La intervención docente en la enseñanza de *los* sistemas de numeración. Las relaciones con el saber.♣

Mtros. Ignacio Caggiani, Natalia Pastrana, Cecilia de la Peña y Javier Alliaume Molfino

El ojo humano nunca ve fuera lo que
no tenía antes de alguna manera dentro.
Miguel Fernández Pérez

1 Introducción

1.1 Nota previa

Es preciso comenzar con una breve nota. El nombre de este artículo que intenta constituirse como organizador de 5º tema planteado para el concurso para la efectividad de maestros de CEP-ANEP, puede inducir a un grave error al presentarse en singular. Nos referimos específicamente a la expresión "(…) el sistema de numeración."[1].

Este singular oculta o ignora la existencia de múltiples sistemas de numeración, sistemas que en su mayoría son abordados a lo largo del ciclo escolar en diversas profundidades y con diferentes énfasis en sus propiedades particulares. Sistemas que en general suelen ser vistos como ampliaciones sucesivas, como si se tratara de matrioskas[2], lo cual no es absolutamente correcto, aunque sí existen relaciones de inclusión. (Ver apartado 'Los sistemas de numeración' más adelante).

La nota es relevante en tanto este suele ser un *obstáculo epistemológico* (ver apartado al respecto más adelante) que se instala escalonadamente en nuestras escuelas, seguramente en parte responsabilidad de lo parcializado de la forma en que se presentan los contenidos y saberes matemáticos a lo largo del ciclo escolar.

1.2 Introduciéndonos a la didáctica de las matemáticas

Sin querer entrar en la discusión acerca del carácter de la didáctica y de la existencia o no de las didácticas específicas –tema que excede por mucho a las posibilidades del presente artículo–, es necesario señalar que la concebimos como una disciplina en tanto conjunto de saberes organizados, cuyo objeto de estudio es la relación entre los saberes y su enseñanza.

> La *Didáctica de las Matemáticas* estudia los procesos de enseñanza y de aprendizaje[3] de los saberes matemáticos –en los aspectos teórico–conceptuales y de resolución de problemas– tratando de caracterizar los factores que condicionan dichos procesos. Se interesa por determinar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción.

♣ Mtros. Ignacio Caggiani, Natalia Pastrana, Cecilia de la Peña y Javier Alliaume Molfino

[1] Temario de "didáctica". Maestros de educación común. Año 2009-2010, memorando 11/09, del 29 de enero de 2009, CEP–ANEP.

[2] Muñecas rusas tradicionales, cuya originalidad consiste en que se encuentran ahuecadas por dentro, de tal manera que en su interior albergan una nueva muñeca, y ésta a su vez a otra, y ésta a su vez otra, en un número variable (pero obviamente finito).

[3] Hacemos especial énfasis en el hecho de que se trata de *dos procesos diferentes* –y no uno–, enseñar y aprender, rompiendo la ilusión a la que remite la formulación contraria. En un planteo irónico, José Ignacio Pozo se refiere a lo simple que sería la tarea docente si así fuese.

Queremos explicitar algunos supuestos, como base de acuerdo entre el lector y los autores.

Siguiendo a Chevallard (1998), sostenemos que el objeto de estudio de dicha disciplina es la relación, el interjuego que se realiza entre el docente, el estudiante y el saber matemático. Por ello proponemos utilizar el "triángulo didáctico", en tanto herramienta de análisis. Constituidos sus 3 vértices por los elementos señalados: el *saber*, el *docente* y el *alumno*. El lugar que cada uno de ellos ha ocupado en la enseñanza, define 3 tipos generales de concepciones didácticas que han dado lugar a diversos métodos de enseñanza.

Aplicando esta idea a la didáctica específica que nos preocupa, Guy Brousseau realiza la siguiente caracterización: "a) *la didáctica como técnica*: en tanto conjunto de técnicas y métodos que sirven para lograr mejores resultados; b) *la didáctica empírico–científica*: en tanto estudio de la enseñanza como disciplina científica que planifica situaciones y las analiza junto a sus resultados en forma estadística y c) *la didáctica sistémica*: en tanto ciencia que teoriza la producción y la comunicación del saber matemático en su autonomía de otras ciencias" (Villella, J. 1996).

Vamos a partir de esta tercera concepción de la *didáctica de la matemática* como ciencia autónoma, originada en Francia con la denominada "escuela francesa de la didáctica de la matemática" del IREM, en los años '70, cuyos precursores son: Guy Brousseau, Yves Vergnaud y D. Chevallard entre otros.

La definen como ciencia autónoma desde 2 postulados: i- la identificación e interpretación del objeto de interés supone el desarrollo de un cuerpo teórico y ii- este cuerpo debe ser específico del saber matemático y no provenir de la aplicación de teorías desarrolladas en otros dominios (como ser la psicología, la pedagogía u otros).

Explicitado el punto de partida, justificaremos la enseñanza de este cuerpo de conocimientos. Centrándonos en el número y los sistemas de numeración –tema que nos convoca–.

1.3 *¿Por qué enseñar matemática?*

En un breve recorrido histórico podemos ver distintas motivaciones para su enseñanza: Villella (1996) recuerda que en Egipto y Mesopotamia se enseñaba con un fin meramente utilitario: dividir cosechas, repartir campos, etc.; en Grecia su carácter era formativo, cultivador del razonamiento, complementándose con el fin instrumental en tanto desarrollo de la inteligencia y camino de búsqueda de la verdad.

Hoy podemos hablar de 3 fines: formativo, instrumental y social[4]. Teniendo en cuenta algunos contextos: de producción, de apropiación, de utilización del saber matemático. Ya nadie discute acerca del carácter democratizador y emancipador del conocimiento y dominio de esta ciencia.

1.3.1 *¿Y del número qué?*

Dentro de los conocimientos matemáticos, el número fue el primero en desarrollarse en tanto representación directa (o casi) de la realidad material (natural). Por ello parece razonable comenzar por él.

Además fundamentamos la necesidad de la enseñanza del número en tanto concepto estructurante de la propia disciplina y del proceso de apropiación de saberes matemáticos en el niño.

Queremos recalcar que en tanto producto cultural, de uso social extendido, desde muy temprano los niños y niñas se ven inmersos en ellos, ya sea escuchando cantidades, precios,

[4] Ver Sadovsky, 1991 y Salvador, Guzmán y Cólera "Matemática", Anaya, Madrid, 1991.

etc., por lo cual se hace imprescindible comenzar con su enseñanza desde los niveles iniciales (preescolares) proyectándola a lo largo de toda la escolarización. Esta noción se corresponde con la visión sistémica y procesual que postula la escuela francesa y nosotros planteamos como una imperiosa necesidad[5].

Por lo tanto proyectar la enseñanza comenzando por el campo de los naturales, ya que es el de más fácil conceptualización, requiere no desconocer ni ocultar la existencia de otros campos numéricos dado que las niñas y niños "conocen" números no naturales, evitando así la instalación de obstáculos didácticos derivados de tal parcialización, que afirmen obstáculos epistemológicos[6] relacionados a las propiedades de los distintos conjuntos numéricos.

Desde esta lógica comenzamos a introducirnos en la conceptualización del número por los naturales, avanzando hacia los otros campos numéricos.

2 Concepto de número

2.1 Hacia una definición de número

Es preciso aclarar que no existe una definición única ni acabada. Si buscamos por ejemplo en un diccionario veremos que se hallan diferentes acepciones que a su vez se refieren a distintos atributos y aspectos. Igualmente intentaremos construir el concepto. Partiremos de la historia, de la construcción humana del número, luego definiremos diferentes contextos en que el número adquiere significado,

2.1.1 El número en la historia

Siguiendo a Engels, puede considerarse al desarrollo del conocimiento como un proceso de apropiación de la naturaleza[7]. La realidad natural se transforma en una realidad humanizada en función de las distintas necesidades del Hombre y en esa transformación se genera conocimiento. Es preciso que exista un primer "reconocimiento" del objeto natural para luego insertarlo en la lógica de la actividad humana. Su consecuencia es una divergencia cada vez mayor entre el procesamiento del conocimiento cotidiano y las sucesivas elaboraciones conceptuales que se traduce en abstracciones cada vez más complejas. Estos procesos no suelen producirse en secuencia lineal porque están fuertemente condicionados por inevitables dinámicas históricas y sociales propias de cada pueblo, de cada sociedad.

Existen distintas teorías acerca de cómo el Hombre generó y utilizó el número. Describiremos este proceso a través de etapas: 1- distinción de uno y muchos; 2- necesidad de recuento de pertenencias, que implica establecer una correspondencia uno a uno, entre éstas y un conjunto de igual cantidad de elementos, cuyo representante es el número cardinal correspondiente; 3- la necesidad de registro, creándose así rótulos y etiquetas que posibilitan organizar las muestras de acuerdo al número de elementos, apareciendo así el aspecto ordinal; 4- surgimiento de los sistemas de numeración como herramienta para organizar aquellos rótulos que permitieran otros usos del número y 5- acción del conteo, uso de la secuencia ordenada de palabras número en correspondencia uno a uno de los elementos, donde el último de los elementos nombra la clase a la cual pertenece (cnf. Villella, J., 1996).

[5] Esto se encuentra en gran parte de la bibliografía de referencia. En el debate nacional está instalado desde que Alfredo Gadino lo planteara en su libro "6 años ya es tarde" (1990).

[6] Para clarificar la distinción entre los diferentes tipos de obstáculos se recomienda consultar Brousseau, G., "Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas".

[7] Engels, F., "Dialéctica de la naturaleza".

2.1.2 Contextos de significación

Nos basamos en la distinción de diversas funciones del número como un elemento para conceptualizarlo.

Existen varias clasificaciones que no difieren en lo esencial, Brissiaud distingue dos funciones principales: *representar* (para comunicar cantidades o retenerlas en la memoria); y *calcular* (establecer una cierta relación entre cantidades).

2.1.2.1 Cuantificar y representar (comunicar cantidades y retenerlas en la memoria)

Diferenciamos dos formas de representar cantidades, las colecciones de muestra y las representaciones numéricas.

Si bien ambas utilizan el criterio de correspondencia uno a uno, esta relación se establece de diferente manera.

La primera se refiere a la construcción de una colección de muestra para establecer dicha correspondencia que represente la cantidad de elementos. Por ejemplo para representar los platos puestos en una mesa se utilizan tantas piedritas como platos.

La segunda representa la cantidad con el último elemento puesto en correspondencia uno a uno. (Nótese que la diferencia radica en que con las colecciones, la cantidad se representa con todos los elementos, mientras en la segunda sólo con el último).

El segundo tipo de correspondencia puede realizarse a través de "palabras–número" (enunciación oral de la cantidad) o cifras (signo gráfico) (Brissiaud, 1993)[8], requiriéndose para ello un sistema arbitrario de signos convencional y socialmente establecido (histórico).

Aquí aparece una primera dificultad en el proceso de conceptualización del número, distinguir palabras–número y cifras, del número en sí en tanto representación arbitraria y social de una cantidad. Por ejemplo, el número 18 está formado por dos cifras ('1' y '8') y se enuncia con dos palabras–número pero se trata de un solo número.

Antes escribíamos sobre las formas de representación de las cantidades, ahora nos referiremos al *proceso de cuantificación*.

Si bien vulgarmente se utilizan indistintamente los términos contar y cuantificar, debemos hacer una distinción. Cuantificar es asignarle una medida (cantidad) a una magnitud (extensión), o sea, atribuirle valor a la extensión de una colección, determinar la cantidad de elementos que tiene.

Se puede cuantificar de manera directa o indirecta. Es decir, existen dos formas de cuantificar.

Directamente mediante *percepción global* (captación directa y exacta de la cantidad, se realiza por lo general frente a cantidades pequeñas), *conteo* (es un procedimiento largo y exacto) o *evaluación global* (se aplica a grandes cantidades y es aproximativo).

Indirectamente en ausencia del objeto o con cantidades muy grandes, mediante el cálculo.

Obsérvese que el conteo es uno de los procedimientos que permiten cuantificar. A continuación caracterizaremos estos procedimientos.

2.1.2.2 Contar y calcular

---

[8] Haciendo una analogía con el planteo de Saussure, en el ámbito de la lingüística, podemos decir que la colección de muestra se asemeja al símbolo en tanto su referente guarda una correspondencia con el significado, y el número se asemeja al signo ya que el vínculo con el referente es arbitrario. Tan arbitrario como las cifras y las palabras número.

Para comenzar aclaramos que contar y calcular son maneras distintas de establecer relaciones entre cantidades. Donde una de ellas se opone a la otra, en el sentido de que al *contar* se establece una relación entre elementos de una colección y palabras–número; mientras que al *calcular* se establece una relación directa entre cantidades, sin pasar por la construcción de colecciones cuyos elementos se cuentan.

Hay que tener en cuenta que no se cuenta con un solo propósito, sino que se hace con varios sentidos. Algunos de ellos son: comparar, ordenar, igualar, sumar y comunicar.

El proceso de contar es complejo ya que requiere: i- conocer la serie numérica o parte de ella, ii- establecer la relación biunívoca uno a uno entre los elementos a contar y las palabras–número que se recitan iii- e identificar el último término enunciado como representante de la cantidad.

Brissiaud distingue la acción de *contar–numerar* de la de *enumerar* de la siguiente manera. Al contar–numerar simplemente se asigna a cada elemento del conjunto una palabra–número que lo identifica. En tanto al enumerar, luego de contar–numerar cada uno de los elementos, la última palabra–número representa la cantidad de elementos de la colección, expresando así su cardinalidad.

Por otra parte, establecer relaciones entre cantidades a través del cálculo requiere mayores niveles de abstracción: separarse del apoyo concreto utilizando formas numéricas con cierto grado de simbolización (cifras, configuraciones estándar como los puntos de los dados, etc.).

Se entiende que existen diversas formas de calcular que permiten arribar a resultados. Si bien no todas ellas son exactas, tienen valor en tanto resuelven distintas situaciones. Por ejemplo el cálculo pensado, que no utiliza algoritmos, el cálculo sistemático o algorítmico, probabilístico, etc.

El cálculo no es el tema central de este trabajo, igualmente hacemos algunas referencias a él en tanto interviene en el proceso de conceptualización del número.

2.1.3 Contexto ordinal y cardinal

Otra distinción de contextos que le dan sentido al número, según la función que éste cumpla es la de *contexto ordinal* y *contexto cardinal*.

Cuando se pretende ordenar o seriar concentrándose en la posición de un elemento respecto de otro nos referimos al contexto ordinal, y cuando la intención es representar una colección de objetos por el valor de su extensión al contexto cardinal.

Al respecto es interesante el planteo de Brissiaud en el que destaca dificultades y confusiones que puede ocasionar el uso de estos términos para designar procedimientos. Por ej. cuando se cuenta las monedas que se tiene en el bolsillo el objetivo es definir la cantidad –cardinal– y cuando se cuenta el número de oficinas en un corredor su objetivo puede ser determinar en qué orden está la deseada –ordinal–. Por esta razón es que se determina el contexto según se de protagonismo al número como *cuantificador* o como *indicador de posición*.

2.1.4 Campos numéricos

Hasta ahora hemos tomado como referencia a los números naturales, mas existen otros *campos numéricos:* enteros, racionales, irracionales, reales (la unión de racionales e irracionales) e imaginarios.

Cada uno de ellos tiene un lugar en el desarrollo histórico del concepto de número íntimamente ligado a problemas que fue necesario resolver. Así la mayoría de los historiadores sostienen que los naturales fueron los primeros en aparecer, por su aspecto cardinal (aunque algunos plantean que en realidad fue por el aspecto ordinal).

Incluso la extensión del campo ha seguido un proceso de expansión histórica, a medida que fue necesario contar cantidades mayores (o menores). Así el cero recién aparece en ciertas culturas más avanzadas[9].

Por ejemplo frente a situaciones tales como restas en las cuales el sustraendo es mayor que el minuendo (ej. 2-5), la operación no puede ser resuelta en el campo de los naturales. Por lo que hubo que crear un nuevo campo, con nuevas propiedades.

Es importante tener en cuenta que las operaciones que se encuentran definidas en más de un campo, mantienen el nombre, pero no se definen de la misma manera. En el caso de la división, en los naturales (llamada división natural) se define de N×N en N×N, es decir, el resultado es un par ordenado (cociente y resto), 5/2=(2,1) y no 2. En los reales se define de R×R en R, entonces 5/2=2,5.

Finalmente siguiendo lo expuesto, tenemos que ante las limitaciones de cada campo para resolver nuevos problemas a los que se vieron enfrentadas las distintas culturas se hizo necesaria la conceptualización de nuevos campos (ej. para resolver $\sqrt{-1}$, se creó el campo de los imaginarios ($\sqrt{-1}=i$), etc.).

3 Los sistemas de numeración

Existen diferencias entre las propiedades universales de los números y las leyes que rigen los distintos sistemas de numeración. Entendidos estos como diferentes conjuntos de representaciones y relaciones entre los elementos representados. Son resultado de largos procesos históricos, derivando en representaciones arbitrarias y socialmente aceptadas.

3.1 El sistema decimal

Este es el sistema más popular y comúnmente utilizado, y objeto de estudio predominante de la educación básica. En nuestras escuelas, en los programas escolares es el que predomina en los primeros años. Quizás por esto el título del tema definido para el concurso de maestras efectivas sobre el que nos encontramos trabajando plantea un singular, “el sistema de numeración”, obviando al resto.

Se trata de un sistema *posicional* y *polinómico*.

Una primera consideración es que existe una gran diferencia que se constituye como problema a la hora de apropiarse del sistema, que refiere a la numeración oral y la escrita. La primera de ellas tiene una estructura aditiva (pensemos en los *dieci*, los *veinti*, etc.) y multiplicativa (cuatromil, 4 × 1000, o seiscientos, 6 × 100)[10], en tanto la segunda es polinómica (y posicional)[11], es decir el valor que representa cada cifra se obtiene multiplicando esa cifra por cierta potencia de 10 ($735=7\times10^2+3\times10^1+5\times10^0=700+30+5$).

Basándose en la naturaleza polinómica del sistema, que se describió anteriormente, los niños elaboran estrategias tanto para escribir los números, como para operar con ellos.

De la propiedad polinómica se desprenden algunas regularidades. Lerner y Sadovsky (1997) detectaron su importancia en el proceso de aprendizaje, demostrando que aparecen tempranamente y proponen algunas pautas de trabajo: “Cobran especial importancia –además

[9] Sobre esto es preciso tener en cuenta que tanto los Egipcios, los Mayas, entre otras culturas, utilizaban el cero, aunque culturas anteriores no.

[10] Sobre este problema se puede profundizar en el informe de la investigación de Lerner y Sadovsky (1997), y en Villella (1996).

[11] Un número de n–cifras: $a_na_{n-1}...a_1a_0= a_n\times10^n+ a_{n-1}\times10^{n-1}+...+ a_1\times10^1+ a_0\times10^0$. Es decir, la posición de cada cifra determina la potencia a la que se eleva la base, que se va acumulando.

de los criterios para ordenar números– «leyes» como «los ‘dieces’ van con dos, los ‘cienes’ van con tres»; «después de nueve viene cero y el otro número pasa al siguiente»; «hay diez números (de dos cifras) que empiezan con uno, diez que empiezan con dos…»” (pág. 159).

A su vez, el manejo de esta última regularidad por parte de los niños nos muestra la importancia de trabajar con los llamados *nudos* (potencias de 10 multiplicadas por determinado coeficiente, 10, 20, 100, 1000…), ya que son los que manejan en primer término, para luego ir construyendo hipótesis de escritura de los números que se ubican en los intervalos entre los nudos, tomando éstos últimos como modelo, conservando la cantidad de cifras y variando algunas de ellas.

Conocer el sistema de numeración decimal implica entonces el manejo de un conjunto de unidades de diversos tamaños, particularmente el 10, el 5 –éstos son las cantidades de dedos de una y dos manos, configuraciones primarias– y los nudos exactos.

En los sistemas posicionales el cero cumple una función esencial ya que cuando forma parte de un número de dos o más cifras plantea, al mismo tiempo la ausencia de elementos y la presencia de una posición (en 104, la potencia 10^2 se multiplica por cero, pero a su vez marca que el 1 debe multiplicarse por 10^3). Por ello constituye a su vez un problema y un elemento a trabajar (Lerner, D., 1992).

Otro importante elemento a tener en cuenta para el planteo didáctico es el que describen Brissiaud, Lerner y Sadovsky entre otros, como resultado de observaciones sistemáticas que les permitieron abstraer ciertas estrategias comunes que aplican y desarrollan los niños cuando no se les circunscribe al cálculo algorítmico.

Se trata de las *estrategias de descomposiciones y recomposiciones* derivadas de las propiedades del sistema mismo. Para facilitar el *“cálculo pensado”*, se ponen en acción estas estrategias, estrechamente vinculadas a la conceptualización del sistema de numeración en una relación de retroalimentación que tiene por eje al concepto de número. A continuación detallaremos algunas de ellas.

Estrategia de *igualación*. Permite asociar una cantidad a una adición de dos cantidades conociendo una de ellas. “Igualar con hueco”, ej. el juego de “7=3+ u 8= +4”. O =2+7”. De esta manera generan esquemas que luego aplican en distintas situaciones, a su vez esto le permite al docente trabajar distintos sentidos de una misma operación.

El niño desde muy temprano maneja con cierta facilidad los *“números dobles”* (4+4, 3+3, $x+x$), así como las *relaciones numéricas del 5 y el 10 con otro número* (5+x, 10+x), esquemas que agilizan el cálculo mental, evitándoles el reconteo (o sobreconteo).

El manejo de algunas cantidades como unidades (como se mencionó con anterioridad), les permite desarrollar estrategias para descomponer al momento de operar, tales como la *“vuelta al 5”* y *“vuelta al 10”*. De esta manera utilizan *“formas conocidas”*. Un ejemplo: al resolver 8+2 (mediante la “vuelta al 5”) descomponen el 8 en 5+3, para luego sumar 2. Esto mismo se ve con el 10. También se aplica con otros nudos mayores, lo que se describe como *suma natural*, p.ej. 23+42 = 20+40+3+2.

De manera análoga, en el *“paso a la decena”*, se compone la decena a partir de la descomposición previa tomando como base el número mayor y “formas conocidas”. Ej. 8+4 = 8+2+2, donde se descompuso el 4 en 2+2, de manera de aplicar la forma conocida 8+2=10.

Otra estrategia que encontraron es el uso de *operaciones prefijadas*, a las que otros autores denominan *“tablas de sumar”* (Brissiaud) u *“operaciones simples”* (Kamii). Esta estrategia se constituye en una herramienta poderosa como complemento de otras estrategias como descomponer y recomponer (si la conocida es 8+2, entonces el niño puede calcular 8+4, como 8+2+2).

Reiteramos que todas estas estrategias son poderosas en tanto no sean impuestas o enseñadas en el sentido estricto. Sino detectadas, explicitadas, razonadas, colectivizadas y puestas en aplicación.

3.2 El proceso de apropiación de la numeración

En toda acción de planificación es importante conocer los procesos de aprendizaje que permiten a los niños apropiarse y desarrollar conocimientos.

Siguiendo la lógica de Emilia Ferreiro[12], Delia Lerner dirigió una investigación (cuyo informe ya ha sido citado) acerca de cómo los niños abstraen propiedades a partir de su contacto cotidiano con los números.

Lerner y su equipo constataron que construyen y manejan hipótesis principalmente para comparar y ordenar, así como para pasar de la numeración hablada a la escrita. Ellas se hacen visibles en expresiones como, "este es más grande, ¿no ves que tiene más números?", "el primero es el que manda". La primera refiere a la cantidad de cifras y su relación con la magnitud del número, ligada a la naturaleza polinómica; la segunda a la posición de las cifras como criterio de comparación.

Asimismo destacan que la apropiación de la escritura convencional no sigue el orden de la serie numérica. Los niños manejan primero los nudos y luego "rellenan" entre ellos. No sin problemas dado que la numeración hablada es aditiva y no polinómica (así transcriben treinta y cinco como 305).

En lo que sigue describiremos otros obstáculos que se presentan en los procesos de aprendizaje y de enseñanza, y la problematización como recurso.

4 Los problemas en la enseñanza y el aprendizaje

4.1 Obstáculos

Un primer problema es de orden formal, el currículo para Escuelas Primarias, históricamente ha parcializado el abordaje tanto de los números naturales, como de los distintos campos numéricos (incluso dejando de lado los imaginarios) y ha establecido un orden cronológico que además no sigue el orden de inclusión de los campos según sus propiedades[13]. No obstante, este aspecto ha sido revisado en el reciente cambio programático, dando lugar al conjunto de los números racionales desde el nivel inicial. Se propone el abordaje de forma secuenciada del campo de los naturales, enteros y racionales de manera simultánea.

Sin embargo, queda planteada la duda acerca de si la introducción en forma simultánea sin considerar las predisposiciones psicológicas de los niños en los diferentes grados conducirá a mejorar la adquisición del sistema de numeración decimal. Quizas una de las cuestiones que pudieran influir positivamente en este aspecto es el mejoramiento de la formación de los docentes en el área de la matemática tendiendo a que estos desarrollen conocimientos profundos que les permitan abordar los nuevos desafíos en la enseñanza de las matemáticas en la escuela.

Esto favorece la instalación de ciertos obstáculos *ontológicos, epistemológicos y didácticos*.

Los ontológicos refieren a los procesos de maduración y de las estructuras de conocimiento que posea y pueda desarrollar.

Los epistemológicos refieren a errores que derivan del objeto mismo, por ejemplo el trasvasado de propiedades de un campo a otro en el que no se cumplen (es clásico el tratar a

[12] Cuando investigó acerca de la reconstrucción de uno de los sistemas de representación, la escritura, desde una perspectiva psicogenética (recordemos que fue alumna de Piaget).

[13] Sobre este tema existe un trabajo realizado por la Prof. Ingrid Hack, titulado "Aportes para la comprensión del fenómenos de los números en la escuela".

los racionales como dos naturales y mantener la idea de que entre dos racionales no existe otro u otros, propiedad de densidad de los racionales)[14].

Y los didácticos son aquellos que introducen los maestros que no derivan de propiedades del objeto de estudio. Tales como: que el resultado de una división natural es atómico; que dividir achica o es sólo una resta abreviada; que multiplicar agranda o es sólo una suma abreviada; no presentar a las fracciones y los decimales como dos maneras de representar a un subconjunto de los racionales (ej. 0,5=1/2); no introducir el error al realizar mediciones o al trabajar probabilidades; etc.

4.2 De los desafíos a la hora de pensar la propuesta didáctica

En este apartado haremos una brevísima referencia a diferentes planteos que deberían ser tenidos en cuenta a la hora de proyectar la propuesta didáctica.

Cualquier pretensión de enseñarle a un niño, no debe desconocer la distancia que existe entre el saber o conocimiento erudito (académico) y las posibilidades que tiene el sujeto de conceptualizarlo. El proceso mediante el cual el saber académico se transforma a efectos de ser enseñado se denomina *"transposición didáctica"* y fue desarrollado por Chevallard.

Este proceso que implica simplificaciones, recortes, etc., expone al conocimiento a deformaciones que pueden vaciarlo de contenido, poniendo en riesgo su significado. Cobra significado aquí el concepto de "vigilancia epistemológica"[15].

La propuesta analítica de criterios de adquisición de los conceptos de Vergnaud complementa la de Chevallard en tanto la primera se ocupa del enseñar en cuanto al saber que se enseña y ésta en definir qué es necesario para que un concepto pueda ser aprendido.

Un concepto se adquiere si: a) es operativo, es decir, si permite enfrentar una situación nueva y resolverla con dicho concepto (el pensamiento es conceptual y obedece simultáneamente a criterios prácticos y teóricos); b) se construye a lo largo del tiempo, el concepto se aplica en distintos contextos y problemas, permitiendo descubrir distintas propiedades del mismo; c) se distingue significado de significante (concepto de su representación).

Explicitadas estas consideraciones sobre la enseñanza y el aprendizaje, nos ocuparemos de una estrategia didáctica profundamente fundamentada. La misma es esencia de la didáctica de la matemática.

4.2.1 La problematización como estrategia didáctica globalizadora

Para dar respuesta al análisis anterior, proponemos una posible metodología. El abordaje de los diversos contenidos a enseñar a través del planteo y la resolución de problemas. Charnay (1988) profundiza a este respecto revisando el lugar que toma el problema en los tres modelos didácticos (desde las relaciones del "triángulo didáctico"): *el problema como criterio del aprendizaje* (modelo normativo), *el problema como móvil* (modelo incitativo) y *el problema como recurso* (modelo apropiativo).

Sostenemos que el problema debe ser utilizado como elemento gestor del aprendizaje, sin desmedro de los otros usos que se le pueden dar a dicho recurso (p.ej. evaluación, utilización de conocimientos ya adquiridos en otros campos). Quizás lo más importante sea tener en cuenta que el problema debe tener un fuerte componente de obstáculo, siempre que el alumno se vea enfrentado a una situación que no pueda resolver mediante la simple aplicación de un esquema conocido (lo cual constituiría un ejercicio), estaremos frente a un "problema".

[14] Brousseau se refiere a los obstáculos epistemológicos como "conocimientos adaptados"

[15] Bourdieu, P., Chamboredon, J-C y Passeron, J. C. (1999). "El Oficio de Sociólogo". Siglo Veintiuno, Madrid, pp. 19, 27 y 14.

El problema por ser una herramienta didáctica que permite no sólo la reproducción de conocimientos sino también la producción de los mismos, ejerce una acción liberadora, por lo cual es una buena opción teleológica.

Al momento de planificar una propuesta problematizadora existen al menos dos teorías que permiten vehiculizarla. La teoría de las *"situaciones didácticas"* de Brousseau y el planteo de Brissiaud.

Si bien hemos presentado a diversos autores de la "escuela francesa", es preciso mencionar que Brissiaud critica a las "situaciones didácticas" en tanto estas se centran en el postulado piagetiano acerca del modo en que se aprende. Proceso individual en que de la interacción entre el sujeto y el objeto se logran adaptaciones sucesivas mediante los conflictos cognitivos (cuando una estructura de conocimiento no alcanza para comprender cierto fenómeno).

Éste en cambio formula su propuesta didáctica a partir del *"método instrumental"* de Vygotsky, planteando la necesidad de analizar los distintos sistemas simbólicos y sus propiedades a partir de los cuales se piensa la enseñanza. En tanto éstos constituyen herramientas de pensamiento social e históricamente construidas (aquí se sigue a Vygotsky), no es natural que el niño reconstruya individual o colectivamente el proceso que sus predecesores siguieron para construir el conocimiento que se pretende aprenda.

Ante una situación problema, no es necesario que el niño la resuelva primero utilizando estrategias de "nivel inferior", p. ej. contar todos los elementos de una colección, para lograr progresivamente procedimientos de "nivel superior". Como en el caso de los hechos numéricos. Así es que se puede proveer directamente al niño, mediante la intervención docente de ciertas herramientas sin obligarlo a esperar a que las reconstruya.

Describiremos sucintamente los diferentes tipos de situaciones didácticas que postula Brousseau. Se trata de un tipo de organización del trabajo didáctico en el que se realiza una intervención ("situación didáctica") al planificar e instalar un problema y luego se atraviesan tres *"situaciones a–didácticas"* y una última "situación didáctica".

Las características de las siutaciones a–didácticas son: i- la no intervención por parte del docente en la relación entre el sujeto de aprendizaje y el objeto de aprendizaje; ii- la instalación de la necesidad de aprender en el niño (para superar el obstáculo) y iii- la "sanción" como método de evaluación de los propios aprendizajes.

Las fases a–didácticas son: a) situaciones de acción, el alumno actúa sobre un medio material o simbólico, poniendo en juego los conocimientos para resolver el problema; b) situaciones de formulación, el o los alumnos deben representar para poder comunicar la información que han obtenido/elaborado (cabe destacar que para ello muchas veces deben modificar y/o ampliar su lenguaje), permitiendo que los receptores puedan utilizar esa información y c) situaciones de validación, en que deben debatir y convencer al resto de que sus afirmaciones son verdaderas, y los receptores deben "sancionar" el grado de veracidad, aquí entran en juego recursos como preguntas, pruebas empíricas, etc.

Por último atendiendo a la necesidad social de validar el aprendizaje (conocimiento construido) y que el niño reciba dicha validación, y asuma la significación social del mismo, se instala una situación de institucionalización. En ella se pretende relacionar el conocimiento producido con el culturalmente aceptado.

Durante las fases a–didácticas el docente no interviene entre el sujeto y el objeto, sino que lo hace para pautar y sostener el marco en que dicha relación se mantiene.

5 Hacia una propuesta didáctica

Siguiendo la fundamentación de Vergnaud, en tanto concebimos el concepto como un ente multifacético, proponemos se planifique de manera secuenciada atendiendo en cada propuesta una propiedad o faceta del concepto que se desea enseñar. Realizaremos algunas propuestas que ilustran qué conceptos consideramos indispensable trabajar en los tres niveles para acceder al concepto de número y los sistemas de numeración.

La evaluación de conocimientos al comenzar el nivel es la primera tarea a emprender. Se debe evaluar no solo los conocimientos alcanzados por los niños sino también las estrategias que son capaces de desarrollar y las posibilidades de resolver problemas.

Para ello *el juego* es un elemento de valor didáctico. Al respecto existen varias posturas. Sostenemos que no se debe quitar al juego su carácter lúdico y espontáneo. Es interesante que para poder jugar satisfactoriamente el niño deba superar obstáculos, tal como cuando se plantea un problema. Ahora bien el juego se transforma en recurso didáctico cuando el docente lo propone sabiendo que para poder jugar el niño deberá poner en acción ciertos conocimientos.

En cuanto al abordaje por niveles, en el primero el niño debe aprender que el número tiene dos contextos de significación, cardinal y ordinal, y sirve para contar y calcular. Además debe manejar las decenas en tanto agrupación de unidades (en 1º) y de centenas como agrupación de 10 decenas y 100 unidades (en 2º)[16].

Esto implica proponer actividades en las que deba cuantificar y ordenar. Para trabajar dentro del contexto cardinal el niño debe agrupar, comparar, aparear, clasificar; manipulando objetos, utilizando el cuerpo, etc., permitiéndole relacionar lo experimentado con representaciones de un mayor orden simbólico.

En relación a los recursos didácticos presentamos la importancia de las colecciones de muestra, el uso de los dedos, de constelaciones como elementos que facilitan la comparación y la cuantificación.

Se puede trabajar con: canciones en las que se recite parte de la serie numérica; juegos y juegos cancionados en los que se represente parte de la serie numérica con los dedos; cacerías de números ("buscar cosas que tengan…"); trabajar con el número de la fecha representándolo con los dedos (¿cómo resolverlo luego del 10 de cada mes?); juegos de agregar; de quitar; ya sea de a uno o más elementos; trabajar con los números de la clase (cuántos son, cuántos faltaron, cuántas sillas necesitamos, cuántas mesas); utilizar el calendario; trabajo con dados, tetraedros (numerados o con constelaciones), ruletas numéricas (con constelaciones numéricas o signos arábigos).

En varios de estas actividades se pueden plantear problemas, introduciendo "trampas didácticas", distractores.

Algunos de estos recursos sirven también para trabajar en el contexto ordinal. Incluimos algunos específicos: trabajar en coordinación con la construcción de la noción de tiempo; seriar acciones; figuras; identificar una cantidad entre otras en una serie numérica oral o escrita; ordenar una serie de números (que en un segundo momento puede ser no correlativa).

Para descubrir las funciones de contar y calcular, proponemos actividades y estrategias que deben guiar la práctica a: descubrir regularidades, producir escrituras y otras representaciones, así como interpretarlas, componer y descomponer números. Descubrir "leyes" del sistema numérico, promover el cálculo mental tal como se describió anteriormente.

A este respecto, reiteramos que es importante el uso de los dedos, de constelaciones (configuraciones estándar).

[16] Lo que no implica desconocer la existencia de números mayores y trabajar con ellos.

En segundo nivel el currículo introduce los números racionales[17]. En sus expresiones fraccional y decimal.

Es necesario recordar cómo y por qué surge este campo de manera de poder problematizar y secuenciar su enseñanza.

En primer lugar no debemos olvidar que cada número racional tiene infinitas representaciones fraccionales (ej. $^2/_5={}^8/_{20}={}^{2n}/_{5n}$), no todos ellos son decimales (es decir, no todas admiten ser representadas "con coma", con un número finito de cifras, p.ej. $^2/_3$)[18], a su vez no confundir las fracciones con los números decimales[19]. Cuando trabajamos con escalas, porcentajes, divisiones de números decimales (que son un sub–conjunto de los racionales), estamos trabajando con fracciones equivalentes (ej. "8 dividido 4" es equivalente a $^2/_1$, $^1/_3$=33%)[20].

Previa y simultáneamente se debe trabajar con proporciones (desde 2º año, el doble de…, la mitad de…), razones, equivalencias, porcentajes, escalas, la fracción como relación parte–parte y relación parte–todo.

En el tercer nivel se trabaja explícitamente el concepto de razón, proporción, se introducen algunos números irracionales (aquellos que no admiten una representación decimal, p.ej. ¶ –Pi–, √ y exponenciación). Por lo que es fundamental relacionar la definición de estos conceptos con los anteriores. Por ejemplo, al trabajar las razones, es importante hacer visible el hecho de que ya conocen razones (una de las facetas de las fracciones).

Además es el momento apropiado para analizar diversos sistemas de numeración (binario, sexagecimal, etc.), dado que ya manejan suficientes elementos como para realizar comparaciones y conversiones. Dicho contenido permite profundizar en la construcción del concepto de número.

Cerrando este apartado queremos plantear la necesidad de permitir la experimentación, incluso más allá de los conceptos prescriptos para el nivel y grado. Esto, como ya dijimos, permite abstraer propiedades y generalizar las experiencias de la vida cotidiana.

6 Breve nota sobre evaluación

En la bibliografía actual sobre el tema se diferencia la evaluación inicial (o diagnóstica), formativa y sumativa. Dado que no es el centro de este tema, nos referiremos someramente a cómo se debería evaluar.

Coherentemente con el planteo que venimos realizando, visualizamos la evaluación como un proceso que permite situarnos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje tanto al momento de comenzar una secuencia, como durante su desarrollo y a término. Su función es pues, la de detectar los conocimientos sobre determinado concepto, su distancia con el concepto a enseñar y así diseñar los caminos posibles y las correcciones sobre la marcha.

Se debe dar en dos dimensiones: la evaluación del docente y la autoevaluación por parte de los niños.

Nuevamente se introduce el problema como recurso, dado que el planteo de situaciones en las cuales los niños deben poner en juego sus saberes para resolverlas, va más allá que la mera repetición de los mismos.

[17] Sobre el abordaje de los racionales, se puede ver Héctor Ponce, "Enseñar y aprender matemática. Propuestas para el segundo ciclo", Ediciones Novedades Educativas, Bs. As., 1999

[18] Una fracción decimal es aquella cuyo denominador es un múltiplo de 10

[19] Todo número decimal es pasible de ser representado mediante una familia de fracciones decimales.

[20] Es interesante el planteo que hace Liliana Pazos, en "La Razón de las Fracciones", Revista QueHacer Educativo Nº 57, febrero 2003.

Para cerrar queremos dejar claro que la intención de este artículo no va más allá del presentar algunas de las reflexiones en torno al tema propuesto, articulando e integrando diversos aportes. Por lo mismo no debe ser tomado sino como un posible organizador para preparar el tema.

7 Bibliografía consultada

- A.N.E.P. - C.E.P., (2008). "Programa de Educación Inicial y Primaria, versión digital disponible en *www.cep.edu.uy*.
- AA.VV. en revista QueHacer Educativo, números 28, 51, 53, 57, 58, 62, 63, Fondo Editorial QuEduca, FUM–TEP, Montevideo.
- Bourdieu, P., Chamboredon, J-C y Passeron, J. C. (1999). "El Oficio de Sociólogo", Siglo Veintiuno, Madrid.
- Brissiaud, R. (1993). "El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y de la teoría de conjuntos", Visor, Madrid.
- Brousseau, G. (1986). "Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática", trad. de su tesis de graduación, Facultad de Matemática, Universidad de Córdoba.
- Brousseau, G. (1999) "Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas", Traducción con fines de trabajo educativo sin referencia. Reeditado como documento de trabajo para el PMME de la UNISON por Hernández y Villalba del original en francés: BROUSSEAU, G. (1983), 'Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.
- Charnay, R. (orig. fr., 1988) "Aprender (por medio de) la resolución de problemas", en Parra y Saiz (1992).
- Chevallard, Y. (1991). "La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado", Aique, Bs. As. [Texto parcial en: http://www.psi.uba.ar/academica/carrerasdegrado/profesorado/informacion_adicional/didactica_general/biblioteca_digital/chevallard.pdf]
- Gadino, A. (1990). "6 años ya es tarde", Aula, Montevideo.
- Hack, I. (2002). "Aportes para la comprensión del fenómenos de los números en la escuela", mímeo, Montevideo.
- Kamii, C. (1986). "El niño reinventa la aritmética", Visor Libros, España.
- Kamii, C. (1992). "Reinventando la aritmética II", Visor Distribuciones, España.
- Lerner, D. (1992). "La matemática en la escuela aquí y ahora.", Aique, Bs. As.
- Lerner, D. y Sadovsky, P. (1997). "El sistema de numeración: un problema didáctico.", en Parra, C. y Saiz, I. (1997).
- Panizza, M. (2003). "Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas", en Panizza, M. (comp.) (2003).
- Parra, C. y Saiz, I. (1992). "Los niños, los maestros y los números", Secretaría de Educación, MCBA, Bs. As.
- Parra, C. y Saiz, I. (comps.) (1997). "Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones", Piados Educador, Bs. As.
- Pena, M. (2002). "¿Qué hago este año con las matemáticas?", en Revista de la Educación del Pueblo Nº 85, marzo–abril 2002, Aula, Montevideo.
- Ponce, H. (1999). "Enseñar y aprender matemática. Propuestas para el segundo ciclo", Ediciones Novedades Educativas, Bs. As.
- Sadovsky, P. (1996). "Pensar la matemática en la escuela.", en Poggi, M. (comp.) colección "Triángulos Pedagógicos «Apuntes y arpotes para la gestión curricular»", Kapelutz, Bs. As.

- Vergnaud, Y. (1993). "El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de la matemática.", Trillas, México.
- Villella, J. (1996). "Sugerencias para la clase de matemática", Aique, Bs. As.

8 Bibliografía recomendada

- Chemello, G. (1997). "La Matemática y su didáctica. Nuevos y antiguos debates", en Iaies, G. "Didácticas especiales. Estado del debate.", Aique, Bs. As.
- D'Amore, B. (1997). "Problemas. Pedagogía y psicología de las matemáticas en la actividad de la resolución de problemas.", Síntesis, Madrid.
- D'Amore, B (2000). "Escolarización del saber y de las relaciones: efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas", Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, noviembre, año/vol. 3, número 003 Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Distrito Federal, México pp. 321-337, versión digital en: http://www.clame.org.mx/relime/20000305.pdf
- Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). "El aprendizaje de las matemáticas", Edit. Labor – M.E.C., España.
- Iaies, G. (comp.) (1998). "Los CBC y la enseñanza de la matemática", A.Z., Bs. As.
- Ifrah, G. (1994). "Las cifras. Historia de la primera gran invención" , Alianza, Madrid.
- Nunes, T. y Bryant, P. (1997). "Las matemáticas y su aplicación. La perspectiva del niño", Siglo XXI Editores, México.
- Panizza, M. (comp.) (2003). "Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y Primer Ciclo de EGB, Análisis y propuestas", Paidós, Bs. As.