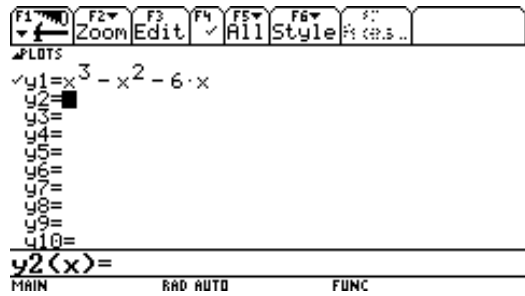


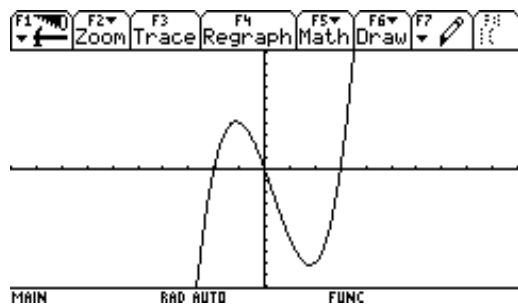
LA INTEGRAL DEFINIDA. CÁLCULO DE ÁREAS CON LA TI – VOYAGE 200

Calcula el área comprendida entre la función $y=x^3-x^2-6x$ y el eje OX.

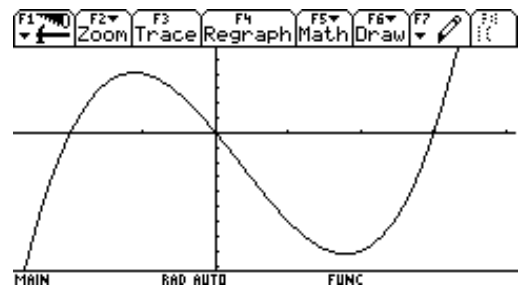
[APPS] – Y= Editor
 Para definir la función:



[APPS] – Graph
 Para representar gráficamente la función:

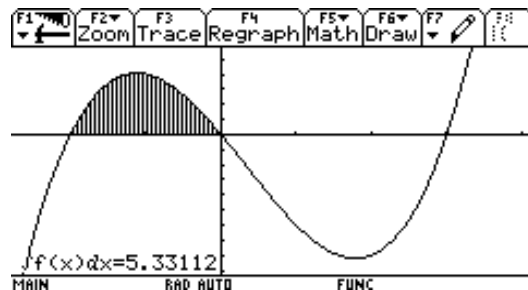


[F2]: ZoomBox
 Para visualizarla mejor:



Está claro que hemos de calcular la integral correspondiente al área de la izquierda, que será positiva:

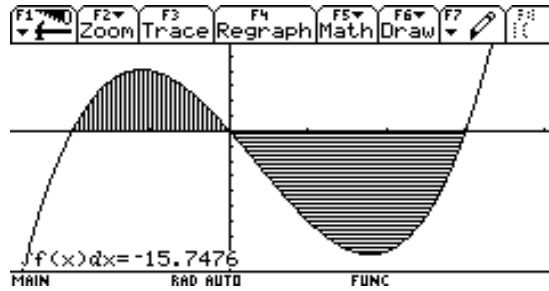
[F5]: $\int f(x)dx$
 Selecciona el límite inferior (alrededor de -2.02)
 Selecciona el límite superior (alrededor de 0)



Tenemos una área aproximadamente igual a 5.33112

Vamos a calcular la integral correspondiente al área de la derecha, que será negativa:

[F5]: $\int f(x)dx$
 Límite inferior: 0
 Límite superior: 3



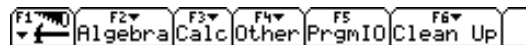
Tenemos un área aproximadamente igual a 15.7476
 En definitiva tenemos un área total de 5.33112 + 15.7476

Vamos a calcularla de forma exacta:

[APPS] – Home
 Calculemos exactamente los puntos de corte
 con el eje X:

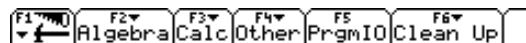


■ solve(y1(x) = 0, x)
 x = -2 or x = 0 or x = 3
solve(y1(x)=0, x)
 MAIN RAD AUTO FUNC 1/30



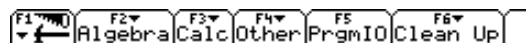
Por lo tanto:

■ solve(y1(x) = 0, x)
 x = -2 or x = 0 or x = 3
 $\int_{-2}^0 y1(x)dx + \int_0^3 y1(x)dx$ 253/12
∫(y1(x), x, -2, 0) + ∫(y1(x), x, 3, 0)
 MAIN RAD AUTO FUNC 2/30



De forma aproximada:

■ solve(y1(x) = 0, x)
 x = -2 or x = 0 or x = 3
 $\int_{-2}^0 y1(x)dx + \int_0^3 y1(x)dx$ 253/12
 $\int_{-2}^0 y1(x)dx + \int_0^3 y1(x)dx$ 21.0833
∫(y1(x), x, -2, 0) + ∫(y1(x), x, 3, 0)
 MAIN RAD AUTO FUNC 3/30



Antes teníamos:

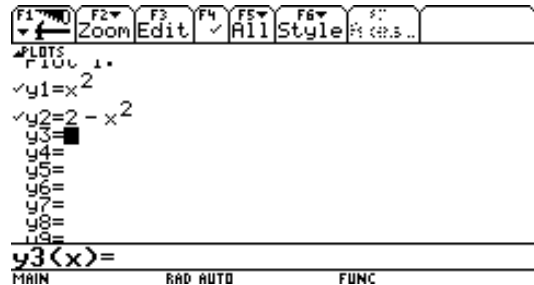
■ solve(y1(x) = 0, x)
 x = -2 or x = 0 or x = 3
 $\int_{-2}^0 y1(x)dx + \int_0^3 y1(x)dx$ 253/12
 $\int_{-2}^0 y1(x)dx + \int_0^3 y1(x)dx$ 21.0833
 ■ 5.33112 + 15.7476 21.0787
5.33112 + 15.7476
 MAIN RAD AUTO FUNC 4/30

En definitiva el área pedida es $\frac{253}{12}u^2$

Hallar el área limitada por las curvas $y=x^2$ e $y=2-x^2$

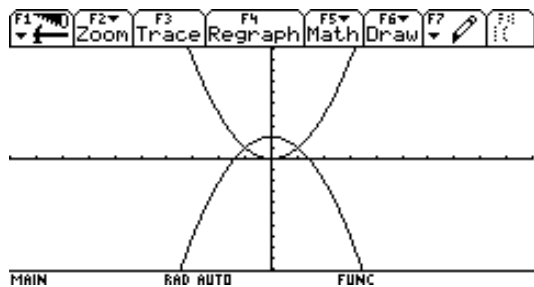
[Y =]

Para definir las funciones:



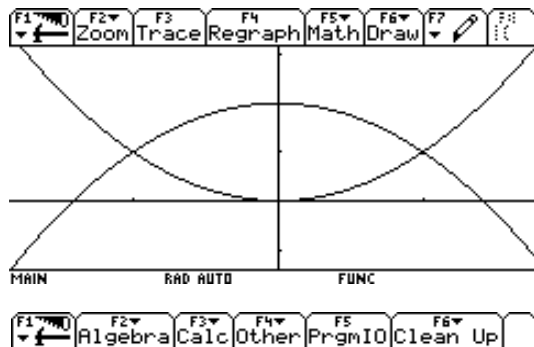
[GRAPH]

Para representarlas gráficamente:



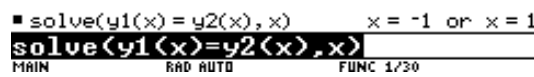
[F2]: ZoomBox

Para visualizar mejor el área:



[HOME]

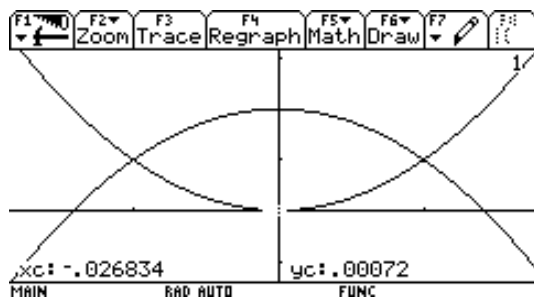
Para determinar los puntos de intersección:



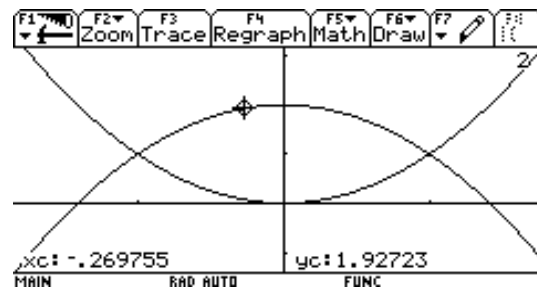
[GRAPH]

[F3]: Trace

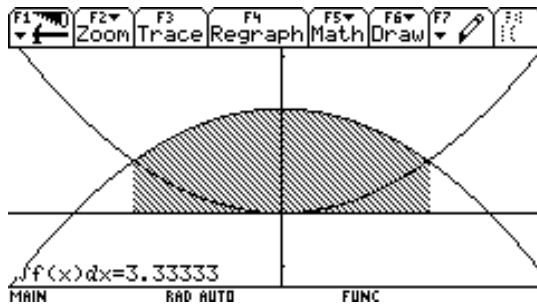
Para saber cuál es la y1:



Pulsa [flecha cursor arriba]
Para saber cual es la y2:

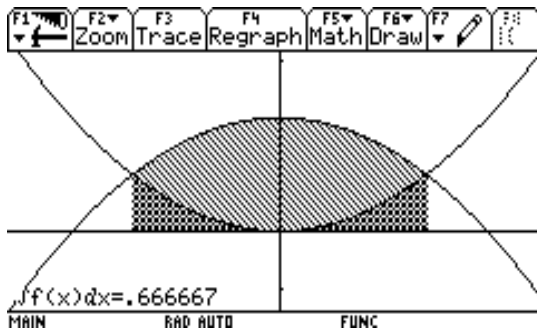


[F5]: $\int f(x)dx$
Sítuate en la 2
Lower Limit? -1
Upper Limit? 1



Tenemos un área de 3.33333

[F5]: $\int f(x)dx$
Sítuate en la 1
Lower Limit? -1
Upper Limit? 1



Tenemos un área de 0.666667

En definitiva, el área pedida de forma aproximada será: $3.33333 - 0.666667$

Vamos a hacerlo de forma exacta: Sabemos que la curva “superior” es la $y_2(x)$, y los límites de integración son -1 y 1.

Por lo tanto:

Calculator interface showing the integration process:

- Function keys: Algebra, Calc, Other, PrgmIO, Clean Up
- Command: `solve(y1(x)=y2(x),x)` $x = -1$ or $x = 1$
- Command: `∫-11 (y2(x)-y1(x))dx` $8/3$
- Final command: `∫(y2(x)-y1(x),x,-1,1)`

Calculator interface showing the integration process:

- Function keys: Algebra, Calc, Other, PrgmIO, Clean Up
- Command: `solve(y1(x)=y2(x),x)` $x = -1$ or $x = 1$
- Command: `∫-11 (y2(x)-y1(x))dx` $8/3$
- Command: `∫-11 (y2(x)-y1(x))dx` 2.66667
- Final command: `∫(y2(x)-y1(x),x,-1,1)`

En definitiva, el área pedida será: $\frac{8}{3}u^2$

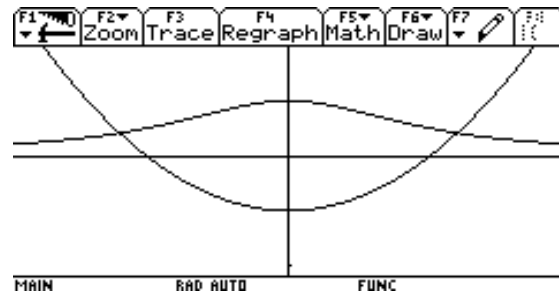
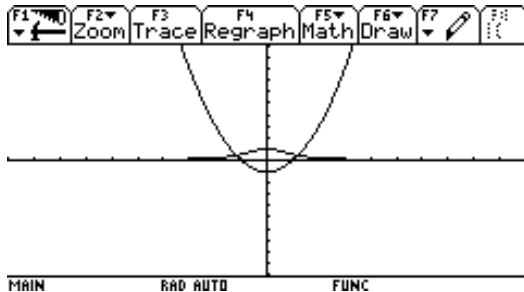
Hallar el área limitada por las curvas $y = \frac{1}{1+x^2}$ e $y = x^2 - 1$

Definimos las funciones:

```

F1 [←] F2 [Zoom] F3 [Edit] F4 [✓] F5 [All] F6 [Style] F7 [F3]
└─ PLOTS ─┘
y1 = 1 / (1 + x^2)
y2 = x^2 - 1
y3 = █
y4 =
y5 =
y6 =
y7 =
y8 =
y3(x) =
MAIN          RAD AUTO          FUNC
    
```

Las representamos gráficamente:



Busquemos los puntos intersección:

```

F1 [←] F2 [Algebra] F3 [Calc] F4 [Other] F5 [PrgmIO] F6 [Clean Up]
    
```

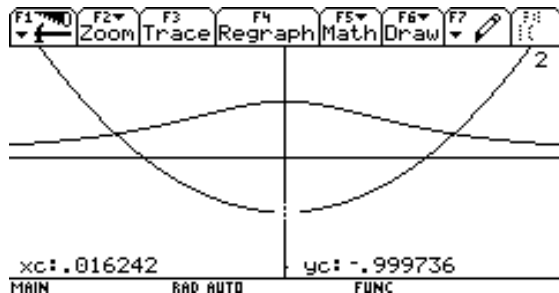
```

█ solve(y1(x) = y2(x), x)
      x = -21/4 or x = 21/4
solve(y1(x) = y2(x), x)
MAIN          RAD AUTO          FUNC 1/30
    
```

[GRAPH]

[F3]: Trace

Para localizar la 1 (la superior) y la 2 (la inferior):



Es decir:

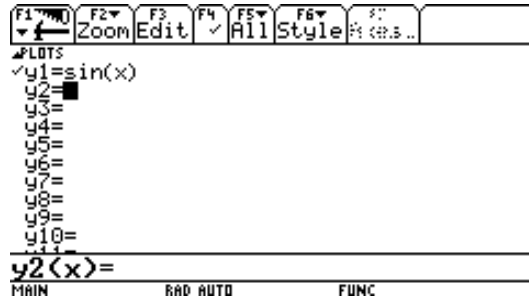
```

F1 [←] F2 [Algebra] F3 [Calc] F4 [Other] F5 [PrgmIO] F6 [Clean Up]
█ ∫-21/421/4 (y1(x) - y2(x)) dx
      2 · (3 · tan-1(21/4) - 21/4 · (√2 - 3))
      3
█ ∫-21/421/4 (y1(x) - y2(x)) dx
      3.00044
...x) - y2(x), x, -2(1/4), 2(1/4))
MAIN          RAD AUTO          FUNC 3/30
    
```

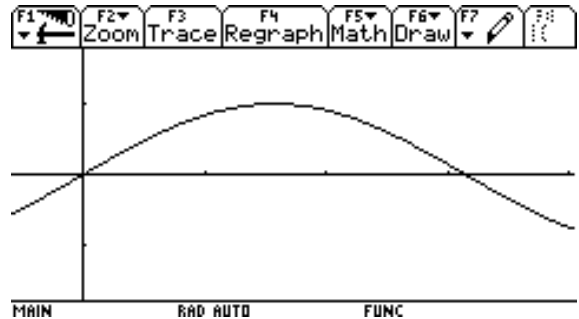
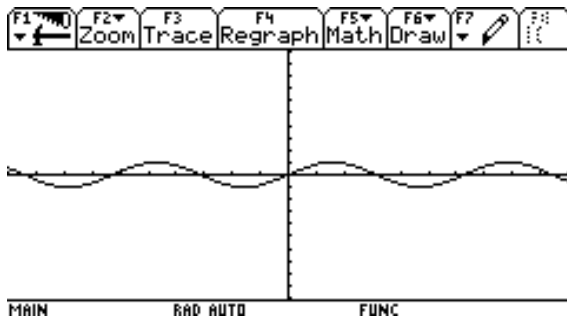
El área pedida es aproximadamente: 3.00044

Hallar el área limitada por una semionda de $y = \sin(x)$ y el eje de abscisas.

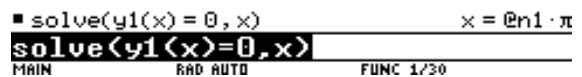
Definimos la función:



La representamos gráficamente:



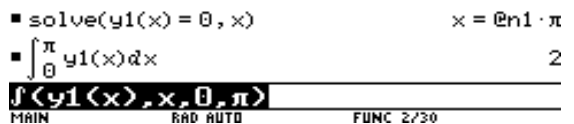
Busquemos los puntos de intersección:



Los correspondientes a la primera semionda positiva serán 0 y π



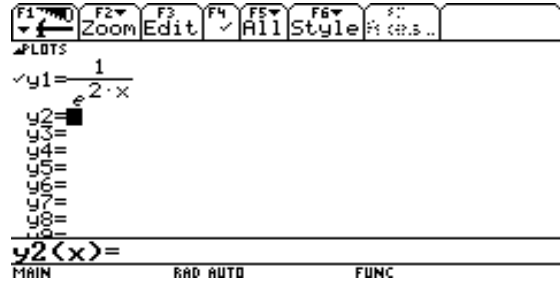
Busquemos el área pedida:



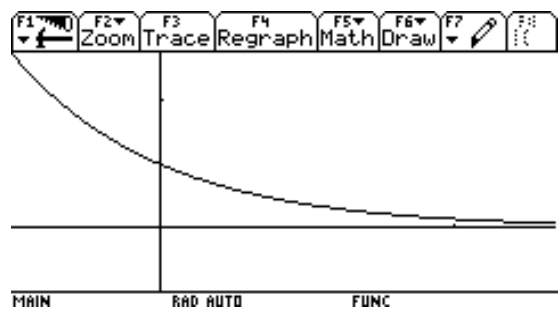
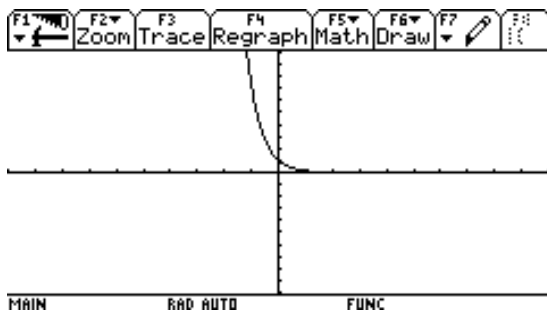
El área pedida será $2u^2$

Hallar el área limitada por la curva $y=e^{-2x}$ el eje de abscisas y la recta $x = 1$

Definimos la función:



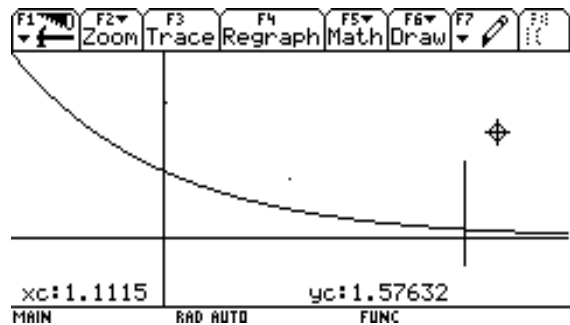
La representamos gráficamente:



[F7]: Line

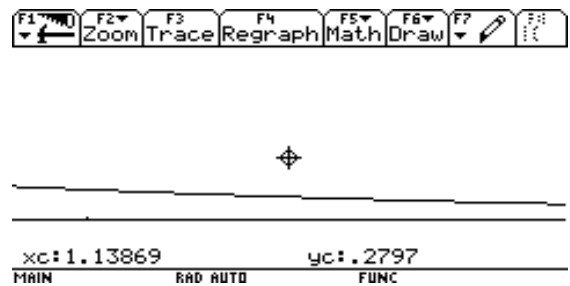
Point?

Sítuate en cualquier punto con “x” aproximadamente igual a 1 [Enter]. A continuación en cualquier otro punto con la misma abscisa que el punto anterior y [Enter]. Para acabar pulsa [ESC].

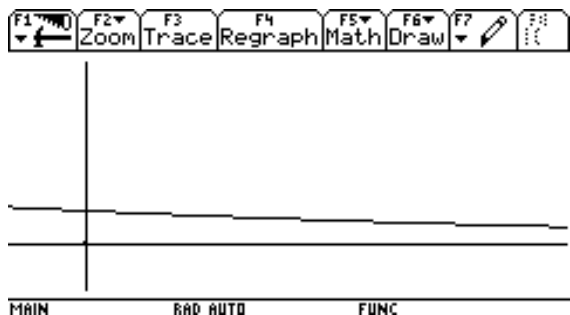


[F2]: ZoomBox

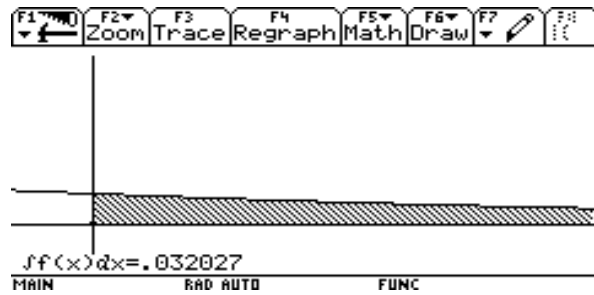
Para ver mejor el problema:



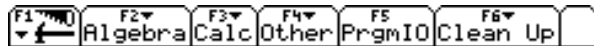
Con la recta $x = 1$:



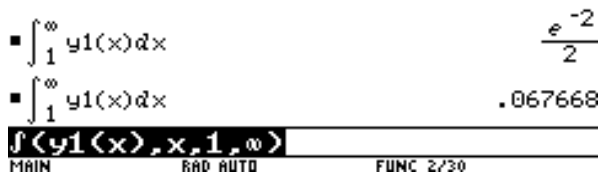
[F5]: $\int f(x)dx$



El problema está claro: el límite superior es infinito.



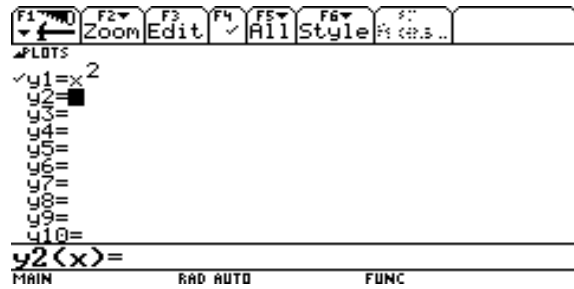
Es decir:



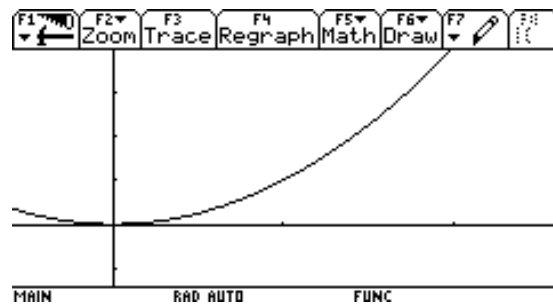
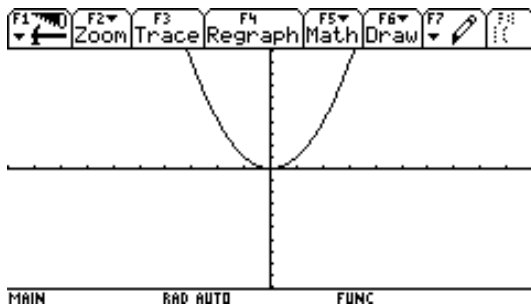
El área pedida es $\frac{1}{2e^2}u^2$

Hallar el área limitada por $y=x^2$, el eje de ordenadas y las rectas $y=1, y=3$

Definimos la función:



Representamos gráficamente el recinto cuya área nos piden:





Y por lo tanto:

- solve(y1(x) = y2(x), x) x = 4
- $\int_0^4 (y1(x) - y2(x)) dx$ 32/3
- $\int_0^4 (y1(x) - y2(x)) dx$ 10.6667

$\int (y1(x) - y2(x), x, 0, 4)$

MAIN RAD AUTO FUNC 3/30

Hallar el área limitada por la parábola $x^2 = y$ y la recta $x - y + 2 = 0$

Definimos las funciones:

F1 \leftarrow F2 Zoom F3 Edit F4 \checkmark All F5 Style F6 \leftarrow F7 \leftarrow
 \downarrow PLOTS
 \checkmark y1=x²
 \checkmark y2=x+2
 y3=
 y4=
 y5=
 y6=
 y7=
 y8=
 y9=
 y10=
y3(x)=
 MAIN RAD AUTO FUNC

Las representamos gráficamente:

F1 \leftarrow F2 Zoom F3 Trace F4 Regraph F5 Math F6 Draw F7 \leftarrow F8 \leftarrow
 MAIN RAD AUTO FUNC

Por lo tanto:

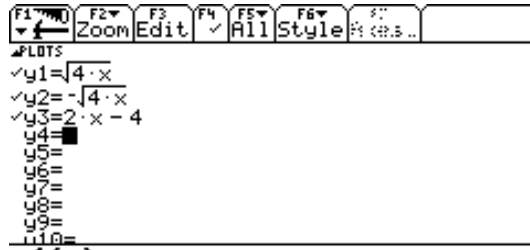
- solve(y1(x) = y2(x), x) x = -1 or x = 2
- $\int_{-1}^2 (y2(x) - y1(x)) dx$ 9/2
- $\int_{-1}^2 (y2(x) - y1(x)) dx$ 4.5

$\int (y2(x) - y1(x), x, -1, 2)$

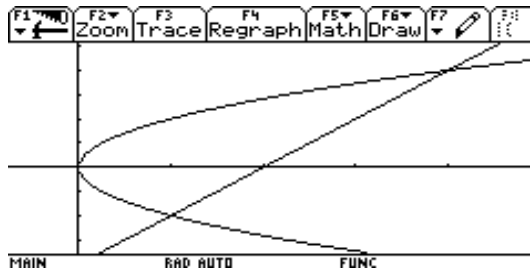
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30

Hallar el área limitada por $y^2=4x$ y la recta $2x-y-4=0$

Definimos las funciones:

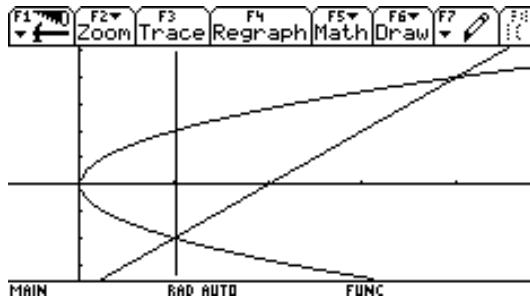


Las representamos gráficamente:



[F7]: Line

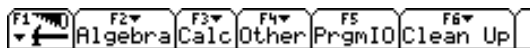
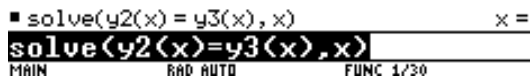
Para dibujar la línea vertical:



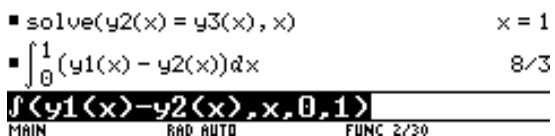
Observa atentamente la gráfica:



Primero buscamos la intersección de $y_2(x)$ y $y_3(x)$:



Buscamos el área (de la izquierda), entre $y_1(x)$ y $y_2(x)$:



Intersección entre $y_1(x)$ y $y_3(x)$, y buscamos el área (de la derecha) entre y_1 y y_3 :

| | | | | | |
|---------|------|-------|--------|----------|----|
| F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 |
| Algebra | Calc | Other | PrgmIO | Clean Up | |

- solve($y_2(x) = y_3(x), x$) $x = 1$
- $\int_0^1 (y_1(x) - y_2(x)) dx$ $8/3$
- solve($y_1(x) = y_3(x), x$) $x = 4$
- $\int_1^4 (y_1(x) - y_3(x)) dx$ $19/3$

$\int (y_1(x) - y_3(x), x, 1, 4)$

MAIN RAD AUTO FUNC 4/30

Total:

| | | | | | |
|---------|------|-------|--------|----------|----|
| F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 |
| Algebra | Calc | Other | PrgmIO | Clean Up | |

- solve($y_2(x) = y_3(x), x$) $x = 1$
- $\int_0^1 (y_1(x) - y_2(x)) dx$ $8/3$
- solve($y_1(x) = y_3(x), x$) $x = 4$
- $\int_1^4 (y_1(x) - y_3(x)) dx$ $19/3$
- $8/3 + 19/3$ 9

$8/3 + 19/3$

MAIN RAD AUTO FUNC 5/30

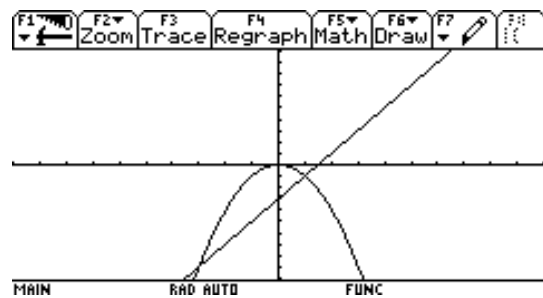
Selectividad. Castilla y León

Hállese el área del recinto limitado por la parábola $y = -x^2$ y la recta $y = 2x - 3$

| | | | | | |
|------|------|-----|-------|-----|----|
| F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 |
| Zoom | Edit | All | Style | Ans | |

$y_1 = -x^2$
 $y_2 = 2x - 3$
 $y_3 =$
 $y_4 =$
 $y_5 =$
 $y_6 =$
 $y_7 =$
 $y_8 =$
 $y_9 =$
 $y_{10} =$
 $y_3(x) =$

MAIN RAD AUTO FUNC



| | | | | | |
|---------|------|-------|--------|----------|----|
| F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 |
| Algebra | Calc | Other | PrgmIO | Clean Up | |

- solve($y_1(x) = y_2(x), x$) $x = -3$ or $x = 1$
- $\int_{-3}^1 (y_1(x) - y_2(x)) dx$ $32/3$
- $\int_{-3}^1 (y_1(x) - y_2(x)) dx$ 10.6667

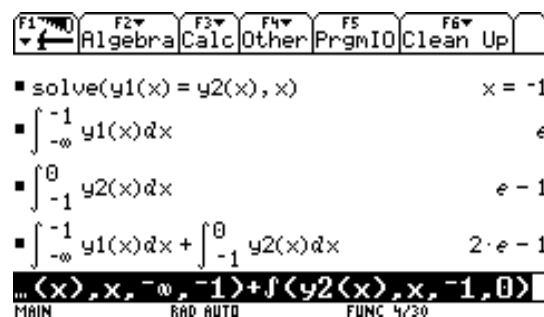
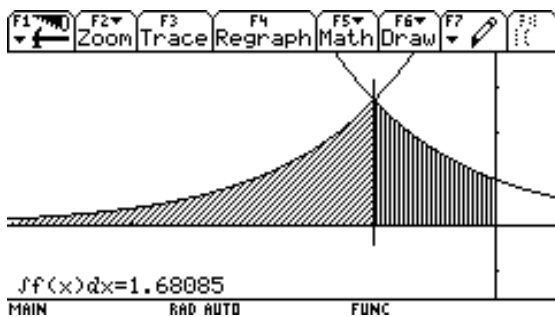
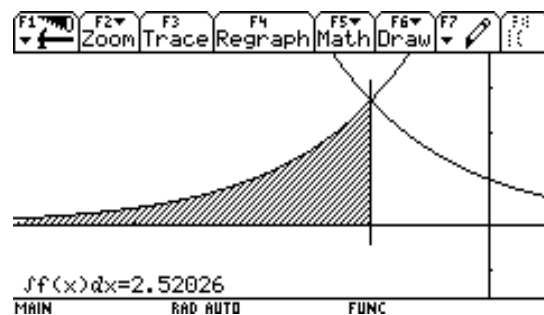
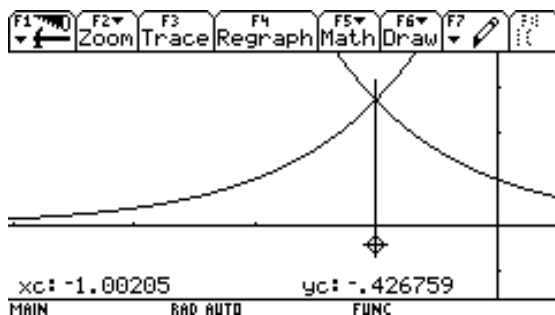
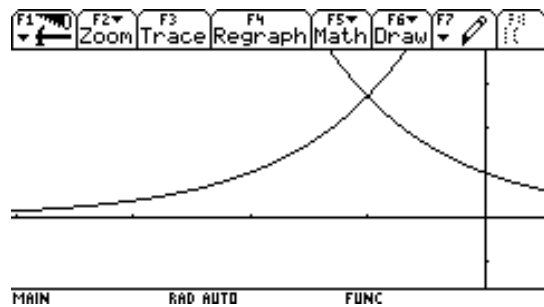
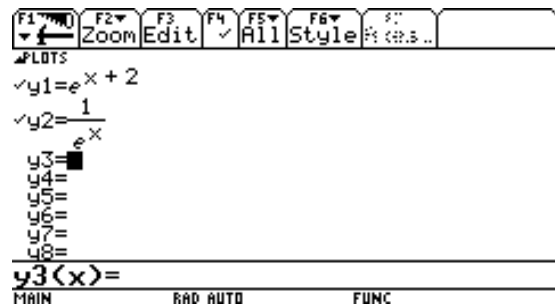
$\int (y_1(x) - y_2(x), x, -3, 1)$

MAIN RAD AUTO FUNC 3/30

Selectividad. Andalucía

a) Dibuja el recinto limitado por las curvas $y=e^{x+2}$, $y=e^{-x}$ y $x=0$

b) Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.



Selectividad. Aragón

Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$ e $y = 8x$. Halla el área de ese recinto.

The calculator interface shows the following steps:

- Function Definitions:**
 - $y_1 = \frac{1}{x^2}$
 - $y_2 = x$
 - $y_3 = 8 \cdot x$
- Graphing:** The graph shows the region bounded by the three curves. The area is divided into a grey triangle and a red region.
- Calculation Window:**
 - $\text{solve}(y_1(x) = y_3(x), x) \quad x = 1/2$
 - $\int_{0}^{1/2} (y_3(x) - y_2(x)) dx \quad 7/8$
 - $\text{solve}(y_1(x) = y_2(x), x) \quad x = 1$
 - $\int_{1/2}^1 (y_1(x) - y_2(x)) dx \quad 5/8$
 - $7/8 + 5/8 \quad 3/2$

Selectividad. Canarias

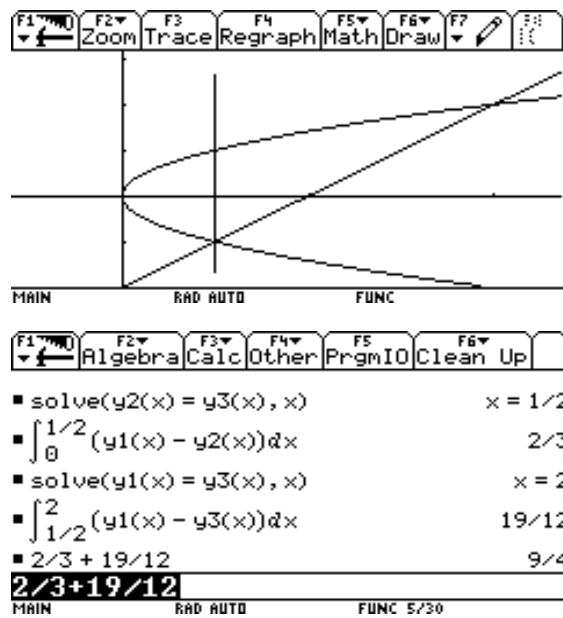
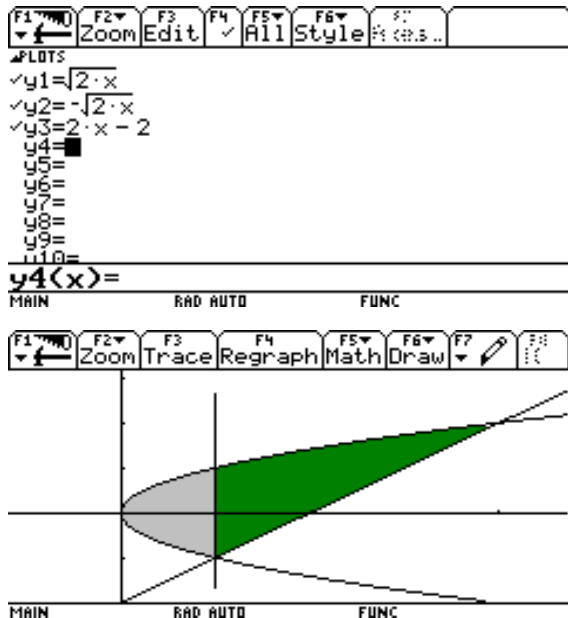
Representar gráficamente la función $g(x) = |x - 2|$ y hallar el área limitada por su gráfica, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = -1$ y $x = 3$

The calculator interface shows the following steps:

- Function Definition:** $y_1(x) = \text{abs}(x - 2)$
- Graphing:** The graph shows the V-shaped function $y = |x - 2|$ between $x = -1$ and $x = 3$. The area under the curve is shaded grey.
- Calculation Window:**
 - $\int_{-1}^2 y_1(x) dx \quad 9/2$
 - $\int_2^3 y_1(x) dx \quad 1/2$
 - $\int_{-1}^2 y_1(x) dx + \int_2^3 y_1(x) dx \quad 5$
 - Final command: $\text{f1}(y_1(x), x, -1, 2) + \text{f1}(y_1(x), x, 2, 3)$

Selectividad. Castilla La Mancha

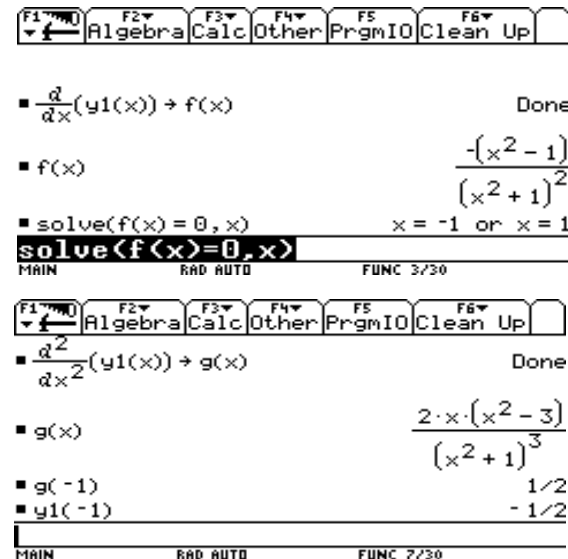
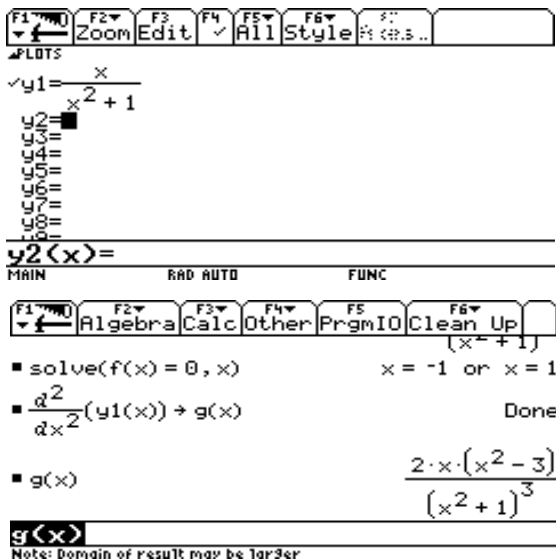
Dibujar el recinto limitado por las gráficas de $y^2=2x$, y la recta $y=2x-2$
 Calcular su área.



Selectividad. Castilla y León

Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Hallar:

- a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos.
- b) El área de la región limitada por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = -1, x = 1$



Tenemos un mínimo en $(-1, -1/2)$

| | | | | | |
|---|---------|------|-------|--------|----------|
| F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 |
| ← | Algebra | Calc | Other | PrgmIO | Clean Up |
| <ul style="list-style-type: none"> g(x) $\frac{2 \cdot x \cdot (x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$ g(-1) $1/2$ y1(-1) $-1/2$ g(1) $-1/2$ y1(1) $1/2$ | | | | | |
| y1(1) MAIN RAD AUTO FUNC 9/30 | | | | | |

Y un máximo en $(1, 1/2)$

| | | | | | | | |
|----|------|-------|---------|------|------|----|----|
| F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 | F7 | F8 |
| ← | Zoom | Trace | Regraph | Math | Draw | ↵ | ⋮ |

| | | | | |
|------|-----|------|------|------|
| MAIN | RAD | AUTO | FUNC | BATT |
|------|-----|------|------|------|

| | | | | | |
|--|---------|------|-------|--------|----------|
| F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 |
| ← | Algebra | Calc | Other | PrgmIO | Clean Up |
| <ul style="list-style-type: none"> $\int_0^{-1} y1(x) dx$ $\frac{\ln(2)}{2}$ $\int_0^1 y1(x) dx$ $\frac{\ln(2)}{2}$ $\frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(2)}{2}$ $\ln(2)$ $\frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(2)}{2}$ $.693147$ | | | | | |
| $\ln(2)/2 + \ln(2)/2$ MAIN RAD AUTO FUNC 13/30 | | | | | |

Selectividad. Cataluña

Calcula el área que tiene el único recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $y = -x^2 + 7$ e $y = \frac{6}{x}$

| | | | | | | | |
|----|------|------|----|-----|-------|----|----|
| F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 | F7 | F8 |
| ← | Zoom | Edit | ✓ | All | Style | ↵ | ⋮ |

$y1 = -x^2 + 7$
 $y2 = \frac{6}{x}$
 $y3(x) =$

| | | | |
|------|-----|------|------|
| MAIN | RAD | AUTO | FUNC |
|------|-----|------|------|

| | | | | | | | |
|----|------|-------|---------|------|------|----|----|
| F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 | F7 | F8 |
| ← | Zoom | Trace | Regraph | Math | Draw | ↵ | ⋮ |

| | | | | |
|------|-----|------|------|------|
| MAIN | RAD | AUTO | FUNC | BATT |
|------|-----|------|------|------|

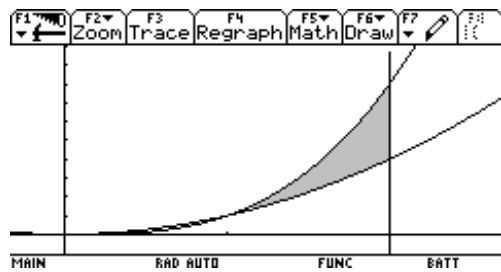
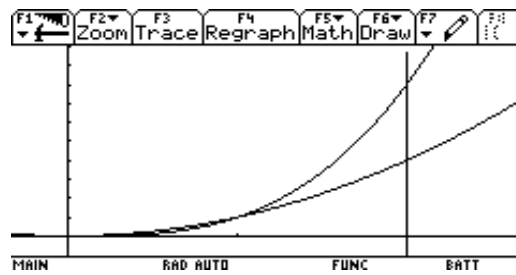
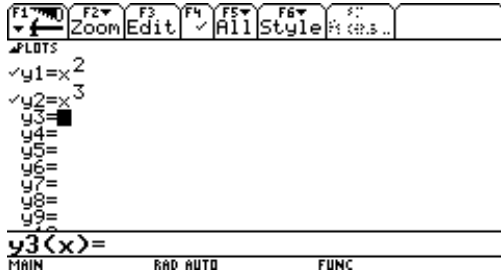
| | | | | | | | |
|----|------|-------|---------|------|------|----|----|
| F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 | F7 | F8 |
| ← | Zoom | Trace | Regraph | Math | Draw | ↵ | ⋮ |

| | | | | |
|------|-----|------|------|------|
| MAIN | RAD | AUTO | FUNC | BATT |
|------|-----|------|------|------|

| | | | | | |
|---|---------|------|-------|--------|----------|
| F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 |
| ← | Algebra | Calc | Other | PrgmIO | Clean Up |
| <ul style="list-style-type: none"> solve(y1(x) = y2(x), x) $x = -3$ or $x = 1$ or $x = 2$ $\int_1^2 (y1(x) - y2(x)) dx$ $14/3 - 6 \cdot \ln(2)$ $\int_1^2 (y1(x) - y2(x)) dx$ $.507784$ | | | | | |
| $\int (y1(x) - y2(x), x, 1, 2)$ MAIN RAD AUTO FUNC 3/30 BATT | | | | | |

Selectividad. Madrid

Sean las funciones $y=x^2$ y $f(x)=x^3$. Determinar el área encerrada por las gráficas de ambas funciones y la recta $x=2$.



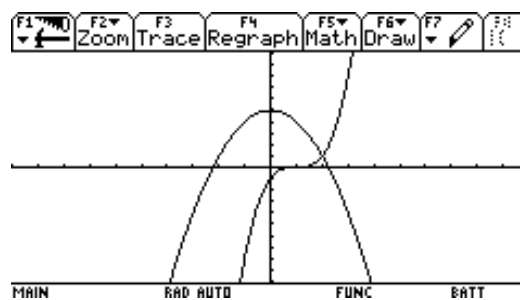
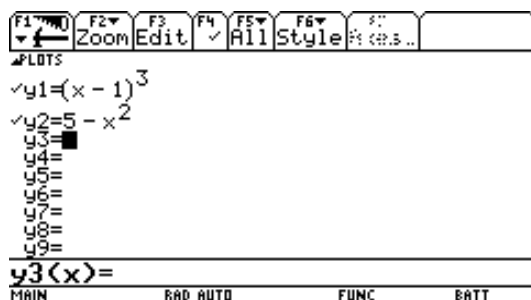
\blacksquare solve($y1(x) = y2(x), x$) $x = 0$ or $x = 1$
 \blacksquare $\int_1^2 (y2(x) - y1(x)) dx$ 17/12
 \blacksquare $\int_1^2 (y2(x) - y1(x)) dx$ 1.41667
 $\int(y2(x)-y1(x), x, 1, 2)$

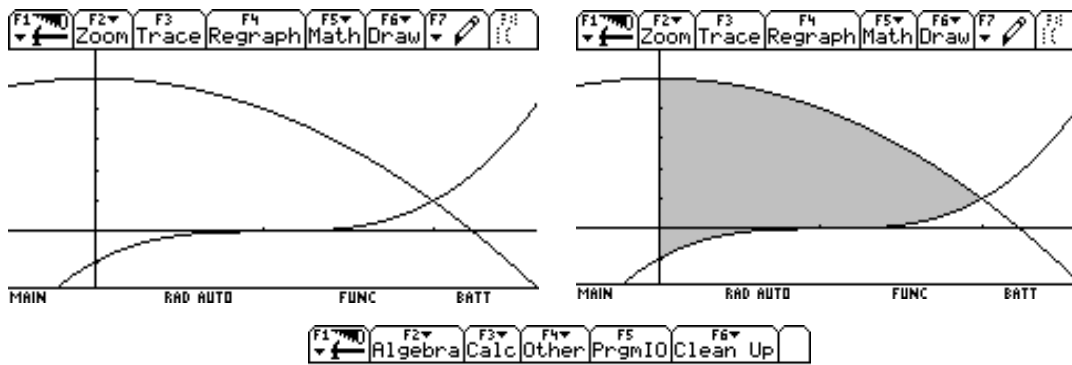
\blacksquare $\int_1^2 (y2(x) - y1(x)) dx$ 1.41667
 \blacksquare $\int (y1(x) - y2(x)) dx$
 Error: Argument must be a variable name
 \blacksquare $\int_0^1 (y1(x) - y2(x)) dx$ 1/12
 \blacksquare $17/12 + 1/12$ 3/2
 \blacksquare $17/12 + 1/12$ 1.5
17/12+1/12

Selectividad. Valencia

Dadas las curvas $y=(x-1)^3$ e $y=5-x^2$ calcular:

- a) Su punto de corte
- b) El área encerrada por ellas y el eje yo.





- solve(y1(x) = y2(x), x) x = 2
- $\int_0^2 (y2(x) - y1(x)) dx$ 22/3
- $\int_0^2 (y2(x) - y1(x)) dx$ 7.33333

$\int (y2(x) - y1(x), x, 0, 2)$

Selectividad. Extremadura

Representar gráficamente la figura plana limitada por la parábola de ecuación $x=(y-1)^2-1$ y la recta $x=0$. Calcular su área.

Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up

Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up

- solve(x=(y-1)²-1, y)

y = -(\sqrt{x+1}-1) or y = \sqrt{x+1}+1

solve(x=(y-1)²-1, y)

- solve(x=(y-1)²-1, y)
- \sqrt{x+1}+1 \rightarrow f(x) Done
- -(\sqrt{x+1}-1) \rightarrow g(x) Done

\int (\sqrt{x+1}-1) \rightarrow g(x)

Zoom Edit All Style

PLOTS

✓ y1=f(x)

✓ y2=g(x)

y3=

y4=

y5=

y6=

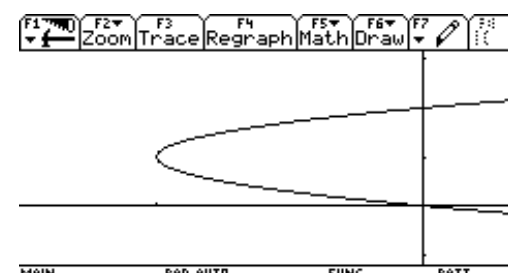
y7=

y8=

y9=

y10=

y3(x)=



Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up

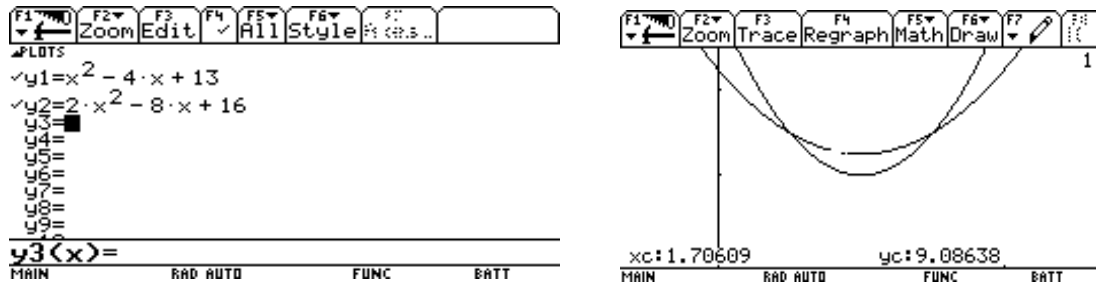
- \sqrt{x+1}+1 \rightarrow f(x) Done
- -(\sqrt{x+1}-1) \rightarrow g(x) Done
- solve(f(x) = g(x), x) x = -1
- $\int_{-1}^0 (f(x) - g(x)) dx$ 4/3
- $\int_{-1}^0 (f(x) - g(x)) dx$ 1.33333

\int (f(x)-g(x), x, -1, 0)

Selectividad. Aragón

Sean las parábolas $y = x^2 - 4x + 13$ e $y = 2x^2 - 8x + 16$

- a) Representar sus gráficas
- b) Calcular los puntos donde se cortan entre sí ambas parábolas.
- c) Hallar la superficie encerrada entre las dos parábolas.

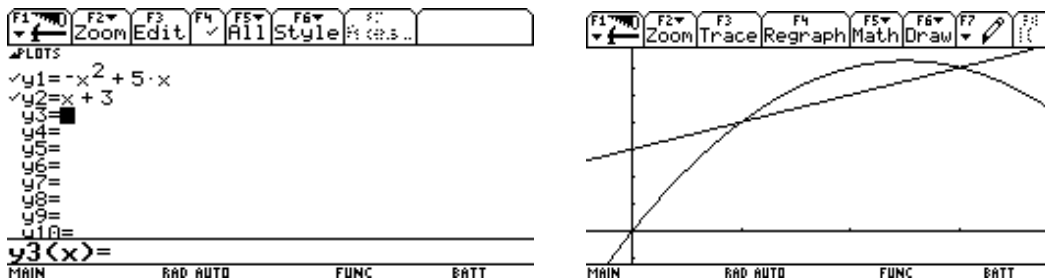


Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up

■ solve(y1(x) = y2(x), x) x = 1 or x = 3
 ■ $\int_1^3 (y1(x) - y2(x)) dx$ 4/3
 ■ $\int_1^3 (y1(x) - y2(x)) dx$ 1.33333
 $\int (y1(x) - y2(x), x, 1, 3)$

Selectividad. Canarias

- a) Dibujar el recinto plano limitado por las funciones $y = -x^2 + 5x$ y $y = x + 3$
- b) Hallar su área.



Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up

■ solve(y1(x) = y2(x), x) x = 1 or x = 3
 ■ $\int_1^3 (y1(x) - y2(x)) dx$ 4/3
 ■ $\int_1^3 (y1(x) - y2(x)) dx$ 1.33333
 $\int (y1(x) - y2(x), x, 1, 3)$