UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
(Universidad del Perú, Decana de América)

Tema: Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficiente constante

Ejemplo 1
Resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x + y + 6t \\ 4x + 3y - 10t + 4 \end{pmatrix} \qquad en, -\infty < t < \infty$$

Solución: Para la solución de este problema que se plantea, tendremos que primero resolvemos el sistema homogéneo y después la solución particular. Comencemos a resolver

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6t \\ 10t + 4 \end{pmatrix}$$

Por el método de valores propios

$$\det\,(A\text{-}rI) = \begin{vmatrix} 6 - r & 1 \\ 4 & 3 - r \end{vmatrix} = r^2 - 9r + 14 = 0$$

Puesto que $r^2 - 9r + 14 = (r-2)(r-7)$ tenemos $r_1=2$ y $r_2=7$. Entonces, se verifica fácilmente que los correspondientes vectores propios de la matriz de coeficientes son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia la función complementaria es

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}_c = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como $F(t)$ se puede expresar como:

$$F(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Intentaremos encontrar una solución particular del sistema que tenga la misma forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

En términos de matrices debemos tener

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'_p = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_p + \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6a_2 + b_2 + 6)t + 6a_1 + b_1 - a_2 \\ (4a_2 + 3b_2 - 10)t + 4a_1 + 3b_1 - b_2 + 4 \end{pmatrix}$$

De esta ultima igualdad concluimos que

$$\begin{matrix} 6a_1 + b_1 - a_2 = 0 \\ 4a_2 + 3b_2 - 10 = 0 \end{matrix} \qquad \text{Y} \qquad \begin{matrix} 6a_1 + b_1 - a_2 = 0 \\ 4a_1 + 3b_1 + 4 = 0 \end{matrix}$$

Resolviendo simultáneamente las dos primeras ecuaciones resulta $a_2 = -2$ y $b_2 = 6$. Sustituyendo estos valores en las dos ultimas ecuaciones y despejando a1 y a2 resulta $a_1 = \frac{-4}{7}, b_1 = \frac{10}{7}$. Por lo tanto, se tiene que un vector solución particular es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -4/7 \\ 10/7 \end{pmatrix}$$

Y por consiguiente la solución general del sistema en $-\infty < t < \infty$ es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_c + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_p \Longrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_t = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -4/7 \\ 10/7 \end{pmatrix}}$$

Ejemplo 2

Resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + 6z \\ 2y + 5z \\ 2z \end{pmatrix} \quad en, -\infty < t < \infty$$

Solución: Como se menciono en el ejercicio anterior comenzaremos por resolver primero el sistema de ecuaciones homogénea .

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \det\text{ (A-rI)} = \begin{vmatrix} 2-r & 1 & 6 \\ 0 & 2-r & 5 \\ 0 & 0 & 2-r \end{vmatrix} = 0$$

Resolveremos la determinante por el método de cofactores ya eso yo les dejo para que lo revisen. Entonces la ecuación característica $(r-2)^3 = 0$ muestra r_1=2 es un valor propio de multiplicidad tres. Sucesivamente, encontramos que una solución de

$$(a - 2I)V_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(a - 2I)V_2 = V_1 \quad \Longrightarrow \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y finalmente, una solución de

$$(a - 2I)V_3 = V_2 \quad \Longrightarrow \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

Donde $V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} y V_3 = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ a,b,c,d,e,f,g,h,i :son constantes

Por lo tanto la solución es

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_t = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}\right] + C_3\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2}e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} e^{2t}\right]}$$

Ejemplo 3

Resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + 2z \\ -2x + y - 2z \\ 2x - 2y + z \end{pmatrix} \qquad en, -\infty < t < \infty$$

Solución: resolvemos el sistema homogéneo, como lo hemos venido haciendo

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \det\,(A\text{-}rI) = \begin{vmatrix} 1-r & -2 & 2 \\ -2 & 1-r & -2 \\ 2 & -2 & 1-r \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo la determinante por el método de cofactores resulta $-(r+1)^2(r-5) = 0$ Vemos que $r_1=r_2=-1$ y $r_3= 5$

Para $r_1=-1$, la eliminación de Gauss-Jordan da inmediatamente

$$\langle A+1I\,|\,0\rangle = \left\langle\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right\rangle \Longrightarrow \left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\rangle$$

De K_1-K_2+K_3 = 0, podemos expresar, digamos "K_1" en términos de "K_2" y "K_3". Eligiendo K_2=1 y K_3=0 en K_1= K_2– K_3 obtenemos K_1=1 y entonces un vector propio es

$$\Longrightarrow \quad K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pero la elección de K_2 = 1, K_3= 1 implica K_1= 0. Luego un segundo vector propio es

$$\Longrightarrow \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puesto que ninguno de los dos vectores propios es un múltiplo constante del otro , hemos encontrado dos soluciones linealmente independientes que corresponden al mismo valor propio, a saber

Por último, para $r_3 = 5$, la relación

$$\langle A - 5I \mid 0 \rangle = \left(\left\langle \begin{matrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right) \Longrightarrow \left(\left\langle \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right)$$

Implica $K_1 = K_3$ y $K_2 = -K_3$. El elegir $K_{3=1}$ implica $K_1 = 1$, $K_2 = -1$ y, por consiguiente, un tercer vector propio es

$$\Longrightarrow K_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Concluimos que la solución general del sistema es

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_t = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}}$$

Ejemplo 4

Resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ \dfrac{1x}{2} + y \end{pmatrix}$$

Solución: resolvemos el sistema homogéneo de la ecuación propuesta anteriormente

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - rI) = \begin{vmatrix} 1-r & -2 \\ 1/2 & 1-r \end{vmatrix} = r^2 - 2r + 2 = 0$$

Son $r_1 = 1 + i$ y $r_2 = \overline{r_1} = 1 - i$

Ahora bien, vemos que un vector propio asociado con r_1

$$r_1 = 1+i \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (1+i)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-2b = a+ai \\ a/2+b = b+bi \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = -\frac{i}{2} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix} = k_1 \Rightarrow k_2 = k_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} i$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{i1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}\right] = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución general

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_t = C_1\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} sent\right]e^t + C_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} sent\right]e^t$$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_t = C_1\begin{pmatrix} 2\cos t \\ sent \end{pmatrix}e^t + C_2\begin{pmatrix} -2sent \\ \cos t \end{pmatrix}}$$

Ejemplo 5
Resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x+y+z \\ x+9y+z \\ x+y+9z \end{pmatrix} \quad en, -\infty < t < \infty$$

Solución: resolvemos el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A-rI) = \begin{vmatrix} 9-r & 1 & 1 \\ 1 & 9-r & 1 \\ 1 & 1 & 9-r \end{vmatrix} = -(r-11)(r-8)^2 = 0$$

Vemos que $r_1=11$, $r_2=r_3= 8$

a) $r_1=11$ la eliminación de Gauss –Jordan

$$(A-11I\,|0)=\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right)\Rightarrow \begin{array}{c}F_1=F_2\\ F_2=F_1\\ F_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}F_1\\ F_2+2F_1\\ F_3-F_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow \begin{array}{c}F_1=F_2\\ -F_2/3\\ F_3+F_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c}F_1+2F_2\\ F_2\\ F_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}K_1-K_3=0\Rightarrow K_1=K_3\\ K_2-K_3=0\Rightarrow K_2=K_3\end{cases}$$

Si $K_3=1\Rightarrow K_1=K_2=K_3=1\Rightarrow V_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

b) Para r2 =8, la eliminación de Gauss-Jordan

$$(A+8I|0)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\Rightarrow \begin{array}{c}F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$\Rightarrow K_1+K_2+K_3=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{Si }\ K_1=0, K_2=1\rightarrow K_3=-1\\ \text{Si }\ K_1=1, K_2=0\rightarrow K_3=-1\end{cases}$$

$\Rightarrow V_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ y $V_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ que son independientes no lineales

$$\text{La solución general es } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_t = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{11t} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{8t} + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{8t}$$

Ejemplo 5

Resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x+y+z \\ x+5y+z \\ y-3z \end{pmatrix} \quad en, -\infty < t < \infty$$

Solución: resolvemos el sistema homogéneo

$$\det\text{ (A-rI)} = \begin{vmatrix} -4-r & 1 & 1 \\ 1 & 5-r & -1 \\ 0 & 1 & -3-r \end{vmatrix} = -(r+3)(r+4)(r-5) = 0$$

y así los valores propios son r_1=-3, r_2=-4 y r_3= 5

a) Ahora bien, para r_1=-3, la eliminación de Gauss-Jordan

$$(A+3I|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, r_1= r_3 , r_2=0. La elección de r_3 =1 da lugar al vector próprio

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De manera semejante, para r_2 = -4

$$(A+4I|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Implica que $r_1=10r_3$ y $r_2= -r_3$. Eligiendo $r_3= 1$ se obtiene el segundo vector propio

$$V_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, cuando $r_3 =5$, las matrices aumentadas.

$$(A+5I|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Da lugar a la solución general del sistema es entonces

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_t = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t} + C_2\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-4t} + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}e^{5t}}$$

Ejemplo 6

Resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+8y \\ -x-2y \end{pmatrix} \quad \text{Con la condición inicial} \quad \begin{matrix} x_{(0)} = 2 \\ y_{(0)} = -1 \end{matrix}$$

Solución: resolvemos el sistema homogéneo y luego la solución particular de esta ecuación.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A-rI) = \begin{vmatrix} 2-r & 8 \\ 1-r & -2-r \end{vmatrix} = r^2+4=0$$

Son $r_1 = 2i$ y $r_2 = \overline{r_1} = -2i$

Ahora bien, vemos que un vector propio

$$(Ax = K_1x) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Longrightarrow p = -2(1+i)q$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(1+i) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(Ax = K_2 x) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = -2i\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow p = -2(1-i)$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(1-i) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que $A_1 = \frac{1}{2}[V_1 + V_2], A_2 = \frac{i}{2}[V_1 - V_2]$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -2-2i \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2+2i \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \frac{i}{2}\left[\begin{pmatrix} -2-2i \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2+2i \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_t = C_1 e^{2t}\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} sen2t\right] + C_2 e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} sen2t\right]$$

Ahora aplicando la condición inicial del problema $x_{(0)} = 2, y_{(0)} = -1$

$$\begin{matrix} 2C_1 + 2_2 = 2 \\ -C_1 = -1 \end{matrix} \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 0$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_t = 1e^{2t}\begin{pmatrix} 2\cos 2t + 2sen2t \\ \cos t2t \end{pmatrix}}$$

Ejemplo 7

Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 12y - 14z \\ \dot{y} &= x + 2y - 3z \\ \dot{z} &= x + y - 2z \end{aligned} \quad ; \text{ con condición inicial } \begin{pmatrix} x_{(0)} \\ y_{(0)} \\ z_{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Solución: resolvemos el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -12 & -14 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow P(r) = \det(A - rI) = \begin{vmatrix} 1-r & -12 & -14 \\ 1 & 2-r & -3 \\ 1 & 1 & -2-r \end{vmatrix}$$

Desarrollando por cofactores:

$$P(r) = -r^3 + r^2 - 25r + 25 = -(r-1)(r^2+25) \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 5i \\ r_3 = -5i \end{cases}$$

Los vectores propios v_1, v_2 y v_3 correspondientes a $r_1 = 1, r_2 = 5i$ y $r_3 = -5i$, lo calculamos resolviendo el sistema de ecuaciones:

$(A - rI)v = 0$, con $v = \begin{pmatrix} p \\ q \\ s \end{pmatrix}$

Esto es:

$$\begin{aligned} (1-r)p - 12q - 14s &= 0 \\ p + (2-r)q - 3s &= 0 \\ p + q - (2+r)s &= 0 \end{aligned}$$

Para $r = r_1 = 1$ reemplazando en las ecuaciones:

$$\begin{aligned} -12q - 14s &= 0 \\ p + q - 3s &= 0 \\ p + q - 3s &= 0 \end{aligned}$$

Operando:

$$p = \frac{25}{6}s, q = -\frac{7}{6}s$$

Entonces el vector propio asociado $r = 1$, es:

$$v=\begin{pmatrix}p\\q\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{25}{6}s\\-\frac{7}{6}s\\s\end{pmatrix}=\frac{s}{6}\begin{pmatrix}25\\-7\\6\end{pmatrix}$$

O simplemente $v=\begin{pmatrix}25\\-7\\6\end{pmatrix}$, pues cualquier vector propio es un escalar (constante) múltiplo de $\begin{pmatrix}25\\-7\\6\end{pmatrix}$.

Reemplazando $r=5i$ en las ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{aligned}(1-5i)p-12q-14s&=0\ldots(I)\\p+(2-5i)q-3s&=0\ldots(II)\\p+q-(2+5i)s&=0\ldots(III)\end{aligned}$$

Resolviendo tenemos que $(II)-(III)$: $(1-5i)q-(1-5i)s=0$
Así $q=s$. Reemplazando en (I):

$$p=\frac{26s}{(1-5i)}=\frac{(1+5i)26s}{(1-5i)(1+5i)}=(1+5i)s$$

Entonces un vector propio es:

$$v=\begin{pmatrix}p\\q\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1+5i)s\\s\\s\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1+5i\\1\\1\end{pmatrix}$$

Por tanto $v=\begin{pmatrix}1+5i\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$

Teniendo en cuenta el teorema de los valores propios complejos tenemos:

$$w_1 = \cos 5t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - sen5t\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos 5t - 5sen5t\\ \cos 5t\\ \cos 5t\end{pmatrix}$$

$$w_2 = \cos 5t\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} + sen5t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\cos 5t + sen5t\\ sen5t\\ sen5t\end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución general es:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{(t)} = C_1\begin{pmatrix}25\\-7\\6\end{pmatrix}e^t + C_2\begin{pmatrix}\cos 5t - 5sen5t\\ \cos 5t\\ \cos 5t\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}5\cos 5t + sen5t\\ sen5t\\ sen5t\end{pmatrix}$$

Imponiendo las condiciones iniciales en la solución general, tenemos:

$$\begin{pmatrix}4\\6\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\\z(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25C_1\\-7C_1\\6C_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5C_3\\0\\0\end{pmatrix}$$

Simplificando

$$\begin{aligned} 25C_1 + C_2 + 5C_3 &= 4\\ -7C_1 + C_2 &= 6\\ 6C_1 + C_2 &= -7 \end{aligned}$$

Resolviendo se obtiene: $C_1 = -1, C_2 = -1$ y $C_3 = 6$.
Por tanto:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{(t)} = -\begin{pmatrix}25\\-7\\6\end{pmatrix}e^t - \begin{pmatrix}\cos 5t - 5sen5t\\ \cos 5t\\ \cos 5t\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}5\cos 5t + sen5t\\ sen5t\\ sen5t\end{pmatrix}$$ Es la solución particular.

El saber es fuente de conocimiento y saber es ¡Poder!