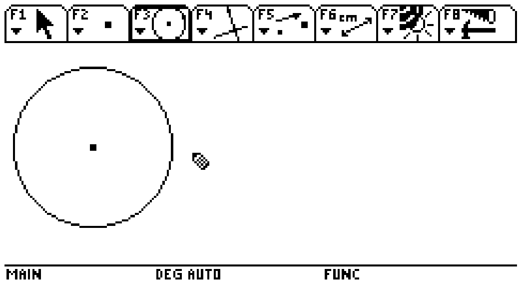
HISTORIAS SOBRE π CON LA TI – VOYAGE 200

Antiguo Egipto

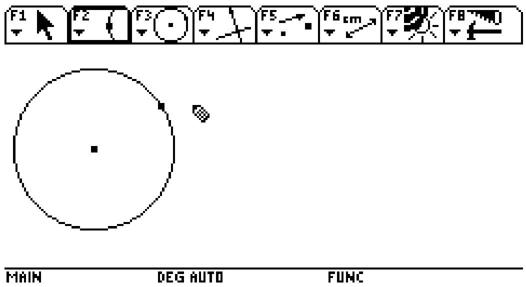
El problema número 50 del ***Papiro de Rhind***, dice: “Si se señala 1/9 del diámetro de un círculo, y se construye un cuadrado que tenga de lado el resto, el área del cuadrado es la misma que la del círculo”

[APPS] – Cabri Geometry

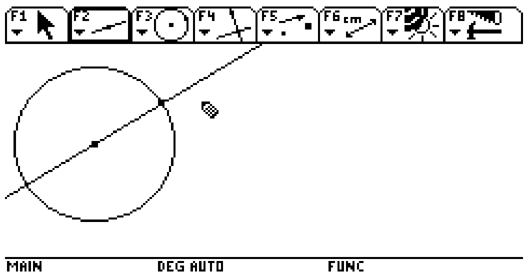
[F3]: Circle
Para dibujar una circunferencia:



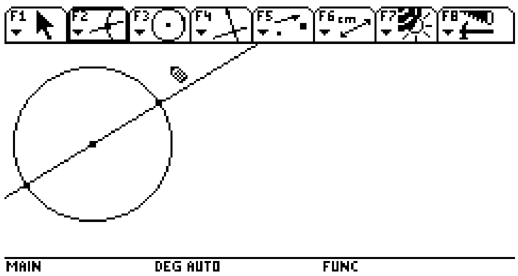
[F2]: Point on Object
Para “marcar” un punto de la circunferencia:



[F2]: Line
Para dibujar una recta que pase por el centro de la circunferencia:

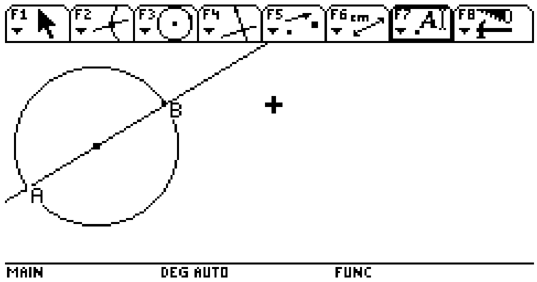


[F2]: Intersection Point
Para determinar un diámetro:



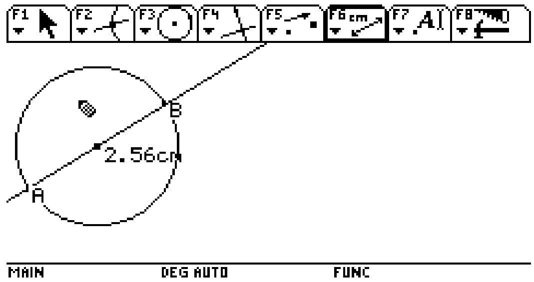
[F7]: Label

Para nombrar A y B:



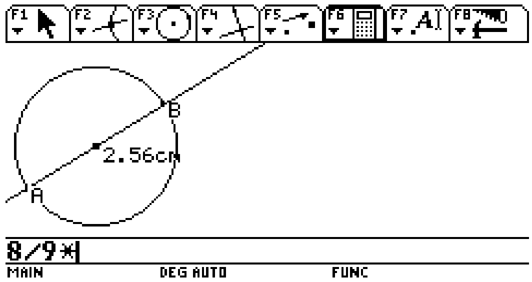
[F6]: Distance & Length

Para medir el diámetro:

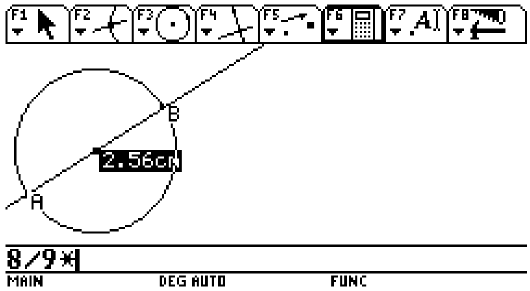


[F6]: Calculate

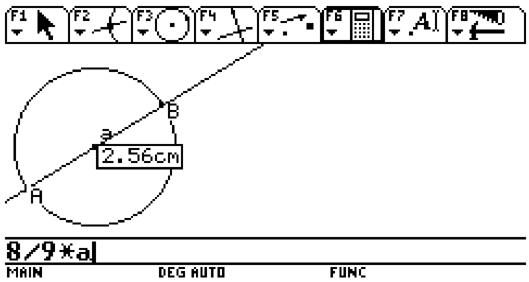
Para determinar 8/9 del diámetro. De la siguiente forma:



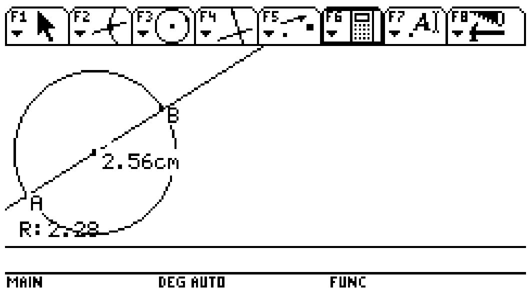
Pulsa la flecha del cursor hacia arriba para "saltar" a la pantalla:



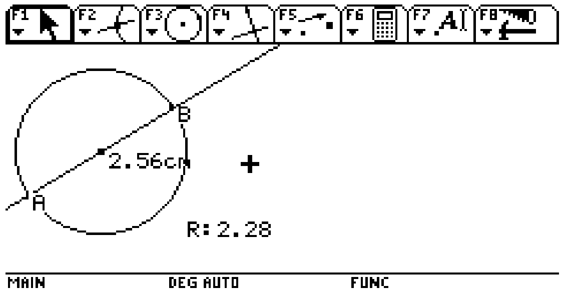
Pulsa [Enter] para "bajar" el valor seleccionado a la "calcu":



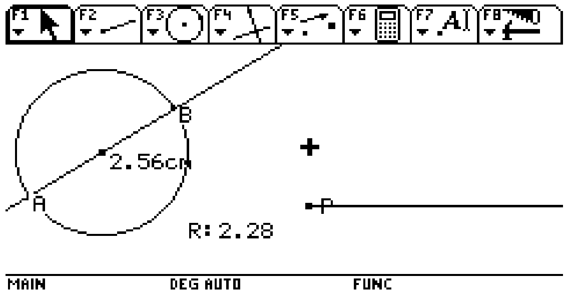
Vuelve a pulsar [Enter] para obtener el resultado:



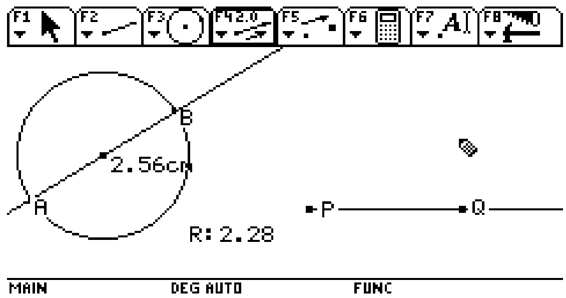
[F1]: Pointer
Para "mover" el resultado anterior:



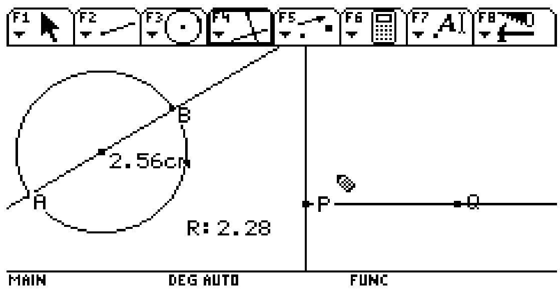
[F2]: Ray
Para dibujar el vértice P del cuadrado:



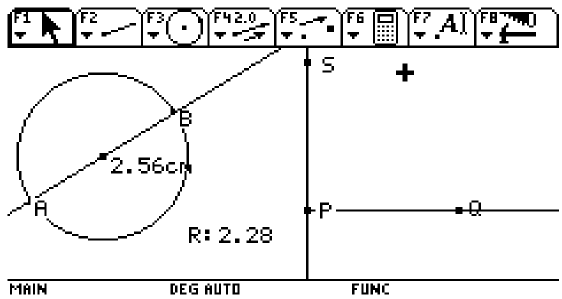
[F4]: Measurement Transfer
Para "transferir" el valor "8/9 d" a la semirrecta anterior y determinar el vértice Q del cuadrado:



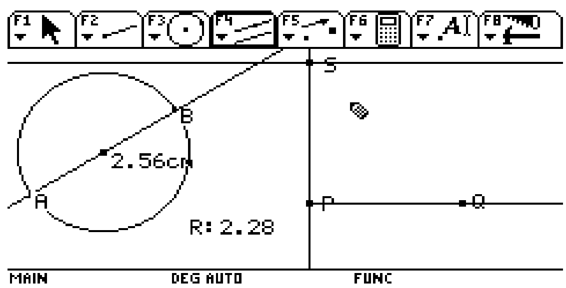
[F4]: Perpendicular Line
Para dibujar otro lado del cuadrado:



[F4]: Measurement Transfer
Vuelve a "transferir" el valor "8/9 d" para determinar el vértice S:

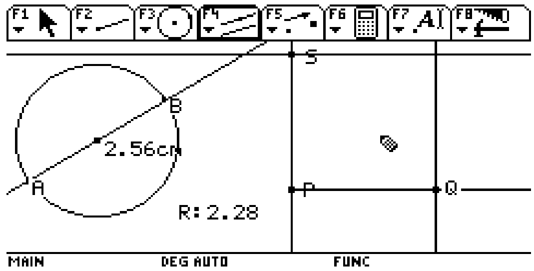


[F4]: Parallel Line
Para dibujar una paralela a PQ que pase por S:



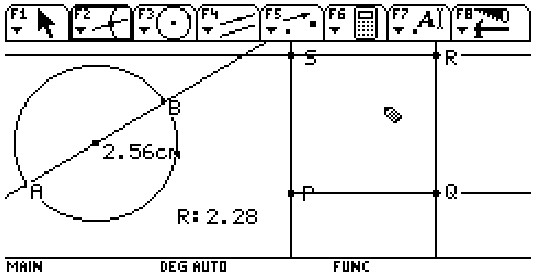
[F4]: Parallel Line

Para dibujar una paralela a PS que pase por Q:



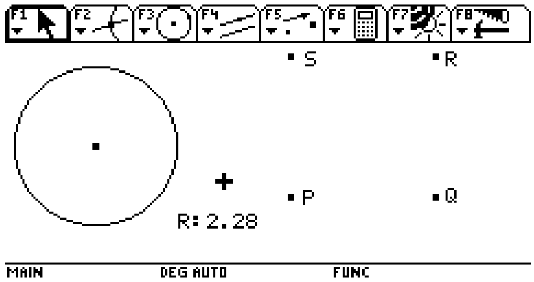
[F2]: Intersection Point

Para determinar el vértice R del cuadrado:



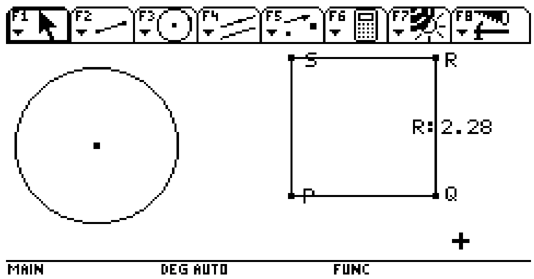
[F7]: Hide / Show

Para esconder todo lo que molesta:



[F2]: Segment

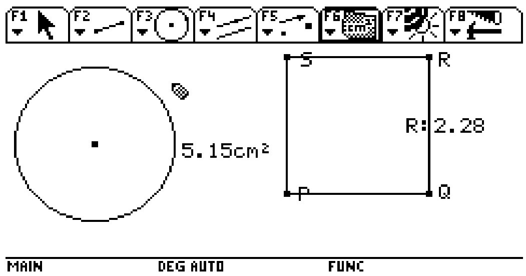
Dibuja el cuadrado y sitúa el valor en un lado del cuadrado:



Según los antiguos egipcios el área del círculo coincide con la del cuadrado. Veamos que nos dice la TI-Voyage 200:

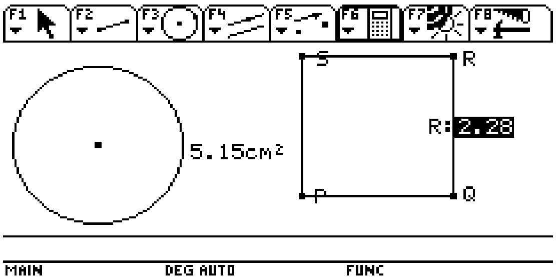
[F6]: Area

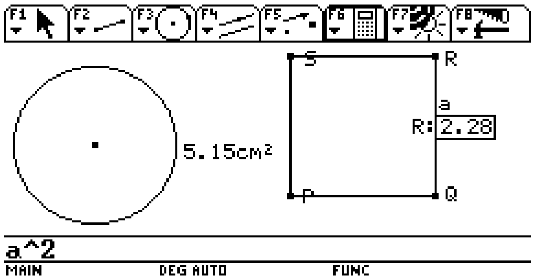
Selecciona la circunferencia:

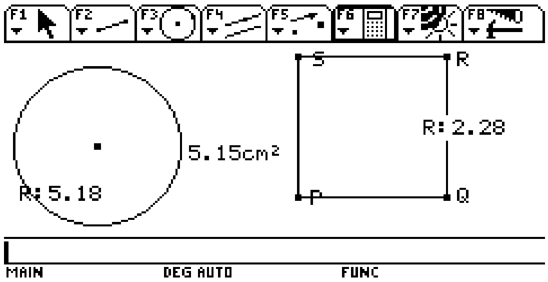


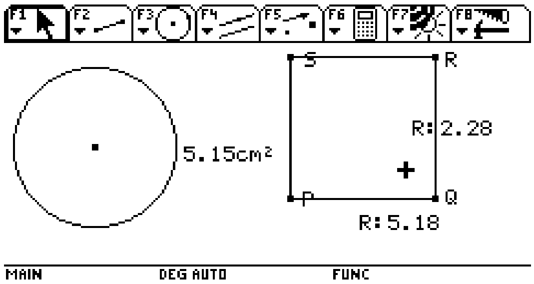
[F6]: Calculate

Para calcular el área del cuadrado:





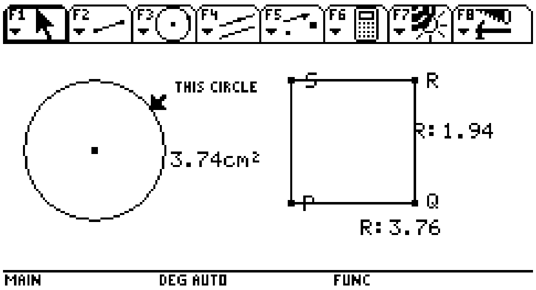


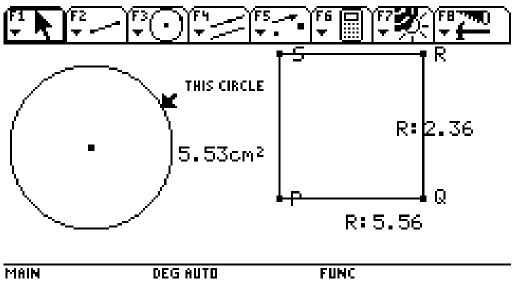


¡No está nada mal la aproximación!

[F1]: Pointer

"Mueve" la circunferencia:



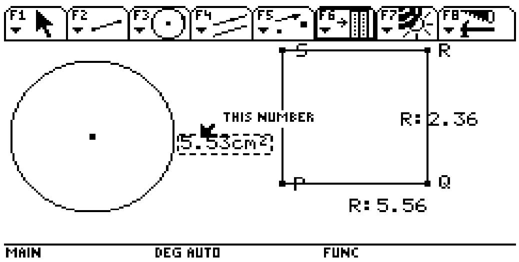


Vamos a comparar mejor las dos áreas:

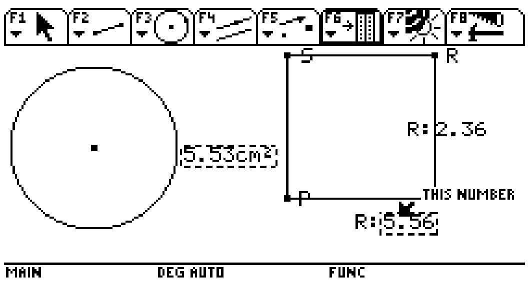
[F6]: Collect Data

Define Entry

Selecciona el área del círculo:

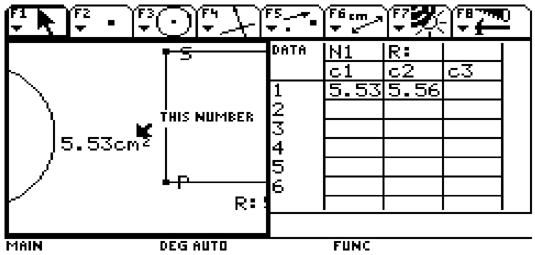


Y el área del cuadrado:

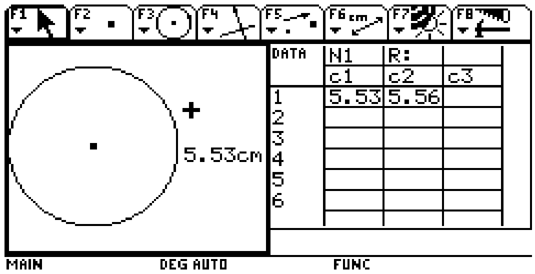


[F6]: Collect Data
Store Data

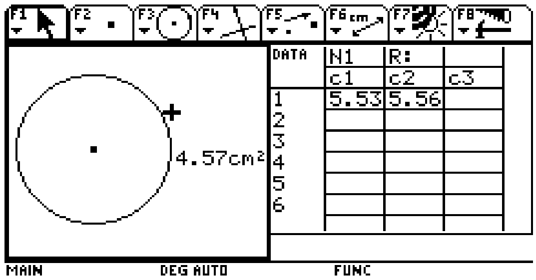
[F8]: Data View



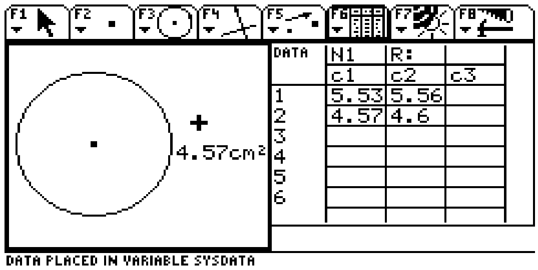
[2nd] – [flechas del cursor]
Para mover el contenido de la pantalla:



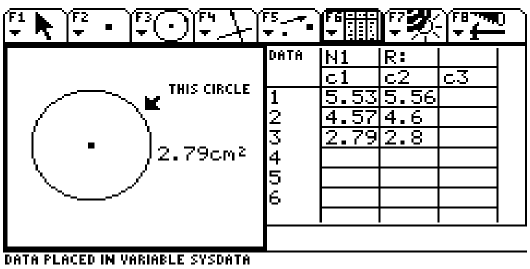
[F1]: Pointer
"Mueve" la circunferencia:

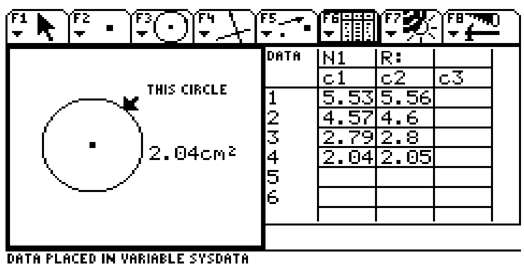


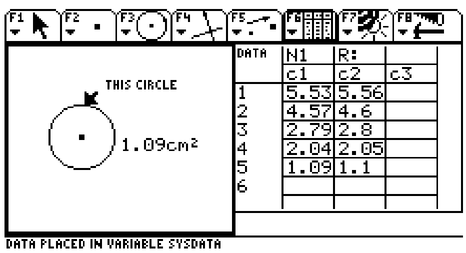
[F6]: Collect Data
Store Data



"Cambia" varias veces la circunferencia y [F6]: Collect Data – Store Data o [Diamante][D]







Lo que hemos conseguido es reproducir "***la Cuadratura del Círculo***" según los antiguos egipcios.

En efecto:

El "***Problema de la Cuadratura del Círculo***" consiste en determinar un cuadrado de área igual a la superficie de un círculo dado. Está claro que la aproximación hallada por los antiguos egipcios es bastante buena como puede apreciarse observando las dos columnas del "Data View", c1 = área del círculo, c2 = área del cuadrado.

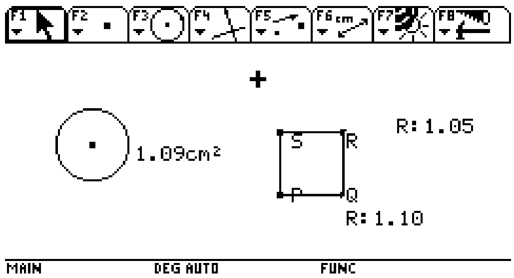
Veamos ahora que "detrás" del problema de la cuadratura del círculo se encuentra el número π y la aproximación a la "cuadratura" determinada por los antiguos egipcios, no es más que la primera aproximación de la historia al número π, que resulta ser $\frac{256}{81}=3{,}16049$

Esconde el "Data View", es decir:

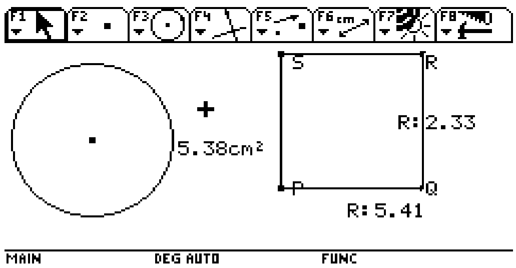
[MODE]

Split Screen

FULL

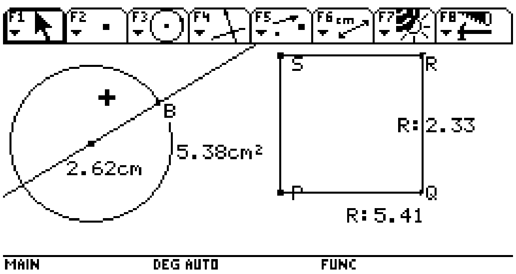


Haz la circunferencia más grande:



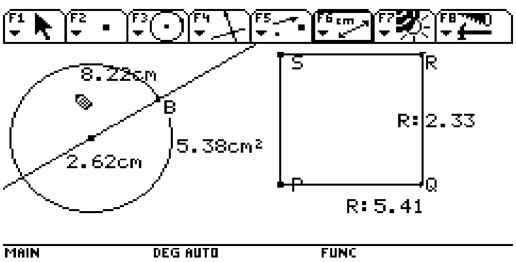
[F7]: Hide / Show

Para hacer aparecer el diámetro de la circunferencia:



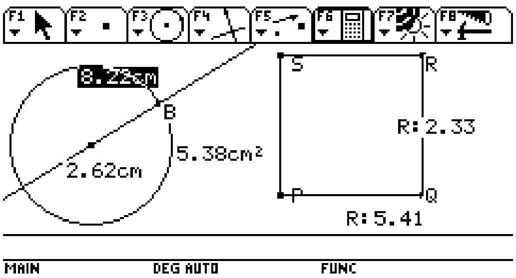
[F6]: Distance & Length

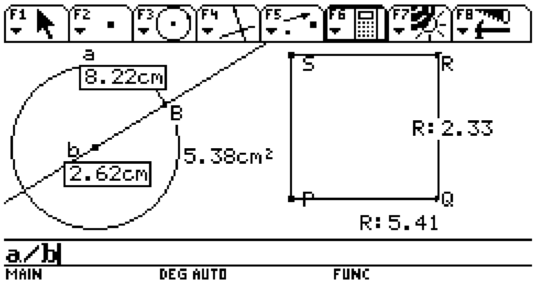
Para determinar la longitud de la circunferencia:

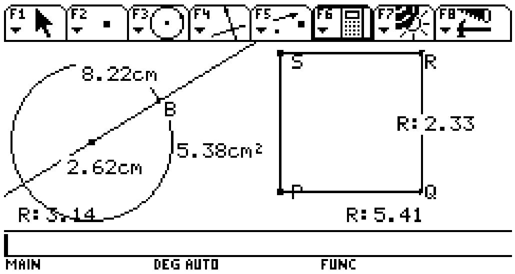


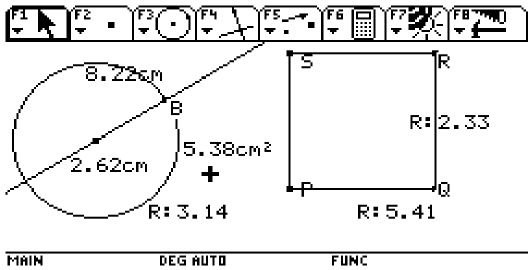
Vamos a calcular el número π:
Definimos π a la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

[F6]: Calculate
Para calcular el número π:









Pero, ¿dónde se encuentra el valor de π en la aproximación a la cuadratura del círculo de los antiguos egipcios?

Veamos:

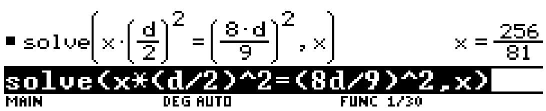
Superficie del círculo = $\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$

Superficie del cuadrado = $\left(\frac{8\text{d}}{9}\right)^2$

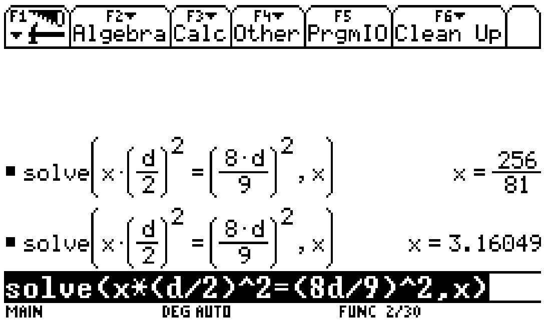
Según los antiguos egipcios: $x\left(\frac{d}{2}\right)^2=\left(\frac{8\text{d}}{9}\right)^2$ siendo "x" el valor aproximado de π

[APPS] – [HOME]

Escribe:



De forma aproximada:



Tenemos pues, en el problema número 50 del “Papiro de Rhind”, la primera aproximación al “Problema de la Cuadratura del Círculo”, que implica un valor para el número π de

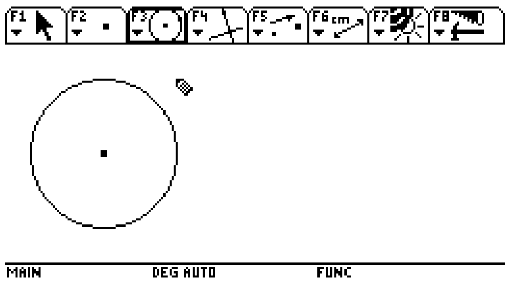
$$\frac{256}{81}=3,16049$$

Arquímedes (Siglo III a.C.)

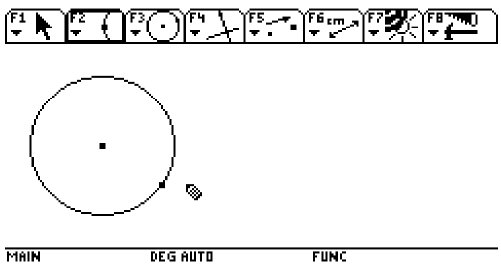
En su obra “*De la Medida del Círculo*” afirma:

“El área de un círculo es igual a la de un triángulo rectángulo en el que uno de los catetos es igual al radio y el otro es igual a la circunferencia del círculo”.

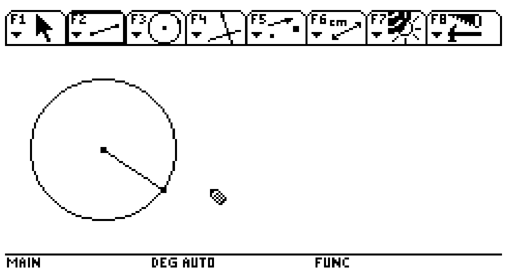
[APPS] – Cabri Geometry



[F3]: Circle
Para dibujar la circunferencia:

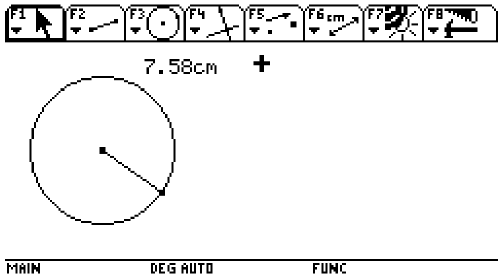


[F2]: Point on Object
Para determinar un punto de la circunferencia:

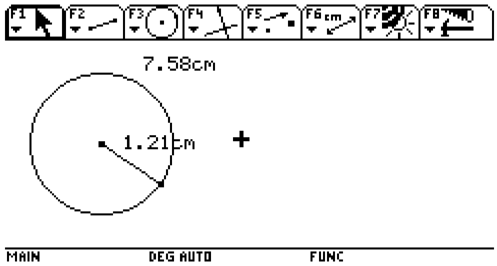


[F2]: Segment
Para determinar el radio:

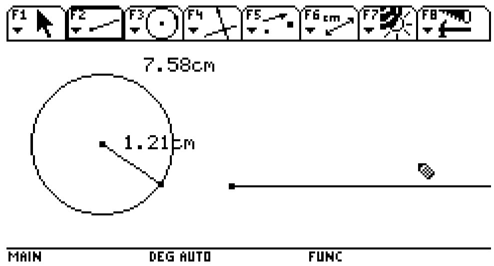
[F6]: Distance & Length
Para determinar la longitud de la circunferencia:



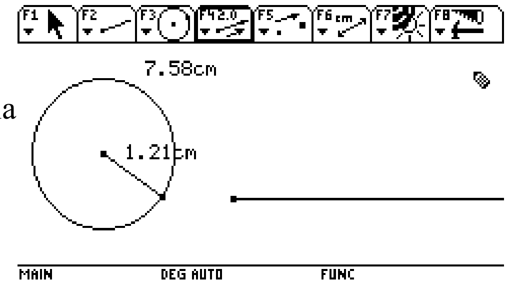
[F6]: Distance & Length
Para determinar la longitud del radio:



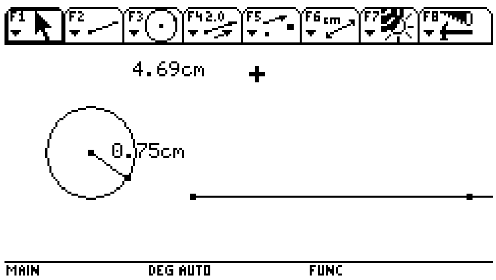
[F2]: Ray
Para dibujar una semirrecta:



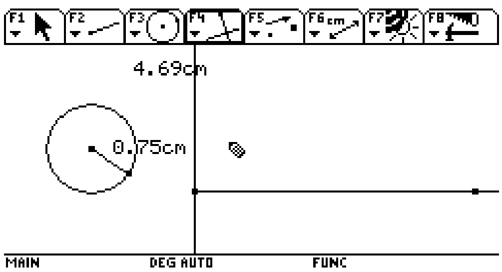
[F4]: Measurement Transfer
Para "transferir" la longitud de la circunferencia a la semirrecta anterior:



Cambia el tamaño de la circunferencia hasta que aparezca el punto transferido:

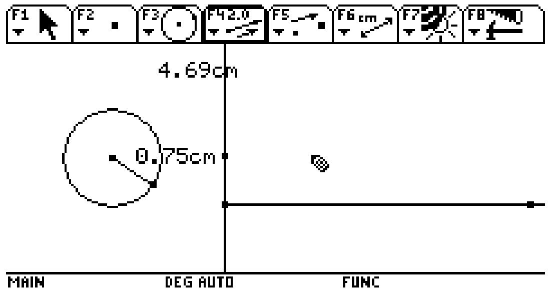


[F4]: Perpendicular Line
Para poder determinar el otro cateto:



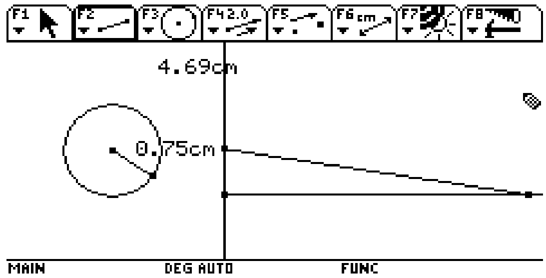
[F4]: Measurement Transfer

Para “transferir” la longitud del radio en la perpendicular anterior:



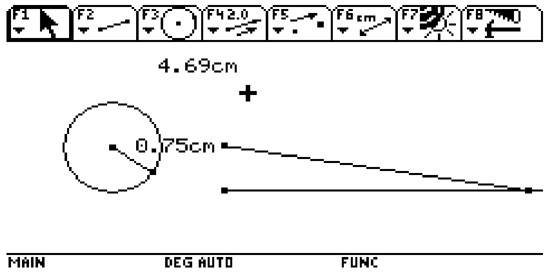
[F2]: Segment

Para dibujar la hipotenusa:



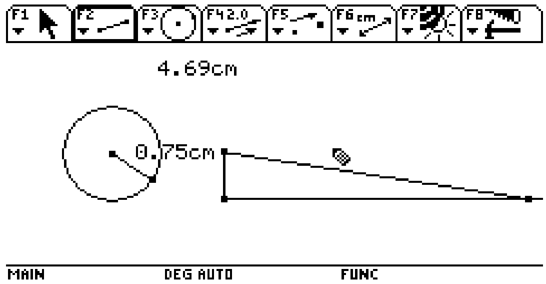
[F7]: Hide / Show

Para “esconder” la perpendicular:



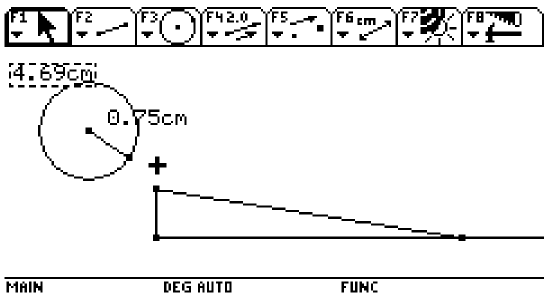
[F2]: Segment

Para determinar el cateto



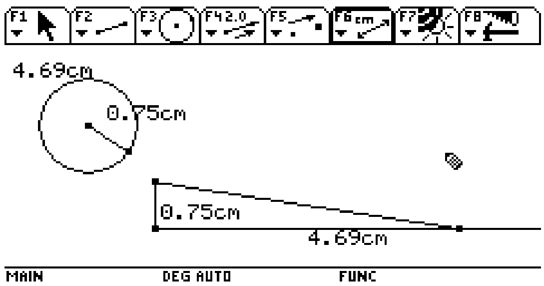
[F1]: Pointer

Para colocar mejor los objetos:

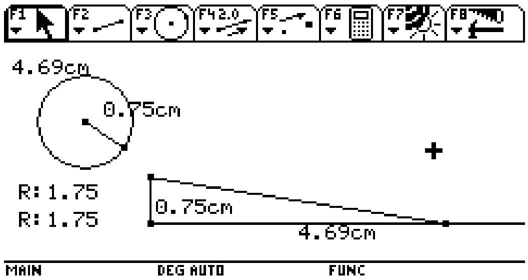


[F6]: Distance & Length

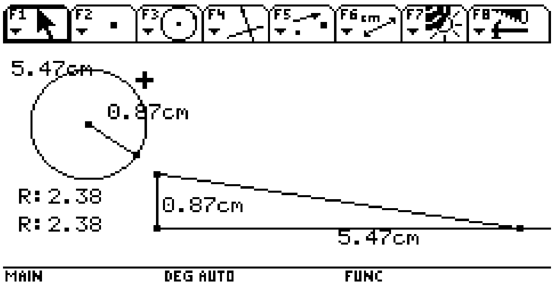
Para medir la base y altura del triángulo:

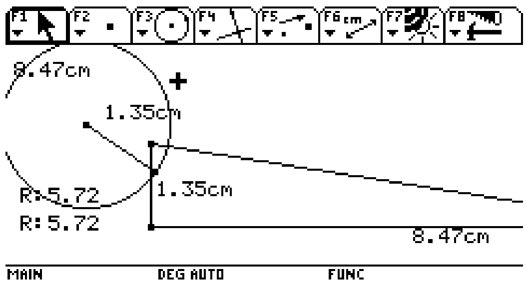


[F6]: Calculate
Para determinar el área del círculo y del triángulo:



Cambia el tamaño de la circunferencia:





Está claro que Arquímedes consigue una "triangulación del círculo" exacta. Pero con la "triangulación" evita calcular el número π, en efecto:

Sea

r = radio de la circunferencia
l = longitud de la circunferencia = $2\pi r$
C = área del círculo = πr^2
T = área del triángulo = $\frac{l r}{2}$

$$T=\frac{l r}{2}=\frac{(2\pi r) r}{2}=\pi r^2=C$$

Es decir, "T" es exactamente igual a "C", sin necesidad de utilizar el valor de π.

En la misma obra "*De la Medida del Círculo*", Arquímedes da el valor de π de la siguiente forma:
"La razón de la circunferencia de cualquier círculo con respecto a su diámetro está comprendido entre 223/71 y 22/7"

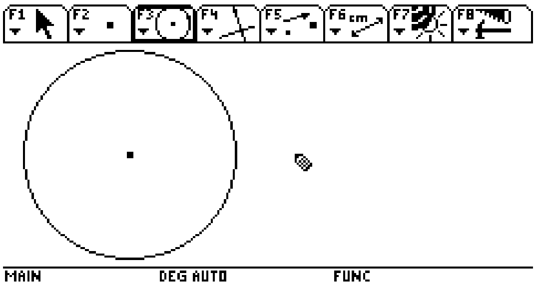
Es decir, según Arquímedes: $3{,}14085 < \pi < 3{,}14286$, que es una aproximación de π, bastante mejor a la de los antiguos egipcios.

El método que utilizó Arquímedes fue acotar la longitud de una circunferencia entre los perímetros de polígonos de 4, 8, 16, 32, 64, ... lados, inscritos y los circunscritos a la circunferencia.

Vamos a utilizar el *Método de Arquímedes* pero sólo en el caso de polígonos inscritos a la circunferencia ...

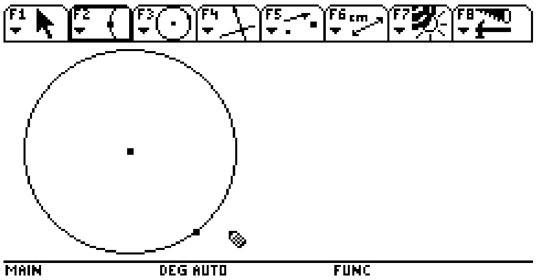
[APPS] – Cabri Geometry

[F3]: Circle
Para dibujar la circunferencia:

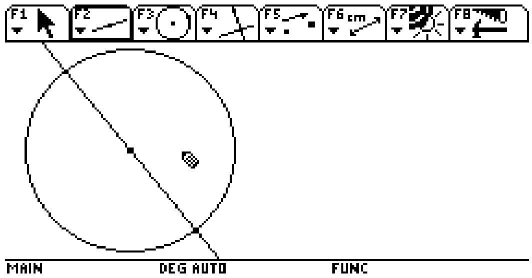


1º) Polígono inscrito de 4 lados:

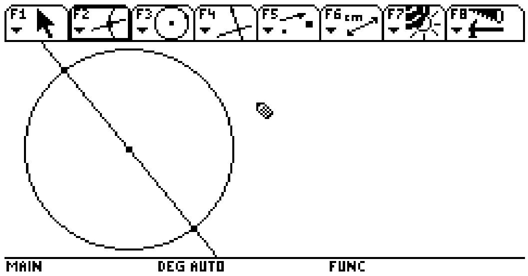
[F2]: Point on Object
Para determinar un punto de la circunferencia:



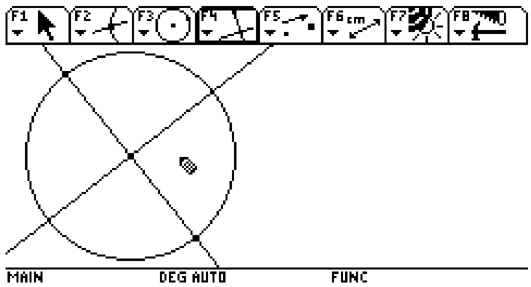
[F2]: Line
Para dibujar la línea que nos determinará dos vértices opuestos del cuadrado:



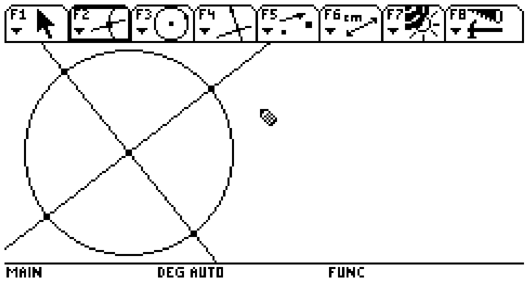
[F2]: Intersection Point
Para "marcar" dos vértices opuestos:



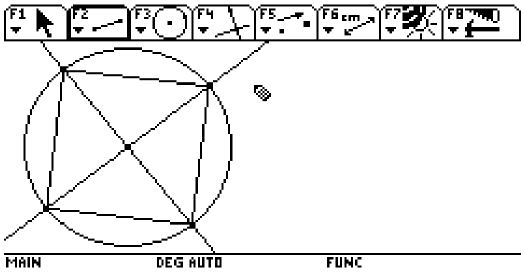
[F4]: Perpendicular Line
Para determinar la otra diagonal del cuadrado:



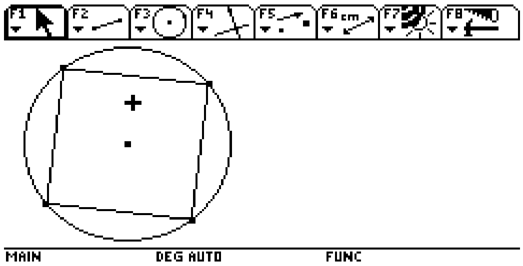
[F2]: Intersection Point
Para determinar los otros dos vértices:



[F2]: Segment
Para dibujar el cuadrado:

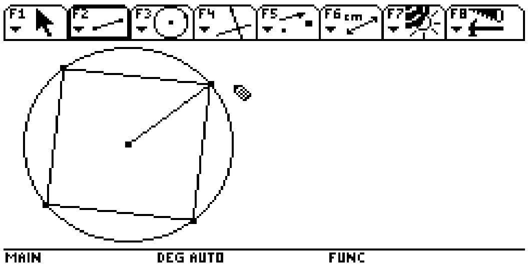


[F7]: Hide / Show
Para esconder las dos diagonales:

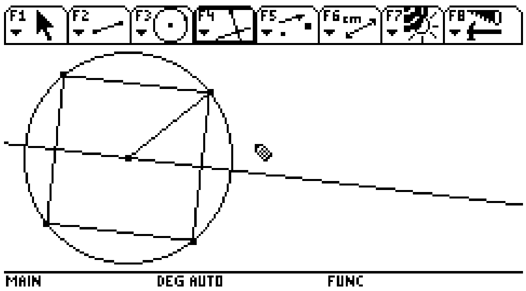


Vamos a determinar el perímetro del polígono de 4 lados, pero considerando el siguiente triángulo rectángulo:

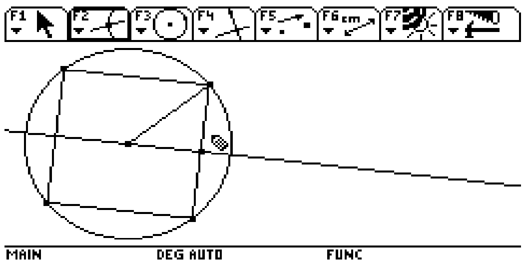
[F2]: Segment
Para dibujar el radio:



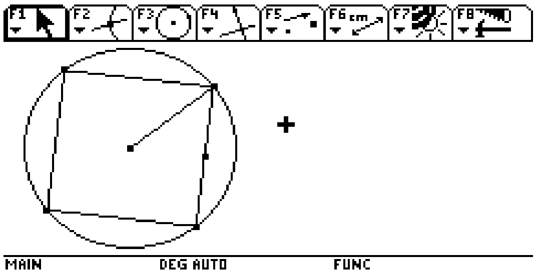
[F4]: Perpendicular Line
Queremos determinar la apotema:



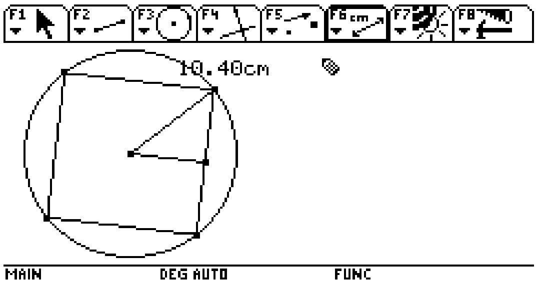
[F2]: Intersection Point
Para determinar el pie de la apotema:



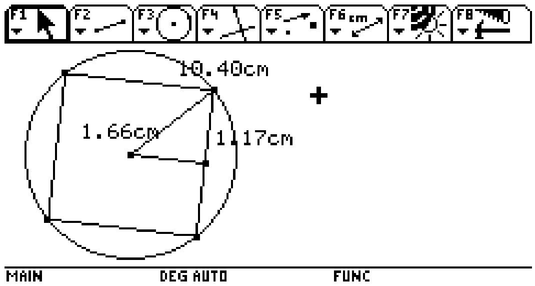
[F7]: Hide / Show
Esconde la perpendicular:



[F2]: Segment
Dibuja la apotema:



[F6]: Distance & Length
Para determinar la longitud de la circunferencia:



Observa el triángulo rectángulo dibujado:

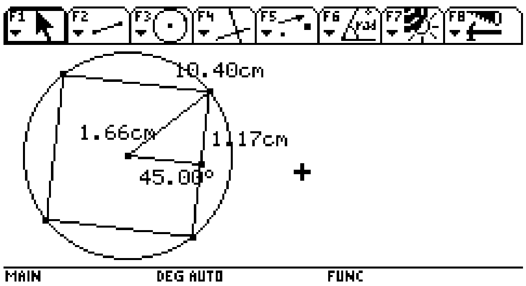
$$\sin(45^{o}) = \sin\left(\frac{360}{8}\right) = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{l}{d}$$

Es decir: $l = d\sin\left(\frac{360}{8}\right)$

Perímetro del polígono inscrito de n = 4 lados $= 4l = 4d\sin\left(\frac{360}{8}\right)$

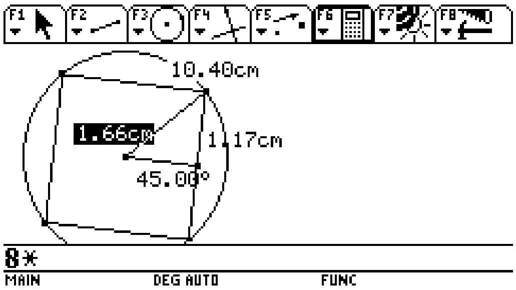
En efecto:

[F6]: Distance & Length
Para determinar l/2 y d/2:



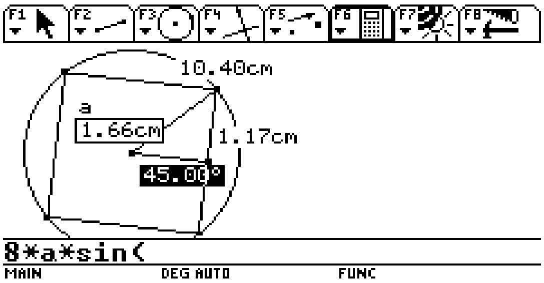
[F6]: Angle

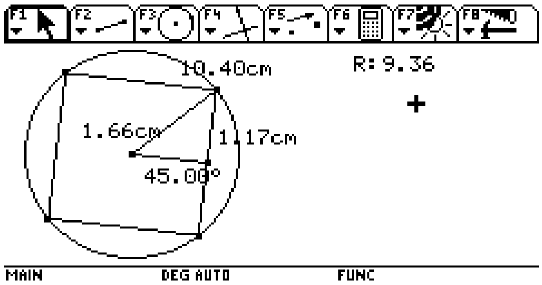
Para determinar el ángulo:

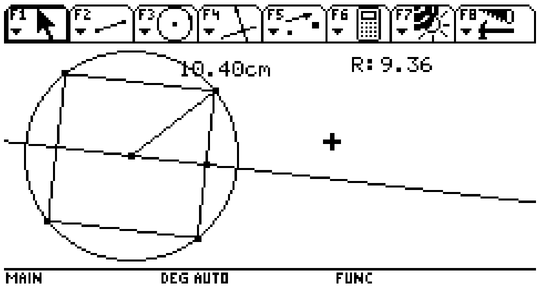


[F6]: Calculate

Para calcular el perímetro: $4\,d\sin\left(\frac{360}{8}\right)=8\frac{d}{2}\sin\left(\frac{360}{8}\right)$







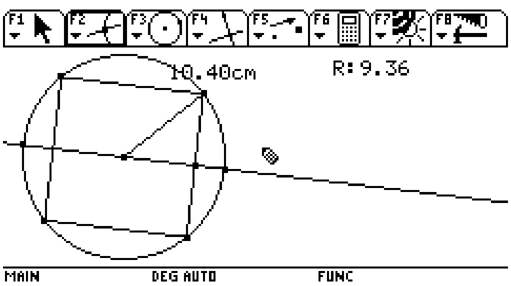
De momento, la aproximación es, como es lógico, bastante mala, pero observa:

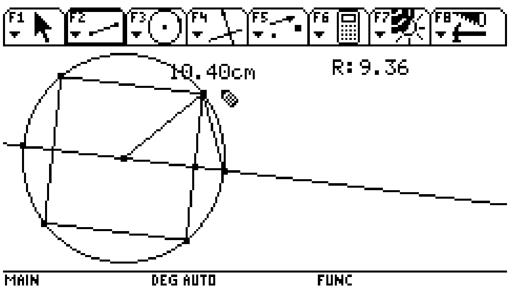
Si n = 4 $p=4\,d\sin\left(\frac{360}{8}\right)$ siendo “p” el perímetro del polígono inscrito y “d” el diámetro de la circunferencia.

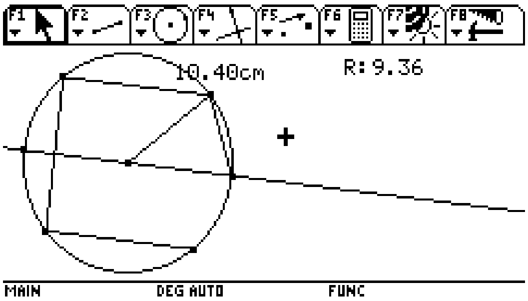
<u>2º) Polígono inscrito de 8 lados:</u>

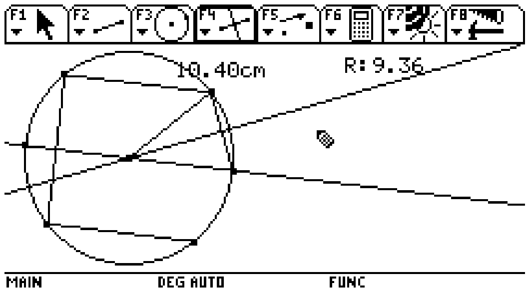
(Basta considerar uno de los triángulos rectángulos):

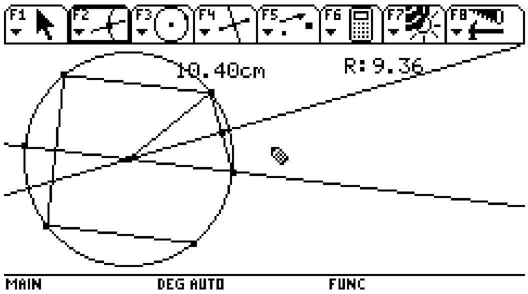
A ver si lo consigues:

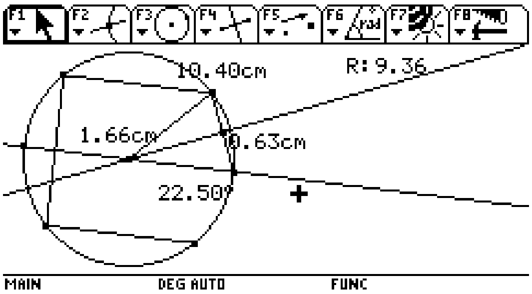


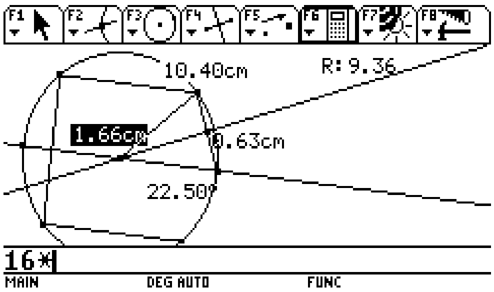




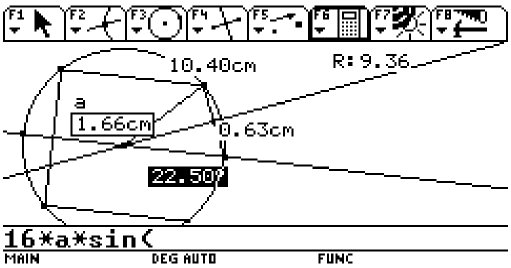


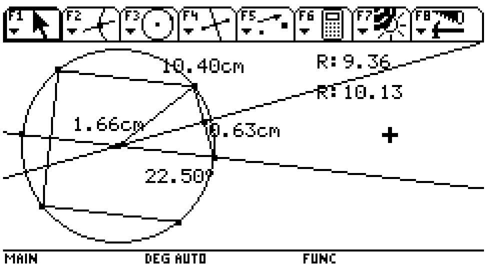


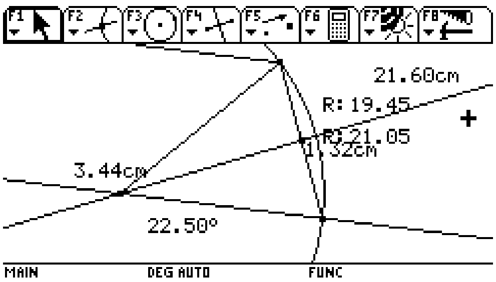




Tenemos: $p=8\,d\,\sin(\frac{360}{16})$

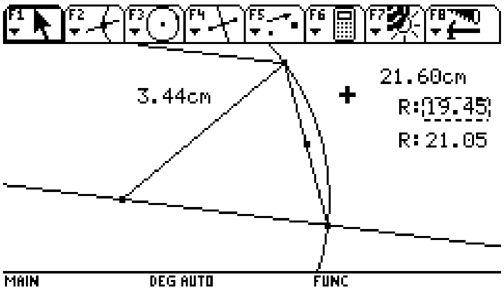


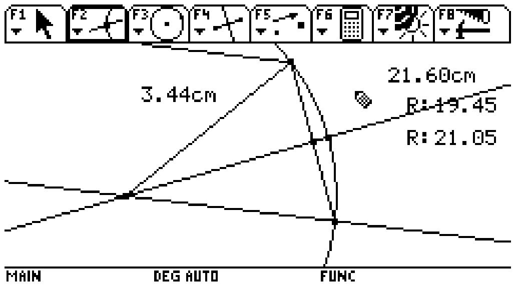


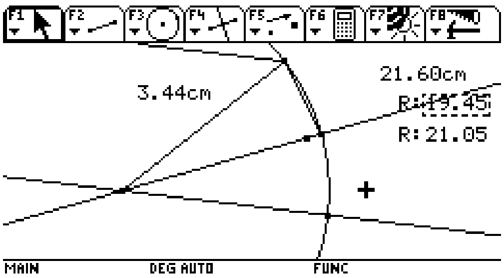


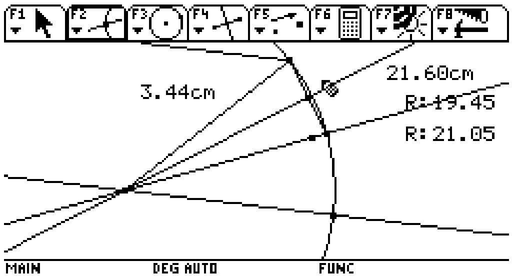
Está claro que obtenemos una aproximación mejor.

3º) Polígono inscrito de 16 lados

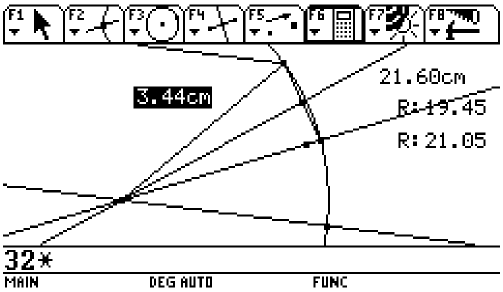


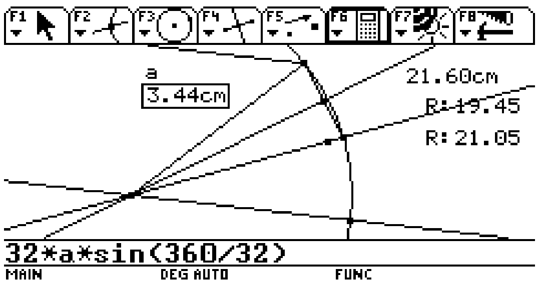


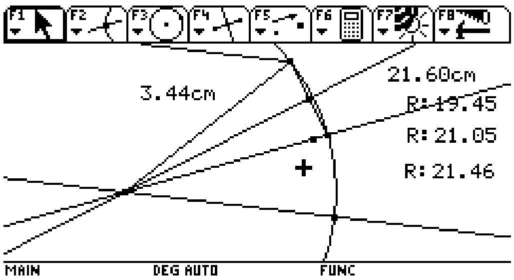




Tenemos, n= 16 $p = 16\,d\,\sin(\frac{360}{32})$







Está claro que obtenemos una aproximación mejor.

En definitiva:

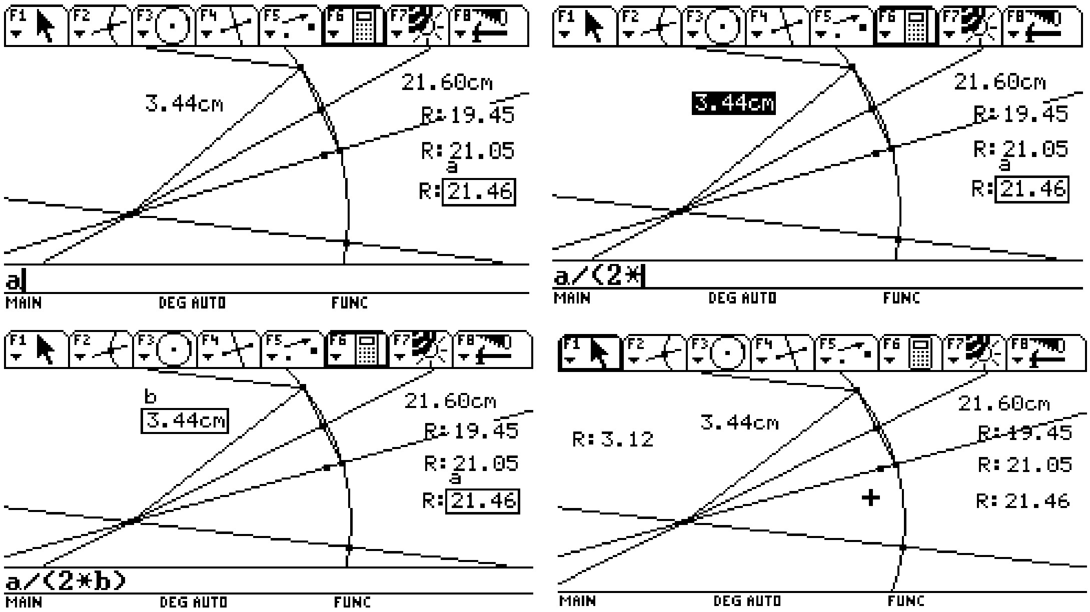
Si n = 4 entonces $p_4 = 4\,d\,\sin(\frac{360}{8}) = \pi\,d$ por lo tanto $\pi = 4\sin(\frac{360}{8})$

Si n = 8 entonces $p_8 = 8\,d\,\sin(\frac{360}{16}) = \pi\,d$ por lo tanto $\pi = 8\sin(\frac{360}{16})$

Si n = 16 entonces $p_{16} = 16\,d\,\sin(\frac{360}{32}) = \pi\,d$ por lo tanto $\pi = 16\sin(\frac{360}{32})$

Calculemos la aproximación a π según el método de Arquímedes, para el polígono inscrito de 16 lados:

[F6]: Calculate



No es demasiado buena la aproximación a π, ¿verdad? Π = 3.12

Pero ten en cuenta que hemos llegado a un polígono de 16 lados y Arquímedes llegó hasta el polígono de 96 lados.

Vamos a ver si nosotros llegamos más lejos, utilizando su método (para el caso de polígonos inscritos) y la ¡TI – Voyage 200!

En definitiva, hemos descubierto:

Si $n=2^2$ entonces: $\pi=2^2\sin(\frac{360}{2^3})$

Si $n=2^3$ entonces: $\pi=2^3\sin(\frac{360}{2^4})$

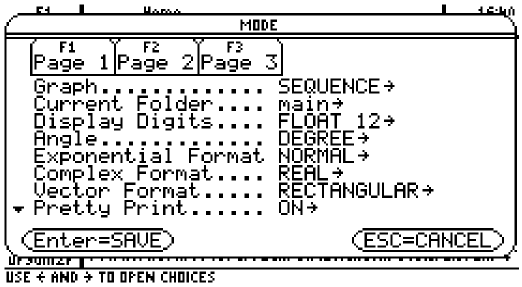
Si $n=2^4$ entonces: $\pi=2^4\sin(\frac{360}{2^5})$

En general:

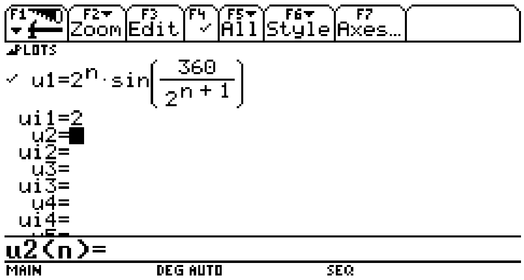
n entonces: $\pi=2^n\sin(\frac{360}{2^{n+1}})$

En primer lugar:

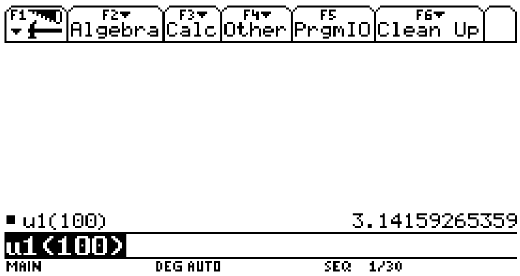
[MODE]
Graph = SEQUENCE
Display Digits = FLOAT 12
Angle = DEGREE



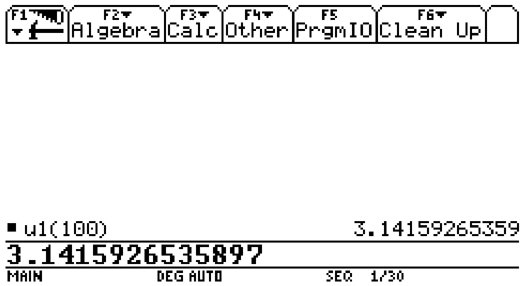
[APPS] – Y= Editor
Para definir la sucesión:



[APPS] – Home
Escribe:

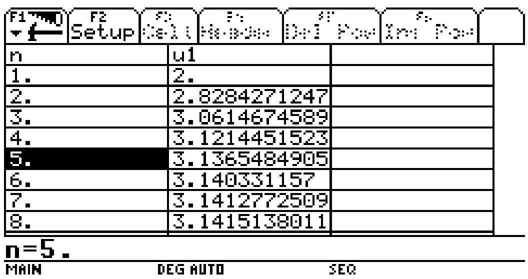


Edita el valor de π calculado:



Tenemos el valor de π con 13 decimales exactos: 3,1415926535897

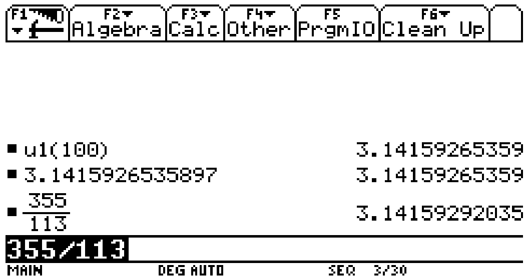
[APPS] – [TABLE]
Para visualizar los diferentes valores de la sucesión:



Tsu Chung Chi (480 d.C)

El astrónomo chino Tsu Chung Chi consigue la mejor aproximación de π, durante todo un milenio:

$$\pi = \frac{355}{113}$$



π = 3,141592 valor de π con 6 cifras decimales exactas. Resultado que permanecerá imbatible durante más de un milenio.

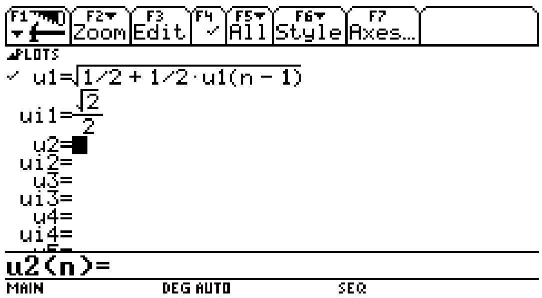
Françoise Vieta (1540 – 1603)

Determina el valor de π, como el producto infinito:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

[APPS] – Y = Editor

Considera la sucesión:



[APPS] – Home

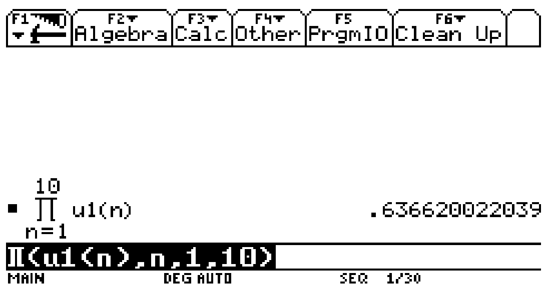
Para acceder al operador producto:

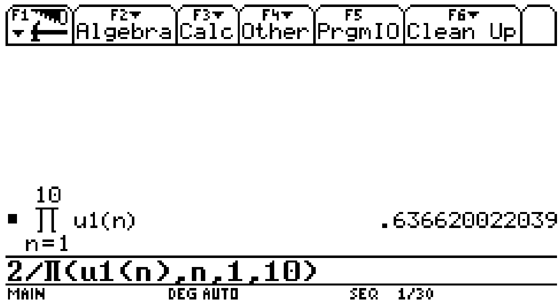
[MATH]

Calculus

5: Π(producto

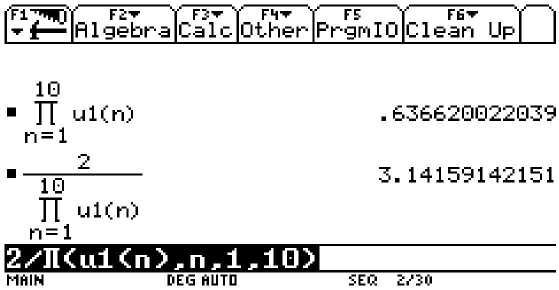
Escribe:



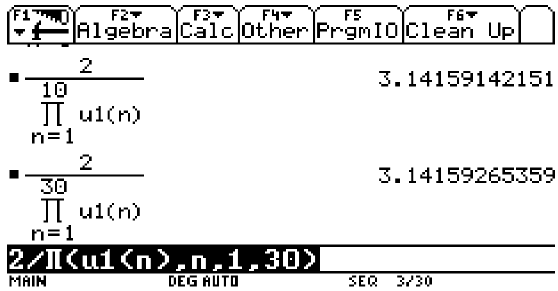


Para determinar el valor de π, escribe:

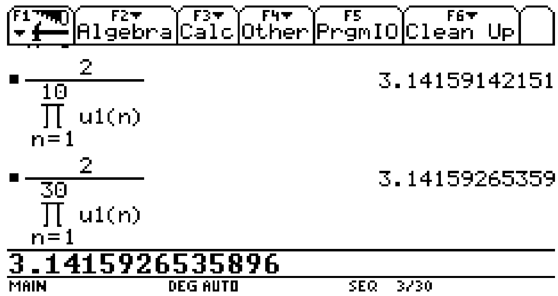
Tenemos el valor de π (con n = 10), con 5 decimales exactos:



Valor de π con n = 30 y un poco de paciencia:



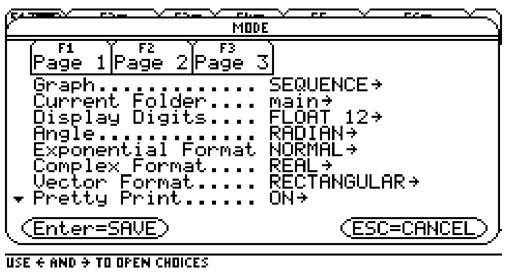
12 decimales exactos:



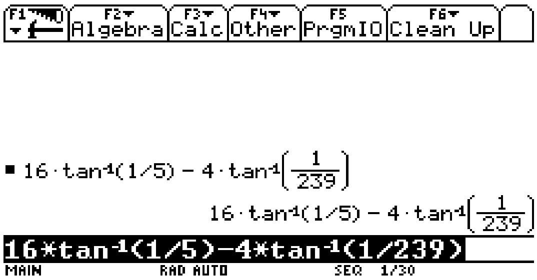
John Machin (1706)

Con la fórmula: $\pi = 16 \arctan(\frac{1}{5}) - 4 \arctan(\frac{1}{239})$ determina el valor de π con las 100 primeras cifras decimales exactas.

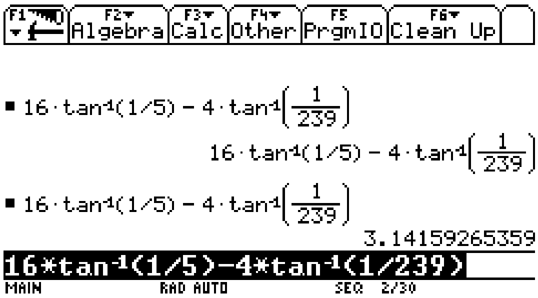
[MODE]
Angle = RADIAN



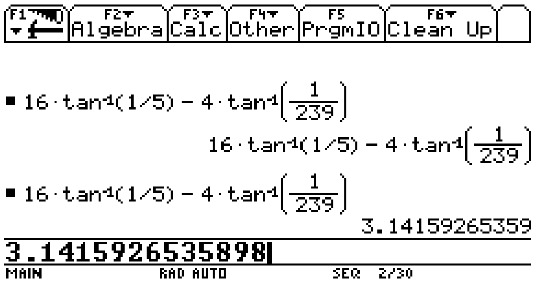
Escribe:



Aproximadamente:



12 decimales exactos con nuestra TI – Voyage 200:



Lambert (1728 – 1777)

Matemático alemán demuestra que π es irracional, es decir el valor verdadero de π solamente se puede expresar como una serie infinita de decimales en los que no hay ningún posible período que se repita.

Ferdinand Lindemann (1852 – 1939)

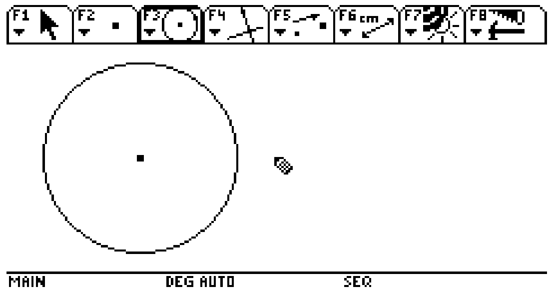
Demuestra que π no es construible al ser un número transcendente (no es solución de ninguna ecuación algebraica). De forma que queda demostrada la imposibilidad de resolver el problema de la “Cuadratura del Círculo”

Una vez demostrada la imposibilidad de obtener π de forma exacta mediante procedimientos geométricos (uso de la regla y el compás), se desarrollaron varios métodos aproximados, uno de ellos es el siguiente:

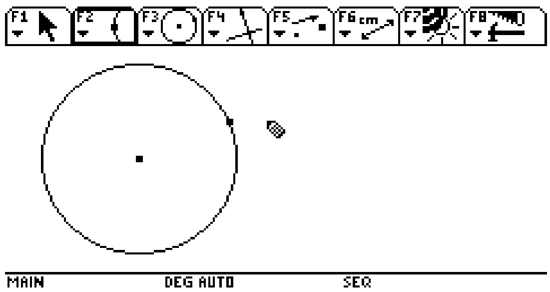
MÉTODO DE KOCHANSKI

[APPS] – Cabri Geometry

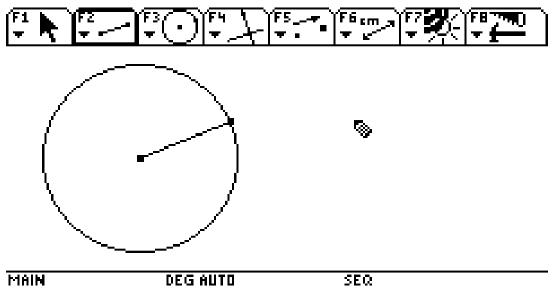
[F3]: Circle
Para dibujar una circunferencia:



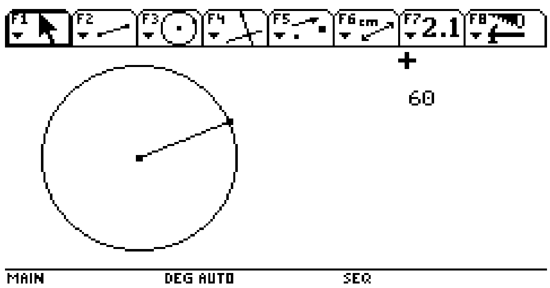
[F2]: Point on Object
Para determinar un punto de la circunferencia:



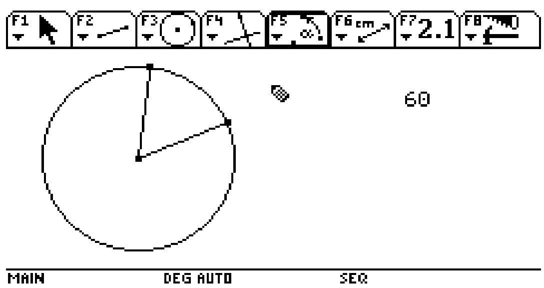
[F2]: Segment
Para dibujar un radio



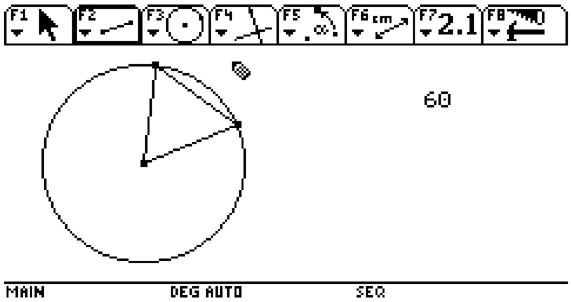
[F7]: Numerical Edit
Para introducir 60º:



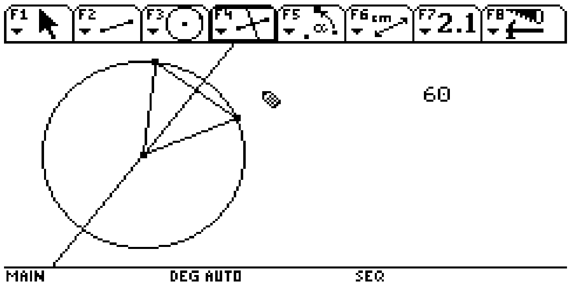
[F5]: Rotation
Para girar 60º el radio de la circunferencia:



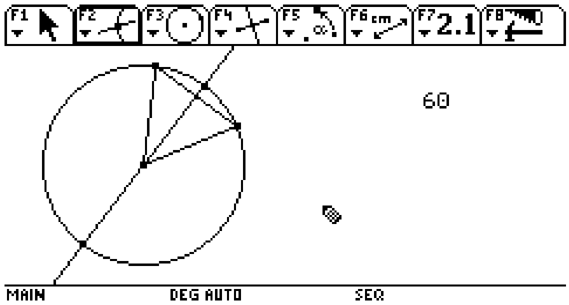
[F2]: Segment
Para acabar de dibujar el triángulo equilátero:



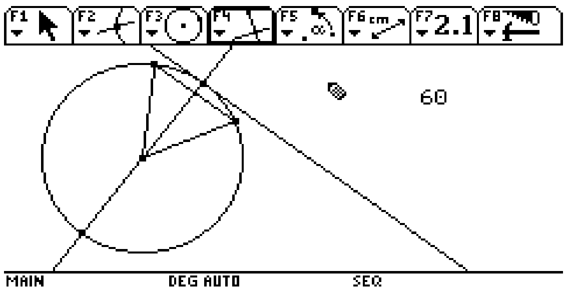
[F4]: Perpendicular Bisector
Para dibujar la perpendicular:



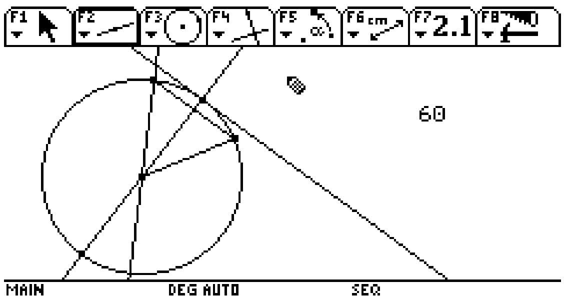
[F2]: Intersection Point
Para determinar las intersecciones con la circunferencia:



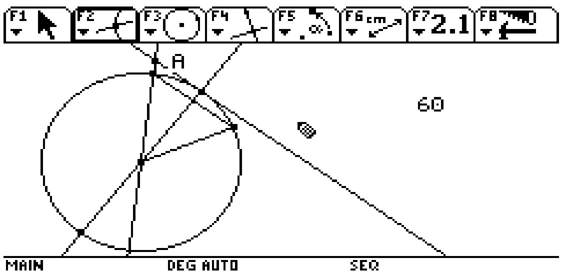
[F4]: Perpendicular Line
Para dibujar la perpendicular:



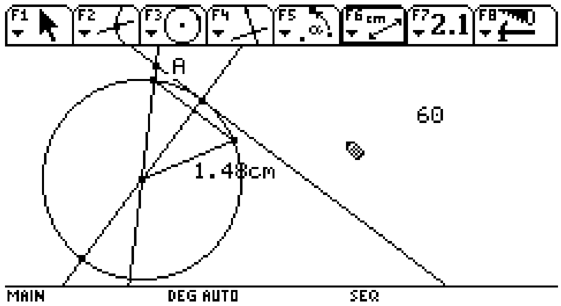
[F2]: Line
Para prolongar la línea:



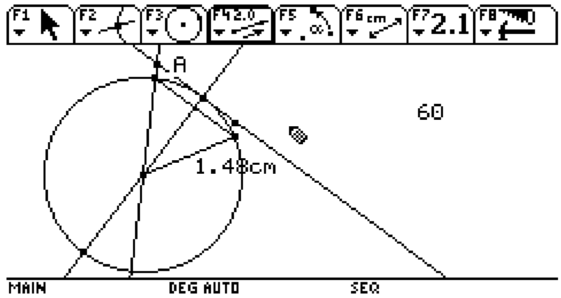
[F2]: Intersection Point
Para determinar el punto A:



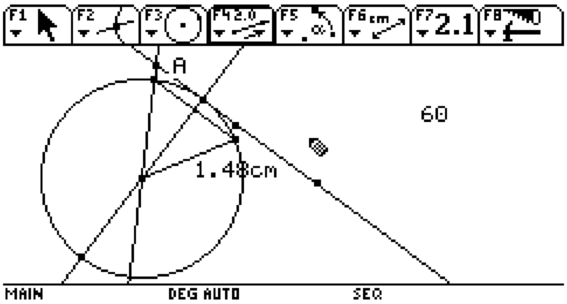
[F6]: Distance & Length
Para calcular el radio:

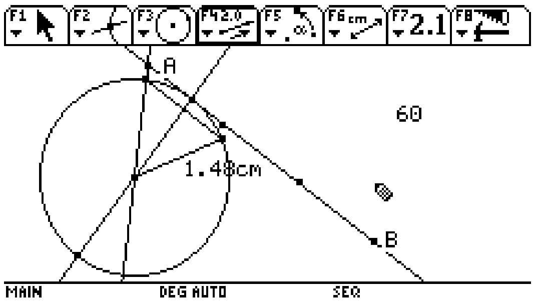


[F4]: Measurement Transfer
Para "transferir" el radio en la recta de origen A:

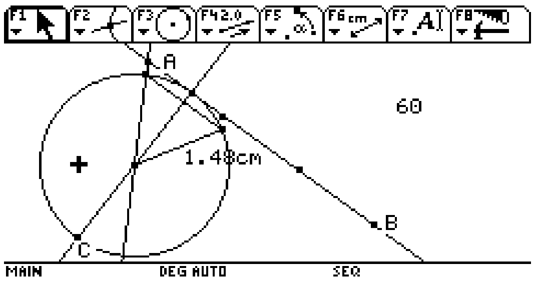


[F4]: Measurement Transfer
Para transferir 2 veces más el radio a continuación, y determinar el punto B:

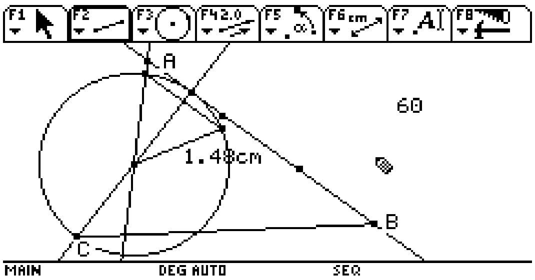




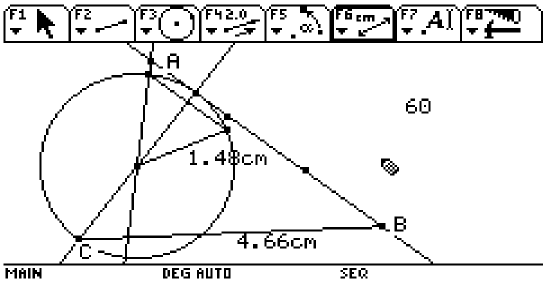
[F7]: Label
Para "marcar" el punto C:



[F2]: Segment
Para dibujar el segmento BC:

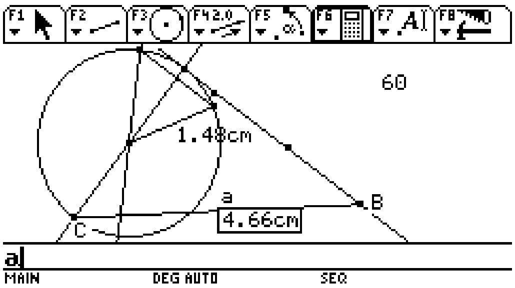


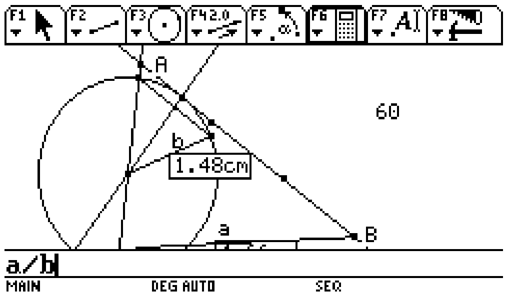
[F6]: Distance & Length
Para calcular BC:



Según Kochanski, π es el cociente entre la longitud del segmento BC y el radio:

[F6]: Calculate





En realidad π = 3,141533

John Von Newmann (1942)

A partir del 1942, el problemas de hallar cifras decimales para π pasa de ser matemático a informático, en efecto:

John Von Newmann, padre de la informática, el 1942, utilizando la computadora electrónica ENIAC generó 2.037 decimales de π en 70 horas.

2004

Un superordenador Hitachi, en 500 horas encuentra 1,3511 billones de decimales de π.

¿Pero, necesitamos tantos decimales para π?

Si consideramos una circunferencia que abarque todo el universo conocido (radio = 40000000000 años luz), y calculamos su longitud utilizando π con 35 decimales exactos, haremos un error de dos millonésimos de centímetro.

Utilizando el valor de π, con 6 decimales exactos, podemos hacer cualquier cálculo (¡que no sobrepase las dimensiones del Sistema Solar !), con un error miserable.

Actualmente el hecho de determinar muchos decimales de π sirve solamente para poner a prueba la capacidad de cálculo de los nuevos ordenadores (número de decimales exactos de π y el tiempo necesario para calcularlos).