

Demostración de la Transformada de Laplace

Transformada de Laplace bilateral

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Transformada Inversa de Laplace

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} F(s) dt$$

En el presente documento trataremos de demostrar matemáticamente cómo puede obtenerse la Transformada de Laplace a partir de la Transformada de Fourier, aunque esta demostración es un poco rustica y con falta de la belleza matemática, vale la pena revisarla.

Lo que podemos decir es que la transformada de Laplace es un caso especial de la transformada de Fourier.

La serie de Fourier

Considérese primero una función periódica $f(t)$ definida por la relación.

$$f(t) = f(t + T)$$

Donde $T = \text{periodo}$. Se supone además que la función $f(t)$ satisface las siguientes propiedades:

- 1.- $f(t)$ es univaluada en todos los lados: es decir $f(t)$ satisface la definición matemática de una función.
- 2.- La integral $\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$ existe, es decir no es infinita para t_0 .
- 3.- $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidad en cualquier periodo.
- 4.- $f(t)$ tiene un número de máximos y mínimos en cualquier periodo.

Dada tal función periódica $f(t)$, el teorema de Fourier establece que $f(t)$ se podría presentar mediante la serie infinita:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots \\ &+ b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \end{aligned} \quad \text{--- 1}$$

Donde la pulsación fundamental ω_0 se relaciona con el periodo T mediante:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Y donde a_0, a_n y b_n son constantes que dependen de n y de $f(t)$. La ecuación 1 es una “forma trigonométrica de Fourier” para $f(t)$ en tanto el proceso de determinar los valores a_0, a_n y b_n se llama “análisis de Fourier”. El objetivo no es la prueba de este teorema, sino una simple formulación de los procedimientos del análisis de Fourier y una percepción de que el teorema es correcto.

Algunas integrales trigonométricas útiles

Antes de explicar la evaluación de las constantes que existen en la serie de Fourier se recopilara un conjunto de integrales trigonométricas útiles. Sean "n" como "k" representativas de cualquier elemento del conjunto de enteros 1, 2,3... En las siguientes integrales 0 y T se usan como limites de integración aunque se entiende que cualquier intervalo de un periodo es igual de correcto, dado que un valor promedio de una senoide en un periodo es cero.

Demostraciones de algunas integrales útiles:

$$\int_0^T [\text{sen}(n\omega_0 t)] dt = 0$$

$$\int_0^T [\text{sen}(n\omega_0 t)] dt = -n\omega_0 [\text{cos}(n\omega_0 t)]_0^T$$

$$\int_0^T [\text{sen}(n\omega_0 t)] dt = -n\omega_0 \left[\text{cos}\left(\frac{n2\pi(T)}{T}\right) - \text{cos}\left(\frac{n2\pi(0)}{T}\right) \right]$$

Nota: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$= -n\omega_0 \left[\text{cos}\left(n \frac{2\pi T}{T}\right) - 1 \right]$$

$$\int_0^T [\text{sen}(n\omega_0 t)] dt = 0 \text{ ----- } 2$$

$$\int_0^T [\cos(n\omega_0 t)] dt = 0$$

$$\int_0^T [\cos(n\omega_0 t)] dt = n\omega_0 [\text{sen}(n\omega_0 t)]_0^T$$

$$\int_0^T [\cos(n\omega_0 t)] dt = n\omega_0 [\text{sen}(n\omega_0 T) - \text{sen}(n\omega_0(0))]$$

Nota: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$= n\omega_0 \left[\text{sen}\left(n \frac{2\pi T}{T}\right) - 0 \right]$$

$$\int_0^T [\cos(n\omega_0 t)] dt = 0 \text{ ----- } 3$$

$$\int_0^T [\text{sen}(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t)] dt = 0$$

Identidad Trigonométrica

$$\text{sen}(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) = \frac{1}{2} \text{sen}(k+n)\omega_0 t + \frac{1}{2} \text{sen}(k-n)\omega_0 t$$

Demostración de la Identidad Trigonométrica

$$\begin{aligned} \text{sen}(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) &= \frac{1}{2} \text{sen}(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) + \frac{1}{2} \text{sen}(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) = \\ &= \frac{1}{2} \text{sen}(k+n)\omega_0 t - \frac{1}{2} \text{sen}(n\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) + \frac{1}{2} \text{sen}(k-n)\omega_0 t + \frac{1}{2} \text{sen}(n\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) = \frac{1}{2} \text{sen}(k+n)\omega_0 t + \frac{1}{2} \text{sen}(k-n)\omega_0 t \\ \frac{1}{2} \int_0^T [\text{sen}(k+n)\omega_0 t] dt + \frac{1}{2} \int_0^T [\text{sen}(k-n)\omega_0 t] dt &= -\frac{1}{2(k+n)\omega_0} [\cos(k+n)\omega_0 t]_0^T - \frac{1}{2(k-n)\omega_0} [\cos(k-n)\omega_0 t]_0^T \\ &= \frac{1}{2(k+n)\omega_0} \left[\cos(k+n) \frac{2\pi}{T} (T) - \cos(k+n) \frac{2\pi}{T} (0) \right] - \frac{1}{2(k-n)\omega_0} \left[\cos(k-n) \frac{2\pi}{T} (T) - \cos(k-n) \frac{2\pi}{T} (0) \right] \\ &= \frac{1}{2(k+n)\omega_0} [1 - 1] - \frac{1}{2(k-n)\omega_0} [1 - 1] \\ \int_0^T [\text{sen}(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t)] dt &= 0 \text{ ----- 4} \end{aligned}$$

$$\int_0^T [\text{sen}(k\omega_0 t)\text{sen}(n\omega_0 t)] dt = 0 \quad k \neq n$$

Identidad Trigonométrica

$$\text{sen}(k\omega_0 t)\text{sen}(n\omega_0 t) = -\frac{1}{2}\cos(k-n)\omega_0 t + \frac{1}{2}\text{sen}(k+n)\omega_0 t$$

Demostración de la Identidad Trigonométrica

$$\begin{aligned} \text{sen}(k\omega_0 t)\text{sen}(n\omega_0 t) &= \frac{1}{2}\text{sen}(k\omega_0 t)\text{sen}(n\omega_0 t) + \frac{1}{2}\text{sen}(k\omega_0 t)\text{sen}(n\omega_0 t) = \\ &= \frac{1}{2}\cos(k-n)\omega_0 t - \frac{1}{2}\cos(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t) - \frac{1}{2}\cos(k+n)\omega_0 t + \frac{1}{2}\cos(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t) = \frac{1}{2}\cos(k-n)\omega_0 t - \frac{1}{2}\cos(k+n)\omega_0 t \\ \frac{1}{2}\int_0^T [\cos(k-n)\omega_0 t] dt - \frac{1}{2}\int_0^T [\cos(k+n)\omega_0 t] dt &= -\frac{1}{2(k-n)\omega_0} [\text{sen}(k-n)\omega_0 t]_0^T + \frac{1}{2(k+n)\omega_0} [\text{sen}(k+n)\omega_0 t]_0^T \\ &= -\frac{1}{2(k-n)\omega_0} \left[\text{sen}(k-n)\frac{2\pi}{T}(T) - \text{sen}(k-n)\frac{2\pi}{T}(0) \right] + \frac{1}{2(k+n)\omega_0} \left[\text{sen}(k+n)\frac{2\pi}{T}(T) - \text{sen}(k+n)\frac{2\pi}{T}(0) \right] \\ &= -\frac{1}{2(k-n)\omega_0} [0 - 0] + \frac{1}{2(k+n)\omega_0} [0 - 0] \\ \int_0^T [\text{sen}(k\omega_0 t)\text{sen}(n\omega_0 t)] dt &= 0 \text{ ----- } 5 \end{aligned}$$

$$\int_0^T [\cos(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)] dt = 0 \quad k \neq n$$

Identidad Trigonométrica

$$\cos(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t) = \frac{1}{2}\cos(k+n)\omega_0 t + \frac{1}{2}\cos(k-n)\omega_0 t$$

Demostración de la Identidad Trigonométrica

$$\begin{aligned} \cos(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t) &= \frac{1}{2}\cos(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t) + \frac{1}{2}\cos(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t) = \\ &= \frac{1}{2}\cos(k+n)\omega_0 t + \frac{1}{2}\cos(k-n)\omega_0 t \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T [\cos(k+n)\omega_0 t] dt + \frac{1}{2}\int_0^T [\cos(k-n)\omega_0 t] dt = \frac{1}{2(k+n)\omega_0} [\sin(k+n)\omega_0 t]_0^T + \frac{1}{2(k-n)\omega_0} [\sin(k-n)\omega_0 t]_0^T$$

$$= \frac{1}{2(k+n)\omega_0} \left[\sin(k+n)\frac{2\pi}{T}(T) - \sin(k+n)\frac{2\pi}{T}(0) \right] + \frac{1}{2(k-n)\omega_0} \left[\sin(k-n)\frac{2\pi}{T}(T) - \sin(k-n)\frac{2\pi}{T}(0) \right]$$

$$= -\frac{1}{2(k-n)\omega_0} [0 - 0] + \frac{1}{2(k+n)\omega_0} [0 - 0]$$

$$\int_0^T [\cos(k\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)] dt = 0 \text{ ----- 6}$$

$$\int_0^T [\sin^2(n\omega_0 t)] dt = \frac{T}{2}$$

Identidad trigonométrica

$$\text{sen}^2(n\omega_0 t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2n\omega_0 t)$$

Demostración de la Identidad Trigonométrica

$$\cos(n\omega_0 t + n\omega_0 t) = \cos(n\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t) - \text{sen}(n\omega_0 t)\text{sen}(n\omega_0 t) = \cos^2(n\omega_0 t) - \text{sen}^2(n\omega_0 t) = 1 - \text{sen}^2(n\omega_0 t) - \text{sen}^2(n\omega_0 t)$$

$$\cos(2n\omega_0 t) = 1 - 2\text{sen}^2(n\omega_0 t) ; \text{sen}^2(n\omega_0 t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2n\omega_0 t)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^T dt - \frac{1}{2} \int_0^T [\cos(2n\omega_0 t)] dt = \frac{T}{2} - \left[-\frac{\text{sen}(2n\omega_0 t)}{4n\omega_0} \right]_0^T = \frac{T}{2} + \left[\frac{\text{sen}(4n\pi T)}{T} - \frac{\text{sen}(4n\pi(0))}{T} \right]$$

$$\int_0^T [\text{sen}^2(n\omega_0 t)] dt = \frac{T}{2} \text{-----} 7$$

$$\int_0^T [\cos^2(n\omega_0 t)] dt = \frac{T}{2}$$

Identidad trigonométrica

$$\cos^2(n\omega_0 t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2n\omega_0 t)$$

Demostración de la Identidad Trigonométrica

$$\cos(n\omega_0 t + n\omega_0 t) = \cos(n\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t) - \sin(n\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t) = \cos^2(n\omega_0 t) - [1 - \cos^2(n\omega_0 t)] = 2\cos^2(n\omega_0 t) - 1$$

$$\cos(2n\omega_0 t) = 2\cos^2(n\omega_0 t) - 1$$

$$\cos^2(n\omega_0 t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2n\omega_0 t)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^T dt + \frac{1}{2} \int_0^T [\cos(2n\omega_0 t)] dt = \frac{T}{2} - \left[\frac{\sin(2n\omega_0 t)}{2n\omega_0} \right]_0^T = \frac{T}{2} - \frac{[(\sin(4n\pi T))/T - (\sin(4n\pi(0)))/T]}{2n\omega_0}$$

$$\int_0^T [\cos^2(n\omega_0 t)] dt = \frac{T}{2} \text{-----8}$$

Evaluación de los Coeficientes de Fourier

La evaluación de las constantes desconocidas en la serie de Fourier tal vez ahora se consiga sin dificultades. Primero se busca a_0 , si se integra cada lado de la ecuación "1" a lo largo del periodo completo.

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^T a_0 dt + \int_0^T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \right\} dt$$

De acuerdo a la ecuación "2" y "3" los términos son cero

$$\int_0^T f(t)dt = a_0T$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \text{ ----- 9}$$

Esta constante a_0 no es otra cosa más que un valor de cd $f(t)$. Para evaluar uno de los coeficientes coseno como a_k el coeficiente de $\cos(k\omega_0t)$ se multiplica primero cada lado de la ecuación "1" y se integran ambos lados de la ecuación.

$$\int_0^T [f(t)\cos(k\omega_0t)]dt = \int_0^T [a_0\cos(k\omega_0t)]dt + \int_0^T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [a_n\cos(k\omega_0t)\cos(n\omega_0t)] \right\} dt + \int_0^T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [b_n\cos(n\omega_0t)\sen(n\omega_0t)] \right\} dt \quad k = n$$

$$\int_0^T [f(t)\cos(k\omega_0t)]dt = \int_0^T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [a_n\cos^2(n\omega_0t)] \right\} dt$$

$$\int_0^T [f(t)\cos(k\omega_0t)]dt = \frac{a_nT}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T [f(t)\cos(k\omega_0t)]dt \text{ ----- 10}$$

Para evaluar uno de los coeficientes se no por ejemplo b_k se multiplican ambos lados de la ecuación "1" por $\sen(n\omega_0t)$ y se integra en el tiempo.

$$\int_0^T [f(t)\sen(n\omega_0t)]dt = \int_0^T [a_0\sen(k\omega_0t)]dt + \int_0^T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [a_n\cos(n\omega_0t)\sen(n\omega_0t)] \right\} dt + \int_0^T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [b_n\sen(n\omega_0t)\sen(k\omega_0t)] \right\} dt$$

Suponiendo $k = n$

$$\int_0^T [f(t)\text{sen}(n\omega_0 t)]dt = \int_0^T [b_n \text{sen}^2(n\omega_0 t)]dt$$

$$\int_0^T [f(t)\text{sen}(n\omega_0 t)]dt = b_n \frac{T}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T [f(t)\text{sen}(n\omega_0 t)]dt \text{ ----- 11}$$

Como puede observarse las ecuaciones anteriores de la "11" permiten determinar los valores de todas las a_n y b_n de la serie de Fourier.

Forma Compleja de la Serie de Fourier

Al obtener un espectro de frecuencia se observo que la amplitud de cada componente depende tanto de a_n como b_n esto es; el termino seno y coseno contribuyen a la amplitud. La expresión exacta de esa amplitud en forma directa al utilizar una forma de la serie de Fourier en la que cada término es una función coseno con un ángulo de fase. La amplitud y el ángulo de fase son funciones de $f(t)$ y " n ". Una forma de resolver convenientemente la serie de Fourier es si se consigue que los senos y cosenos se expresen en forma exponencial. Se considera primero la serie trigonométrica de la serie de Fourier.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)]$$

Y luego se sustituyen las formas exponenciales; de la identidad de Euler tenemos:

$$e^{jn\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) + j\text{sen}(n\omega_0 t) \quad y \quad e^{-jn\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) - j\text{sen}(n\omega_0 t)$$

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \quad -j\text{sen}(n\omega_0 t) = \frac{e^{-jn\omega_0 t} - e^{jn\omega_0 t}}{2}$$

$$\cos(n\omega_0 t) = e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t} - \cos(n\omega_0 t)$$

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}$$

Para el $\text{sen}(n\omega_0 t)$

$$e^{jn\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) + j\text{sen}(n\omega_0 t) \quad y \quad e^{-jn\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) - j\text{sen}(n\omega_0 t)$$

$$j\text{sen}(n\omega_0 t) = e^{jn\omega_0 t} - \cos(n\omega_0 t) \quad \cos(n\omega_0 t) = e^{-jn\omega_0 t} + j\text{sen}(n\omega_0 t)$$

$$j\text{sen}(n\omega_0 t) = e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t} - j\text{sen}(n\omega_0 t)$$

$$\text{sen}(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{j2}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{jn\omega_0 t} \frac{a_n - jb_n}{2} + e^{-jn\omega_0 t} \frac{a_n + jb_n}{2} \right)$$

Se define ahora una constante compleja

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \dots n - 1 \text{ -----12}$$

Los valores a_n, b_n dependen de "n" y de $f(t)$ ahora reemplazando a "n" por "(-n)"

$$a_{-n} = a_n$$

Pero

$$b_{-n} \neq b_n \quad \text{o} \quad b_{-n} = -b_n$$

De la ecuación "12" se tiene que:

$$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

$$c_n = (c_{-n})^* \quad y \quad c_0 = a_0$$

Por lo tanto se podría expresar a $f(t)$ como:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t}) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{-n} e^{-jn\omega_0 t})$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t}) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{-n} e^{-jn\omega_0 t})$$

Por último en lugar de sumar la segunda serie respecto a los enteros positivos lo haremos para los números negativos.

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t}) + \sum_{n=-1}^{-\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t})$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t}) \text{-----13}$$

La ecuación anterior es la forma compleja de la serie de Fourier para $f(t)$, su concisión es una de las cosas más importantes para las que se utiliza. Para obtener la expresión mediante la que se podría evaluar un coeficiente complejo particular " c_n " se sustituyen las ecuaciones "10" y "11" en "12".

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t) \cos(n\omega_0 t)] dt - \frac{j}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t) \text{sen}(n\omega_0 t)] dt$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[f(t) \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \right] dt - \frac{j}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[f(t) \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{j2} \right] dt$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left\{ f(t) \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} - \left[\frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2} \right] \right\} dt$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left\{ f(t) \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} - \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \right\} dt$$

Se utiliza la identidad trigonométrica de Euler y se simplifica

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)e^{-jn\omega_0 t}] dt$$

Lo que se trata de hacer con esto es representar una función en el que su periodo tienda a infinito, se empieza con la forma exponencial de Fourier.

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t}) \text{-----} 14$$

Donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)e^{-jn\omega_0 t}] dt \text{ ----- 15}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ ----- 16}$$

Se deja ahora $T \rightarrow \infty$ de tal modo que:

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{d\omega}{2\pi} \text{ ----- 17}$$

Por último la frecuencia de cualquier "armónica" $n\omega_0$ debe corresponder ahora a la variable de frecuencia general que describe al espectro continuo. En otras palabras "n" debe tender a infinito cuando $\omega_0 \rightarrow 0$ por lo que el producto es finito.

$$n\omega_0 \rightarrow \omega \text{ ----- 18}$$

Cuando las cuatro ecuaciones del límite se aplican a la ecuación "15" se encuentra que " c_n " debe tender a cero como se había predicho. Si multiplicamos cada lado de la ecuación "15" por el periodo "T" y después se lleva a cabo el proceso del límite.

$$c_n T \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)e^{-jn\omega t}] dt$$

El lado derecho de la expresión anterior es una función de " ω " no de " t " así que se representa mediante " $F(j\omega)$ "

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)e^{-jn\omega t}] dt \text{ ----- 19}$$

Luego se aplica el proceso del límite a la ecuación "14" se comienza multiplicando y dividiendo la expresión entre "T".

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(c_n T e^{jn\omega_0 t} \frac{1}{T} \right)$$

Se sustituye en "T" por la nueva cantidad " $F(j\omega)$ " y después se utilizan expresiones "17" y "18. El límite la suma se vuelve una integral.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F(j\omega) e^{jn\omega_0 t}] d\omega$$

Demostración de la transformada de Laplace

Les explicaré un poco como nace esta demostración, en primera la curiosidad de si existía tal demostración de la transformada de Laplace, preguntando no pude obtener información ni siquiera en internet ni con profesores, fue entonces que me di a la tarea de tratar de demostrarla.

Y básicamente me di cuenta la Transformada de Fourier analizaba las funciones a través de la parte imaginaria del plano complejo (Argand) y de ahí también me di cuenta que la Transformada de Laplace es una forma más completa, pues esta hace un análisis de todo el plano complejo, y por todo me refiero a todo.

Como la transformada de Laplace se puede representar por un conjunto infinito de exponenciales.

$$f(t) = a_0 + \sum_{s=\sigma+j\omega}^{\sigma+j\infty} \left(\frac{e^{st} \frac{a_n - jb_n}{2} + e^{-st} \frac{a_n + jb_n}{2}}{a_n \cos(\omega t) + b_n \operatorname{sen}(\omega t)} \right) \dots\dots\dots 1$$

Se define ahora una constante compleja

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \text{ para } n = 1, 2, 3 \dots n - 1 \dots\dots\dots 12$$

Los valores a_n, b_n dependen de "n" y de $f(t)$ ahora reemplazando a "n" por "(-n)"

$$a_{-n} = a_n$$

Pero

$$b_{-n} \neq b_n \quad \text{o} \quad b_{-n} = -b_n$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

$$c_n = (c_{-n})^* \quad \text{y} \quad c_0 = a_0$$

Por lo tanto se podría expresar a $f(t)$ como:

$$f(t) = c_0 + \sum_{s=\sigma+j\omega}^{\sigma+j\infty} (c_n e^{st}) + \sum_{s=\sigma+j\omega}^{\sigma+j\infty} (c_{-n} e^{-st})$$

$$f(t) = \sum_{s=\sigma+j\omega}^{\sigma+j\infty} (c_n e^{st}) + \sum_{s=\sigma+j\omega}^{\sigma+j\infty} (c_{-n} e^{-st})$$

$$f(t) = \sum_{s=\sigma+j\omega}^{\sigma+j\infty} (c_n e^{st}) + \sum_{s=\sigma-j\omega}^{\sigma-j\infty} (c_n e^{st})$$

Por último en lugar de sumar la segunda serie respecto de los enteros complejos negativos desde $\sigma - j\omega$ hasta $\sigma - j\infty$ se sumara respecto de los enteros negativos desde $s = \sigma - j\infty$ hasta $\sigma + j\infty$, para abarcar todo el plano complejo.

$$f(t) = \sum_{s=\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} (c_n e^{st}) \text{-----} 1$$

Para obtener una expresión mediante el cual se puede evaluar un coeficiente complejo particular " c_n "

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[f(t) \left(\frac{e^{st} + e^{-st}}{2} \right) \right] dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[f(t) \left(\frac{e^{st} - e^{-st}}{j2} \right) \right] dt$$

$$c_n = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)(e^{st} + e^{-st})] dt \right] - j \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[f(t) \frac{(e^{st} - e^{-st})}{j} \right] dt \right] \right\}$$

$$c_n = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)[e^{st} + e^{-st} - e^{st} + e^{-st}] dt \right] \right\}$$

$$c_n = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)[2e^{-st}] dt \right] \right\}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)(e^{-st}) dt \text{ -----2}$$

Definición de la Transformada Bilateral de Laplace

$$f(t) = \sum_{s=\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} (c_n e^{st}) \quad s = j\omega = \frac{j2\pi}{T}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)(e^{-st})] dt \quad T \rightarrow \infty$$

$$s \rightarrow ds$$

Así que:

$$\frac{1}{T} = \frac{ds}{j2\pi}$$

Se aplican los límites a las ecuaciones anteriores.

$$c_n T \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

El lado derecho de esta expresión está en función de "s = σ - jω" y no de "t"

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \text{Transformada Bilateral de Laplace}$$

Se aplica el proceso del límite a la ecuación "1" y se divide y multiplica por "T"

$$f(t) = \sum_{s=\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \left(c_n T e^{st} \frac{1}{T} \right)$$

Se sustituye " $c_n T = F(s)$ "

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad \text{Transformada Inversa de Laplace}$$

Hemos demostrado por artificios matemáticos la transformada de Laplace así como la transformada inversa de Laplace, podemos notar que La transformada de Laplace es un caso especial de la transformada de Fourier, ya que solo basta con cambiar los parámetros de la integral, Laplace maneja en plano complejo, y Fourier maneja el plano imaginario.