +M_{py} = P\bar{z} = 0,761 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

A través de la Matriz de Rotación determinemos ***M_u*** y ***M_v***.

$$\begin{bmatrix} M_u \\ M_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-18,642^\circ) & \text{sen}(-18,642^\circ) \\ -\text{sen}(-18,642^\circ) & \cos(-18,642^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_z \\ M_y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} M_u = 1,899 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ M_v = 1,444 \text{ ton} \cdot \text{m} \end{cases}$$

Nota:

- Si utilizamos descomposición de vectores, utilizaremos a en Valor Absoluto. Si lo hacemos con la matriz de rotación lo haremos con signo.



$$\Rightarrow \sigma_x(u, v) = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_u}{I_u} v \pm \frac{M_v}{I_v} u$$

$$\Rightarrow \sigma_x(u, v) = \frac{N}{A} - \frac{M_u}{I_u} v - \frac{M_v}{I_v} u$$

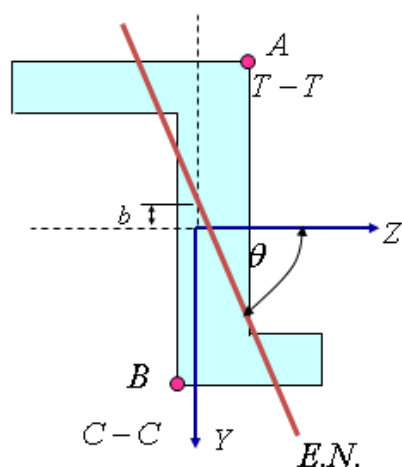
$$\Rightarrow \sigma_x(u, v) = -18,18 - 4,481v + 30,890u$$

- Para determinar las Tensiones Normales Máximas, es complicado utilizar la ecuación anterior en el sistema “u-v”, por lo que nos devolvemos al sistema “z-y” a través de:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-18,642^\circ) & \text{sen}(-18,642^\circ) \\ -\text{sen}(-18,642^\circ) & \cos(-18,642^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_x(z, y) = -18,18 + 27,837z - 14,12y$$

5.- Cálculo del Eje Neutro:



$$\Rightarrow \sigma_x(z, y) = -18,18 + 27,837z - 14,12y = 0$$

$$\Rightarrow y = 1,971(z - 0,653) \text{ Ec. Eje Neutro}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \theta = m = 1,972 \rightarrow \theta = 63,104^\circ \\ b = -1,288 \text{ cm (intersección eje ordenado)} \end{cases}$$

6.- Tensiones Normales Máximas:

- **Máxima Tracción en el Punto A**

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 4,77 \text{ cm} \\ y = -14,77 \text{ cm} \end{array} \right\} \sigma_A = 323,16 \text{ kg/cm}^2$$

- **Máxima Compresión en el Punto B**

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = -0,23 \text{ cm} \\ y = 20,23 \text{ cm} \end{array} \right\} \sigma_B = -310,23 \text{ kg/cm}^2$$