UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
(Universidad del Perú, Decana de América)

Modelo de crecimiento con factor tierra

Este modelo ya era planteado de la época de Malthus en su libro sobre la población donde plantea las hipótesis que hoy son llamadas "*Hipótesis de Malthus*", en ella nos dice que la población crece en forma geométrica, mientras los alimentos lo hacen en forma aritmética.

La implicancia de esta hipótesis es que al crecer la población en forma geométrica esto generara una escasez de alimento aumentando la brecha entre el crecimiento de la población y la producción de alimentos, por ende se ocasionara en el mundo hambruna, aumento de la pobreza, guerras por los alimentos, etc.

Pero en la revolución industrial se demostró que esta hipótesis no era valida, por que la producción supero los rendimientos decrecientes.

Para comenzar a desarrollar el modelo mencionaremos que es una extensión de modelo de *Solow* ya estudiado en páginas anteriores de este libro, solo al modelo mencionado se le añade implícitamente el factor tierra.

Supuestos del modelo

A los supuestos básicos del modelo de *Solow* se le añaden los siguientes supuestos particulares:

- ✓ Existe una función de producción que coincide con el factor tierra.
- ✓ La tierra es de oferta fija.

Función de producción agregada

Se plantea la siguiente función:

$$Y_t = B_t K_t^{\alpha} T^{\beta} L_t^{1-\alpha-\beta} \ldots (FPA)$$

$$s.a: \begin{cases} 0 < \alpha < 1 \\ 0 < \beta < 1 \end{cases}$$

Donde

T: Stock de tierra agregado fijo.

K_t: Stock de capital agregado.

L_t: Fuerza de trabajo agregada.

Y_t: Producción agregada.

α : Elasticidad producto respecto al capital.

β : Elasticidad del producto respecto a la tierra.

B_t : Índice del nivel de tecnología.

$$B_{(t)} = B_0 e^{m_L .t}$$

Con las propiedades

Si $t = 0$ entonces $B_{(t=0)} = 1$

Si $t > 1$ entonces $B_{(t)} > 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{B}_{(t)} > 0$

Propiedades de la función de producción

1º. $F(K_t, T, L_t) = BK_t^{\alpha} T^{\beta} L_t^{1-\alpha-\beta}$

Si multiplicamos a la función por un $\lambda > 0$

$$F(\lambda K_t, \lambda T, \lambda L_t) = B(\lambda K_t)^{\alpha} (\lambda T)^{\beta} (\lambda L_t)^{1-\alpha-\beta}$$

$$F(\lambda K_t, \lambda T, \lambda L_t) = \lambda .\left(BK_t^{\alpha} T^{\beta} L_t^{1-\alpha-\beta}\right) = \lambda Y_t$$

La función presenta rendimientos de escala constante

2º. Los productos marginales del capital y trabajo son positivos.

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = PmgK = \underbrace{\alpha}_{+}\underbrace{BK_t^{\alpha-1} T^{\beta} L_t^{1-\alpha-\beta}}_{+} > 0$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial T} = PmgT = \underbrace{\beta}_{+}\underbrace{BK_t^{\alpha} T^{\beta-1} L_t^{1-\alpha-\beta}}_{+} > 0$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = PmgL = \underbrace{(1-\alpha-\beta)}_{+}\underbrace{BK_t^{\alpha} T^{\beta} L_t^{-(\alpha+\beta)}}_{+} > 0$$

Sabemos que $0 < \alpha < 1 \wedge 0 < \beta < 1$, si sumamos estas dos desigualdades obtenemos $0 < \alpha + \beta < 2 \ldots x - 1 \Rightarrow 0 > -(\alpha + \beta) > -2 \ldots +1 \Rightarrow 1 > 1 - (\alpha + \beta) > -1$, para nuestros fines tomaremos los valores positivos de esta desigualdad.

a. La derivada de los productos marginales on crecientes y negativos

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial K_t^2}=\frac{\partial PmgK}{\partial K_t}=\underbrace{\alpha}_{+}\underbrace{(\alpha-1)}_{-}\underbrace{BK_t^{\alpha-2}T^{\beta}L_t^{1-\alpha-\beta}}_{+}<0$$

Recordemos $0<\alpha<1$, entonces $0<\alpha<1\ldots-1\Rightarrow-1<\alpha-1<0$ es una constante negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial T^2}=\frac{\partial PmgT}{\partial T}=\underbrace{\beta}_{+}\underbrace{(\beta-1)}_{-}\underbrace{BK_t^{\alpha}T^{\beta-2}L_t^{1-\alpha-\beta}}_{+}<0$$

Recordemos $0<\beta<1$, entonces $0<\beta<1\ldots-1\Rightarrow-1<\beta-1<0$ es una constante negativa.

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial L_{tt}^2}=\frac{\partial PmgL}{\partial L_t}=\underbrace{-(\alpha+\beta)}_{-}\underbrace{(1-\alpha-\beta)}_{+}\underbrace{BK_t^{\alpha}T^{\beta}L_t^{-(1+\alpha+\beta)}}_{+}<0$$

3º. Veremos que los límites requeridos por las condiciones de INADA se cumplen:

$(1/\infty)\approx 0$

$$\underset{K\to\infty}{Lím}\,PmgK=\alpha B\cancel{\frac{1}{K_t^{1-\alpha}}}.T^{\beta}L_t^{1-\alpha-\beta}=0$$

$(1/0)\approx\infty$

$$\underset{K\to 0}{Lím}\,PmgK=\alpha B\cancel{\frac{1}{K_t^{1-\alpha}}}.\kappa_t^{\eta}L_t^{1-\alpha}=\infty$$

$(1/\infty)\approx 0$

$$\underset{K\to\infty}{Lím}\,PmgT=\beta.BK^{\alpha}\cancel{\frac{1}{T^{1-\beta}}}L_t^{1-\alpha-\beta}=0$$

$(1/0)\approx\infty$

$$\underset{K\to 0}{Lím}\,PmgK=\alpha BK_t^{\alpha}\cancel{\frac{1}{T^{1-\beta}}}L_t^{1-\alpha-\beta}=\infty$$

$(1/\infty)\approx 0$

$$\underset{L\to\infty}{Lím}\,PmgL=(1-\alpha-\beta)BK_t^{\alpha}T^{\beta}\cancel{\frac{1}{L_t^{\alpha+\beta}}}=0$$

$(1/0)\approx\infty$

$$\underset{L\to 0}{Lím}\,PmgL=(1-\alpha-\beta)BK_t^{\alpha}T^{\beta}\cancel{\frac{1}{L_t^{\alpha+\beta}}}=\infty$$

Vemos que cumple las condiciones de INADA

❖ Ahora dividiremos la función de producción entre Y_t^{α}

$$\frac{Y_t}{Y_t^{\alpha}} = B_t \frac{K_t^{\alpha}}{Y_t^{\alpha}} T^{\beta} L_t^{1-\alpha-\beta}$$

$$Y_t^{1-\alpha} = B_t \left(\frac{K_t^{\alpha}}{Y_t^{\alpha}}\right) T^{\beta} L_t^{1-\alpha-\beta}$$

$$Y_t = \left[B_t \left(\frac{K_t}{Y_t}\right)^{\alpha} T^{\beta} L_t^{1-\alpha-\beta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$Y_t = B_t^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{K_t}{Y_t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} T^{\frac{\beta}{1-\alpha}} L_t^{\frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}}$$

$$Y_t = B_t^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{K_t}{Y_t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} T^{\frac{\beta}{1-\alpha}} L_t^{1-\frac{\beta}{1-\alpha}} \ldots (I)$$

Determinación de la tasa de crecimiento

Para determinar la tasa de crecimiento de la economía, aplicaremos logaritmo natural a la ecuación (I).

$$Ln(Y_t) = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) Ln(B_t) + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) Ln\left(\frac{K_t}{Y_t}\right) + \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) Ln(T) + \left(1-\frac{\beta}{1-\alpha}\right) Ln(L_t)$$

Tomando la derivada temporal a la ecuación anterior, nos ayuda a obtener la tasa de crecimiento de la economía.

$$\frac{dLn(Y_t)}{dt} = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\frac{dLn(B_t)}{dt} + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{dLn(K_t/Y_t)}{dt} + \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)\frac{dLn(T)}{dt} + \left(1-\frac{\beta}{1-\alpha}\right)\frac{dLn(L_t)}{dt}$$

$$\boxed{g_Y = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) g_B + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) g_{(K/Y)} + \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) g_T + \left(1-\frac{\beta}{1-\alpha}\right) g_L \ldots (II)}$$

Nota: $\frac{dLn(K_t/Y_t)}{dt} = \frac{(\dot{K}_t/Y_t) - (\dot{Y}_t/Y_t)(K_t/Y_t)}{K_t/Y_t}$

$$\frac{dLn(K_t/Y_t)}{dt} = \frac{\dot{K}_t/Y_t}{K_t/Y_t} - (\dot{Y}_t/Y_t)$$

$$\frac{dLn(K_t/Y_t)}{dt} = g_K - g_Y = g_{(K/Y)}$$

Puesto que se asume que la tierra es de oferta fija entonces $g_T = 0$. Así mismo sabemos que la relación capital-producto $K/Y = v$, es una relación constante entonces $g_{(K/Y)} = 0$.

Reemplazando estos dos supuestos en la ecuación (II) obtenemos:

$$g_Y = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) g_B + \left(1 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right) g_L \ldots (III)$$

Asumiendo que la tasa de crecimiento poblacional esta representado por n, entonces $g_L = g_{poblacional} = n$.

Reemplazando en la ecuación (III), tenemos:

$$g_Y = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) g_B + \left(1 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right) n \ldots (IV)$$

Donde

$g_B = m_L$: Tasa de progreso tecnológico debido a la eficiencia del trabajo.

La ecuación (IV) nos quiere decir, que en una economía capitalista en la cual se esta considerando la tierra como un factor fijo, la tasa de crecimiento del producto (PBI) en el largo plazo dependerá de la tasa de progreso Tecnológico (g_B) y de la tas de crecimiento de la población (n).

- ❖ Para hallar la tas de crecimiento por trabajador que es lo que nos importa, pasaremos a reemplazar la tasa de crecimiento del producto por su equivalente en términos per cápita.

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} \Rightarrow \frac{dLn(y_t)}{dt} = \frac{dLn(Y_t)}{dt} - \frac{dLn(L_t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad g_y = g_Y - n \quad \Rightarrow \quad g_Y = g_y + n \ldots (V)$$

Reemplazando la ecuación (V) en la ecuación (IV)

$$g_y + n = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)g_B + \left(1 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right)n$$

$$\boxed{g_y = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)g_B - \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)n \ldots (VI)}$$

La ecuación (VI) nos quiere decir que la tasa de crecimiento del producto por trabajado depende directamente de la tasa de progreso tecnológico e inversamente de la tasa de crecimiento poblacional.

Tipología

En este caso se abstrae el progreso tecnológico de la ecuación (VI), quedando:

$$g_y = -\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)n$$

Lo que nos da el caso de Malthus, por que no considera el progreso tecnológico, esto implica que en esta economía la tasa de crecimiento del producto por trabajador va ser negativo por que no considera la tasa de progreso tecnológico y esto lleva a la llamada *“profecía de Malthus”*.