Carolina Solano
Daniel Victoria
Edilson Quiñonez
Rowinson Gallego

MÉTODO DEL CENTRO DE GRAVEDAD

DEFINICIÓN

Es un modelo matemático que se utiliza para la localización de plantas de fabricación o almacenes de distribución respecto a unos puntos ya establecidos de la empresa, desde donde se producen salidas o hacia donde se llevan productos o materias primas. Este método de localización toma en cuenta tres factores de transporte:

- C_i: Coste de transporte por unidad
- V_i: Volumen transportado de la unidad *i*
- d_i: Distancia recorrida en el transporte de la unidad *i*

El objetivo primordial de este método es el de encontrar la mejor ubicación de una instalación dada de una empresa con respecto a los demás elementos que la conforman, para garantizar el mínimo Coste Total de Transporte.

El Coste Total de Transporte o CTT se define como la sumatoria del producto entre el coste de transporte c_i, el volumen transportado v_i y la distancia recorrida d_i. Esto es:

$$CTT = \sum c_i v_i d_i \qquad [1]$$

Donde el subíndice *i* en cada término indica un elemento o instalación de la empresa. Es decir, c_i indica el coste unitario de transporte desde/hacia la unidad *i*. v_i indica el volumen de los materiales transportados desde o hacia *i* y d_i es la distancia entre la unidad *i* y la instalación que se desea ubicar.

Por otro lado, al producto

$$c_i v_i \equiv w_i \qquad [2]$$

Se le define como **peso**, ó w_i, del *i-ésimo* elemento; también se le conoce como la importancia de cada punto *i* en el plano de ubicación.

MODO DE MEDIR DISTANCIAS ENTRE DOS O MÁS PUNTOS

Existen dos modos para la medición de distancias entre diferentes elementos ya establecidos que se van a considerar con respecto a la ubicación de la nueva instalación. Es decir, son dos formas diferentes de considerar la medida de las trayectorias que conectarán los puntos que se van a tomar en cuenta. El primero, el que mira la distancia **rectangular**, toma en cuenta sólo movimientos de 90°; mientras que el segundo, el que toma en cuenta la distancia **euclídea**, permite movimientos en diagonal. Ver **fig. 1**.

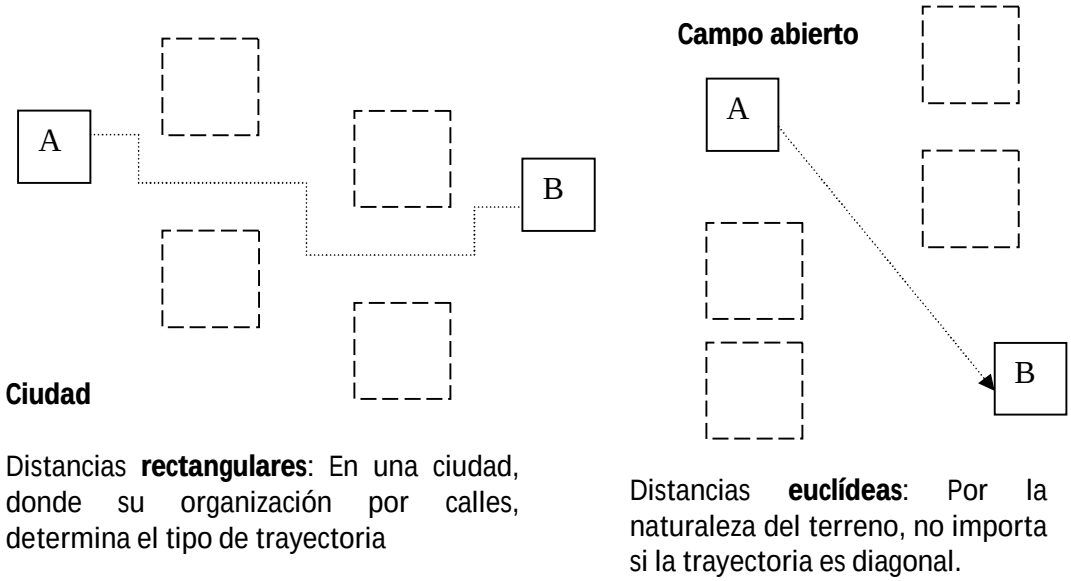


Fig. 1: Diferencia entre distancia rectangular y distancia euclídea según las características del territorio.

La aplicación de uno de estos dos modos de medir distancias, en un problema de ubicación, depende de la organización y las características del lugar en donde se desee situar la nueva instalación.

Distancia rectangular

Esta toma las distancias entre dos puntos considerando solamente dos tipos de movimiento: el vertical y el horizontal. Para la representación de la distancia entre dos puntos A y B situados en un plano a escala *K*, se tiene que:

$$d = K(|x - x_i| + |y - y_i|) \qquad [3]$$

Donde las *x* representan a la pareja abscisa y las *y* a la pareja ordenada de los dos puntos.

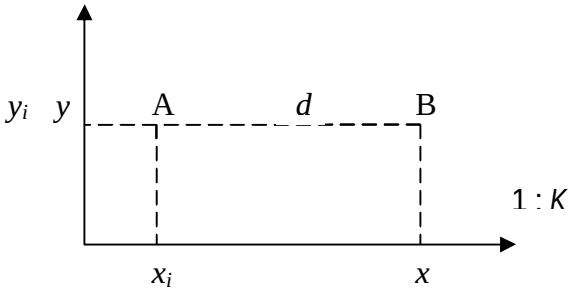


Fig. 2: Trayectoria rectangular para movimiento horizontal.

Distancia euclídea

Esta, es la distancia de una línea recta que une a los dos puntos A y B, permitiendo trayectorias oblicuas. Esta distancia viene dada por la siguiente expresión:

$$d = K\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \qquad [4]$$

Esta expresión se desprende del teorema de Pitágoras.

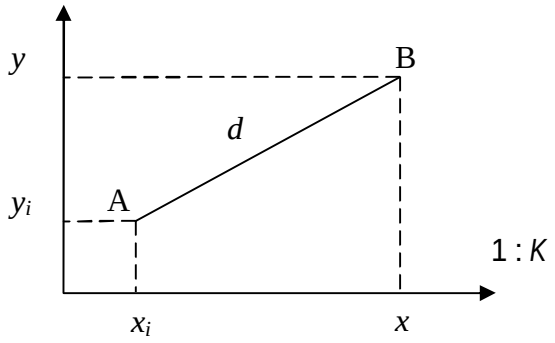


Fig. 3: Trayectoria directa entre dos puntos. Esta es una trayectoria inclinada. Su magnitud se halla mediante el uso del teorema de Pitágoras.

Ejemplo 1: *Según la figura 1, se desea saber la distancia entre dos plantas A y B, situadas en dos tipos de lugares con características distintas: en una ciudad y a campo abierto. Determinar el tipo de distancia que se presenta en cada caso.*

Caso 1: En una ciudad. Aquí, se debe tener en cuenta que la distancia entre las plantas A y B, de una empresa, que se ubican en una ciudad, no es la distancia medida desde A hacia B directamente, sin tomar en cuenta la influencia de la organización típica de una ciudad. Ya que el tipo de trayectorias que generalmente se encuentran en una ciudad son de 90°, horizontales o verticales, debido a su organización en bloques, se debe de medir la distancia **rectangular** entre dichos puntos.

Caso 2: En el caso de ser a campo abierto, en la figura 1 se observa que ya no existen condicionamientos que impidan tomar la trayectoria directa desde la planta A hacia la planta B. Por lo tanto, en este caso, conviene tomar la distancia **euclídea** como la distancia entre estas dos plantas.

Centro de Gravedad

El Centro de Gravedad se define como el punto con coordenadas (x^*, y^*) que minimiza el Coste Total de Transporte. Las coordenadas de este punto, vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$x^* = \frac{\sum c_i v_i x_i}{\sum c_i v_i} \qquad y^* = \frac{\sum c_i v_i y_i}{\sum c_i v_i} \qquad [5]$$

El punto que arroja las expresiones de [5] no es necesariamente el punto eficiente en el que se deba ubicar la nueva instalación. Para encontrar el punto eficiente utilizando la expresión anterior, se deben realizar muchas iteraciones que arrojan posibles soluciones a nuestro problema, pero que no se consideran soluciones finales. De este modo, la última solución, luego de variar las coordenadas x^* y y^* iniciales, es aquella que arroje menor valor en el CTT.

DETERMINACIÓN DEL PUNTO ÓPTIMO DE LOCALIZACIÓN

Distancias rectangulares: modelo de la mediana simple

Para hallar el punto óptimo de localización de una instalación, usando las coordenadas rectangulares, se realiza el siguiente procedimiento:

1. Hallar el valor medio de las cantidades desplazadas ponderadas por sus costes:

$$\frac{\sum c_i v_i}{2} \qquad [6]$$

2. Se ordenan los puntos según su ordenada y según su abscisa en forma creciente. Se hace un acumulado del producto c_i v_i de todos los datos.
3. La ordenada y la abscisa que en el acumulado de los datos fueron los primeros en sobrepasar el valor medio calculado determinan el punto óptimo de localización.

Distancias euclídeas: centro de gravedad con distancias euclídeas

Para el caso de utilizar las distancias euclídeas, se requiere de un proceso que, dependiendo de la exactitud deseada, puede resultar arduo. De este modo, se hace lo siguiente:

1. Se ubica el centro de gravedad, (*x*, y**), a partir de las ecuaciones [5]
2. Según las coordenadas anteriores del punto correspondiente al Centro de Gravedad, se halla la distancia euclídea *di*, del Centro de Gravedad a cada punto *i* del plano, a través de la ecuación [4]. Esto es,

$$d_i = K\sqrt{(x^* - x_i)^2 + (y^* - y_i)^2}$$

3. Se halla el Coste Total de Transporte por elemento, CTT_i. Este se calcula multiplicando el peso del elemento *i*, w_i por la distancia entre el elemento *i* y el centro de Gravedad d_i , obtenida del paso 2. Esto es:

$$CTT_i = w_i d_i = c_i v_i d_i$$

Finalmente, se halla el Coste Total de Transporte CTT realizando la suma de los CTT_i

$$CTT = \sum CTT_i$$

4. El punto resultante en el paso 1 y la distancia d_i del paso 2, se reemplazan en la siguiente ecuación, obtenida a partir de la derivada parcial igualada a cero del CTT respecto a la abscisa y la ordenada:

$$X^* = \frac{\sum (c_i v_i x_i)/d_i}{\sum (c_i v_i)/d_i} \qquad Y^* = \frac{\sum (c_i v_i y_i)/d_i}{\sum (c_i v_i)/d_i} \qquad [7]$$

Esto nos arroja las coordenadas (*X*,* Y*) del punto óptimo de localización correspondiente a dicho CTT.

Si se desea una exactitud muy grande, el punto óptimo se encuentra realizando repetidas veces este procedimiento. Se varía el Centro de Gravedad del paso 1 hacia el Norte, Sur, Oriente y Oeste, y se comparan todos los resultados con respecto al CTT obtenido para cada punto. El punto óptimo es aquel que arroje el menor valor del CTT. Para este caso, generalmente se utiliza un software como ayuda, que realiza las suficientes iteraciones hasta que ubica el punto óptimo de localización. Estas pueden ser hasta de 50 o más iteraciones, algo que es muy dispendioso para realizar.

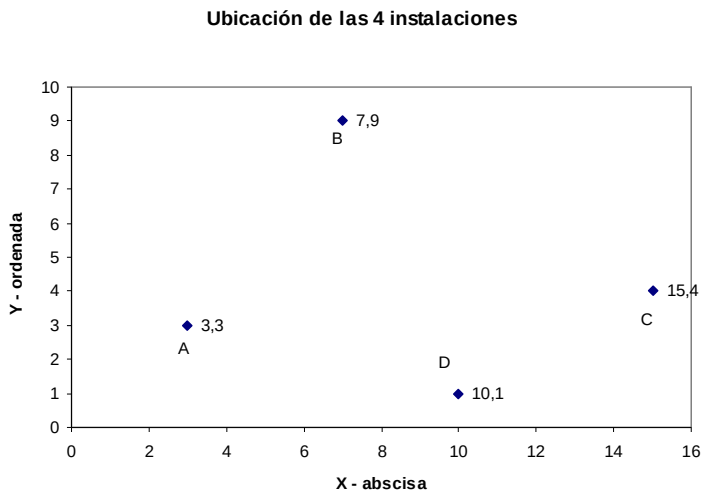
Si el anterior no es nuestro caso, si se desea un valor estimado, se realiza el **cálculo por encima y por debajo** de las coordenadas del Centro de Gravedad, obtenidas anteriormente. Para esto, se procede:

- Calculo por encima: Los valores arrojados por el paso 1, para el Centro de Gravedad, se aproximan hacia cierto valor por encima de ellos. Es decir, si se escoge un rango de 0.5, se le suma a la abscisa y a la ordenada este valor.
- Cálculo por debajo: Similar al anterior. El Centro de Gravedad se halla en cierto valor por debajo del original.

Finalmente, el valor óptimo entre el cálculo por encima/debajo es aquel que arroje el menor valor del CTT (Costo Total de Transporte)

Todo lo explicado anteriormente queda más claro si se observa el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2: *Una empresa necesita ubicar una nueva instalación para ampliar la cobertura en ventas; para ello, realiza un estudio en el que determina los costos de transporte y el volumen a transportar. Estos se anotan en la tabla 1. Ubicar de la manera más efectiva el sitio óptimo donde debe ubicarse la nueva instalación. El diagrama de distribución de la empresa es el siguiente:*



Punto	*(x,y)*	c_i	v_i	$c_i\ v_i$
A	3, 3	10	100	1000
B	7, 9	15	200	3000
C	15, 4	9	500	4500
D	10, 1	7	700	4900

Fig. 4: Ubicación de las 4 instalaciones

Tabla 1: Valores c_i *y* v_i

Solución:

- Método de la distancia media – Coordenadas rectangulares

1. Hallamos la importancia media

$$\frac{\sum c_i v_i}{2} = \frac{1000+3000+4500+4900}{2} = 6700$$

2. Ordenamos los puntos según la abscisa y la ordenada. Hacemos el producto $c_i\ v_i$ acumulado

Tabla 2: Ordenados según su abscisa

Puntos	*x*	$c_i\ v_i$	$c_i\ v_i$ *acumulado*
A	3	1000	1000
B	7	3000	4000
D	10	4900	8900
C	15	4500	13400

Tabla 3: Ordenados según su ordenada

Puntos	*y*	$c_i\ v_i$	$c_i\ v_i$ *acumulado*
D	1	4900	4900
A	3	1000	5900
C	4	4500	10400
B	9	3000	13400

3. Hallamos el punto óptimo de localización

Para x: Se toma el punto D, el primero en sobrepasar el valor medio, donde

8900 > 6700

Para y: Se toma el punto C, donde

10400 > 6700

De este modo, se toma la abscisa y la ordenada de dichos puntos y ese es el punto óptimo de localización:

(X, Y) = (10, 4)

- Método para distancias euclídeas

En este caso, ubicamos el punto óptimo realizando el cálculo por encima/debajo del Centro de Gravedad

1. Hallamos el Centro de Gravedad.

Abscisa: $$x^* = \frac{\sum c_i v_i x_i}{\sum c_i v_i} = \frac{1000*3+3000*7+4900*10+4500*15}{1000+3000+4900+4500}$$

$$x^* = 10.49$$

Ordenada: $$y^* = \frac{\sum c_i v_i y_i}{\sum c_i v_i} = \frac{4900*1+1000+3+4500*4+3000*9}{4900+1000+4500+3000}$$

$$y^* = 3.948$$

El Centro de Gravedad es:

(x*, y*) = (10.49, 3.948)

(A) Usando el cálculo por **encima** del Centro de Gravedad. Aumentamos 0.1

Por encima, el nuevo Centro de Gravedad es:

(x*, y*) = (10.5, 4)

2. Hallamos la distancia d_i entre cada punto *i* y el Centro de Gravedad:

$$d_i = K\sqrt{(x^*-x_i)^2+(y^*-y_i)^2}$$

Puntos	***(x, y)***	d_i	$c_i\ v_i$	CTT_i
A	3, 3	7.57	1000	7570
B	7, 9	6.10	3000	18300
C	15, 4	4.50	4500	20250
D	10,1	3.04	4900	14896

3. Hallamos CTT:

$$CTT = \sum CTT_i = 7570+18300+20250+14896$$

$$CTT = 61016$$

4. Obtenemos las coordenadas del punto que hace que se obtenga un CTT=61016. Este es:

$$X^* = \frac{\sum (c_i v_i x_i)/d_i}{\sum (c_i v_i)/d_i} = \frac{1000*3/7.57+3000*7/6.1+4500*15/4.5+4900*10/3.04}{1000/7.57+3000/6.1+4500/4.5+4900/3.04}$$

$$X^* = 10.8$$

$$Y^* = \frac{\sum (c_i v_i y_i)/d_i}{\sum (c_i v_i)/d_i} = \frac{1000*3/7.57 + 3000*9/6.1 + 4500*4/4.5 + 4900*1/3.04}{1000/7.57 + 3000/6.1 + 4500/4.5 + 4900/3.04}$$

$$Y^* = 3.22$$

Por tanto, el punto óptimo para el cálculo por encima será:

(X*, Y*) = (10.8, 3.22)

(B) Usando el cálculo por **debajo** del Centro de Gravedad. Disminuimos 0.5

Por encima, el nuevo Centro de Gravedad es:

(x*, y*) = (10, 3.5)

2. Hallamos la distancia d_i entre cada punto *i* y el Centro de Gravedad:

$$d_i = K\sqrt{(x^* - x_i)^2 + (y^* - y_i)^2}$$

Puntos	***(x, y)***	d_i	$c_i\ v_i$	CTT_i *acumulado*
A	3, 3	7.01	1000	7010
B	7, 9	6.26	3000	18780
C	15, 4	5.02	4500	22590
D	10,1	2.5	4900	12250

3. Hallamos CTT:

$$CTT = \sum CTT_i = 7010 + 18780 + 22590 + 12250$$

$$CTT = 60630$$

4. Obtenemos las coordenadas del punto que hace que se obtenga un CTT=60630. Este es:

$$X^* = \frac{\sum (c_i v_i x_i)/d_i}{\sum (c_i v_i)/d_i} = \frac{1000*3/7.01 + 3000*7/6.26 + 4500*15/5.02 + 4900*10/2.5}{1000/7.01 + 3000/6.26 + 4500/5.02 + 4900/2.5}$$

$$X^* = 10.59$$

$$Y^* = \frac{\sum (c_i v_i y_i)/d_i}{\sum (c_i v_i)/d_i} = \frac{1000*3/7.57 + 3000*9/6.26 + 4500*4/5.02 + 4900*1/2.5}{1000/7.01 + 3000/6.26 + 4500/5.02 + 4900/2.5}$$

$$Y^* = 2.96$$

Así, el punto óptimo para el cálculo por debajo será:

(X*, Y*) = (10.59, 2.960)

Como la suma del Coste Total de Transporte en el cálculo por encima es mayor que el cálculo por **debajo**, se toma a este último como punto óptimo.

.: P = **(10.59, 2.960)**

Rowinson Gallego
Edilson Quiñonez
Daniel Victoria
Carolina Solano

EJERCICIOS – MÉTODO DEL CENTRO DE GRAVEDAD

Ejercicio 1: *Una empresa cuyas sedes están localizadas en las ciudades de Ibagué, Neiva, Cali y Pasto, desea agregar una nueva instalación de Almacenamiento y distribución de materiales. ¿Cuál sería la mejor ubicación para dicha instalación si los datos son los siguientes?:*

Puntos	***(x,y)***	C_i	V_i
I	6, 7	15	150
N	5, 5	7	200
P	1.2, 3	8	430
C	5.5, 6	3	100

Cada punto representa a una ciudad. I: Ibagué, N: Neiva, P: Pasto, y C: Cali.

Desarrolle este ejercicio mediante el método de la distancia euclídea, sin tener en cuenta el análisis por encima y por debajo del Centro de Gravedad.

Ejercicio 2: *Utilizando el método de la mediana simple realice el siguiente ejercicio:*

*La idea consiste en buscar la mejor ubicación para un Centro Comercial en Popayán. Para ello, se deben minimizar los costos de transporte de mercancías hacia este, desde el Centro de Acopio de la Ciudad, localizado en el Centro de Popayán - coordenadas **A**(1, 14); también, debe quedar cerca de la Unidad de Bodega de Electrodomésticos que se ubica en otra sucursal de la misma franquicia – coordenadas **B**(1, 1). Adicionalmente, como se trata de un Centro Comercial muy grande, su capacidad en el servicio de parqueo puede saturarse en altas temporadas, por lo que debe de quedar cerca de 2 parqueaderos privados – coordenadas: **P1**(7,8) y **P2**(13,8). Cada parqueadero ofrece su servicio al Centro Comercial, cada uno con una tarifa diferente por auto. La idea consiste en ubicarse cerca del parqueadero de aquel que menos cobre por auto parqueado.*

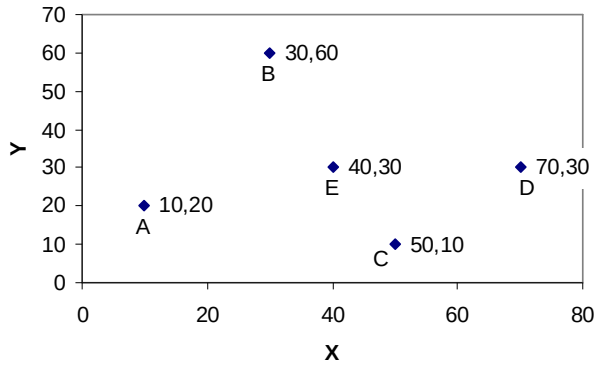
Los datos de costos y volumen son los siguientes:

Punto	*Costo* C_i	*Volumen* V_i
A	*5000*	*60*
B	*8000*	*10*
P1	*3000*	*100*
P2	*3500*	*100*

Ejercicio 3: *Una empresa productora de prótesis de mano, en el sur del país, debido a la demanda creciente en el mercado, decide construir una instalación que permita distribuir los productos en esta zona de manera más eficiente. Para dicho efecto, la nueva instalación debe tener la capacidad de abastecer toda la demanda local y nacional.*

Los almacenes de la empresa están distribuidos de la siguiente forma:

Ubicación de los almacenes



Instalación	*(x,y)*	C_i	V_i
A	10,20	1000	100
B	30,60	3000	350
C	40,30	2000	400
D	50,10	4000	500
E	70,30	3500	200

1:2000Km

Hallar la mejor ubicación para dicha instalación teniendo en cuenta que la distribución de esta zona es a campo abierto.