CARACTERIZACIÓN DE TRATAMIENTOS Y CONVERSIONES: EL CASO DE LA FUNCIÓN AFÍN EN EL MARCO DE LAS APLICACIONES

SANDRA ISABEL GUTIÉRREZ OTÁLORA
DIEGO APARICIO PARADA LANDAZÁBAL

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D. C.
2007

CARACTERIZACIÓN DE TRATAMIENTOS Y CONVERSIONES: EL CASO DE LA FUNCIÓN AFÍN EN EL MARCO DE LAS APLICACIONES

SANDRA ISABEL GUTIÉRREZ OTÁLORA
DIEGO APARICIO PARADA LANDAZÁBAL

TESIS DE MAESTRÍA

DIRECTOR: HERNÁN DÍAZ ROJAS
M.E. EN MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D. C.
2007

Nota de aceptación:

_____
_____
_____
_____
_____
_____

_____
Firma del presidente del jurado

_____
Firma del jurado

_____
Firma del jurado

Bogotá, 19 de febrero de 2007

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN

En esta tesis se caracterizan las transformaciones que efectúa un grupo de estudiantes de la Escuela Colombiana de Ingeniería, cuando se proponen situaciones de variación que se modelan mediante la función afín, para lo cual se estudian sus producciones escritas.

El estudio se soporta en la teoría de registros de representación de Raymond Duval, de donde se toman algunos elementos que definen el marco conceptual a partir del cual se diseñan las situaciones propuestas a los estudiantes y se construyen las categorías de análisis de los resultados.

La investigación utiliza metodología *cualitativa interpretativa* y como instrumento de recogida de datos un cuestionario que consta de tres situaciones de variación que corresponden a contextos de desocupado de tanques, posición y temperatura, las cuales se caracterizan por estar dadas en registro verbal, no explicitan el registro de representación de la respuesta y contemplan fenómenos de no congruencia.

Para el análisis de los resultados se consideran dos elementos, por una parte las producciones escritas de los estudiantes y por otro lado la presentación que hace el texto guía del curso del tema en estudio.

Entre los resultados se encontró que los estudiantes exhiben gran diversidad de transformaciones (tratamientos y conversiones) para solucionar las situaciones de variación propuestas aunque sus producciones escritas muestran un bajo nivel de articulación entre registros. Así mismo, las representaciones que hacen en un registro diferente al verbal varían de acuerdo al contexto de la situación.

TIPO DE DOCUMENTO: Tesis de maestría

TÍTULO DEL DOCUMENTO: Caracterización de tratamientos y conversiones: el caso de la función afín en el marco de las aplicaciones

AUTOR: Gutiérrez Otálora Sandra Isabel, Parada Landazábal Diego Aparicio

PUBLICACIÓN: Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. 2007

PALABRAS CLAVE: Función afín, variación, representaciones, conversiones, tratamientos, fenómenos de congruencia y no–congruencia.

DESCRIPCIÓN

En este trabajo de investigación se estudian las producciones escritas de un grupo de estudiantes de cálculo diferencial, para caracterizar las transformaciones que realizan en tres situaciones que se modelan con la función afín y que han sido diseñadas con características especiales. El estudio tiene como soporte la teoría de registros de representación de Raymond Duval y utiliza metodología cualitativa interpretativa. Los principales resultados muestran entre otros un bajo nivel de articulación entre registros de representación, así como en la utilización de la función lineal como herramienta en la solución de problemas asociados a la variación.

FUENTES

Carlson, M., et al. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA. 8(2), 121-156*

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones. La articulación de dos registros. Antología en Educación Matemática. Cinvestav. IPN. México.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Duval, R. (2004). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

García, Serrano y Espitia (2000). Hacia la noción de función como dependencia y patrones de la función lineal. Conciencias, Universidad Pedagógica Nacional.

Goetz, J. y Lecompte M. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. Ediciones Morata. Madrid.

Guzmán, I (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Relime. 1(1), 5–21*

Hiebert y Carpenter (1992). Aprendizaje y enseñanza con comprensión. Traducción hecha por Alfonso H. y Perry, P.

CONTENIDO

Introducción

Capítulo 1. Marco teórico

Capítulo 2. Antecedentes y problema de investigación

Capítulo 3. Metodología

Capítulo 4. Análisis de textos escolares

Capítulo 5. Análisis de las situaciones

Capítulo 6. Análisis de los resultados del cuestionario

Capítulo 7. Conclusiones, cuestiones abiertas, recomendaciones

Referencias

METODOLOGÍA: Cualitativa interpretativa

CONCLUSIONES

Dentro de las conclusiones se señala que:

1. El contexto de la situación de variación influye en los registros de representación y en las transformaciones que utilizan los estudiantes para enfrentarlas.

2. Se aprecia gran dificultad para expresar de manera general la relación directa o inversa entre magnitudes, y su aproximación más cercana es la utilización de casos particulares.
3. Las conversiones que realizan los estudiantes se ven afectadas cuando el enunciado de la situación incluye elementos que distraen la atención y que impiden la interpretación global de la misma.
4. Aunque en el texto guía se proponen ejercicios relacionados con la interpretación de la pendiente y del corte en contextos así como con la realización de conversiones de lo gráfico a lo verbal, en general los estudiantes muestran una baja utilización del registro verbal en tareas asociadas con descripción o comparación de razones o magnitudes, así como en sus procedimientos.
5. Se observa que casi la totalidad de los estudiantes hace conversiones a otros registros solamente cuando sienten la necesidad de ampliar la información para dar respuesta al cuestionamiento planteado; pero no se aprecia un interés por poner en correspondencia las unidades significantes entre registros para corroborar o verificar sus resultados.
6. El registro seleccionado al hacer la primera conversión es determinante en la utilización de uno o varios registros de representación a lo largo del desarrollo de la situación.
7. Un porcentaje significativo de estudiantes realiza transformaciones para hallar intervalos de covariación. Se observa gran variedad de tratamientos para determinarlos, que de mayor a menor nivel de utilización incluyen reglas de tres, lectura de gráficas por la vía del punteo y aplicación del modelo funcional en el registro algebraico.
8. El porcentaje de éxito en las situaciones presentadas está directamente relacionado con los fenómenos de congruencia asociados a éstas.

REFERENCIAS

Acosta y otros (2002). Informe de investigación no publicado. *Caracterización de los niveles de conceptualización de variación en los estudiantes de los primeros semestres de la Escuela Colombiana de Ingeniería*.

Aviles–Garay, E. (2001). *Using multiple coordinated representations in a technology intensive setting to teach linear functions at the colege level*. Tesis doctoral. Illinois: University of Illinois.

Carlson, M., et al. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA. 8(2), 121-156*

D'Amore, B. (2002). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la evolución.

Denzin y Lincoln, (2000). The discipline and practice of qualitative research. En Denzin & Lincoln (Eds.) *Handbook of Qualitative Research*. Sage publications, Inc.

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones. La articulación de dos registros. Antología en Educación Matemática. Cinvestav. IPN. México.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.
Duval, R. (2004). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Font, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. *Revista EMA. 6(2), 180-200*

García, Vázquez e Hinojosa (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Revista Ingenierías 7(24), 27-34*

García, Serrano y Espitia (2000). Hacia la noción de función como dependencia y patrones de la función lineal. Conciencias, Universidad Pedagógica Nacional.

García y otros (1995). Elementos para construir una didáctica de la función: avance de investigación. Universidad Pedagógica Nacional.

Goetz, J. y Lecompte M. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. Ediciones Morata. Madrid.

González, M. y Hernández, E. (año). Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas.

Guacaneme, E. (2003).Estudio de la variación conjunta en la identificación de funciones. Memorias Seminario matemática educativa: fundamentos de las matemáticas universitarias.

Guzmán, I (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Relime. 1(1), 5–21*

Hernández, R. y otros. (1991). Metodología de la investigación. McGraw Hill. México

Hiebert y Carpenter (1992). Aprendizaje y enseñanza con comprensión. Traducción hecha por Alfonso H. y Perry, P.

Hitt, F. (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Revista de Educación Matemática. 7(1), 63–75*

Hitt, F. (1997) Sistemas semióticos de representación. Avance y perspectiva. [on line] Hemeroteca virtual. http://www.hemerodigital.unam.mx/ANUIES/

Lacasta, E. (2000). Determinación de concepciones y funcionamientos del gráfico cartesiano de funciones: problemáticas de didáctica. XIV jornadas del seminario universitario de investigación en didáctica de las matemáticas.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares.* Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Peralta, J. (2002). Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal (on line) www.mat.uson.mx/semana/memorias%20XIII/peralta%20garcia.pdf

Planchart, O. (2000). *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función*. Tesis doctoral. Cuernavaca: Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Romero, I. (2000). Representación y comprensión en pensamiento numérico. Memorias IV Simposio SEIEM. Huelva.

Ruiz, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Schoenfeld, (1999). Looking toward the 21st century : Challenges of educational theory and practice. Educational researcher.

Séptimo encuentro de redes del sur. (2003). [on line]. http://usuarios.lycos.es/redesdelsur/FORO/TEMA.htm

Stewart, Redlin y Watson. Precálculo. Editorial Thomson.

Stewart. Cálculo. Trascendentes tempranas. Cuarta edición. Editorial Thomson.

Streun, A. (2000). Representation in applying function. *International journal of mathematical education in science and technology. 31(5). 703 - 725*

Dedicatoria

Con un profundo agradecimiento a mi familia,
por el apoyo incondicional que me han dado durante este tiempo,
así como por su generosidad y confianza en mi.

Sandra Gutiérrez Otálora

A mis padres, Alexandra y Marthica

Diego Parada Landazábal

AGRADECIMIENTOS

Nuestro agradecimiento al profesor Hernán Díaz, director de esta investigación, por las observaciones realizadas.

Un agradecimiento especial a los alumnos y profesores de la Escuela Colombiana de Ingeniería, que con su disponibilidad y su participación contribuyeron en buena parte a esta experiencia.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN **18**

1 MARCO TEÓRICO **22**

1.1 REPRESENTACIONES 22

1.1.1 Las tres actividades cognitivas: formación, tratamientos, conversiones *27*

1.1.2 Congruencia y no congruencia entre registros de representación *30*

1.1.3 Registros de representación movilizados en matemáticas *32*

1.1.4 Registros de representación y unidades significantes de la función afín *35*

2 ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN **41**

2.1 ESTUDIOS RELACIONADOS CON EL ENFOQUE VARIACIONAL DE LA FUNCIÓN 42

2.2 PROPUESTAS DIDÁCTICAS PARA ABORDAR LA FUNCIÓN DESDE LAS REPRESENTACIONES Y EL ENFOQUE VARIACIONAL 53

2.3 ESTUDIOS RELACIONADOS CON LA FUNCIÓN Y SUS REPRESENTACIONES 57

2.4 CARACTERÍSTICAS DE LOS TRABAJOS REVISADOS 65

2.5 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN 68

3 METODOLOGÍA **73**

3.1 ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN 73

3.2 DIMENSIONES DE LA INVESTIGACIÓN 74

3.3 HIPÓTESIS 77

3.4 FIABILIDAD 78

3.5 ESTRATEGIA DE RECOGIDA DE DATOS 78

3.6 ANÁLISIS DE DATOS 80

3.7 DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN Y DE LA MUESTRA 81

3.8 VARIABLES DEL ESTUDIO 82

3.8.1 Variables relacionadas con las transformaciones que realizan los estudiantes *82*

3.8.2 Variables relacionadas con el texto *84*

4 ANÁLISIS DE TEXTOS ESCOLARES **85**

4.1 LIBRO DE PRECÁLCULO 86

4.2 LIBRO DE CÁLCULO 92

5 ANÁLISIS DE LAS SITUACIONES **98**

5.1 SITUACIÓN 1 100

5.2 SITUACIÓN 2 108

5.3 SITUACIÓN 3 115

6 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL CUESTIONARIO **123**

6.1 SITUACIÓN 1 123

6.2 SITUACIÓN 2 140

6.3 SITUACIÓN 3 154

7 CONCLUSIONES, CUESTIONES ABIERTAS, RECOMENDACIONES **168**

7.1 CONCLUSIONES DE LA SITUACIÓN 1 168

7.2 CONCLUSIONES DE LA SITUACIÓN 2 170

7.3 CONCLUSIONES DE LA SITUACIÓN 3 171

7.4 CONCLUSIONES GENERALES 173
7.5 CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LAS HIPÓTESIS 176
7.6 CUESTIONES ABIERTAS 178
7.7 RECOMENDACIONES 179

REFERENCIAS 180

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Adaptación de la tabla propuesta por C. Janvier (Font, 2001, pp. 182) 37
Tabla 2. Variables y unidades significantes de la función afín en el registro algebraico 39
Tabla 4. Variables y unidades significantes de la función afín en el registro tabular 40
Tabla 7. Variables y unidades significantes de la situación 1 en el registro verbal 101
Tabla 8. Representación de la situación 1 en los registros aritmético, algebraico y gráfico 102
Tabla 9. Variables y unidades significantes de la situación 2 en el registro verbal 109
Tabla 10. Representación de la situación 2 en los registros aritmético, algebraico y gráfico 111
Tabla 11. Variables y unidades significantes de la situación 3 en el registro verbal 116
Tabla 12. Representación de la situación 3 en los registros aritmético, algebraico y gráfico 118
Tabla 14. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que hacen transformaciones para determinar la razón de desocupado en una situación no congruente 126
Tabla 16. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan comparaciones entre las razones de desocupado del tanque 129
Tabla 17. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan transformaciones para expresar el tiempo en términos del volumen de agua 131
Tabla 18. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan tratamientos para encontrar intervalos de covariación 134
Tabla 19. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan transformaciones para determinar la covariación entre dos magnitudes 137
Tabla 20. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que teniendo como referencia el punto de anclaje reconocen la invarianza de la situación 139
Tabla 21. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan conversiones al registro gráfico y aritmético en una situación asociada a un contexto de posición 141
Tabla 22. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan articulaciones entre registros para determinar la relaciones entre velocidades 144
Tabla 23. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan tratamientos para determinar la relación entre las velocidades de la situación 2 146
Tabla 24. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan transformaciones para expresar la distancia en términos del tiempo 147
Tabla 25. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que determinan la distancia entre dos puntos al reconocer la invarianza de la velocidad en el primer tramo de la situación 2 149
Tabla 26. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan tratamientos para obtener la relación inversa entre dos magnitudes que covarían 150
Tabla 27. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan transformaciones para determinar la posición de un punto conociendo la velocidad y el punto de llegada 151
Tabla 28. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que hacen conversiones al registro gráfico cartesiano en la situación 3 155

Tabla 30. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que muestran articulaciones entre los diferentes registros en la situación 3 158
Tabla 31. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan tratamientos sobre la gráfica para obtener intervalos de covariación..... 160
Tabla 32. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan transformaciones que involucran desplazamientos sobre la gráfica 162
Tabla 33. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan transformaciones cuando se cambia una de las razones de cambio de la temperatura respecto al tiempo..... 164
Tabla 34. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan tratamientos para cambiar las características de una situación..... 166

INTRODUCCIÓN

El reto de una investigación sobre la enseñanza de las matemáticas no es solo saber cuáles contenidos enseñar y de qué manera introducirlos en clase, sino también analizar las razones estructurales de los problemas de comprensión con los cuales se enfrenta la mayoría de alumnos de todos los niveles de enseñanza. (Duval, 2001, p. 15)

Muchos de los esfuerzos de la comunidad de investigadores en Educación Matemática, se han dirigido a entender y a promover el aprendizaje y la enseñanza, con y para la comprensión, y en éstos generalmente emergen asuntos relacionados con las representaciones de los conceptos.

La presente tesis de maestría se enmarca dentro de los trabajos que tienen como foco la función afín, estudiada desde las representaciones y tiene como referencia la teoría de registros de representación de Raymond Duval.

El origen de este trabajo surge de nuestra práctica docente con estudiantes de ingeniería, en los que hemos evidenciado que a pesar de haber trabajado ampliamente con la función afín –tanto en el colegio como en cursos anteriores al de cálculo – tienen muchas dificultades, especialmente cuando se les proponen situaciones enunciadas en lenguaje verbal y sobre las que se pide información relacionada con aspectos que caracterizan la variación tales como

identificación de magnitudes que covarían, descripción de situaciones de variación, intervalos de covariación e intervalos de crecimiento y decrecimiento entre otros.

El objetivo de este trabajo es caracterizar las transformaciones que efectúa un grupo de estudiantes de cálculo diferencial de la Escuela Colombiana de Ingeniería, en situaciones de variación que se modelan mediante la función afín. Para esto se consideran dos unidades de estudio, la primera relacionada con las producciones escritas, desde las que se exploran los registros en los que hacen transformaciones (tratamientos y conversiones), la forma en que las hacen y la coordinación de diferentes registros de representación. La segunda asociada con las representaciones que promueven los textos guía del curso, en la presentación de la función afín.

Las acciones de transformación y coordinación entre registros son imprescindibles en la actividad matemática y no son ni espontáneas ni producto de la presentación de múltiples representaciones; de ahí nuestro interés en hacer un diagnóstico que sirva como base a futuras investigaciones, en la formulación de propuestas didácticas y curriculares en la Escuela Colombiana de Ingeniería, y que apoye la selección adecuada de textos de esta misma institución.

Para cumplir parte del objetivo propuesto se han diseñado tres situaciones con características que incluyen entre otras, diferentes contextos de variación, lenguaje verbal como registro de partida y preguntas que no remiten a un algoritmo determinado.

La tesis se ha dividido en siete capítulos:

En el primer capítulo se instauran los elementos pertinentes de la *teoría de registros de representación semiótica* de Raymond Duval, que fundamentan esta investigación didáctica; también se establecen las características de los registros de representación asociados a la función afín. Todo esto permite diseñar las situaciones de variación propuestas a los estudiantes y tener elementos para el análisis de las producciones escritas.

En el segundo capítulo presentamos los aportes de los estudios revisados que consideramos se relacionan con el área problemática de este trabajo, y formulamos la descripción general del problema de investigación.

El tercer capítulo contempla la metodología de investigación que corresponde al enfoque cualitativo – interpretativo, las hipótesis, los instrumentos de recogida y análisis de datos, así como las variables del estudio.

En el cuarto capítulo se analiza la presentación del tema de función afín en el texto guía de los estudiantes de cálculo diferencial y de precálculo, desde las representaciones y desde el enfoque variacional. Consideramos que este análisis es importante para establecer posibles relaciones con las respuestas que explicitan los estudiantes.

El quinto capítulo presenta el análisis de las situaciones desde los elementos teóricos, lo que incluye el estudio de las unidades significantes y de los fenómenos de congruencia que se generan entre registros, también se establece el objetivo que se persigue con cada una de las preguntas propuestas.

El sexto capítulo recopila la descripción y análisis de los resultados obtenidos con la muestra de estudiantes, lo que permite caracterizar las transformaciones que hacen en las tres situaciones de variación.

El último capítulo presenta las conclusiones de la investigación: en primer lugar las que provienen del análisis de los resultados de cada una de las situaciones de variación, en segundo lugar las inferidas a lo largo del estudio y por último, las relacionadas con las hipótesis planteadas. Adicionalmente, se establecen las cuestiones abiertas y recomendaciones del estudio.

1 MARCO TEÓRICO

El presente capítulo tiene como objetivo apropiar un marco conceptual que permita realizar el diseño de algunas situaciones de variación así como su análisis, para caracterizar las transformaciones que hace un grupo de estudiantes al dar solución a las mismas.

El marco teórico se ha dividido en dos partes. En la primera se establecen los elementos pertinentes de la teoría de conocimiento que fundamenta esta investigación didáctica, la cual corresponde a la *teoría de registros de representación semiótica* de Raymond Duval; en la segunda tratamos los registros de representación asociados a la función afín – desde un punto de vista teórico – lo que nos permite reconocer los elementos básicos, que se deben poner en juego en la construcción de las situaciones de variación propuestas a los estudiantes.

1.1 REPRESENTACIONES

Muchos investigadores han tenido en cuenta las representaciones en los procesos de enseñanza – aprendizaje, como herramienta importante en la construcción de significados. Desde la perspectiva cognitiva, las representaciones juegan un papel fundamental en los

procesos de comprensión, los que se consideran en términos de la integración y estructuración de representaciones mentales. Al respecto Duval (2004, p.24) afirma:

> "La actividad matemática es un tipo de actividad que, a pesar de su universalidad cultural, a pesar de su carácter puramente intelectual, supone una manera de pensar que no es nada espontánea para la gran mayoría de alumnos y de adultos. Necesita modos de funcionamiento cognitivos que requieren la movilización de sistemas específicos de representación. Estos sistemas constituyen registros de representación semiótica. Su integración a la arquitectura cognitiva de los sujetos es la condición absolutamente necesaria para poder comprender en matemáticas"

Hiebert y Carpenter (1992, p.4) expresan:

> "Comenzamos por definir la comprensión en términos de la manera en que la información está representada y estructurada. Una idea matemática, un procedimiento o un hecho se comprende si es parte de una red interna. Más específicamente, las matemáticas se comprenden si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión está determinado por el número y por la fuerza de las conexiones. Una idea matemática, procedimiento o hecho se comprenden aceptablemente si están ligados a redes existentes, por medio de conexiones numerosas o fuertes"

A su vez Romero (2000) establece que a través de las actividades asociadas a los sistemas de representación se puede caracterizar la comprensión que los estudiantes tienen acerca de un objeto matemático, bajo las suposiciones de que el conocimiento se caracteriza por ser

rico en relaciones y que las conexiones en la red son tan importantes como las piezas de información.

> Se ha producido comprensión por parte de un sujeto cuando este manifieste que ha enriquecido sus redes internas de conocimiento, este enriquecimiento se manifiesta a través de los sistemas de representación y mediante las actividades asociadas a los mismos. (Romero, 2000, p. 38)

Desde estas posiciones, es crucial que los estudiantes logren conectar o coordinar las diversas representaciones. Duval menciona que la "coordinación de los diferentes registros de representación es una condición necesaria para la comprensión" (Duval, 1999, p. 61), por otra parte Hitt (1996, citado por Planchart) afirma que "un determinado concepto es estable en un individuo si puede articular las diferentes representaciones del concepto sin contradicciones".

Uno de los diferentes puntos de vista que aborda la adquisición del conocimiento desde las representaciones las asume como *sistemas semióticos,* en los que se pueden efectuar operaciones, asociaciones, combinaciones, que dependen de las *restricciones propias del sistema*[1] y no del objeto. Así, las representaciones constituyen el elemento indispensable

[1] Cada sistema semiótico está definido por *reglas de conformidad* que permiten la formación y combinación de las unidades elementales del sistema. De esta forma las reglas de conformidad del sistema algebraico y del gráfico son diferentes y propias de cada uno. También existen *reglas de expansión* que permiten obtener otras representaciones en el mismo registro de partida.

para acceder a los *objetos matemáticos*[2], ya que no se dispone de objetos reales (o cosas) para exhibir en su lugar (D'Amore, 2002).

Duval (1999) clasifica las representaciones semióticas dentro de las representaciones conscientes y externas[3], e indica que son inherentes a un sistema particular de signos (el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos). Tienen la particularidad de ser convertidas en representaciones "equivalentes" en otro sistema semiótico, en el que pueden adoptar otras significaciones para el individuo.

Duval (2004) considera que los polos constitutivos de toda representación son el contenido de la representación, el objeto representado y la forma de la representación, estos elementos estructurales son importantes en los procesos de transformación de las representaciones, como se verá más adelante.

A su vez, Guzmán (1998) refiriéndose a la teoría de Duval, señala que el contenido de una representación depende del registro utilizado, que es el que presenta explícitamente al objeto representado y muestra particularidades del objeto que en otro registro pueden no ser

[2] Entendemos por objeto matemático aquel que no tiene un representante real perfecto, de ahí que una representación nunca agote al objeto.

[3] "La oposición **conciente/no conciente** es la oposición, entre de una parte lo que aparece ante un sujeto y el observa y, de otra, lo que a él se le escapa y no puede observar". (Duval, 1999, p.33) Las primeras tienen un carácter intencional.

"La oposición **externo/interno** es la oposición entre lo que de un individuo, de un organismo o de un sistema es directamente visible y observable y lo que, al contrario, no lo es". (Duval, 1999, p.33)

evidentes. De lo anterior, es necesario por una parte tener claro que el contenido de una representación nunca delimitará completamente al objeto representado y por otro lado se deben diferenciar el objeto representado y el contenido de su representación, para lo cual es preciso contar con varias representaciones del objeto que muestren propiedades diferentes de éste y a su vez integrarlas.

Respecto a las múltiples representaciones Keller y Hirsch (1998, citado por Aviles–Garay) mencionan algunos de sus beneficios potenciales:

> "a) provide multiple concretizations of a concept, b) selective emphasis and de–emphasis different aspects of complex concepts, and c) facilitate cognitive linking of representations"

Por su parte, Kaput (1992, citado por Aviles–Garay) señala:

> "Complex ideas are seldom adequately represented using a single notation system ... Each notation system reveals more clearly than its companion some aspects of the idea while hiding some other aspects. The ability to link different representations helps reveal the different facets of a complex idea explicitly and dynamically"

De lo expuesto anteriormente y sin entrar en profundidad reconocemos la importancia de las representaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y vemos en ellas una herramienta que permite indagar en cierta forma por los procesos de conceptualización de los estudiantes. Decimos en cierta forma pues asumimos que existe una interacción entre las representaciones semióticas y las mentales (internas) pero no necesariamente las representaciones semióticas son manifestación de las representaciones

mentales de un individuo. Sin embargo, pueden dar alguna idea de lo que el individuo ha representado internamente; según Hiebert y Carpenter (1992, p. 2) "la manera en la cual un estudiante trata las representaciones externas o genera dichas representaciones revela algo de cómo el estudiante ha representado tal información internamente"

También consideramos que la actividad conceptual implica la coordinación de los registros de representación, como lo señala Duval (1999) las dificultades de comprensión se evidencian en la imposibilidad de hacer conversiones (caso de no-congruencia) y de hacer transferencias.

Respecto a este último punto, Hiebert y Carpenter (1992, p. 13) expresan: "Los estudiantes que comprenden, retendrán lo que aprenden y lo transferirán a nuevas situaciones".

1.1.1 Las tres actividades cognitivas: formación, tratamientos, conversiones

Duval afirma que las representaciones semióticas están asociadas a sistemas semióticos, los cuales no necesariamente cumplen una función de comunicación, sino que pueden desempeñar funciones de tratamiento y de objetivación (o toma de conciencia)[4]. A su vez sostiene que un sistema semiótico es un *registro de representación semiótica* si permite que

[4] La función de tratamiento está asociada a la actividad de tratamiento y la de objetivación está ligada a la conversión; actividades que se explican en este mismo apartado, más adelante.

se cumplan tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: *formación, tratamiento y conversión*.

La ***formación de representaciones*** hace referencia a la selección de una marca o conjunto de marcas que permite expresar o evocar un objeto; debe cumplir con unas *reglas de conformidad*, por razones de comunicación y de transformación de representaciones. Estas reglas permiten identificar una representación como un elemento de un sistema semiótico determinado; hacen referencia a la determinación y combinación de unidades elementales para obtener unidades de nivel superior bajo las condiciones del sistema.

La transformación de la representación dentro del mismo registro donde se ha formado constituye lo que se denomina ***tratamiento*** de una representación. La función que cumple dentro del sistema semiótico está asociada a la ganancia de información, por ejemplo, se realiza un tratamiento cuando se tiene una ecuación y se hace una simplificación de la misma.

La ***conversión*** es una transformación de una representación dada en un registro, en otra representación en un registro diferente, que conserva parte del significado de la representación inicial pero al mismo tiempo da otras significaciones al objeto representado. Esta condición hace que la conversión sea una transformación externa al registro de partida. Se hace una conversión por ejemplo, cuando al tener una ecuación construimos una gráfica a partir de ella.

Duval (1999, p.46) afirma que la *conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos*. Entre los aspectos que dificultan esta *transformación* menciona la comprensión de un contenido limitada algunas veces a la representación en que se aprendió, la falta de coordinación entre los registros[5], o el desconocimiento de alguno de los dos registros de representación.

También señala que la conversión tiene dos características propias, la primera se refiere a que es *orientada*, es decir, se conoce el registro de partida así como el de llegada, y la segunda expresa que la conversión puede ser o no congruente[6]. Vale la pena mencionar que no existen reglas de conversión que permitan hacer el paso de un registro a otro, lo cual puede dificultar su realización.

Duval manifiesta que "la comprensión de algo, sea un texto o una imagen, moviliza ya sea actividades de conversión y de formación, o bien las tres actividades cognitivas" (1999, p. 42). Sin embargo, la enseñanza generalmente propicia el trabajo relacionado solamente con los tratamientos dejando de lado los procesos que involucran la conversión (Guzmán, Duval, 1999), y en los casos en que se favorece está última actividad se ha mostrado que el

[5] La coordinación (o articulación) entre registros se establece como una condición necesaria para la conceptualización. Se ha destacado que no es suficiente con mostrar el objeto en diferentes representaciones, es necesario enseñar cómo se hace el paso de una a otra y cómo se coordinan entre sí. (Duval, 2004).

[6] El concepto de congruencia se define en el siguiente apartado

registro de partida más usado es el algebraico, lo que conduce a que los estudiantes tiendan a dar sus respuestas en términos de éste; al respecto Vinner (1989, citado por Planchart) afirma "la preferencia por lo algebraico se debe a la creencia que la prueba algebraica es más aceptada dentro de la matemática que la prueba visual…"

1.1.2 Congruencia y no congruencia entre registros de representación

Duval menciona que la conversión entre dos representaciones es *congruente,* si al segmentar cada una de las representaciones en sus *unidades significantes*[7] para ponerlas en correspondencia, se cumplen tres criterios: correspondencia semántica entre las unidades significantes propias de cada registro, univocidad semántica terminal y conservación del orden de organización de las unidades significantes en las representaciones.

El primero de estos criterios hace referencia a que a cada unidad significante del registro de salida se le puede asociar una unidad significante elemental en el registro de llegada; el segundo establece que cada unidad significante elemental de la representación de partida se relaciona con una única unidad significante elemental en el registro de llegada y el tercero se refiere a que existe igual orden de las unidades significantes en las dos representaciones de los dos registros.

7 Entendemos por unidades significantes los valores que pueden tomar las diferentes variables en un registro. Se amplia este concepto en el apartado denominado *Registros de representación y unidades significantes de la función afín*

Tomamos como ejemplo para ilustrar estos tres criterios, el presentado por Duval (2004, p. 79):

	Correspondencia semántica de las unidades significantes	Univocidad semántica terminal	Conservación del orden
El conjunto de los puntos cuya ordenada es superior a la abscisa. ↓ y > x	sí	sí	sí
El conjunto de los puntos que tienen una abscisa positiva... ↓ x > 0	no >0 es una perífrasis (un único significado para varias palabras)	sí	sí
El conjunto de los puntos cuya *abscisa y ordenada tienen el **mismo signo*** ↓ x (.) y >0 El producto de la abscisa y la ordenada es mayor que 0	no	no	no globalización descriptiva (2 caso)

En el primer caso existe correspondencia semántica puesto que a las tres unidades "*puntos cuya ordenada", "es superior"* y "*abscisa"* del registro verbal les corresponde respectivamente en el registro algebraico "*y"*, ">" y "*x"*. En cuanto al criterio de univocidad semántica la representación en el registro algebraico es única y por último la transferencia del registro verbal al algebraico se hace de manera transparente siguiendo el orden de la descripción verbal.

En el segundo caso a la unidad "*positiva*" no se le puede hacer corresponder un símbolo en el registro algebraico sino que es necesario utilizar la expresión ">0" para indicarla.

Para el último ejemplo, a la unidad "*mismo signo*" no le corresponde una unidad significante elemental en el registro algebraico, sin embargo, esta unidad podría

corresponderse con "*el producto de la abscisa y la ordenada es mayor que cero*", es decir, $x.y > 0$, nótese que esta unidad no guarda el mismo orden de los términos de la frase inicial; adicionalmente cabría la posibilidad de utilizar la representación $(x > 0 \text{ y } y > 0)$ *ó* $(x < 0 \text{ y } y < 0)$ con lo que no se cumple la univocidad semántica.

Cuando alguno de estos criterios falla se dice que no hay *correspondencia entre las representaciones* o *no son congruentes*. Cabe señalar que los fenómenos de congruencia y de no congruencia dependen del sentido de la conversión, en un sentido (del registro A al registro B) puede ser congruente mientras que en el contrario no, debido a las reglas de formación propias de cada registro.

1.1.3 Registros de representación movilizados en matemáticas

Teniendo en cuenta que el objetivo de este trabajo se centra en las representaciones movilizadas por los estudiantes, consideramos pertinente establecer los registros de representación utilizados en matemáticas.

Según Duval, en matemáticas se movilizan cuatro registros de representación: discursivos, no discursivos, plurifuncionales y monofuncionales.

> "Los registros discursivos permiten describir, inferir, razonar, calcular, mientras que los registros no discursivos permiten visualizar lo que nunca es dado de manera visible". (Duval, 2004, p. 51)

En los registros plurifuncionales los tratamientos no son algoritmizables mientras en los monofuncionales si lo son. Estos últimos, precisamente son los más privilegiados por la enseñanza y los que más se usan para determinar la adquisición de conocimientos.

Dentro de los registros plurifuncionales discursivos se sitúa la lengua natural; los tratamientos particulares de éstos son las asociaciones verbales, descripciones, explicaciones, argumentaciones, deducciones, entre otros.

Entre los registros plurifuncionales no–discursivos se inscriben las figuras geométricas, en donde un tratamiento puede ser por ejemplo, la construcción con instrumentos. Los sistemas de escritura numérica, algebraica y simbólica son registros monofuncionales discursivos, en los que los tratamientos por ejemplo, tienen que ver con los procesos algebraicos.

Por último, los gráficos cartesianos son registros monofuncionales no–discursivos, en donde los cambios en escala o unidades en el sistema de coordenadas, la interpolación y extrapolación corresponden a tratamientos en el mismo registro.

Teniendo en cuenta la naturaleza de los registros movilizados, se pueden desarrollar transformaciones de representaciones semióticas por *tratamiento* tanto en registros monofuncionales como en plurifuncionales, mientras que las *conversiones* pueden llevarse

a cabo entre dos registros monofuncionales, dos registros plurifuncionales o entre uno monofuncional y uno plurifuncional.

Considerando que las situaciones de variación que se proponen están dadas en registro plurifuncional discursivo (lengua natural), es importante tener presente que desde este registro los tratamientos no son algoritmizables, de ahí que se demanden habilidades especiales por parte de los estudiantes para poder resolver las situaciones planteadas.

Duval (2004) afirma que todo discurso o texto involucra dos aspectos: uno relacionado con la redacción (lingüística) y el otro con los objetos de conocimiento. Así, comprender el enunciado de un problema obliga a diferenciar la descripción de la situación y el tratamiento matemático para su solución. El primer aspecto activa una tarea de conversión en la que se debe discriminar la información pertinente, esto probablemente es lo que mayor dificultad genera en la comprensión de los enunciados. La conversión consiste en hallar una representación (algebraica, gráfica, aritmética) que permita seleccionar y organizar la información pertinente del enunciado, para así poder plantear el tratamiento matemático que da respuesta al interrogante de manera sencilla. La dificultad radica en el nivel de congruencia que pueda presentarse entre los dos registros.

Otros autores también han resaltado las destrezas necesarias para dar solución a situaciones problema: Janvier (citado por Streun, 2000) anota que las situaciones problema reales

demandan una gran capacidad para interpretar los enunciados verbales y requieren de habilidad para reconocer los componentes matemáticos fundamentales. Para este autor "el aprendizaje de las funciones se da siempre y cuando se desarrolle la capacidad del estudiante para interpretar y usar cada una de las representaciones del concepto de función. Así mismo la capacidad de traducción de uno a otro indica la comprensión del mismo" (Janvier citado por García y otros, 1995)

A su vez, Streun (2000) afirma que transformar un problema de un modo de representación a otro, es una de las heurísticas de gran importancia. También menciona que comprender un problema correctamente está relacionado con la formación de una representación mental adecuada de la situación, en donde todas las componentes relevantes pueden ser relacionadas con el conocimiento que el resolutor tiene. Adicional al conocimiento requerido para entender el problema, debe existir también un *conocimiento algorítmico* (habilidad para llevar a cabo métodos definidos de resolución de problemas) y un *conocimiento estratégico* (habilidad para aproximarse al problema).

Por su parte Hiebert y Carpenter (1992, p. 16) afirman que "la situación o contexto influye en la cantidad de transferencia que realmente ocurre".

1.1.4 Registros de representación y unidades significantes de la función afín

Para el caso particular de esta investigación, surge la necesidad de determinar – para la función afín – tanto los registros de representación como las unidades significantes

correspondientes a cada uno de ellos, para poder establecer los elementos que se pondrán en juego en el diseño de las situaciones, así como los aspectos a tener en cuenta en su análisis.

En cuanto a los registros de representación asociados a la función, Janvier (2001, citado por Font) menciona cuatro: verbal, tabular, gráfico y algebraico, cada uno de los cuales pone en funcionamiento diferentes procesos cognitivos:

> *La representación*[8] *verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas, y es básica para interpretar y relacionar las otras tres; la representación en forma de tabla se relaciona con el pensamiento numérico; la representación gráfica se conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se relaciona con la geometría y la topología; mientras que la expresión analítica se conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra.* (Font, 2001, pp. 182)

En la tabla 1 se presentan las posibles relaciones que pueden establecerse entre los registros de representación, de acuerdo a Font.

[8] El término representación usado por Janvier en esta cita, corresponde al de registro de representación usado en este trabajo

Tabla 1. Adaptación de la tabla propuesta por C. Janvier (Font, 2001, pp. 182)

Hacia ***Desde***	***Situación, Descripción verbal***	***Tabla***	***Gráfica***	***Expresión analítica***
Situación, Descripción verbal	*Distintas descripciones*	*Estimación/cálculo de la tabla*	*Boceto*	*Modelo*
Tabla	*Lecturas de las relaciones numéricas*	*Modificación de la tabla*	*Trazado de la gráfica*	*Ajuste numérico*
Gráfica	*Interpretación de la gráfica*	*Lectura de la gráfica*	*Variaciones de escalas, unidades, origen, etc.*	*Ajuste gráfico*
Expresión analítica	*Interpretación de la fórmula (interpretación de parámetros)*	*Cálculo de la tabla dando valores*	*Representación gráfica*	*Transformaciones de la fórmula*

En el arreglo presentado anteriormente consideramos que las relaciones en el mismo registro podrían corresponder a *tratamientos* en términos de la teoría de Duval, mientras que en diferentes registros corresponderían a *conversiones*.

En toda actividad de conversión y de articulación de registros de representación, se hace necesario discriminar las unidades significantes propias de los registros que intervienen. Como lo mencionamos, consideramos las unidades significantes como los valores que pueden tomar las diferentes variables en cada registro. De esta forma la representación debe someterse a todas las variaciones posibles, bajo la condición de que siga teniendo sentido.

Es importante mencionar que se distingue entre unidades significantes y unidades *cognitivamente pertinentes,* estas últimas involucran la conversión, de ahí que se necesite la presencia de otro registro de representación en el que se debe ver si cualquier variación en

las unidades significantes del registro de partida provoca variaciones en el registro de llegada. Es así como la variación en los dos registros permite determinar las unidades cognitivamente pertinentes del primero.

Duval señala que la naturaleza de las unidades significantes y su discriminación dependen de cada registro, por lo que éstas pueden ser diferentes. A continuación se mencionan las unidades significantes en cada uno de los registros de la función afín, excluyendo el caso del registro verbal que será analizado más adelante[9] de manera particular para las situaciones propuestas en este trabajo; también se excluyen las funciones afines con pendiente cero y no definida.

1.1.4.1 Registro algebraico

De manera general la ecuación de la función afín tiene la estructura $y = f(x) = mx + b$, en esta se reconocen dos variables que son el coeficiente *m* y el término independiente *b*, que pueden tomar los valores que aparecen en la tabla 2.

[9] Ver capítulo 5, correspondiente al análisis de las situaciones

Tabla 2. Variables y unidades significantes de la función afín en el registro algebraico

Variables	Unidades Significantes
m	m>1
	m=1
	m<1
	m> -1
	m= -1
	m< -1
b	b<0
	b=0
	b>0

1.1.4.2 Registro gráfico

Tabla 3. Variables y unidades significantes de la función afín en el registro gráfico. (Tomada de Duval 1992, p128)

Variables	Unidades Significantes
Sentido de la inclinación del trazo	El trazo sube de izquierda a derecha[10]
	El trazo desciende de izquierda a derecha
Los ángulos del trazo con los ejes	Hay una partición simétrica del cuadrante atravesado
	El ángulo formado con el eje horizontal es menor que el formado con el eje vertical
	El ángulo formado con el eje horizontal es mayor que el formado con el eje vertical[11]
La posición del trazo respecto al origen del eje vertical	El trazo corta al eje *y* arriba del origen
	El trazo corta al eje *y* abajo del origen
	El trazo corta al eje *y* en el origen

[10] "La referencia izquierda derecha es el sentido normal del recorrido visual de una página escrita en caracteres latinos" (Duval, 1992, p128)

[11] "Cuando la recta trazada no pasa por el origen, es suficiente desplazar el eje vertical, por ejemplo, hasta el punto de intersección de la recta con el eje horizontal" (Duval, 1992, p128)

1.1.4.3 Registro tabular

Asumimos como condición para las tablas que los valores de la variable independiente estén ordenados y como se había mencionado anteriormente no consideramos el caso de las funciones afines con pendiente cero y no definida.

Tabla 4. Variables y unidades significantes de la función afín en el registro tabular

Variables	Unidades Significantes
La relación que guardan los valores de la variable independiente	La variación entre términos consecutivos es constante, es decir, $x_n - x_{n-1} = k$
	La variación entre términos consecutivos no es constante.
La relación que guardan los valores de las variables independiente y dependiente	A medida que los valores de la variable independiente aumentan, los de la variable dependiente también
	A medida que los valores de la variable independiente aumentan, los de la variable dependiente disminuyen.
El valor que toma la variable independiente	Es igual a cero
	Es diferente de cero
El valor que toma la variable dependiente	Es igual a cero
	Es diferente de cero

Los conceptos teóricos mencionados anteriormente servirán de base para diseñar algunas situaciones dadas en registro plurifuncional discursivo, el de la lengua natural, en el que se reconoce que el paso de éste hacia otros registros produce dificultades debidas a los fenómenos de no – congruencia. La discriminación de las variables y de las unidades significantes correspondientes en cada registro es una componente importante en esta tarea, así como en la construcción de un instrumento que permita su análisis.

2 ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Nuestra propuesta de investigación se inscribe dentro de los proyectos en Didáctica de las Matemáticas que abordan el estudio de la función. Este concepto ha sido importante a través de la historia y su aprehensión dista de ser sencilla – tanto para estudiantes como para profesores en formación – de ahí el interés que ha habido en proponer diversas formas de abordarlo. A pesar de que se ha trabajado desde diferentes líneas en torno a la función el problema no está resuelto.

En este capítulo presentamos en primer lugar y de manera resumida los estudios revisados que consideramos se relacionan con el área problemática de este trabajo, y en segundo lugar la descripción del problema de investigación.

Teniendo en cuenta que nuestro interés se centra en el estudio de las representaciones asociadas al concepto de función afín así como en el enfoque variacional de la misma, estudiamos algunos trabajos que se encaminan en esta temática, y que podrían darnos idea sobre: nociones asociadas a la variación que pueden ser problemáticas para los estudiantes, elementos de la variación que se promueven en el aula, registros movilizados y dificultades con éstos al trabajar con la función afín. Es así como los hemos clasificado en tres grupos:

- Estudios relacionados con el enfoque variacional de la función
- Propuestas didácticas para abordar la función desde las representaciones y el enfoque variacional
- Estudios relacionados con la función y sus representaciones

2.1 ESTUDIOS RELACIONADOS CON EL ENFOQUE VARIACIONAL DE LA FUNCIÓN

Carlson (2003) y su grupo de investigación, han publicado un trabajo titulado *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio,* en el que proponen un marco conceptual para caracterizar las acciones asociadas al razonamiento covariacional de estudiantes universitarios de un curso de cálculo de alto desempeño, al representar funciones relacionadas con eventos dinámicos.

Mencionan algunas dificultades asociadas al razonamiento covariacional que han reportado diferentes estudios, también justifican la importancia de la covariación para comprender los conceptos principales del cálculo:

- La habilidad para interpretar la razón de cambio para intervalos del dominio de una función se desarrolla lentamente. También se ha encontrado que existen problemas para interpretar la información en las gráficas de funciones. (Carlson, 1998;

Monk,1992; Monk y Nemirovsky, 1994; Nemirovsky, 1996; Thompson, 1994ª, citados por Carlson, 2003)

- Los estudiantes de cálculo muestran una fuerte tendencia a distraerse por la forma cambiante de una gráfica y en general no ven la gráfica de una función como medio para definir la relación de covariación entre dos variables. (Monk, 1992 y Kaput, 1992, citados por Carlson, 2003)
- Los estudiantes de cálculo tienen dificultad para interpretar y representar la concavidad y los puntos de inflexión de una gráfica en el contexto de una situación dinámica del mundo real. En general, parece que no conceptualizan sobre la relación existente entre dos variables que cambian de manera concurrente. (Carlson, 1998; Monk, 1992, citados por Carlson, 2003)
- La concepción de función de los estudiantes universitarios de primeros niveles, no incluye la relación de dos variables cambiando simultáneamente una con respecto a la otra. (Tall 1992, citado por Carlson, 2003)
- La consideración de que la función es un proceso que acepta valores de entrada y produce valores de salida, es esencial par el desarrollo de una concepción madura de función y es fundamental para entender la covariación. (Breidenbach, Dubisky, Haws y Nichols, 1992, citados por Carlson, 2003)
- La concepción de función como covariación es necesaria para la comprensión de los conceptos del cálculo; su carencia es un obstáculo importante para el desarrollo de la concepción de límite. (Cottrill et al.,1996, citados por Carlson, 2003)

- En la comprensión del concepto de derivada es esencial la consideración de la función como covariación de los valores de entrada y de salida. (Zandieh, 2000, citado por Carlson, 2003)
- El razonamiento covariacional es fundamental para la comprensión del teorema fundamental del cálculo. (Thompson, 1994b, citado por Carlson, 2003)

En este estudio también se señala que los currículos convencionales no han sido lo suficientemente efectivos para promover la comprensión de la función, "*los estudiantes que ingresan a la universidad traen una comprensión deficiente sobre las funciones, y los cursos universitarios de primer nivel hacen poco para solucionar esta deficiencia*" (2003, p. 122)

El grupo de investigación de Carlson estudia la complejidad de llevar a cabo procesos mentales que involucren la razón de cambio, a medida que ella cambia continuamente en una relación funcional. Proponen una caracterización de las acciones mentales que realizan los estudiantes las cuales resumen en la tabla 5 que se presenta a continuación.

Tabla 5. Acciones mentales del marco conceptual para la covariación. (*Tomado de Carlson 2003,* p. 128)

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en *x*).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

También definen cinco niveles de desarrollo de razonamiento que exhiben los estudiantes cuando se enfrentan a tareas específicas de covariación, éstos se establecen en términos de las acciones mentales mencionadas anteriormente (tabla 5), y las resumen en la tabla 6.

Tabla 6. Marco conceptual para los niveles de la covariación *(Tomado de Carlson 2003,* p. 129)

Nivel del razonamiento covariacional
El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.
Nivel 1 (N1). Coordinación En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2). Dirección En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4). Razón promedio En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5). Razón instantánea En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Entre las principales conclusiones mencionan que los estudiantes:

- Exhiben comportamientos que sugieren incapacidad para coordinar consistentemente cambios en la razón promedio de cambio, con cambios fijos en la variable independiente para el dominio de una función.
- Muestran comportamientos que indican dificultad para coordinar la razón instantánea de cambio, con cambios continuos en la variable independiente.
- Tienen dificultad para explicar lo que representa un punto de inflexión en una gráfica al aplicar el razonamiento covariacional.

Aun cuando otros estudios han reportado de manera general los problemas de los estudiantes con la covariación, esta investigación identifica de manera específica los aspectos de razonamiento covariacional que parecen ser problemáticos para estudiantes universitarios.

Otro de los estudios revisados es el de Acosta y su grupo de investigación (2002), titulado *Caracterización de los niveles de conceptualización de variación en los estudiantes de los primeros semestres de la Escuela Colombiana de Ingeniería*. Estos profesores presentan una caracterización de los niveles de conceptualización de variación que tienen los estudiantes de los dos primeros semestres de Ingeniería; para esto diseñan una prueba que recoge información tanto del manejo de magnitudes, como del de representaciones verbales, gráficas y algebraicas.

En su trabajo definen niveles de conceptualización de acuerdo a las acciones que realizan los estudiantes en tareas asociadas a la variación (2002, p. 10):

- *Describe con sus propias palabras lo que sucede en la situación de variación, identifica magnitudes que cambian y magnitudes que permanecen constantes en el transcurso del tiempo, establece relaciones entre magnitudes (covariación), hace predicciones de la situación a partir de las relaciones establecidas.*

- *Hace dibujos para representar la situación y las magnitudes involucradas, describe de esta forma las relaciones y hace predicciones.*
- *Representa con una gráfica cartesiana la relación entre dos magnitudes en una situación de variación identificando las mismas, representando las magnitudes con segmentos, y registrando un comportamiento global o detallado.*
- *Representa tabularmente situaciones de variación mediante la producción de valores de medidas de las magnitudes o mediante una fórmula algebraica, y utiliza las reglas de aplicación del álgebra para describir comportamientos como crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, ceros, en el contexto de la situación.*
- *Establece relaciones funcionales entre magnitudes bien sea a partir de las relaciones geométricas encontradas o a partir de otro tipo de observaciones, y hace predicciones utilizando las reglas de aplicación y manipulación de símbolos del análisis real (límites, continuidad, diferenciabilidad e integración).*

Dentro de los resultados encontrados señalan que:

- La población en estudio no tiene un buen manejo de las magnitudes, y entre éstas de la que mejor describen verbalmente el comportamiento con respecto al tiempo es la longitud, en menor proporción identifican la superficie, el volumen y la velocidad.

- Un porcentaje muy bajo de estudiantes reconoce en la gráfica un comportamiento global y la forma de describirlo hace referencia por ejemplo, al aumento o disminución de una de las magnitudes.
- Para algunos estudiantes la expresión algebraica es vista como un mecanismo que permite determinar el valor de alguna letra, pero no hay articulación entre este registro y los demás; de ahí que la ecuación no permita extraer directamente información acerca de la situación de variación modelada mediante la misma.

Una investigación que dentro de sus focos de estudio aborda el enfoque de la función desde la dependencia, es la tesis doctoral de Luisa Ruiz (1993), titulada C*oncepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* En este trabajo la autora realiza un análisis didáctico del concepto de función, para esto efectúa un estudio histórico-epistemológico con el objeto de precisar las variables y factores que han intervenido en el desarrollo del mismo. Estos estudios son la base para determinar las concepciones que tienen los estudiantes de los cursos 2º y 3º de bachillerato (BUP) y del curso de orientación universitaria (COU) sobre el concepto de función.

La investigadora propone mirar "cómo vive el objeto función en el sistema de enseñanza", a través de los programas, los textos y los apuntes de clase, con los que identifica obstáculos de tipo didáctico. Adicionalmente, realiza un cuestionario con seis preguntas de las cuales incluye tres situaciones *no convencionales* relacionadas con modelación, "la percepción de las funciones como una herramienta apropiada para modelizar relaciones

entre magnitudes físicas u otras, es una condición *sine qua non* para dar sentido al concepto de función en su totalidad" (Sierpinska, 1992, citada por Ruiz, 1993)

Ruiz, anota entre las conclusiones que:

- El estudio de los fenómenos de variación y cambio no se incluye dentro del sistema de enseñanza, en su lugar se promueve la ejercitación de procedimientos algorítmicos sobre las nociones fragmentadas en las que se ha dividido la función (dominio, rango, gráfica, fórmula,...). "La potencia modelizadora que esta noción tuvo desde sus orígenes queda distorsionada en la actualidad" (p. 426)
- El profesor utiliza la gráfica como recurso para explicar su discurso, adquiriendo solamente un carácter ostensivo.
- Los procesos algebraicos y la regla de tres, pueden constituirse en obstáculo para el desarrollo de la noción de variación.
- La intuición primera y las representaciones icónicas, predominan sobre el pensamiento variacional y la interpretación global.
- La función debe mostrar su carácter de herramienta para modelizar situaciones matemáticas y extramatemáticas, a través de problemas de dependencia y variación.

Otras investigaciones (Kaput, 1994; Monk, 1992; NCTM, 1989, 2000; Sfard, 1992; Thorpe, 1989; Vinner y Dreyfus, 1989; citados por Carlson et al., 2003) expresan la necesidad de incluir el concepto de función desde muy temprano en la escuela, a partir de situaciones de

cambio. A pesar de las recomendaciones mencionadas[12], su tratamiento en la enseñanza se sigue dando principalmente a través de la correspondencia, dejando de lado el carácter variacional (Lacasta, 2000; Guacaneme, 2003) y de esta forma relegando características tan importantes como la dependencia de magnitudes. Lo anterior no significa que en la escuela o en los libros de texto no se planteen situaciones de variación, sino que las estrategias que se usan para abordarlas, privilegian la idea de que la función le asigna una imagen a todo elemento de un conjunto. Por otra parte, no es que se rechace la idea de trabajar la función como correspondencia, sino que es insuficiente tratar el concepto solamente desde esta perspectiva.

A esta problemática se suma el desconocimiento por parte de algunos profesores del enfoque variacional de la función, lo cual se revela en algunos estudios como el realizado

---

[12] En el caso colombiano, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas también contemplan la importancia de estudiar la función desde la variación, con la cual se pueden modelar problemas y situaciones de la actividad práctica del hombre, de la ciencia y de la matemática misma. Enfatizan en el desarrollo del pensamiento numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. En cuanto al último se mencionan los conceptos y habilidades relacionados con este tipo de pensamiento.

Respecto al álgebra, se considera que en un primer momento generaliza patrones aritméticos y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, es por ello que debe involucrar entre otros aspectos el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas como medio de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas, ***la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de relaciones funcionales y de la variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra, y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables, todos estos desarrollos propios del pensamiento variacional.*** (Lineamientos Curriculares, 1998, p. 33).

Es así como se propone desarrollar en la educación media, un tipo de pensamiento que permita identificar y explicar fenómenos de cambio. Adicionalmente señalan que para desarrollar el pensamiento variacional se debe superar la enseñanza fragmentada y secuenciada de contenidos; este tipo de pensamiento conforma un campo conceptual que involucra conceptos y procedimientos que permiten modelar matemáticamente situaciones teóricas y prácticas.

por Hitt (1995). Esta investigación realiza un experimento en el que intenta demostrar que la intuición global se opone al pensamiento analítico; para probarlo el investigador somete a un grupo de profesores mejicanos a un cuestionario de 32 preguntas en las que se pide en unos casos encontrar la gráfica que representa el llenado de una botella y en otros determinar la forma del recipiente conociendo la gráfica que muestra la relación de llenado.

Los resultados reportan que los profesores:

- Tienen gran dificultad para pasar de la gráfica que representa el llenado, al dibujo de la botella, así como el proceso inverso.
- No asocian la variable independiente con la dependiente en un contexto analítico.
- Elaboran la gráfica de llenado de acuerdo a la forma de la botella, sin un análisis previo.
- Dibujan preferentemente botellas de base y boca circulares.
- Muestran la tendencia a representar el llenado mediante funciones continuas.

Se concluye de manera general que, la intuición global se opone al pensamiento analítico y que el concepto de función de dichos profesores no es un conocimiento estable ya que no articulan las diferentes representaciones del concepto sin contradicciones.

2.2 PROPUESTAS DIDÁCTICAS PARA ABORDAR LA FUNCIÓN DESDE LAS REPRESENTACIONES Y EL ENFOQUE VARIACIONAL

En la tesis doctoral, *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función,* Planchart (2000) reconoce que los estudiantes muestran deficiencias al tratar con el concepto de función y para contribuir a la solución de esta problemática propone una estrategia de enseñanza desde el marco de las representaciones, la visualización, la modelación y la tecnología. Propone a los estudiantes tareas de modelación y simulación con tecnología, que requieren la articulación de diferentes registros de representación para dar solución al problema.

Los resultados más relevantes de este estudio son los siguientes:

- Algunos estudiantes no pueden realizar la conversión del sistema gráfico al algebraico y en el caso de las tablas generalmente esperan que respondan a un patrón o a una ecuación, poniendo en duda que representen una función.
- Los estudiantes tienen la tendencia a pensar que las funciones deben ser continuas, lo cual es propiciado en muchos casos por el profesor quien además tiene una marcada preferencia por las funciones continuas definidas con una única fórmula.
- Existen dificultades con la notación de las funciones, lo que lleva a pensar en un manejo inadecuado de las reglas de formación propias del sistema algebraico.

- La mayoría de preguntas son respondidas en el registro gráfico, posiblemente producto del trabajo visual con tecnología.
- En los problemas que corresponden a situaciones físicas existen dificultades para convertir al registro algebraico, ya que se necesita de un mayor razonamiento para identificar las variables y combinarlas. Cuando se pidió pasar de la situación inicial al registro gráfico, en muchos casos los estudiantes señalaron la forma de la gráfica correctamente sin poder dar justificaciones, lo que induce a pensar que realizaron una *traslación icónica*[13]
- La modelación es una herramienta que contribuye a que los estudiantes puedan coordinar los distintos sistemas de representación.

La tesis doctoral de Aviles–Garay (2001) titulada *Using multiple coordinated representations in a technology intensive setting to teach linear functions at the collage level,* presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de la función lineal mediante el uso de tecnología y teniendo como sustento las múltiples representaciones. La idea surge ante la ausencia de experiencias apropiadas que enfaticen en las múltiples representaciones así como en sus articulaciones, es así como el propósito principal de este trabajo se centra en la creación de actividades que promuevan una comprensión adecuada de la función

[13] La traslación icónica es un obstáculo que según Monk hace referencia a la inclinación de los estudiantes a interpretar la información visual en la gráfica y a responder siguiendo el contorno o la gráfica que determina el móvil (Monk, citado por Planchart)

lineal teniendo como base los elementos mencionados. En el experimento se utiliza un grupo control y uno experimental.

Dentro de los resultados del estudio se menciona que:

- La tecnología permite el uso simultáneo de representaciones, lo cual promueve un mejor entendimiento de la función lineal.
- Las hojas de cálculo de Excel permiten a los estudiantes visualizar los efectos de los cambios en la variable independiente sobre la variable dependiente.

El trabajo realizado por García, Serrano y Espitia (2000), titulado *Hacia la noción de función como dependencia y patrones de la función lineal*, constituye una propuesta de enseñanza de la función lineal en los grados 6º y 7º de educación básica desde el enfoque de la dependencia, teniendo en cuenta nociones ligadas a ésta como son variación, variable y cambio, así como el uso de diferentes registros de representación.

El interés del trabajo se centra en iniciar la construcción del concepto de función desde la dependencia, a través de los registros gráfico, tabular y verbal, y orientar su comprensión hacia una perspectiva de *proceso*.[14]

[14] Sfard propone que las nociones matemáticas pueden ser concebidas desde dos concepciones: *operacional* (proceso) la cual es dinámica y *estructural* (estática) la cual es integrativa.

Para esto diseñan un conjunto de situaciones las cuales clasifican en situaciones de acción, de formulación y validación, y de institucionalización. Estas corresponden a funciones continuas o discretas, y a diversos modelos de función.

Estos autores señalan que el concepto de variación es central en el estudio de la función como dependencia, y que su comprensión se dificulta por dos razones:

> "Primero toda variación comporta cambios en la variable. Segundo, por la variación puede depender de los cambios de la misma variable, como también depender de la variación de otra variable llamada variable independiente" (pp. 54)

También mencionan la importancia de las diferentes representaciones asociadas al concepto, puesto que muestran diferentes características del objeto de conocimiento.

> "La noción de función como dependencia entre variables alcanza su mejor expresión a través de representaciones como las descripciones verbales, tablas de valores, gráficas o fórmulas o ecuaciones. Esto impone la necesidad de proponer tareas que demanden la traslación entre las diferentes representaciones y aún las transformaciones dentro de un mismo sistema de representación. Particularmente las tablas de valores y las gráficas cartesianas ayudan a desarrollar un pensamiento sobre la variación y sobre sus patrones de comportamiento" (pp. 68)

2.3 ESTUDIOS RELACIONADOS CON LA FUNCIÓN Y SUS REPRESENTACIONES

Varios estudios que tratan sobre la enseñanza y aprendizaje de la función, han reportado la importancia de trabajar con diferentes registros de representación para lograr su conceptualización (Hitt, 1995; Guzmán, 1998; Duval, 1999; Romero, 2000; Janvier citado por Font, 2001). Por su parte Hitt (1995) señala la necesidad de realizar investigaciones que permitan aclarar los procesos de articulación entre los diferentes registros de representación del concepto de función.

El estudio de Guzmán (1998), se apoya en la teoría de Duval y describe una experiencia en la que se explora el sentido que tienen para algunos estudiantes de ingeniería ciertas nociones asociadas a la función, en términos de los registros gráfico, algebraico y verbal. Para constatar la presencia de los registros mencionados, esta investigadora aplica un cuestionario de 16 preguntas conceptuales a 75 estudiantes de cálculo diferencial de primer año de ingeniería. El estudio reporta dentro de las conclusiones que:

- Las respuestas de los estudiantes están dadas en un solo registro que generalmente corresponde al algebraico o a aquel en el que aparece la pregunta.

- Las respuestas de los estudiantes revelan cierta debilidad para dar explicaciones verbales, lo cual sugiere que el registro del lenguaje natural debe tener mayor relevancia dentro del aula.
- "La traducción de un lenguaje a otro y la coordinación de registros no es un objetivo de enseñanza que se tome en cuenta explícitamente, y esto sin duda no favorece ni ayuda a los estudiantes a formular sus explicaciones. Muchas veces los estudiantes saben más de lo que son capaces de expresar y redactar, lo que es fácil comprobar en entrevistas con ellos: dar una explicación verbal es más fácil que darla por escrito." (Guzmán, 1998, p.18)
- Los análisis muestran deficiencias conceptuales como resultado de la falta de coordinación y la poca familiaridad para hacer conversiones entre los registros algebraico, gráfico y lenguaje natural; lo cual no surge de manera espontánea sino que requiere de un aprendizaje.
- Los estudiantes no son hábiles para leer e interpretar gráficos movilizando conceptos pertinentes que aprendieron en lenguaje formal o natural.
- Cuando la pregunta está dada en registro gráfico, las respuestas hacen referencia a lecturas gráficas sin explicaciones de las mismas.
- No existe interés por parte de los estudiantes, en hacer corresponder las unidades significantes de los registros gráfico y algebraico.

Esta investigación identifica de manera específica los registros movilizados por los estudiantes universitarios, en nociones asociadas al concepto de función.

Duval (1992) en su trabajo titulado *Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros,* muestra cómo la vía del punteo (hacer la lectura de las coordenadas de un punto sobre la gráfica) además de inadecuada para la interpretación global, se constituye en un obstáculo que impide encontrar la expresión algebraica que representa una gráfica cartesiana. Menciona algunas dificultades que muestran los estudiantes para leer e interpretar gráficas cartesianas, entre otras:

- No establecen la relación entre la pendiente y la dirección de la recta en el plano.
- Confunden la pendiente y la altura.
- No encuentran fácilmente la ecuación de la recta a partir de su representación gráfica.

Señala que la articulación entre los registros gráfico y algebraico no queda plenamente establecida después de haber estudiado las funciones afines. Adicionalmente, descarga de culpa a los conceptos matemáticos involucrados e incrimina directamente al desconocimiento de las reglas de correspondencia semiótica entre el registro de representación gráfico y el algebraico, así como a los fenómenos de no congruencia entre registros.

También menciona que la interpretación global requiere de la articulación de la variable visual de la representación gráfica con la unidad significante de la representación algebraica, mientras que los tratamientos que hacen referencia a la acción de localizar y leer

puntos aislados, y a los procesos de interpolación y extrapolación para obtener valores, dejan de lado las características generales de la gráfica y centran su atención en los puntos, lo cual se constituye en un obstáculo para la interpretación global.

Realiza una experiencia que incluye una prueba de diez preguntas, en las que el estudiante debe relacionar gráficas cartesianas de rectas con sus correspondientes expresiones algebraicas. En los resultados se hacen evidentes las dificultades para realizar una interpretación global de las gráficas, ya que la mayoría de los estudiantes escoge la vía del punteo.

Este investigador concluye que el pasaje del registro gráfico al algebraico requiere de la identificación precisa de todos los valores de las variables visuales pertinentes y del reconocimiento cualitativo de las unidades de escritura simbólica correspondientes[15], de estos dos aspectos presenta una metodología que permite discriminarlos.

La investigación llevada a cabo por Peralta (2002) y titulada *Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal,* se enmarca dentro de la teoría de Raymond Duval y explora las dificultades asociadas al aprendizaje de la función lineal, específicamente la mirada se centra en las conversiones entre representaciones gráficas, algebraicas y tabulares. La experiencia se llevó a cabo con nueve estudiantes del

[15] Las unidades de escritura simbólica hacen referencia a las unidades significantes en el registro algebraico.

área económico–administrativa de segundo semestre, que habían mostrado un bajo rendimiento al resolver problemas de oferta y demanda modelados mediante la función afín.

Entre las conclusiones destaca que:

- La noción de pendiente representa un serio obstáculo para la articulación entre registros. Los estudiantes no asocian el signo de la pendiente con la inclinación de la recta, lo cual se revela con mayor fuerza en las conversiones en las que el registro de partida es el gráfico.
- "Los errores registrados no solo revelan un descuido notorio de las actividades de conversión por parte de la enseñanza, sino además una confianza excesiva de los estudiantes en los procedimientos que han logrado mecanizar y de los que no manifiestan tener una significación clara" (Peralta, 2002, p.173)
- Los estudiantes eluden las significaciones gráficas de los parámetros presentes en la expresión algebraica, y encuentran la respuesta correcta por la vía del punteo.
- El registro tabular es visto solamente como una herramienta intermedia que permite localizar puntos en un plano, a partir de una representación algebraica y no como una representación en sí misma.
- Es muy difícil que los estudiantes puedan utilizar con éxito la función lineal como herramienta para resolver problemas de oferta y demanda; ya que no muestran una

articulación espontánea y libre de contradicciones de sus diversas representaciones, lo que lleva a pensar que no hay una aprehensión conceptual del objeto bajo estudio.

En la investigación *Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería* realizada por García, Vázquez e Hinojosa (2004), se reportan algunas dificultades en el aprendizaje del concepto de función. Este grupo diseña una experiencia con 433 estudiantes de ingeniería de segundo a cuarto semestre, con los que aplica una prueba relacionada con nociones asociadas al concepto de función, las preguntas incluyen los registros gráfico, algebraico, así como el pasaje entre éstos. Dentro de las conclusiones señalan:

- En estudiantes de ingeniería se encuentra que una de las mayores dificultades es la transferencia entre registros semióticos, particularmente del gráfico al algebraico, lo cual se evidencia de igual forma en los diferentes semestres. Este problema se ha hecho patente en otras investigaciones (Duval, 1998, Guzmán, 1992, citados por García et al, 2004) con estudiantes de diferentes edades, lo que los motiva a pensar que no es de índole conceptual sino de falta de "sensibilización o de experiencia" con actividades que involucren estas tareas, lo cual sugiere un incremento de las mismas.
- El papel que juegan los registros gráfico y tabular en ingeniería, es ilustrativo o de soporte, y no como representaciones en sí mismas. Adicionalmente el trabajo

relacionado con el pasaje de un registro a otro es muy pobre, lo que revela que "*la articulación entre representaciones es un objetivo que no se está cumpliendo, posiblemente porque esto no se ha tomado en cuenta en los actuales diseños de instrucción*"

González y Hernández (2003) en su trabajo titulado *Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas*, exploran las dificultades que tienen los estudiantes de cuarto de enseñanza obligatoria y de primero de bachillerato, en torno a la conversión entre los registros gráfico y algebraico de las funciones lineales y cuadráticas. Para esto realizan un cuestionario de 10 preguntas; aquellas relacionadas con la función lineal tienen en cuenta el signo de la pendiente y el corte para indagar sobre el manejo y su articulación con otros registros de representación.

Entre las conclusiones indican:

- La marcada dificultad que tienen los estudiantes para relacionar los coeficientes de la ecuación con las características geométricas; en términos de la teoría de Duval se diría que no articulan los dos registros de representación. También se encuentran algunos casos de estudiantes que no reconocen la forma de la función lineal en el registro algebraico, conocidas las características geométricas de la misma.

- El manejo que tienen los estudiantes de las funciones es operativo, esto se revela en el uso dado a las representaciones, y podría catalogarse en términos de la teoría de Sfard como un dominio a nivel de *proceso*.

La investigación llevada acabo por Streun (2000) y titulada *Representation in applying function,* trata con procesos de resolución de problemas, el rol de las representaciones en el aprendizaje de las funciones y los procesos de conversión entre representaciones. El principal interés está en la transferencia de conocimiento para el objeto función, es decir, en la "extensión" que los estudiantes realizan al utilizar su conocimiento y habilidades en situaciones en contextos diferentes al que aprendieron.

En el estudio se indaga por la habilidad de los estudiantes de grado décimo, para aplicar su conocimiento de las funciones en situaciones del mundo real, luego de haber sido sometidos a un diseño instruccional durante los grados séptimo a noveno de highest level (pre–university).

Dentro de los resultados y conclusiones puntualiza que los estudiantes que usan normalmente la calculadora graficadora tienden a resolver los problemas mediante el uso del registro gráfico, siempre y cuando el uso de la calculadora no sea incidental, es decir, el instrumento debe estar integrado con la construcción del esquema cognitivo del concepto matemático.

También señala que de acuerdo a Dreyfus, el currículo funcional que sistemáticamente construye hacia el establecimiento de articulaciones entre diferentes representaciones de la función, eventualmente conduce a muchos estudiantes a una comprensión abstracta del concepto de función.

2.4 CARACTERÍSTICAS DE LOS TRABAJOS REVISADOS

Las temáticas generales que abordan los estudios revisados respecto al enfoque variacional, están relacionadas con: dificultades asociadas al razonamiento covariacional tanto en estudiantes como en profesores, acciones de los estudiantes en situaciones que implican variación, y la necesidad e importancia de estudiar la función desde la variación.

Los estudios coinciden en que existe falta de coordinación entre los diferentes elementos asociados a la variación (magnitudes, variables dependientes e independientes, razones de cambio…), también mencionan que no hay reconocimiento del comportamiento global de las gráficas y que no se establecen relaciones entre las representaciones gráfica y algebraica de una función.

Los contextos en los que se desarrollan estas investigaciones tratan con modelación de eventos dinámicos asociados con llenado de recipientes, variación de temperatura y

velocidad. Se indaga por ejemplo, por el significado dentro del contexto de algunas nociones matemáticas, también se pide correlacionar gráficas con ecuaciones o viceversa.

Dentro de las recomendaciones hechas se menciona la necesidad de monitorear el desarrollo de la comprensión de la función por parte de los estudiantes, puesto que muchos de ellos presentan ideas superficiales acerca de la variación, noción importante no solo para cálculo sino para otras asignaturas.

Las propuestas didácticas para abordar la función desde las representaciones contemplan algunos de los siguientes aspectos: integración de múltiples representaciones, visualización, modelación, tecnología y el enfoque variacional en situaciones reales.

Dentro de las bondades encontradas en la aplicación de estas estrategias didácticas, se resalta el uso de múltiples representaciones en la construcción del concepto de función y la tecnología como elemento que permite interactuar simultáneamente con varios registros, así como apreciar los cambios de una variable cuando se modifica otra, lo cual contribuye a un mejor entendimiento de las mismas.

Las investigaciones que contemplan las funciones y sus representaciones, coinciden de manera indirecta en la *conversión* entre registros de representación como principal causa de las dificultades en el aprendizaje de las funciones. Los problemas asociados específicamente a este tipo de transformación involucran: la falta de discriminación de las

unidades significantes de los diferentes registros, la ausencia de interpretación global de las gráficas y a cambio el uso del punteo como vía para dar solución a los problemas, la tendencia de los estudiantes a mecanizar procesos en lugar de articular los diferentes registros, la consideración de que los registros gráfico y tabular sólo son de soporte y no permiten representaciones por sí mismas, y la preponderancia del uso del registro algebraico sobre los demás.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente consideramos que los trabajos revisados han estudiado de manera directa o indirecta las dificultades asociadas a las representaciones y al enfoque variacional del concepto de función afín. Sin embargo, pensamos que no consideran suficientemente los siguientes aspectos:

- La congruencia entre registros de representación. Aunque se pide en muchos casos pasar de un registro a otro y se concluye que existe dificultad para hacerlo, no se estudian las dificultades en términos de la congruencia y no–congruencia entre registros, lo que involucra el análisis de las situaciones propuestas en términos de las unidades significantes.
- El registro de llegada de las actividades propuestas. En todos los casos estudiados siempre se explicita el registro de llegada, pero nunca se deja abierto para que el estudiante pueda elegir de manera espontánea y dar respuesta a lo que se le pide.
- La influencia que ejercen los diferentes elementos que median el aprendizaje de los estudiantes sobre las respuestas que estos dan a las actividades propuestas. Por ejemplo,

no se contrastan los contenidos ni las representaciones de los textos con las respuestas de los estudiantes.

2.5 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Como lo hemos señalado anteriormente, las investigaciones dejan de lado algunos aspectos que consideramos fundamentales en la búsqueda de la razón de las dificultades del aprendizaje del concepto de función afín. Es así como en esta investigación, se consideran los siguientes aspectos:

- Tratamiento del tema de función afín en el texto guía de las asignaturas de precálculo y cálculo[16]. Este elemento es importante ya que forma parte del saber institucional[17] y media las respuestas de los estudiantes; su análisis permite identificar parcialmente el enfoque que se le da a la función, así como las representaciones que se promueven.
- Estudio de las transformaciones que realizan los estudiantes en situaciones de variación que tienen las siguientes características:
    - Están dadas en registro verbal y no explicitan el registro de llegada

[16] En la Escuela Colombiana de Ingeniería el tema de función afín se estudia en los dos cursos mencionados.

[17] Reconocemos que este elemento no es el único que interviene en el saber institucional. En el caso particular de la Escuela Colombiana de Ingeniería que es donde se realiza el estudio, el texto es determinado por la Dirección de Ciencias Básicas y su desarrollo y aplicación es común a todos los cursos.

- Se modelan mediante funciones afines continuas, dadas por una o más condiciones, pero este modelo no se explicita en el enunciado.
- No remiten a un algoritmo o procedimiento determinado, obligan a realizar una interpretación y eventualmente a recurrir a otras representaciones, es decir, a realizar conversiones bien sea en los registros algebraico, tabular, aritmético o gráfico.
- Presentan diferentes grados de complejidad en cuanto a su estructura, es decir, contemplan los fenómenos de congruencia y no congruencia entre registros.

Nos centramos en los tratamientos y conversiones que hacen los estudiantes cuando se les propone una situación de variación en registro verbal que se modela mediante la función afín y que no explicita el registro de llegada. La escogencia del registro de partida se debe a que es el que generalmente ofrece mayores dificultades al estudiante para: establecer las relaciones entre la información presentada y el objeto matemático, interpretar, pasar a otros registros y solucionar el problema. Adicionalmente, el no explicitar el registro de llegada ni el tipo de función que modela la situación podría darnos alguna idea sobre las características de las representaciones que espontáneamente eligen los estudiantes así como del dominio que tienen de la función afín como herramienta.

También se contemplan en las situaciones propuestas fenómenos de congruencia y no–congruencia entre registros; como se mencionó en el apartado 1.1.2, éstos suceden cuando falla alguno de los tres criterios. Para nuestras situaciones, la no congruencia puede presentarse por ejemplo, cuando el criterio de *correspondencia semántica* no se cumple ya que los enunciados no sugieren explícitamente transformaciones en los otros registros tales como operaciones aritméticas o algebraicas, entre otros. En otros casos la determinación de relaciones inversas requiere cambiar el orden de las unidades significantes del registro de partida por lo que falla el criterio de orden.

Encontramos importante caracterizar los tratamientos y conversiones que hacen los estudiantes en torno a la función afín, pues esto podría contribuir al desarrollo de propuestas curriculares y didácticas de la Escuela Colombiana de Ingeniería encaminadas a mejorar el pensamiento variacional así como la comprensión de los conceptos del cálculo. En el caso particular de la ingeniería, en la que el marco de las aplicaciones es el predominante, es de gran importancia comprender situaciones que involucran variación, lo que implica tener la habilidad para hacer transformaciones, en otras palabras de manejar el concepto y no limitarse a verificar si algo es función o no. Teniendo en cuenta que la función afín es fundamental para la comprensión de algunos conceptos tanto del cálculo como de la ingeniería, focalizamos nuestro estudio en ésta.

La problemática expuesta anteriormente nos conduce a formular las siguientes preguntas:

- ¿Qué características[18] tienen las transformaciones que hacen los estudiantes en las situaciones de variación propuestas[19]?

- ¿Qué elementos asociados a la variación y a las representaciones de los que se identifican en las producciones escritas de los estudiantes aparecen en la presentación de los textos guía?

Es así como nos proponemos como objetivos de esta investigación:

1. Describir e interpretar los tratamientos y conversiones que hacen algunos estudiantes de cálculo diferencial de la Escuela Colombiana de Ingeniería, en situaciones de variación que tienen las siguientes características:

    - Están dadas en registro verbal
    - Se modelan mediante funciones afines continuas, dadas por una o más condiciones, pero este modelo no se explicita en el enunciado
    - No remiten a un algoritmo o procedimiento determinado, obligan a realizar una interpretación y a realizar conversiones en otro registro de representación

[18] Las características de nuestro interés se relacionan con las conversiones y articulación entre registros, así como con los tratamientos.

[19] Las situaciones de variación propuestas cumplen con un conjunto de características que se han definido en este mismo apartado

- Presentan diferentes grados de complejidad en cuanto a su estructura, es decir, contemplan fenómenos de congruencia y no congruencia entre registros.

2. Analizar la presentación de la función afín en los textos guía de acuerdo a dos aspectos, el primero asociado con el uso de los diferentes registros de representación y el segundo con los elementos de la variación que se promueven.

3 METODOLOGÍA

3.1 ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN

Teniendo en cuenta que esta investigación está orientada principalmente a indagar por las transformaciones que realiza un grupo de estudiantes cuando se enfrenta a situaciones de variación dadas en registro verbal, se considera pertinente darle un enfoque *cualitativo interpretativo* ya que *comporta un esfuerzo de comprensión, entendido éste como la captación a través de la interpretación y el diálogo, del sentido de lo que el otro o los otros quieren decir con sus palabras o sus silencios, con sus acciones o con sus inmovilidad*es *(VII encuentro redes del sur, 2003)*.

El objetivo fundamental de esta investigación implica de manera general caracterizar: transformaciones, articulaciones que se evidencian entre los registros de representación usados, y la relación entre la presentación de la función afín en los textos y las respuestas de los estudiantes; estos resultados son el producto de las interpretaciones que hace el investigador a la luz de la teoría, las cuales son guiadas por sus creencias acerca del mundo y de la manera como éste debe ser entendido y estudiado. Es así como la interpretación que

es una de las características de la metodología cualitativa cobra un papel importante en esta investigación, al respecto algunos autores señalan:

- *La investigación cualitativa implica un énfasis en las cualidades de entidades, en los procesos y significados, que no son examinados o medidos en términos de cantidad, intensidad o frecuencia. Adicionalmente permite al investigador adoptar un particular punto de vista para estudiar el fenómeno*. (Denzin y Lincoln, pp. 8).

- *La investigación cualitativa privilegia lo descriptivo, especificando las propiedades de grupos, personas o comunidades sometidos a análisis* (Hernández, 1991).

- *La investigación cualitativa asume que el significado es parte de las experiencias de las personas que participan y que este significado es mediado a través de las percepciones del investigador*. (Planchart, 2000).

3.2 DIMENSIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Dentro de la metodología cualitativa Goetz y Lecompte (1988) definen cuatro dimensiones que caracterizan las formas de investigar, a las que se refieren como *modos suposicionales*:

Inductivo – deductiva, especifica el rol de la teoría en la investigación, es decir, si se produce o se utiliza una teoría preestablecida dentro de la misma.

Generativo – verificativa, hace referencia al lugar de la evidencia en la investigación, en otras palabras, si se descubren proposiciones o constructos a partir de un conjunto de datos o si por el contrario se verifican. La investigación verificativa prueba proposiciones que se han producido previamente y pretende realizar generalizaciones en grupos diferentes al estudiado. La investigación generativa descubre constructos o demuestra proposiciones en un grupo de datos, pero no estudia si pueden ser extendidas a otros casos.

Constructivo – enumerativa, se refiere a los "modos de formulación y al diseño de las unidades de análisis de un estudio", es decir, si se generan categorías a través del proceso o se parte de categorías preestablecidas.

Subjetivo – objetiva, hace referencia a los diseños de investigación, es decir, a la naturaleza de los datos recogidos, si son subjetivos o corresponden a categorías previas.

Bajo esta tipificación consideramos que este estudio tiene un enfoque deductivo, ya que parte de un marco teórico preestablecido bajo el cual se diseñan las situaciones de variación y además se describe e interpreta la producción escrita de los estudiantes a través de

categorías mediadas por la teoría. No encaja dentro del paradigma inductivo porque no sigue un proceso de recogida de datos y observación empírica para formular categorías y proposiciones teóricas.

Además, es de tipo generativo puesto que caracteriza las transformaciones realizadas así como la relación entre el libro y las respuestas del grupo concreto, a partir de unas hipótesis previamente construidas, pero el comprobar si pueden o no extenderse a otros caso es tema de investigaciones posteriores. La investigación es constructiva porque se producen categorías propias para caracterizar las acciones de los estudiantes. Por último, tiene un enfoque subjetivo determinado por las respuestas abiertas a las situaciones de variación propuestas.

De acuerdo a Goetz y Lecompte la investigación cualitativa se acerca a los enfoques generativo, inductivo, constructivo y subjetivo, mientras que la cuantitativa se aproxima a sus opuestos; sin embargo, las investigaciones pueden situarse en un punto intermedio dentro de los extremos cuantitativo – cualitativo.

3.3 HIPÓTESIS

Teniendo en cuenta que la investigación encaja dentro del enfoque *generativo*, las hipótesis que se presentan a continuación son previas a la toma de datos y hacen referencia a las posibles respuestas a las preguntas de investigación planteadas:

H_1: Esperamos que para dar solución a las situaciones el grupo en estudio exhiba una gran variedad de tratamientos y conversiones en diferentes registros de representación y que las producciones escritas muestren poca articulación[20] entre registros.

H_2: Esperamos que la mayoría de estudiantes represente las situaciones propuestas mediante el registro aritmético o el algebraico, y que la utilización del modelo funcional sea baja.

H_3: Esperamos que las transformaciones que exhiben los estudiantes muestren elementos de los que se promueven en la presentación de los textos guía.

[20] La articulación entre registros hace referencia a la discriminación y coordinación de las unidades significantes de dos representaciones de diferente registro. (Duval, 2004)

3.4 FIABILIDAD

Goetz y Lecompte (1988) indican que la fiabilidad de un estudio hace referencia a la obtención de los mismos resultados cuando se replica por otro investigador. La clasifican en interna y externa, la primera se refiere a la unificación de criterios por parte de varios investigadores en un mismo estudio. La segunda hace referencia a los elementos que se deben tener en cuenta para obtener los mismos resultados al realizar el estudio por otro investigador. Para aumentar la fiabilidad externa Goetz y Lecompte proponen cuatro aspectos, que Ruiz (1993) ha adaptado en una de sus investigaciones: contexto de la investigación, unidades de análisis, variables y categorías, y métodos de recogida de datos. Estos serán tenidos en cuenta en este trabajo.

3.5 ESTRATEGIA DE RECOGIDA DE DATOS

Se ha seleccionado como instrumento de recolección de datos la encuesta, al respecto Goetz y Lecompte (1988, p. 136) afirman que es un instrumento *que permite determinar la medida en que los participantes sostienen creencias similares, comparten ciertos constructos y ejecutan conductas comparables.* Adicionalmente anotan que la información recogida por medio de ésta es útil para caracterizar y registrar lo que los individuos hacen o lo que consideran que es aceptable socialmente.

Es así como el tipo de encuesta utilizada en esta investigación corresponde a un cuestionario escrito, en el que se tienen en cuenta cuatro aspectos para su diseño:

- Contextos de variación que se modelan mediante funciones afines. Se eligieron: desocupado de un tanque, posición de un atleta y temperatura en un proceso industrial.
- Nociones asociadas al enfoque variacional de la función. Se indaga por: intervalos de covariación (en relación directa e inversa) y razón de cambio.
- Unidades significantes asociadas a la función afín en los diferentes registros.
- Características de las situaciones:
  - Están dadas en registro verbal.
  - Se modelan mediante funciones afines continuas, dadas por una o más condiciones, pero este modelo no se explicita en el enunciado.
  - No remiten a un algoritmo o procedimiento determinado, obligan a realizar una interpretación y a seleccionar otro registro de representación.
  - Presentan diferentes grados de complejidad en cuanto a su estructura, es decir, contemplan fenómenos de congruencia y no–congruencia entre registros.

Hemos contemplado estos cuatro aspectos porque consideramos que para lograr el objetivo de nuestro trabajo debemos enfrentar a los estudiantes a situaciones no convencionales, que

permitan que afloren los elementos de las representaciones que realmente manejan, sin estar mediados por elementos explícitos en el enunciado como el registro de llegada, el modelo lineal o un algoritmo conocido.

Teniendo en cuenta las características de las situaciones que queremos proponer a los estudiantes, se hizo necesario hacer la construcción de las mismas ya que las que formulan los libros y las investigaciones no cumplen con todos los aspectos mencionados anteriormente. Para esto se realizaron tres pruebas piloto, que permitieron detectar errores en la redacción y ajustar el tiempo de solución de cada situación a noventa minutos.

Como resultado de este proceso se obtuvieron tres situaciones de variación[21] cada una con cinco preguntas de respuesta abierta, a partir de las cuales se caracterizan las transformaciones hechas por los estudiantes.

3.6 ANÁLISIS DE DATOS

El análisis de datos de esta investigación es de tipo cualitativo y comprende dos unidades de estudio: los textos guía que siguen los estudiantes en los cursos de cálculo diferencial y precálculo de la Escuela Colombiana de Ingeniería y las producciones escritas de los estudiantes en el cuestionario.

[21] En el capítulo 5 se realiza el análisis de estas situaciones.

Para establecer la relación entre el tratamiento que sigue el texto guía, la utilización del modelo lineal como herramienta y las representaciones que movilizan los estudiantes, es necesario el uso de procedimientos analíticos entre los que Goetz y Lecompte mencionan la determinación de vínculos y relaciones, "el descubrimiento de vínculos y la confirmación de relaciones entre constructos o clases de éstos supone determinar la secuencia de los fenómenos y efectuar inferencias respecto de su asociación, covariación y causalidad recíproca" (p. 179).

Adicionalmente, para caracterizar las transformaciones que hacen los estudiantes en situaciones de variación, se considera pertinente realizar un análisis tipológico que según Goetz y Lecompte utiliza un marco teórico propio que permite el descubrimiento de categorías y relaciones elaboradas por los participantes, que pueden ser usadas tanto en forma constructiva como generativa. Es así como el análisis se hace por pregunta y en términos de los registros que exhiben los estudiantes en sus producciones escritas.

3.7 DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN Y DE LA MUESTRA

La población está formada por estudiantes universitarios que cursan segundo semestre de ingeniería en la Escuela Colombiana de Ingeniería y que toman el curso de cálculo diferencial, que es de carácter obligatorio.

La investigación se realizó en dos cursos de cálculo diferencial cuyos profesores no fueron los investigadores. En total agrupan 36 estudiantes que han tenido contacto con el tema de función afín, en el bachillerato, en el curso de precálculo y en el de cálculo diferencial; en este último curso el tratamiento con otros contenidos permite una mejor comprensión de la función desde el enfoque variacional. Para la aplicación del cuestionario se subdividieron en tres grupos de doce estudiantes, cada uno de los cuales respondió solamente una de las tres situaciones.

3.8 VARIABLES DEL ESTUDIO

Teniendo en cuenta que el objetivo de esta investigación se centra en caracterizar las transformaciones que hacen algunos estudiantes de cálculo diferencial en situaciones de variación, a partir de sus producciones escritas, se han tenido en cuenta dos aspectos para agrupar las variables que intervienen:

3.8.1 Variables relacionadas con las transformaciones que realizan los estudiantes

Consideramos que las variables dependientes de nuestro estudio están relacionadas con las representaciones y transformaciones que movilizan los estudiantes, es así como nos interesa indagar por:

- las conversiones que realizan desde el registro verbal
- los tratamientos que efectúan una vez han realizado conversión a un registro diferente al verbal
- la presencia de articulaciones entre registros de representación

En cuanto a las variables independientes hemos involucrado:

- Contextos de variación: vaciado de tanques, posición y temperatura
- Nociones asociadas a la variación: intervalos de covariación y razón de cambio entre magnitudes
- Fenómenos de congruencia y no–congruencia

Por otra parte las variables que permanecen fijas en esta investigación son:

- Características de las situaciones de variación propuestas:
    - Están dadas en registro verbal
    - Se modelan mediante funciones afines continuas, dadas por una o más condiciones, pero este modelo no se explicita en el enunciado
    - No remiten a un algoritmo o procedimiento determinado, obligan a realizar una interpretación y a realizar conversiones en otro registro de representación
- Los textos guía, la institución, el profesor, el curso y el tipo de enseñanza recibida

3.8.2 Variables relacionadas con el texto

El estudio de los textos es de tipo descriptivo y las variables analizadas son las siguientes:

- Representaciones utilizadas en la presentación, en los ejemplos y en los ejercicios propuestos
- Enfoque dado a la función afín
- Relación o articulación entre las diferentes representaciones usadas

4 ANÁLISIS DE TEXTOS ESCOLARES

Con el fin de interpretar los tratamientos y conversiones que hacen los estudiantes en las situaciones de variación que se les proponen, se considera pertinente revisar el texto guía del curso de cálculo,[22] con el objeto de establecer posibles relaciones entre la presentación del concepto de función afín y las respuestas escritas que dan los alumnos. Es así, como nos interesa analizar en la exposición que hace el libro dos aspectos: el primero asociado con el uso de los diferentes registros de representación y el segundo con los elementos de la variación que se promueven.

Para abordar el primer aspecto se indaga por los registros de representación utilizados – tanto en la teoría, como en los ejemplos – así como la manera en que se integran; también se determinan los registros que se privilegian en los ejercicios propuestos.

La relación entre magnitudes, el manejo de los intervalos de covariación[23], el comportamiento de la función – crecimiento y decrecimiento – son los elementos que se tienen en cuenta para estudiar el segundo aspecto mencionado anteriormente.

[22] El texto utilizado en este curso es *Cálculo. Trascendentes tempranas* de Stewart. Cuarta edición. Editorial Thomson.

[23] Al hablar de cantidades que covarían hacemos referencia a que cada una de ellas varía con respecto a la otra.

Es importante anotar que en la Escuela Colombiana de Ingeniería, el concepto de función afín se trabaja en el curso de precálculo y se retoma en el de cálculo 1. En éstos se utilizan textos del mismo autor[24], por lo que consideramos apropiado analizar en los dos libros los aspectos indicados arriba.

4.1 LIBRO DE PRECÁLCULO

El tema de función afín se encuentra en el capítulo de funciones del texto de precálculo, el cual está conformado por siete secciones, de las cuales hay tres relacionadas con el tema en estudio:

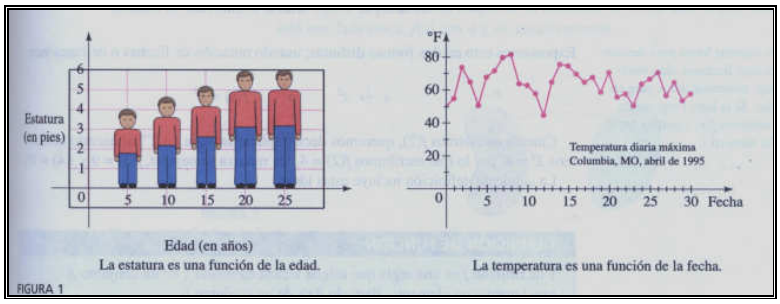
- ¿Qué es una función?
- Gráficas de las funciones
- Funciones de uso práctico

Para estudiar el tratamiento dado a la función afín, consideramos indispensable indagar en primer lugar por el enfoque dado a la función[25]. Este concepto se trata en la primera sección del capítulo, en la que a través de ejemplos de funciones que describen fenómenos físicos

[24] El libro guía del curso de precálculo es *Precálculo* de Stewart, Redlin y Watson. Tercera edición. Editorial Thomson

[25] La presentación del concepto de función también se tendrá en cuenta en el análisis del libro de Cálculo

se hace alusión a la dependencia entre cantidades[26]; con lo que pareciera se quiere acercar al estudiante al concepto. Aparecen algunos pictogramas y gráficos cartesianos ilustrativos como los que se muestran en la figura siguiente y en los que con explicaciones se enfatiza la importancia de intentar descubrir la regla que relaciona las magnitudes.



Posteriormente se propone la definición como una regla de correspondencia entre dos conjuntos:

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B.

Esta sección también contempla las nociones de dominio, rango, variable dependiente e independiente y hace referencia a representaciones como el diagrama de máquina, el de flechas, y a cuatro formas de representar una función (verbal, algebraica, visual, numérica), incluyendo ejemplos que remiten a la teoría expuesta.

[26] El texto utiliza el término *cantidades* en lugar de *magnitudes*.

Los ejercicios propuestos en esta sección están dirigidos a:

- Elaborar diagramas de flechas y de máquina
- Evaluar funciones en puntos determinados, como por ejemplo,

> **11.** Si $f(x) = 2x + 1$, determine $f(1)$, $f(-2)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\sqrt{5})$, $f(a)$, $f(-a)$, y $f(a + b)$.

- Obtener dominio y rango de funciones racionales o algebraicas, dadas en registro algebraico en las que predominan los radicales y los cocientes

Se observa que para resolverlos, en algunos casos basta hacer una transferencia de los modelos mostrados en los ejemplos y en otros es suficiente usar los recuadros que el libro da como clave para solucionarlos, con lo que se resta importancia a la teoría misma. No se encuentran problemas en los que se deba hacer análisis o reflexión de características asociadas a la variación.

El concepto de función lineal[27] aparece en la sección *gráficas de las funciones* mencionada anteriormente y se introduce de la siguiente forma:

> Una función f de la forma $f(x) = mx + b$ se conoce como función lineal porque su gráfica es la gráfica de $y = mx + b$, lo que representa una recta con pendiente m e intersección en y igual a b. (p. 139)

[27] Se usa aquí el término función lineal debido a que es el que utilizan los textos que se están analizando, aunque el objeto en estudio corresponda a la función afín

Esta definición aparece asociada al concepto de gráfica de una función y se apoya en el de recta que ha sido tratado en un capítulo anterior, en donde se considera la pendiente como un cociente y la ecuación $y = mx + b$ como una de las formas de representar una recta. Es de señalar que no aparece una gráfica que acompañe la definición.

Para realizar la gráfica de una función lineal dada en forma algebraica, el libro explica dos formas: mediante dos puntos en la recta que por sencillez pueden ser los interceptos con los ejes, o utilizando la pendiente y la intersección con el eje *y*, como se muestra en la siguiente figura, en donde se aprecia un acercamiento a la articulación entre los dos registros.

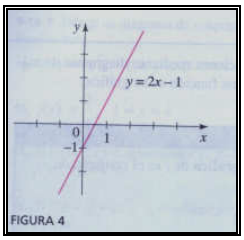


FIGURA 4

EJEMPLO 1 ■ Gráfica de una función lineal

Trace la gráfica de la función $f(x) = 2x - 1$

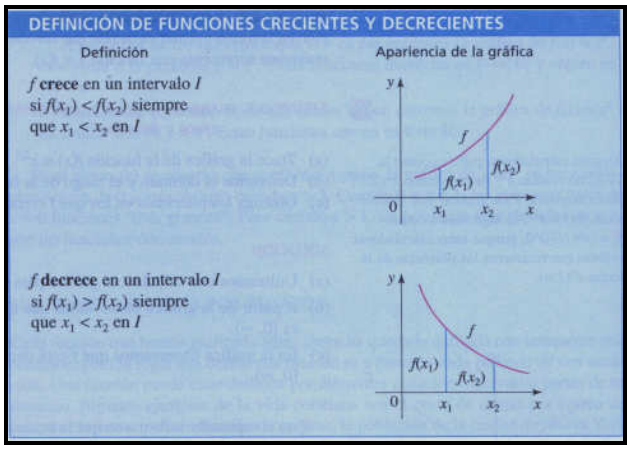
SOLUCIÓN Para trazar esta función lineal, graficamos la ecuación $y = 2x - 1$. Esta ecuación es la de una recta con pendiente 2 e intersección en y igual a -1, lo que nos permite trazar la gráfica f en la figura 4 ■

Algunos de los ejercicios propuestos están en registro gráfico e indagan solamente por la ecuación de la recta.

Posteriormente el texto analiza la función constante y la variación directa como casos particulares de las funciones lineales, de las cuales presenta algunos ejemplos y ejercicios.

En la sección denominada *gráficas de funciones* además del concepto de función lineal, se hace un acercamiento intuitivo al concepto de función creciente y decreciente desde lo

gráfico, para lo cual se emplean las frases “se baja” y “se eleva”, para luego generalizarlo mediante una definición que utiliza los registros algebraico y gráfico (representación cartesiana), como se aprecia en la siguiente figura en la que el registro gráfico parece tener un carácter explicativo,



A continuación muestra un ejemplo, que pide determinar los intervalos en donde crece y decrece una función dada en registro gráfico.

Aunque se define la dependencia, el crecimiento y el decrecimiento de una función, no se profundiza en el estudio de la variación, no se plantean ni ejemplos ni ejercicios en los que el estudiante tenga que cuestionarse acerca de esta noción.

Dentro de la sección denominada *funciones de uso práctico* se menciona que una situación puede ser visualizada desde su gráfica aún sin tener la ecuación que la modela. Adicionalmente, se presenta un recuadro titulado *Reglas para obtener funciones de uso*

práctico (véase la figura) en el que a través de tres pasos se muestra cómo encontrar la ecuación que modela una situación, con lo que se le da relevancia a lo algebraico.

REGLAS PARA OBTENER FUNCIONES DE USO PRÁCTICO

1. INTRODUCIR NOTACIÓN. Asigne un símbolo o letra a la cantidad buscada en el problema (por ahora llamémosla Q) y después seleccione símbolos para las demás incógnitas. Ayuda el utilizar letras que sugieran lo que representa la variable –por ejemplo, A para el área, h para la altura, t para el tiempo y así respectivamente.

2. RELACIONAR LAS CANTIDADES. Obtenga ecuaciones que relacionen a Q y las demás variables del paso 1, utilizando la información dada. A menudo es útil **dibujar un diagrama** de las variables y cantidades dadas. Quizá será preciso utilizar fórmulas para el volumen, área, perímetro u otras cantidades, como lo hicimos en el ejemplo 2.

3. ELIMINAR VARIABLES INNECESARIAS. Si en el paso 2 Q ha sido expresada como función de más de una variable, utilice las relaciones existentes entre variables para eliminar todas excepto una de ellas en la expresión de Q. Entonces Q quedará expresada como función de una sola variable.

Es importante anotar que las situaciones propuestas generalmente piden obtener una ecuación o una gráfica, muy pocas demandan hacer análisis o reflexiones de la misma, también se aprecia que involucran fenómenos de congruencia, como por ejemplo,

EJEMPLO 5 ■ Variación inversa

La ley de Boyle dice que cuando una muestra de gas se comprime a una temperatura constante, la presión del gas es inversamente proporcional al volumen del mismo.

(a) Suponga que la presión de una muestra de aire que ocupa 0.106 m^3 a 25°C es 50 kPa. Obtenga la constante de proporcionalidad y escriba la ecuación que exprese la proporcionalidad inversa.

(b) Si la muestra se expande a un volumen de 0.3 m^3 determine la nueva presión

4.2 LIBRO DE CÁLCULO

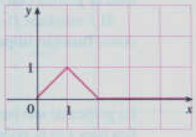
En la unidad de funciones y modelos se encuentra el concepto de función que se introduce con cuatro situaciones contextualizadas en diferentes registros (verbal, algebraico, tabular, gráfico), en las que se muestran explícitamente las magnitudes que covarían, enfatizando la dependencia entre las mismas.

Enseguida aparece la definición de función lineal, que es la misma que presenta el libro de precálculo[28]. Utilizando los elementos de esta definición introduce las nociones de variable independiente y dependiente, y de manera descontextualizada trata las diferentes formas de representar una función así como las nociones de dominio y recorrido. Vale la pena destacar que más adelante, retoma las formas de representar una función (verbal, numérica, visual, algebraica) de manera contextualizada.

Posteriormente se muestran ejemplos de funciones a trozos que incluyen las afines, en los que se hacen conversiones del registro algebraico al gráfico y viceversa, en los que pareciera se intenta articular los dos registros de representación, como se muestra en el siguiente ejemplo,

[28] Esta definición aparece en el análisis hecho al libro de precálculo.

EJEMPLO 9 Encuentre una fórmula para la función f graficada en la figura 21.



SOLUCIÓN La recta que pasa por (0, 0) y (1, 1) tiene pendiente $m = 1$ y su ordenada al origen es $b = 0$, de forma que su ecuación es $y = x$. De este modo, para la parte de la gráfica de f que une (0, 0) con (1, 1), tenemos

$$f(x) = x \qquad \text{si } 0 \leq x \leq 1$$

La recta que pasa por (1, 1) y (2, 0) tiene pendiente $m = -1$, de suerte que su ecucación en la forma punto-pendiente es

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \qquad \text{o} \qquad y = 2 - x$$

Por lo tanto, tenemos

$$f(x) = 2 - x \qquad \text{si } 1 < x \leq 2$$

En esta sección se hace el mismo acercamiento a la noción de función creciente y decreciente hecho en el libro de precálculo, y aparece un ejemplo ilustrativo que indica para una función cuadrática en dónde crece y decrece.

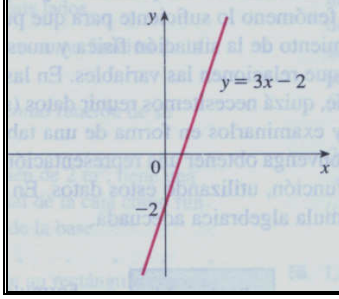
Dentro de la unidad existe una parte denominada *modelos lineales* en la que se introduce la función lineal de la siguiente forma

> "Cuando decimos que y es una función lineal de x, queremos decir que la gráfica de la función es una línea recta, de modo que podemos emplear la forma punto–pendiente de la ecuación de una recta para escribir una fórmula para la función como y=f(x)=mx+b donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen" (p. 25)

Mediante un ejemplo de una función afín dada en tres representaciones (algebraica, gráfica y tabular), muestra la relación entre la pendiente y el crecimiento de la función.

Adicionalmente, al hablar de pendiente hace referencia a que se puede interpretar como tasa o razón de cambio entre y y x, mientras que en el libro de precálculo la pendiente se reconoce como cociente de modo estático. Como se aprecia en la figura, hay un intento por articular los registros involucrados.

Una propiedad característica de las funciones lineales es que crecen a tasa constante. Por ejemplo la figura 2 muestra la gráfica de la función lineal $f(x) = 3x - 2$ junto con una tabla de valores de muestra. Obsérvese que cuando x crece en 0.1, la función $f(x)$ crece en 0.3, es decir, $f(x)$ crece tres veces mas rápido que x. Así, la pendiente de la recta, $y = 3x - 2$, que es 3 puede interpretarse como tasa o razón de cambio de y respecto de x.



x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

Posteriormente se presentan algunos ejercicios, en los que se pide hacer conversiones desde diferentes registros de representación (verbal, gráfico, algebraico) y en los que se indaga por el significado de la pendiente, valores puntuales y en uno de ellos por intervalos de covariación, como el que se muestra a continuación,

6. El gerente de una mercado de fin de semana sabe que si cobra x dólares por un lugar entonces el número de puestos que puede rentar está dado por la función $y = 200 - 4x$.

(a) Trace la gráfica de esta función lineal (recuerde que ni el costo de la renta ni el número de espacios puede ser un número negativo).

(b) ¿Qué representan la pendiente, la ordenada al origen y la abscisa al origen?

Observamos que las acciones tanto en la presentación como en los ejercicios, van dirigidas a:

- Estimar imágenes o preimágenes de funciones desde la gráfica y desde la ecuación
- Hallar dominio y rango desde la gráfica y la ecuación
- Determinar si una gráfica representa una función o no
- Hacer conversiones de lo verbal a lo gráfico y viceversa, de lo verbal a lo algebraico, de lo gráfico a lo algebraico y viceversa
- Descripción de variables que covarían, en términos del crecimiento de la función
- Determinar si una función es par, impar o ninguna de las dos
- Interpretar la pendiente y la ordenada en problemas de contexto
- Trazar la gráfica que representa una situación en contexto

En resumen respecto a la variación y a las representaciones utilizadas por los dos libros en las secciones asociadas con el tema en estudio, consideramos que:

- Hacen un acercamiento al concepto de función por medio de situaciones cotidianas, haciendo énfasis en la dependencia entre magnitudes, en el cual no se muestra explícitamente cómo covarían. Adicionalmente, presentan pictogramas y gráficos alusivos a las situaciones mencionadas, sin alguna explicación al respecto.

- Aunque en algunos ejercicios se tiene en cuenta la relación (comportamiento) entre magnitudes que covarían, el énfasis se presenta en la correspondencia.
- Mencionan las variables dependiente e independiente haciendo referencia a los conjuntos sobre los cuales está definida la función, y no al comportamiento de las magnitudes asociadas a las mismas.
- Muestran una marcada insistencia en encontrar la regla que relaciona las magnitudes, con lo que se privilegia el registro algebraico.
- Algunos ejercicios demandan trazar gráficas que describen el comportamiento de diferentes situaciones, sin que halla un cuestionamiento sobre los elementos de la misma que permita articular con otros registros.
- Plantean ejercicios que involucran funciones dadas en registro algebraico o gráfico en los que se pide determinar intervalos de crecimiento o decrecimiento, pero ninguno de ellos se dirige a analizar el comportamiento de la función desde estas nociones. El tratamiento dado a los intervalos de covariación está enfocado únicamente a la determinación del dominio y del rango de la función.
- Generalmente introducen cada nueva sección usando el registro verbal asociado al algebraico, recurriendo a registros auxiliares como pictogramas, tablas o gráficas que en algunos casos apoyan las explicaciones, pero en los que no se ponen en correspondencia las unidades significantes involucradas.
- Los ejemplos y ejercicios remiten al estudiante a hacer conversiones en registros previamente establecidos, es decir, se señalan explícitamente los registros de partida y

de llegada, lo que consideramos no propicia la transferencia de conocimiento en situaciones concretas.

- Tanto en los ejemplos como en los ejercicios se privilegia lo procedimental sobre el análisis de los elementos de la función; en muchos casos se enfatiza en seguir un modelo que implícitamente conlleva unos pasos para llegar a la solución, pero no se hace un análisis sobre las unidades significantes correspondientes en cada uno de los registros de representación.
- El uso que se da a la función lineal como herramienta es muy restringido, ya que los ejemplos y ejercicios propuestos se dirigen a obtener una ecuación o una gráfica sabiendo que el modelo es lineal, es decir, se enfatiza su tratamiento como objeto de estudio, y no se dirige a reconocer en una situación el tipo de modelo de acuerdo al comportamiento de las magnitudes que covarían.
- Algunos de los ejercicios propuestos sobre variación directa e inversa trabajan del registro verbal al algebraico, pero solo en el caso en que hay congruencia entre los mismos.

5 ANÁLISIS DE LAS SITUACIONES

Duval (2004) señala que no hay problemas extramatemáticos radicalmente diferentes sino que hay campos de problemas que dependen de los tratamientos implicados; teniendo como base esta afirmación hemos propuesto tres situaciones que pertenecen al campo de los problemas asociados a la función afín y que se diferencian entre si por las variaciones estructurales que se han hecho a las variables pertinentes, lo que conduce a transformaciones diferentes para su solución. Por ejemplo, si se analizan las situaciones desde el registro gráfico se observan en ellas variaciones en la pendiente y el corte, estos elementos en algunas ocasiones aparecen en el enunciado explícitos y en otras no, también toman valores positivos y negativos.

Como se mencionó en la metodología, para el diseño del cuestionario escrito se tuvieron en cuenta cuatro aspectos: contextos de variación, algunas nociones relacionadas con el enfoque variacional de la función, unidades significantes asociadas a la función afín en los diferentes registros y características generales de las situaciones.[29] Estos elementos conforman dos focos complementarios, uno dirigido a las representaciones y el otro a las nociones asociadas con la variación. Es así, como en cada pregunta se analizan de manera conjunta los aspectos de la variación involucrados y las características relacionadas con las

[29] Estas características se mencionan en el capítulo 2.

representaciones, lo que incluye el análisis de congruencia entre registros de representación.

Para efectos del análisis de las situaciones desde la congruencia entre registros, denominamos los tres criterios de congruencia mencionados en el marco teórico, de la siguiente forma:

C_c: Correspondencia semántica entre las unidades significantes propias de cada registro

C_u: Univocidad semántica terminal

C_o: Conservación del orden de organización de las unidades significantes en las representaciones

5.1 SITUACIÓN 1

El administrador de un edificio quiere desocupar uno de los tanques de reserva para hacerle mantenimiento, el cual tiene una capacidad de 90480 litros y se encuentra completamente lleno. Comienza a desocuparlo a razón constante de tal forma que al cabo de 2 horas quedan en el tanque 62640 litros de agua. En ese momento se da cuenta que debe desocuparlo en 3 horas menos de lo previsto, por lo cual decide abrir más la llave, manteniéndola abierta a esa razón.

1. Compare la cantidad de agua (en litros) que sale por hora antes y después de abrir más la llave.
2. Conociendo el volumen de agua que ha salido, ¿cómo podría determinar el tiempo que hace falta para que el tanque se desocupe completamente?
3. ¿En qué intervalo de tiempo la cantidad de agua que queda en el tanque cambia de 80400 litros a 25056 litros?
4. Si a las dos horas de haber empezado a desocupar el tanque, el administrador debe tomar una decisión para que el tiempo total de desocupado sea exactamente de 8 horas, ¿qué debe hacer?
5. Si el volumen del tanque fuera el doble y el administrador empieza a desocuparlo a razón constante, de tal forma que al cabo de 2 horas quedan los mismos 62640 litros de agua, ¿qué debe hacer para que el tanque se desocupe exactamente en el mismo tiempo descrito en la situación inicial?

Hemos puesto en juego en el enunciado dos variables, la primera hace referencia a la forma en que se desocupa el tanque y la segunda a la cantidad inicial de agua en el mismo; a éstas les corresponden las unidades significantes que aparecen en el siguiente cuadro:

Tabla 7. Variables y unidades significantes de la situación 1 en el registro verbal

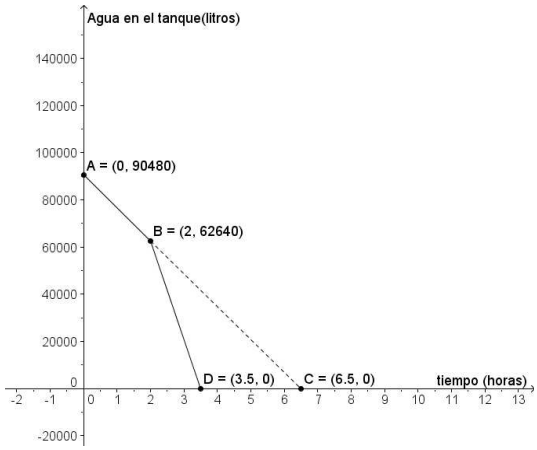
Variables	Unidades Significantes en el registro verbal
Forma en que se desocupa el tanque	Se desocupa a razón constante. Inicia con 90480 litros y al cabo de 2 horas quedan 62640 litros.
	Se desocupa a razón constante. Al cabo de 2 horas quedan en el tanque 62640 litros de agua. En ese momento se da cuenta que debe desocuparlo en 3 horas menos de lo previsto, por lo cual decide abrir más la llave.
Cantidad inicial de agua en el tanque	90480 litros

Las unidades significantes en los registros gráfico, algebraico y aritmético son respectivamente: inclinación y corte de una recta, coeficiente $m<0$ y término independiente $b>0$ en la ecuación de la recta, y razón de desocupado expresada como el cociente entre dos cantidades (agua que ha salido y tiempo) y cantidad de agua inicial del tanque.

Así por ejemplo, a la unidad *"Se desocupa a razón constante. Inicia con 90480 litros y al cabo de 2 horas quedan 62640 litros"*, le corresponde en el registro gráfico un segmento de recta que inicia en el punto de coordenadas $A(0,90480)$ y finaliza en el punto $B(2,62640)$, el cual tiene una inclinación negativa y corta al eje y en A. De igual forma en el registro algebraico le corresponde una expresión de la forma $V(t) = 90480 - 13920\,t \qquad t \leq 2$ en la que $m = -13920$ representa la razón de desocupado y el término independiente $b = 90480$ el volumen inicial de agua en el tanque.

En la tabla 8 se muestra la representación de la situación en los registros aritmético, algebraico y gráfico:

Tabla 8. Representación de la situación 1 en los registros aritmético, algebraico y gráfico

Representación		
Registro Aritmético	**Registro algebraico**	**Registro gráfico**
Razón de desocupado antes de abrir más la llave: $\frac{27840}{2} lt/h$ Tiempo en desocuparse totalmente: $2horas \rightarrow 27840lt$ $x \rightarrow 90480lt$ $x = 6.5horas$ Tiempo en desocuparse después de abrir más la llave: $6.5 - 3 = 3.5horas$ $3.5 - 2 = 1.5horas$ Razón de desocupado después de abrir más la llave: $\frac{62640}{1.5} = 41760 lt/h$	$V(t) = \begin{cases} 90480 - 13920t & t \leq 2 \\ 146160 - 41760t & 2 < t \leq 3.5 \end{cases}$	

Pregunta 1. Compare la cantidad de agua (en litros) que sale por hora antes y después de abrir más la llave.

Justificación:

Esta pregunta ha sido planteada para explorar las diversas formas en que el estudiante establece comparaciones cualitativas o cuantitativas, entre la razón de desocupado en los dos tramos de la función que modela la situación. La determinación de la razón en la primera parte obedece a un fenómeno de congruencia entre registros que permite pasar de manera directa del registro verbal a los otros (aritmético, gráfico y algebraico) ya que se satisfacen los tres criterios de congruencia mencionados anteriormente. Por ejemplo, en la conversión de lo verbal a lo gráfico el criterio C_c se cumple porque, al volumen inicial (90480 lt) le corresponde la unidad (0,90480) en el gráfico, a la unidad "*al cabo de 2 horas quedan en el tanque 62640 litros de agua*" le corresponde la unidad (2,62640) en el gráfico, y la unidad "*desocupado a razón constante*" establece en el gráfico la relación entre estos dos puntos, que es lineal.

El criterio C_u se satisface ya que la representación en el registro gráfico es única y el C_o se cumple porque la obtención del segmento en el registro gráfico puede hacerse en el mismo orden en que se describe en el registro verbal.

La determinación de la razón de desocupado después de abrir más la llave genera un fenómeno de no congruencia entre el registro verbal y los demás (aritmético, algebraico, gráfico). Por ejemplo, a la unidad "*tres horas menos de lo previsto"* no le corresponde una unidad en el registro gráfico, lo que hace que no se tenga C_c. La construcción de la representación en el registro gráfico implica cambiar el orden de lo descrito verbalmente, de esta forma es necesario encontrar el tiempo previsto y luego restarle 3 por lo que no se cumple C_o. Es de anotar que C_u se cumple puesto que solo hay una representación gráfica de la unidad en mención.

Pregunta 2. Conociendo el volumen de agua que ha salido, ¿cómo podría determinar el tiempo que hace falta para que el tanque se desocupe completamente?

Justificación:

El objetivo de esta pregunta es explorar la forma en que el estudiante establece relaciones entre magnitudes que covarían, teniendo en cuenta los dos tramos de la función a trozos. Para establecer la relación el estudiante puede considerar el volumen de agua que queda en el tanque o el volumen de agua que ha salido y a través de tratamientos responder la pregunta.

La determinación de la relación genera un fenómeno de no congruencia entre el registro verbal y los otros (aritmético, gráfico y algebraico), ya que fallan los criterios C_o y C_c. Por

ejemplo, en el registro gráfico C_c falla porque a la unidad *volumen de agua que ha salido* no le corresponde de manera directa o transparente una unidad, así el obtener la gráfica de tiempo contra volumen de agua que ha salido requiere de tratamientos auxiliares como la obtención de la gráfica diferencia entre volumen total y volumen que queda, también se debe determinar la inversa de esta última.

La pregunta presenta un alto grado de complejidad en la medida que la determinación de la relación inversa entre magnitudes obliga a realizar una interpretación global de la situación, que permita discriminar los dos momentos en que cambia la razón de desocupado para poder indagar por el valor del tiempo en cada punto del dominio de la función.

Pregunta 3. ¿En qué intervalo de tiempo la cantidad de agua que queda en el tanque cambia de 80400 litros a 25056 litros?

Justificación:

El objetivo de esta pregunta es indagar por el manejo de intervalos de covariación, que requieren la determinación de relaciones inversas. Hemos considerado en esta pregunta los dos extremos del intervalo en diferente momento de desocupado lo que conduce a una mayor interpretación del fenómeno de covariación.

Cuando el estudiante reconoce en esta pregunta un caso particular de la representación que modela la situación, la respuesta la puede obtener de manera directa a partir de un tratamiento en el registro que esté trabajando.

Pregunta 4. Si a las dos horas de haber empezado a desocupar el tanque, el administrador debe tomar una decisión para que el tiempo total de desocupado sea exactamente de 8 horas, ¿qué debe hacer?

Justificación:

Con esta pregunta pretendemos averiguar por el manejo que tienen los estudiantes sobre la razón de cambio, teniendo como referencia un punto de anclaje[30]. Su solución requiere de una interpretación global de la situación que le permita identificar el punto de anclaje correspondiente al momento en que debe cambiar la razón de desocupado.

La conversión al registro algebraico y aritmético no es congruente, ya que no se cumple el criterio C_c puesto que la determinación de la pendiente o de la razón involucra un tiempo diferente (8-2=6horas) al que se enuncia. Mientras que la conversión al registro gráfico si es congruente; esto evidencia que la congruencia depende de los registros involucrados.

[30] Según Duval (2004, p.75) un *Punto de anclaje* es toda marca a partir de la cual se determina una diferencia o se describe una situación. En esta situación el punto de anclaje corresponde al instante en que han transcurrido 2 horas.

Pregunta 5. Si el volumen del tanque fuera el doble y el administrador empieza a desocuparlo a razón constante, de tal forma que al cabo de 2 horas quedan los mismos 62640 litros de agua, ¿qué debe hacer para que el tanque se desocupe exactamente en el mismo tiempo descrito en la situación inicial?

Justificación:

El propósito de esta pregunta es indagar si el estudiante reconoce la invarianza de la situación, dada por el instante en el que queda la misma cantidad de agua mencionada inicialmente. Al igual que en la pregunta anterior es necesario tener conciencia de la existencia de un punto de anclaje a partir del cual la situación coincide con la inicial. Los fenómenos de congruencia y no–congruencia son similares a los de la pregunta 4.

5.2 SITUACIÓN 2

Un atleta debe recorrer 12 Km. desde un punto A hasta un punto C en 165 minutos. Parte del punto A con velocidad constante y al cabo de 135 minutos se encuentra a 4 Km. del punto C, por lo que decide cambiar su velocidad y mantenerla para llegar en el tiempo propuesto. El segundo día parte de un punto D sobre la misma vía de tal manera que corre a la misma velocidad que lo hizo en el primer tramo del día anterior y llega al punto C en los mismos 165 minutos.

1. Cuando el atleta cambia su velocidad, ¿la aumenta o la disminuye? Explique
2. ¿Cómo podría averiguar a qué distancia se encuentra el atleta del punto de partida, si conoce el tiempo que ha transcurrido desde que partió?
3. Si el primer día hubiera seguido todo el recorrido con la misma velocidad que empezó, ¿a qué distancia del punto C estaría a los 165 minutos?
4. ¿Cuánto tiempo emplea para recorrer 1 Km., después de cambiar su velocidad?
5. ¿A qué distancia del punto A se encuentra el punto D, el segundo día de recorrido?

Hemos formulado esta situación en un contexto de posición[31] ya que nos interesa ver si el contacto que el estudiante ha tenido con este concepto, propicia el uso de gráficas de posición contra tiempo y de modelos lineales que involucran la relación entre velocidad, posición y tiempo.

En el enunciado ponemos en juego dos variables, la primera hace referencia a la forma en que corre el atleta y la segunda al punto de partida en los dos días de recorrido, en uno de

[31] A diferencia de la situación anterior se espera que el estudiante reconozca la velocidad como la razón entre el cambio de posición y el cambio de tiempo.

éstos el punto es explícito; a éstas les corresponden las unidades significantes que aparecen en el siguiente cuadro:

Tabla 9. Variables y unidades significantes de la situación 2 en el registro verbal

Variables	**Unidades Significantes**
Forma en que corre el atleta, respecto a la velocidad	Un atleta debe recorrer 12 Km. desde un punto A hasta un punto C en 165 minutos. Parte del punto A con velocidad constante y al cabo de 135 minutos se encuentra a 4 Km. del punto C,
	por lo que decide cambiar su velocidad y mantenerla para llegar en el tiempo propuesto.
	El segundo día parte de un punto D sobre la misma vía de tal manera que corre a la misma velocidad que lo hizo en el primer tramo del día anterior y llega al punto C en los mismos 165 minutos.
Punto de partida	El segundo día parte de un punto D sobre la misma vía de tal manera que corre a la misma velocidad que lo hizo en el primer tramo del día anterior y llega al punto C en los mismos 165 minutos.

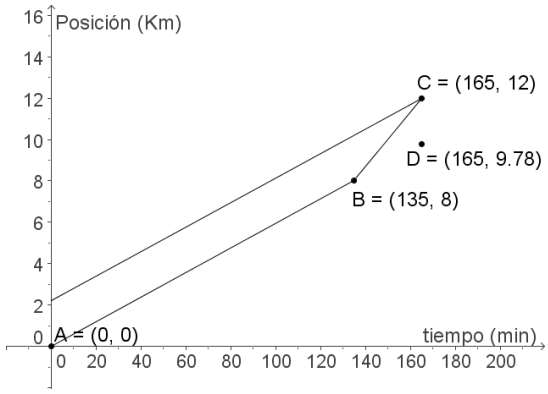
Estas unidades significantes corresponden a la inclinación y al corte de una recta en registro gráfico, y al coeficiente $m>0$ y al término independiente $b>0$ de la ecuación de una recta en el registro algebraico, y en el registro aritmético a la velocidad expresada como el cociente entre el cambio de posición y el tiempo transcurrido.

Así por ejemplo, a la unidad *"Un atleta debe recorrer 12 Km. desde un punto A hasta un punto C en 165 minutos. Parte del punto A con velocidad constante y al cabo de 135 minutos se encuentra a 4 Km. del punto C"*, le corresponde en el registro gráfico un segmento de recta que inicia en un punto de coordenadas $A(0,y_0)$ y finaliza en el punto $B(135,y_0+8)$, el cual tiene una inclinación positiva y corta al eje y en y_0. De igual forma en el registro algebraico le corresponde una expresión de la forma $d(t)=\frac{8}{135}t+y_0 \quad 0\leq t\leq 135$ en la que $m=\frac{8}{135}$ representa la velocidad del atleta, y el término independiente $b=y_0$ su posición inicial.

Las características de esta situación y la anterior son similares en cuanto a que existe una modificación en la razón de cambio. A diferencia de la primera situación, en ésta se involucra la velocidad que es un concepto físico con el cual los estudiantes han trabajado; adicionalmente la unidad significante correspondiente a la pendiente toma solo valores positivos y el valor del término independiente no es explícito en el enunciado.

La siguiente tabla muestra la representación de la situación en los registros aritmético, algebraico y gráfico:

Tabla 10. Representación de la situación 2 en los registros aritmético, algebraico y gráfico

Representación		
Registro Aritmético	**Registro algebraico**	**Registro gráfico**
Velocidad primer día: - Primer tramo: $\frac{8Km}{135\min}$ -Segundo tramo: $\frac{4Km}{30\min}$ Velocidad segundo día: $\frac{4Km}{30\min} = 0.13\,{}^{Km}\!/_{\min}$	Para $y_0 = 0$ se tiene: Primer día: $d(t) = \begin{cases} \frac{8}{135}t & si \quad 0 \le t \le 135 \\ \frac{4}{30}(t-135)+8 & si \ t > 135 \end{cases}$ Segundo día: $d(t) = \frac{8}{135}(d-165)+12$	Para $y_0 = 0$ se tiene: 

Pregunta 1. Cuando el atleta cambia su velocidad, ¿la aumenta o la disminuye? Explique

Justificación:

El objetivo de esta pregunta es explorar la forma en que el estudiante establece la relación entre las velocidades en los dos tramos de la función a trozos.

La determinación de la velocidad en el primer tramo obedece a un fenómeno de no congruencia entre registros, ya que falla el criterio C_u, por ejemplo, si se trabaja en el registro gráfico la elección del punto de partida es arbitraria, no necesariamente éste debe

coincidir con el origen de coordenadas; lo que conduce a múltiples representaciones de la situación.

Pregunta 2. ¿Cómo podría averiguar a qué distancia se encuentra el atleta del punto de partida, si conoce el tiempo que ha transcurrido desde que partió?

Justificación:

El interés de esta pregunta es explorar la forma en que el estudiante construye relaciones entre magnitudes que covarían, para lo cual debe realizar una interpretación global de la situación que le permita reconocer que en el momento en que cambia la velocidad del atleta, se generan dos intervalos de tiempo sobre los cuales se puede indagar por la posición del atleta en cada punto del dominio de la función.

Cuando el estudiante ha utilizado el registro gráfico en la pregunta anterior es suficiente hacer un tratamiento sobre la representación para dar respuesta a la pregunta. En el caso del registro algebraico la determinación del modelo para el segundo tramo se puede hacer de manera directa, sin embargo, la determinación de la velocidad en el primer tramo requiere de una interpretación que permita encontrar la distancia recorrida en el mismo (8 Km.) ya que esta unidad no es explícita, a partir de la cual la conversión es congruente.

Pregunta 3. Si el primer día hubiera seguido todo el recorrido con la misma velocidad que empezó, ¿a qué distancia del punto C estaría a los 165 minutos?

Justificación:

El objetivo de esta pregunta es explorar la forma en que el estudiante relaciona la velocidad, posición y tiempo con la distancia total, a través de la determinación de la imagen de un punto, para lo cual debe reconocer la invarianza de las unidades significantes del primer tramo de la situación.

La conversión de "*todo el recorrido con la misma velocidad que empezó"* del registro verbal a los otros (aritmético, gráfico, algebraico) es congruente; así por ejemplo, en el registro gráfico la representación corresponde al segmento que inicia en el punto de coordenadas (135,8), que tiene la misma pendiente del tramo anterior y como abscisa final 165. Respecto al registro algebraico la representación está dada por la expresión que modela el primer tramo evaluada en el intervalo de tiempo (0,165). Por otra parte, para responder a la pregunta es necesario realizar una interpretación de la misma que se traduce como la diferencia entre 12 Km. y la distancia recorrida a los 165 minutos.

Pregunta 4. ¿Cuánto tiempo emplea para recorrer 1*Km*, después de cambiar su velocidad?

Justificación:

El objetivo de está pregunta es explorar las formas en que el estudiante establece la relación inversa entre dos magnitudes que covarían, teniendo en cuenta los dos tramos de la función a trozos. Debe haber un reconocimiento de los intervalos en que se divide la función a trozos, a pesar de que no necesariamente debe existir un reconocimiento del modelo lineal.

La pregunta se puede abordar desde lo físico o desde lo matemático a partir de intervalos de covariación referidos a la variable independiente y solo requiere de tratamientos para su solución.

Pregunta 5. ¿A qué distancia del punto *A* se encuentra el punto *D*, el segundo día de recorrido?

Justificación:

El interés de esta pregunta se centra en indagar por la forma en que el estudiante determina el punto de partida del atleta. Requiere de una interpretación global que le permita relacionar los elementos que no cambian (velocidad, punto de llegada, tiempo total del recorrido) con la posición del punto D. Al igual que en la pregunta anterior su solución involucra la realización de tratamientos sobre la representación que se tenga.

5.3 SITUACIÓN 3

El ciclo de una línea de producción industrial consta de cuatro procesos consecutivos: precalentamiento, estabilización, calentamiento y homogenización.

Un material que se encuentra a -36º C entra a la línea de producción y se somete a los procesos de la siguiente forma:

- Precalentamiento: Se le suministra calor de manera constante a razón de 6º C cada minuto, durante 10 minutos.
- Estabilización: Se mantiene la temperatura final de precalentamiento durante 7 minutos.
- Calentamiento: Concluido el proceso de estabilización se suministra calor de manera constante a razón de 12º C cada minuto durante 4 minutos.
- Homogenización: Concluido el proceso de calentamiento, se extrae calor mediante un enfriador a razón constante de 24º C cada minuto hasta alcanzar la temperatura de 0º C.

1. Describa el comportamiento de la temperatura durante el ciclo de producción.
2. Si la temperatura varía entre 18º C y 30º C, ¿en qué intervalo de tiempo ocurre cada uno de los procesos?
3. Si el tiempo del proceso de estabilización se mantiene en 7 minutos, pero se inicia cuando el precalentamiento alcanza los 12º C, ¿en qué intervalos de tiempo ocurren los procesos de calentamiento y homogenización, si la variación de temperatura sobre estos procesos se mantiene igual?

Si el precalentamiento se cambia a razón constante de 15º C cada minuto durante 4 minutos:

4. ¿En qué intervalos de tiempo y de temperatura se lleva a cabo el proceso de homogenización, si los demás procesos mantienen la misma razón?
5. Haga los cambios necesarios en los otros procesos para que el tiempo total del ciclo de producción sea el mismo del ciclo descrito en la parte inicial.

En esta situación se han puesto en juego dos variables; la primera relacionada con la forma en que cambia la temperatura del material y la segunda con la temperatura inicial del ciclo de producción.

Las unidades significantes que corresponden a las variables mencionadas, aparecen a continuación:

Tabla 11. Variables y unidades significantes de la situación 3 en el registro verbal

Variables	Unidades Significantes
Forma en que cambia la temperatura	• Precalentamiento: Se le suministra calor de manera constante a razón de 6º C cada minuto, durante 10 minutos. • Estabilización: Se mantiene la temperatura final de precalentamiento durante 7 minutos. • Calentamiento: Concluido el proceso de estabilización se suministra calor de manera constante a razón de 12º C cada minuto durante 4 minutos. • Homogenización: Concluido el proceso de calentamiento, se extrae calor mediante un enfriador a razón constante de 24º C cada minuto hasta alcanzar la temperatura de 0º C.
Temperatura inicial del material	-36º C

Las unidades significantes en el registro gráfico son la inclinación y el corte de la recta en el proceso de precalentamiento. En los otros tres procesos se relacionan con la inclinación y el punto de anclaje del proceso anterior.

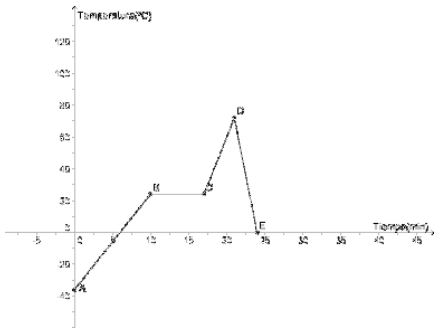
En el registro algebraico están asociadas con el coeficiente *m* y el término independiente *b* en la ecuación de la recta[32]. En el registro aritmético las unidades significantes corresponden a la razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo expresada como cociente de dos cantidades y a la temperatura inicial del ciclo de producción.

Así por ejemplo, a la unidad "*Se le suministra calor de manera constante a razón de 6º C cada minuto, durante 10 minutos*", le corresponde en el registro gráfico un segmento de recta que inicia en un punto de coordenadas *A*(-36,0) y finaliza en el punto *B*(10,24), el cual tiene una inclinación positiva y corta al eje *y* en -36. De igual forma en el registro algebraico le corresponde una expresión de la forma $T(t) = 6t - 36 \quad 0 \le t \le 10$ en la que *m*=6 representa la razón de cambio de la temperatura respecto al tiempo y el término independiente *-36* corresponde a la temperatura inicial del proceso.

Es importante anotar que dentro de la situación hemos puesto en juego valores positivos y negativos para la variación de la temperatura, a diferencia de las situaciones anteriores en donde se contemplan solamente razones de cambio positivas o negativas. La tabla 12 muestra la representación de la situación en los registros aritmético, algebraico y gráfico:

[32] La determinación del término independiente en el registro algebraico requiere de transformaciones adicionales.

Tabla 12. Representación de la situación 3 en los registros aritmético, algebraico y gráfico

Representación		
Registro Aritmético	**Registro algebraico**	**Registro gráfico**
<u>Precalentamiento</u>: Inicia con una temperatura de -36º C y al cabo de 10 minutos alcanza una temperatura de $-36+6*10=24^{o}C$ <u>Estabilización</u>: 24º C durante los 7 minutos siguientes <u>Calentamiento</u>: Inicia con una temperatura de 24º C y al cabo de 4 minutos alcanza una temperatura de $24+12*4=72^{o}C$ <u>Homogenización</u>: Inicia con una temperatura de 72º C hasta alcanzar una temperatura de 0º C	$T(t)=\begin{cases} 6t-36 & si\ 0\le t\le 10 \\ 24 & si\ 10<t\le 17 \\ 12x-180 & si\ 17<t\le 21 \\ -24x+576 & si\ 21<t\le 24 \end{cases}$	

Pregunta 1. Describa el comportamiento de la temperatura durante el ciclo de producción.

Justificación:

Esta pregunta ha sido planteada para explorar cómo perciben los estudiantes los fenómenos de variación[33], así como para indagar si existe un reconocimiento de la dependencia entre la

[33] En las tres situaciones se explora el manejo de la relación entre magnitudes, a partir de comparaciones, descripciones o toma de decisiones sobre los elementos que intervienen en la situación.

temperatura y el tiempo. A diferencia de las dos situaciones anteriores la pregunta no explicita el tiempo como variable del fenómeno de variación.

La descripción podría hacerse en términos del aumento o la disminución de la temperatura, o podría hacer referencia a la razón de cambio de la temperatura respecto al tiempo.

La conversión de lo verbal a lo gráfico se puede hacer de manera directa, dibujando las descripciones que se dan en el registro de partida, por lo que se genera un fenómeno de congruencia.

Pregunta 2. Si la temperatura varía entre 18º C y 30º C, ¿en qué intervalo de tiempo ocurre cada uno de los procesos?

Justificación:

Esta pregunta tiene como objetivo examinar la forma en que el estudiante establece relaciones entre magnitudes para determinar intervalos de covariación; es así como se indaga por los valores correspondientes a la variable independiente conocidos los de la variable dependiente. Aunque en las situaciones anteriores se indaga por este aspecto, el grado de complejidad aquí es mayor puesto que se debe identificar el rango de temperatura en que se lleva a cabo cada proceso y luego compararlo con el que se pide, para posteriormente determinar el intervalo de tiempo pedido.

La respuesta la puede obtener de manera directa a partir de tratamientos en el registro que esté trabajando.

Pregunta 3. Si el tiempo del proceso de estabilización se mantiene en 7 minutos, pero se inicia cuando el precalentamiento alcanza los 12º C, ¿en qué intervalos de tiempo ocurren los procesos de calentamiento y homogenización, si la variación de temperatura sobre estos procesos se mantiene igual?

Justificación:

El objetivo de esta pregunta se centra en explorar el manejo de la covariación entre magnitudes, es así como se propone una transformación en las condiciones del dominio de uno de los procesos para ver cómo cambian los dominios de los otros, manteniendo las mismas razones de cambio. Se involucra la determinación de preimagenes en la solución de la misma.

La conversión de "*proceso de estabilización inicia cuando el precalentamiento alcanza los 12º C*" del registro verbal a los otros (aritmético, gráfico, algebraico) es congruente; así por ejemplo, en el registro gráfico la representación corresponde al segmento que inicia en el punto de coordenadas (8,12), que tiene pendiente cero y como punto final (15,12). Respecto al registro algebraico la representación está dada por la expresión que modela el precalentamiento evaluada en el intervalo de tiempo (0,8) y al proceso de estabilización en el intervalo (8,15). Por otra parte, para responder la pregunta es necesario realizar una serie

de tratamientos; por ejemplo, en el registro gráfico que incluyen el trazo de paralelas a los segmentos que modelan los dos últimos procesos ya que la variación de temperatura sobre estos procesos se mantiene igual.

Pregunta 4. Si el precalentamiento se cambia a razón constante de 15º C cada minuto durante 4 minutos, ¿en qué intervalos de tiempo y de temperatura se lleva a cabo el proceso de homogenización, si los demás procesos mantienen la misma razón?

Justificación:

Hemos puesto en juego el valor de la razón de cambio del primer proceso, para determinar si se identifican los intervalos de variación de las variables independiente y dependiente en los otros procesos.

Se genera un fenómeno de congruencia ya que a la unidad significante *el precalentamiento se cambia a razón constante de 15º C cada minuto durante 4 minutos* se le puede asignar una única unidad en los otros registros y en el mismo orden, así por ejemplo, en el registro gráfico corresponde a un segmento que inicia en (0,-36) y termina en (4,24). Así mismo, para responder la pregunta es necesario realizar una serie de tratamientos; por ejemplo, en el registro gráfico que incluyen el trazo de paralelas a los segmentos que modelan los demás procesos ya que la variación de temperatura sobre estos procesos se mantiene igual.

Pregunta 5. Si el precalentamiento se cambia a razón constante de 15º C cada minuto durante 4 minutos, haga los cambios necesarios en los otros procesos para que el tiempo total del ciclo de producción sea el mismo del ciclo descrito en la parte inicial.

Justificación:

El objetivo de esta pregunta es explorar el manejo global de la situación cuando se cambia la razón de cambio solamente en uno de los procesos y se mantiene constante el tiempo total del ciclo de producción (dominio de la función). Es así como nos interesa ver si el estudiante identifica que puede cambiar la razón de cambio de los procesos, lo que involucra un cambio en el tiempo o en el valor de la temperatura.

La determinación de la respuesta contempla la realización de tratamientos en los registros de representación involucrados, que incluyen la determinación de la temperatura final del proceso de precalentamiento para poder dar respuesta en los demás procesos.

6 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL CUESTIONARIO

Teniendo en cuenta que el objetivo principal de esta investigación es caracterizar los tratamientos y conversiones que hacen los estudiantes en algunas situaciones de variación, analizaremos en el cuestionario escrito de manera general: las representaciones que exhiben espontáneamente los estudiantes en sus respuestas, las características de las conversiones y de los tratamientos que realizan los estudiantes, así como las articulaciones que establecen entre diferentes registros de representación. A continuación presentamos para cada situación y en cada pregunta las categorías de análisis construidas.

6.1 SITUACIÓN 1

Pregunta 1. Compare la cantidad de agua (en litros) que sale por hora antes y después de abrir más la llave.

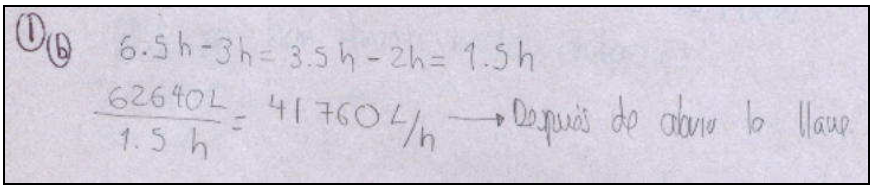
Para hacer el análisis de las respuestas a esta pregunta hemos tenido en cuenta que es necesario encontrar la razón de desocupado antes y después de que se abre más la llave y además se deben comparar estas cantidades. Es así como los resultados de ésta se estudian a través de tres categorías de análisis:

- Conversiones para determinar la primera razón de desocupado, la cual corresponde a un fenómeno congruente
- Conversiones y tratamientos para determinar la segunda razón de desocupado, que corresponde a un fenómeno no congruente
- Comparaciones que establecen los estudiantes entre las razones

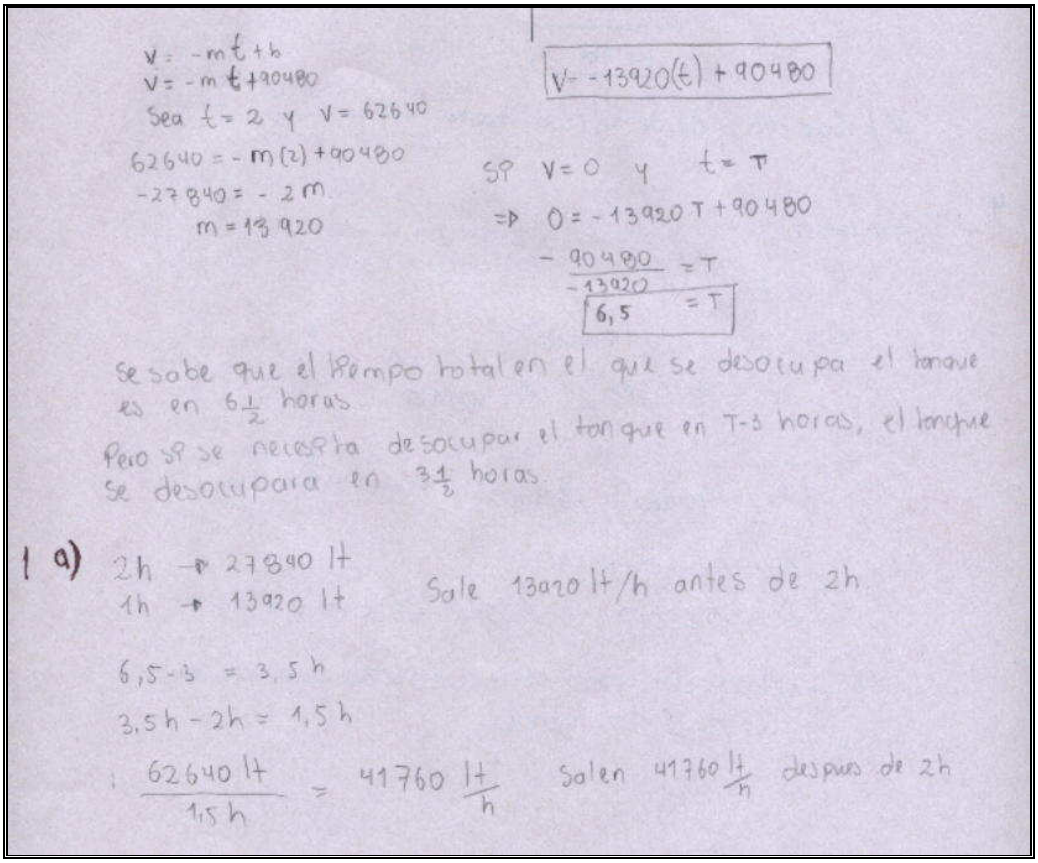
La primera categoría permite indagar por las representaciones espontáneas que muestran los estudiantes cuando no se explicita el registro de llegada en una situación asociada a un fenómeno de congruencia entre registros. Se observa que la totalidad de los estudiantes hace conversiones adecuadas para determinar de manera correcta la razón de desocupado del tanque antes de abrir más la llave. El registro que escoge el 91.7% de los estudiantes es el aritmético y el planteamiento que hacen se basa en la determinación de la cantidad de agua que ha salido en dos horas para luego encontrar la razón; sólo el 8.3% muestra la articulación de varios registros (algebraico, gráfico, verbal) para modelar la situación y dar la razón de desocupado.

En la categoría relacionada con las conversiones y tratamientos para determinar la segunda razón de desocupado que involucra un fenómeno de no congruencia, clasificamos las respuestas de los estudiantes de la siguiente forma:

R_1: Hacen transformaciones[34] en el registro aritmético que involucran operaciones y/o regla de tres. Por ejemplo,



R_2: Hacen transformaciones en el registro algebraico funcional y posteriormente al aritmético en el que usan regla de tres. Como por ejemplo,



[34] Como se mencionó en apartados anteriores al hablar de transformaciones se incluyen las conversiones y los tratamientos

R_3: Hacen transformaciones inadecuadas

R_4: No responden

Tabla 14. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que hacen transformaciones para determinar la razón de desocupado en una situación no congruente

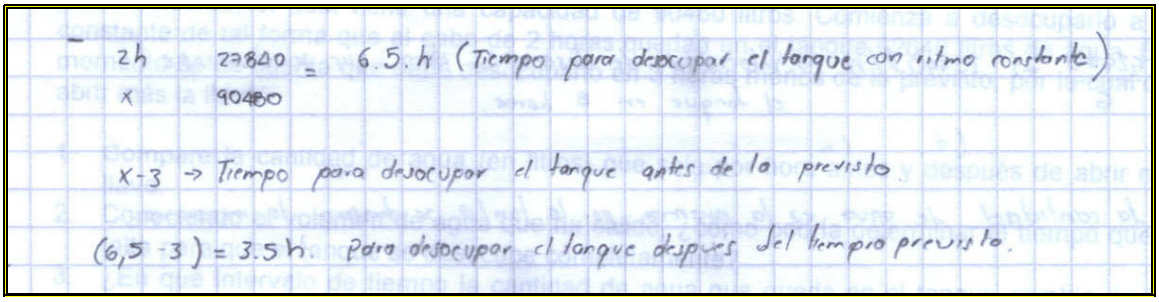
Respuesta	**Frecuencias**	**Porcentaje del total**
R_1	6	50.0
R_2	1	8.3
R_3	4	33.3
R_4	1	8.3

Se puede apreciar un descenso notorio en el porcentaje de éxito respecto a la primera parte de la pregunta, el cual podría atribuirse al fenómeno de no congruencia que aparece entre los registros. Las relaciones que se generan entre el tiempo y la razón de desocupado son complejas y exigen del estudiante una interpretación global de la situación.

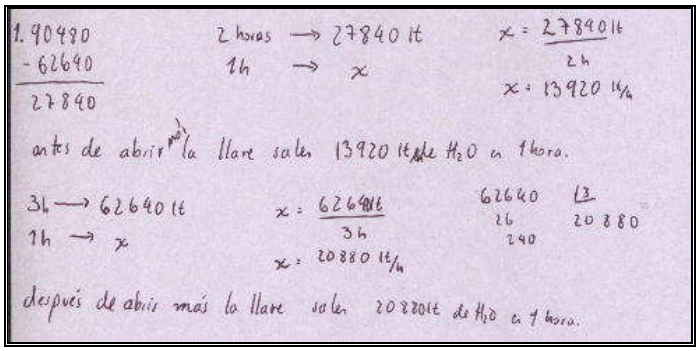
Se observa un marcado uso del registro aritmético en el cual las conversiones se llevan a cabo por el planteamiento de operaciones o reglas de tres que expresan la relación entre magnitudes. Esta estrategia muestra una *modelización proporcional y no funcional* de la situación, al respecto Ruiz (1993, p.406) señala que "al igual que en la evolución histórica la proporción se puede considerar como un obstáculo epistemológico para el desarrollo de la noción de función, el aspecto funcional queda oculto por el carácter escalar de la proporción".

Solo un estudiante utiliza una conversión diferente, la hace sobre el registro algebraico funcional que le permite calcular el tiempo total de desocupado, pero una vez determinado éste la siguiente conversión la realiza en el registro aritmético.

También cabe señalar la forma particular de la escritura de uno de los estudiantes el cual representa en el registro algebraico pero no hace los tratamientos sobre éste como se muestra.



Dentro de las conversiones inadecuadas que presentan los estudiantes, observamos dos tipos, en uno la expresión “tres horas menos” es interpretada como “tres horas”, mientras que en el otro no se considera la cantidad de agua que ha salido en dos horas, como se aprecia:



1. 90480
- 62640
27840

2 horas → 27840 lt
1h → x

x = 27840 lt / 2h
x = 13920 lt/h

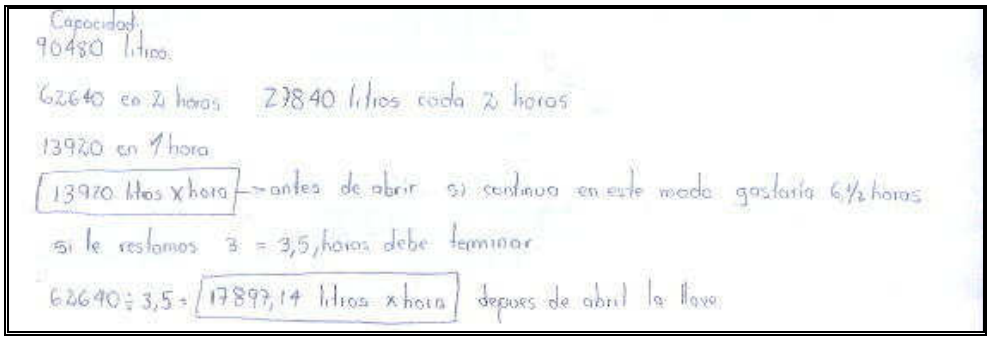
antes de abrir más la llave sale 13920 lt de H_2O en 1 hora.

3h → 62640 lt
1h → x

x = 62640 lt / 3h
x = 20880 lt/h

62640 | 13
26 | 20880
240

después de abrir más la llave sale 20880 lt de H_2O en 1 hora.



Capacidad:
90480 litros.

62640 en 2 horas 27840 litros cada 2 horas

13920 en 1 hora

13920 litros x hora → antes de abrir si continua en este modo gastaría 6½ horas

si le restamos 3 = 3,5 horas debe terminar

62640 ÷ 3,5 = 17897,14 litros x hora después de abrir la llave

Para determinar las comparaciones que realizan se clasificaron las respuestas de la siguiente forma:

R_5: Hacen comparaciones en el registro verbal a partir de las razones de desocupado obtenidas

R_6: No hacen comparaciones a partir de las razones de desocupado obtenidas

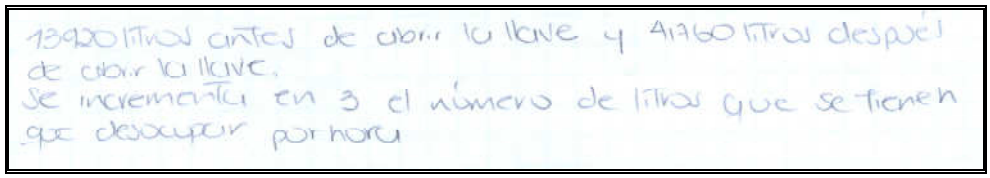
R_7: No responden

Tabla 16. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan comparaciones entre las razones de desocupado del tanque

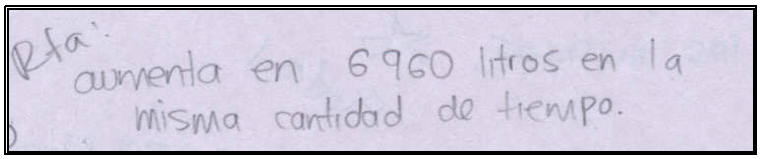
Respuesta	Frecuencias	Porcentaje
R_5	2	16.6
R_6	9	75.0
R_7	1	8.3

Encontramos que el 75% de los estudiantes a pesar de haber obtenido valores para las razones de desocupado no realizan comparaciones entre las mismas, lo que podría indicar falta de articulación con el registro verbal.

Entre los que hacen comparaciones se encuentran las siguientes expresiones:


13920 litros antes de abrir la llave y 41760 litros después de abrir la llave.
Se incrementa en 3 el número de litros que se tienen que desocupar por hora

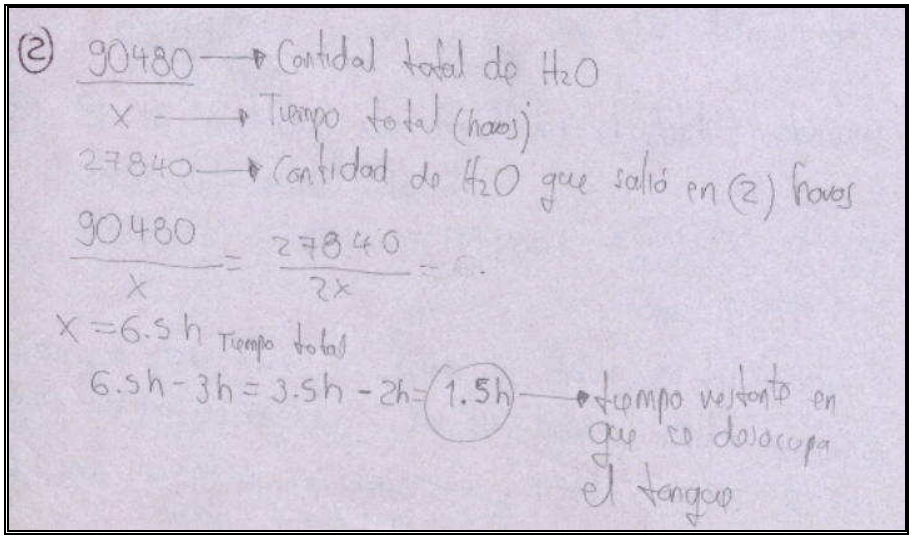
Aunque se hace la comparación entre las razones, la conversión al lenguaje verbal es inadecuada. También la comparación se establece entre la diferencia de las dos razones como se observa:


Rta: aumenta en 6960 litros en la misma cantidad de tiempo.

Pregunta 2. Conociendo el volumen de agua que ha salido, ¿cómo podría determinar el tiempo que hace falta para que el tanque se desocupe completamente?

Las respuestas de los estudiantes a esta pregunta revelan una falta de interpretación global de la situación, para expresar de manera general el tiempo que falta para desocupar el tanque en función del volumen de agua que ha salido, en los dos momentos que tienen razón de desocupado diferente. Las aproximaciones a la solución las hemos clasificado así:

R_8: Realizan conversiones y tratamientos adecuados para expresar diferentes relaciones con el tiempo que no logran integrar en una relación general. Por ejemplo,



R_9: Hacen conversiones que permiten encontrar solo una relación con el tiempo

R_{10}: Hacen conversiones que no corresponden a la relación entre el tiempo y el volumen de agua que ha salido. Por ejemplo,

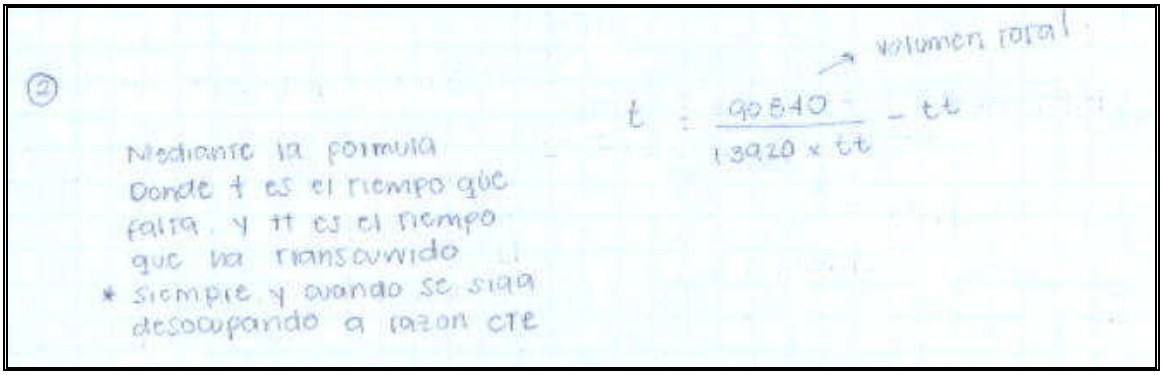


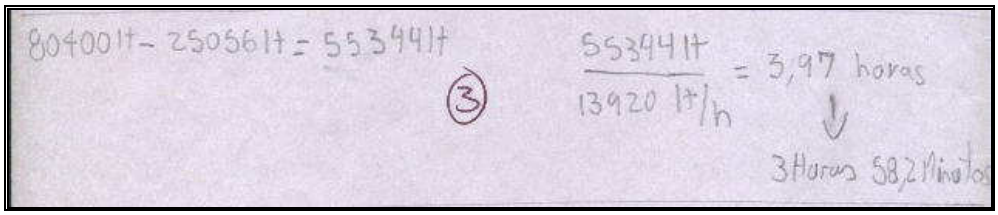
Tabla 17. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan transformaciones para expresar el tiempo en términos del volumen de agua

Respuesta	Frecuencias	Porcentaje
R_8	4	33.3
R_9	7	58.3
R_{10}	1	8.3

Se aprecia que el 91.7% de los estudiantes relaciona parcialmente el tiempo y el volumen de agua que ha salido, pero posiblemente el fenómeno de no congruencia que involucra esta pegunta afecta la integración de estas dos magnitudes en una expresión general que las relacione. Adicionalmente, consideramos que la utilización de la regla de tres como estrategia de solución en la mayoría de los casos, incide en la dificultad para plantear relaciones generales.

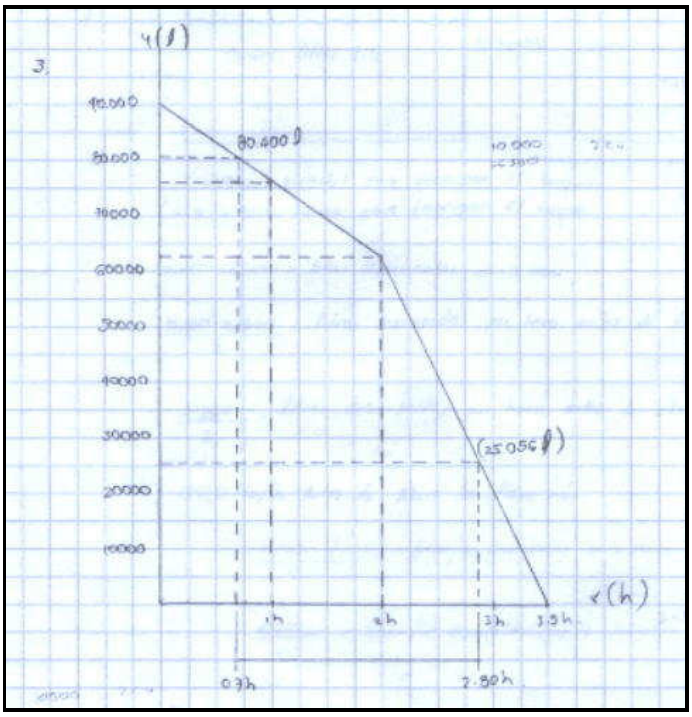
Pregunta 3. ¿En qué intervalo de tiempo la cantidad de agua que queda en el tanque cambia de 80400 litros a 25056 litros?

Al analizar los resultados encontramos que el 25% de los estudiantes interpreta la pregunta así ¿en cuánto tiempo la cantidad de agua que queda en el tanque cambia de 80400 litros a 25056 litros?; en dos de las respuestas se aprecia que no hay una diferenciación de los dos tramos de la función a trozos, por lo que utilizan sola una de las razones de desocupado como se observa:

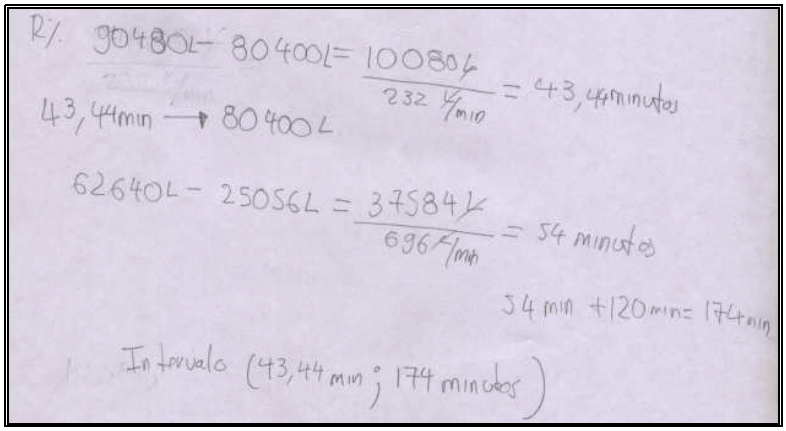


Teniendo en cuenta que el objetivo de la pregunta es indagar por las transformaciones efectuadas para determinar intervalos de covariación, hemos clasificado las respuestas del 75% de estudiantes restante de la siguiente forma:

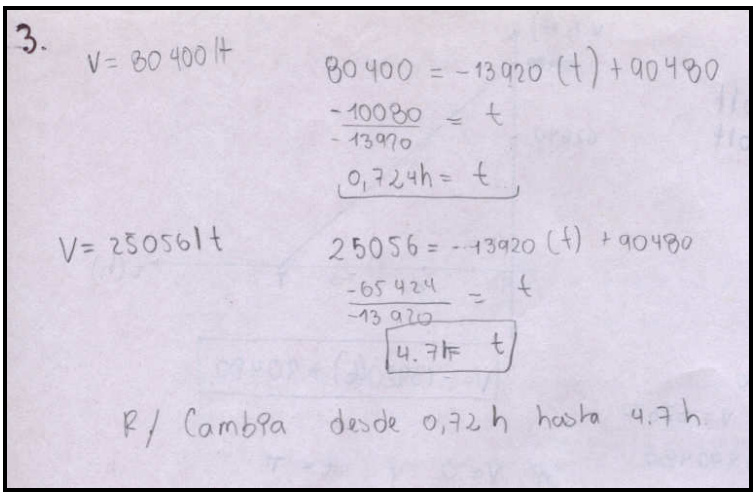
R_{11}: Realizan tratamientos en el registro gráfico para establecer el intervalo de covariación. Un ejemplo es el que sigue.



R_{12}: Realizan tratamientos en el registro aritmético para establecer el intervalo de covariación. Por ejemplo,



R_{13}: Realizan tratamientos en el registro algebraico funcional para establecer el intervalo de covariación. Por ejemplo,



R_{14}: No responden

Tabla 18. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan tratamientos para encontrar intervalos de covariación

Respuesta	Frecuencias	Porcentaje del total
R_{11}	1	8.3
R_{12}	3	25.0
R_{13}	3	25.0
R_{14}	2	16.6

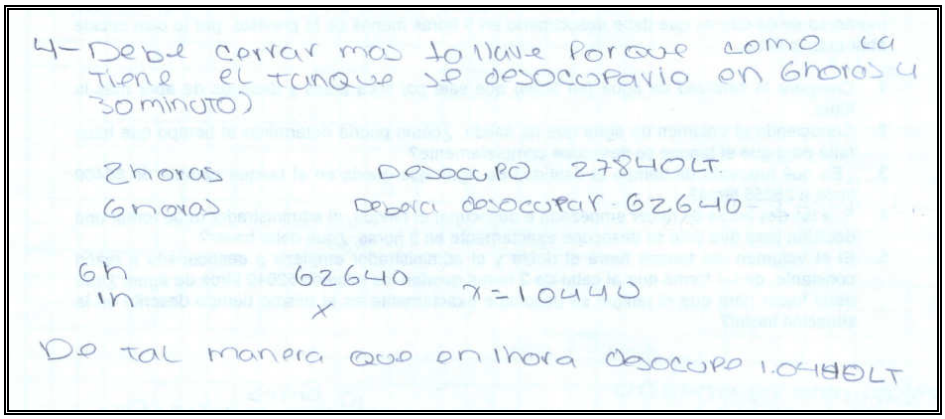
Se aprecia una gran diversidad de tratamientos para determinar intervalos de covariación, que incluyen lectura de gráficas por la vía del punteo, utilización de regla de tres,

aplicación del modelo funcional en el registro algebraico. Los resultados indican que sólo el 58.3% hace transformaciones para determinar intervalos de covariación entre las dos magnitudes involucradas.

Pregunta 4. Si a las dos horas de haber empezado a desocupar el tanque, el administrador debe tomar una decisión para que el tiempo total de desocupado sea exactamente de 8 horas, ¿qué debe hacer?

Para responder esta pregunta el estudiante debe hacer una interpretación global de la situación que le permita entre otras cosas reconocer la necesidad de determinar la razón de desocupado del tanque, es así como la clasificación de las respuestas se ha realizado teniendo en cuenta las transformaciones efectuadas para hallarla.

R_{15}: Realizan conversión y tratamientos correctos en el registro aritmético para determinar la razón de desocupado. Como un ejemplo,

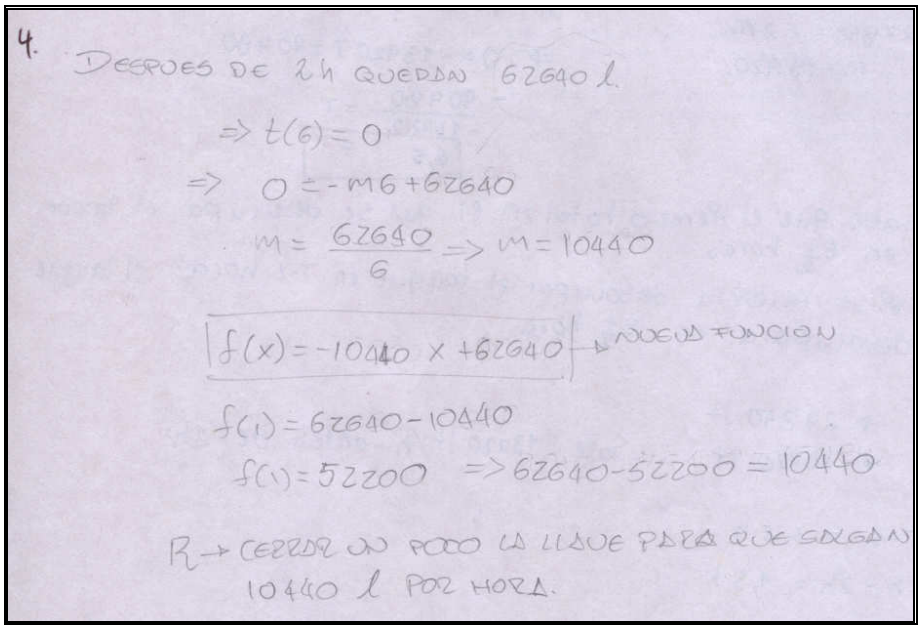

4- Debe cerrar mas la llave porque como la tiene el tanque se desocupario en 6horas y 30minuto)

2horas Desocupo 27840LT.
6horas Debia desocupar 62640

6h 62640
1h x x=10440

De tal manera que en 1hora desocupo 10440LT

R_{16}: Realizan conversión y tratamientos correctos en el registro algebraico funcional para determinar la razón de desocupado. Como ejemplo,


4. DESPUES DE 2h QUEDAN 62640 l.

$\Rightarrow t(6) = 0$

$\Rightarrow 0 = -m6 + 62640$

$m = \frac{62640}{6} \Rightarrow m = 10440$

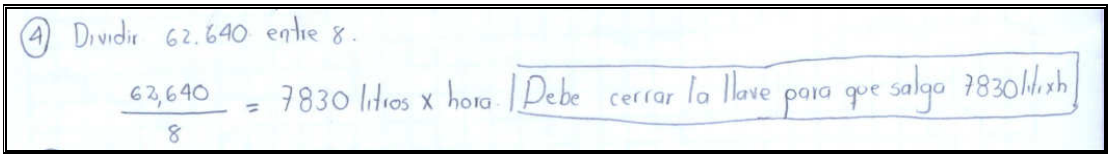
$\boxed{f(x) = -10440\,x + 62640}$ → NUEVA FUNCION

$f(1) = 62640 - 10440$

$f(1) = 52200 \Rightarrow 62640 - 52200 = 10440$

R → CERRAR UN POCO LA LLAVE PARA QUE SALGAN 10440 l POR HORA.

R_{17}: Realizan conversión inadecuada en el registro aritmético y a partir de ésta determinan la razón de desocupado, un ejemplo es el siguiente.


(4) Dividir 62.640 entre 8.

$\frac{62,640}{8} = 7830$ litros x hora. Debe cerrar la llave para que salga 7830 lit/xh

R_{18}: Dan respuesta sin explicitar tratamientos

Tabla 19. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan transformaciones para determinar la covariación entre dos magnitudes

Respuesta	Frecuencias	Porcentaje
R_{15}	3	25.0
R_{16}	1	8.3
R_{17}	7	58.3
R_{18}	1	8.3

Un aspecto que nos parece importante es que el 100% de los estudiantes intenta hallar la razón de desocupado, aunque no todos logren encontrarla, sin embargo, el 58.3% de los estudiantes halla esta razón sin tener en cuenta que ya han transcurrido dos horas, lo que nos lleva a pensar que no hay un reconocimiento del punto de anclaje y de las unidades significantes involucradas.

Pregunta 5. Si el volumen del tanque fuera el doble y el administrador empieza a desocuparlo a razón constante, de tal forma que al cabo de 2 horas quedan los mismos 62640 litros de agua, ¿qué debe hacer para que el tanque se desocupe exactamente en el mismo tiempo descrito en la situación inicial?

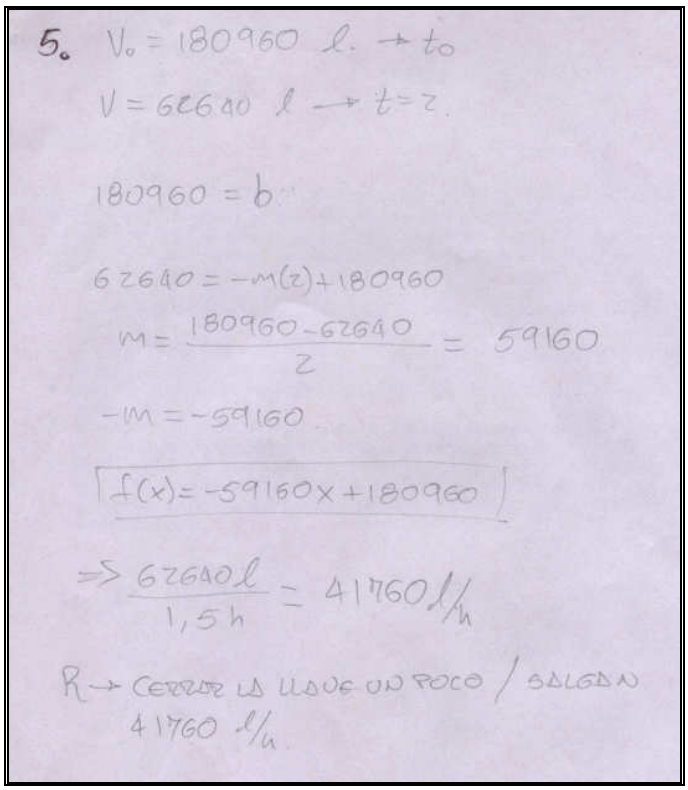
Al igual que en la pregunta anterior se requiere por parte del estudiante una interpretación global de la situación, de forma que pueda reconocer la invarianza de la misma teniendo

como referencia el punto de anclaje. Las respuestas se han clasificado de la siguiente forma:

R_{19}: Reconocen la invarianza de la situación y no realizan transformaciones sobre la misma. Por ejemplo,

5) la cantidad de agua es la misma por lo tanto se demora lo mismo.

R_{20}: No reconocen la invarianza de la situación pero realizan transformaciones adecuadas. Por ejemplo,


5. $V_0 = 180960\ l. \rightarrow t_0$

$V = 62640\ l \rightarrow t = 2.$

$180960 = b$

$62640 = -m(2) + 180960$

$m = \frac{180960 - 62640}{2} = 59160$

$-m = -59160$

$f(x) = -59160x + 180960$

$\Rightarrow \frac{62640\ l}{1,5\ h} = 41760\ l/h$

R → CERRAR LA LLAVE UN POCO / SALDRÁN 41760 l/h

R_{21}: No reconocen la invarianza de la situación y realizan transformaciones inadecuadas

Tabla 20. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que teniendo como referencia el punto de anclaje reconocen la invarianza de la situación

Respuesta	Frecuencias	Porcentaje
R_{19}	3	25.0
R_{20}	5	41.6
R_{21}	4	33.3

Podemos observar que solo el 25% reconoce la invarianza de la situación y lo explicita, de ahí que den sus respuestas sin realizar transformaciones. Un alto porcentaje de estudiantes (41.6%) parece no reconocer la invarianza lo que los lleva a realizar transformaciones para hallar la razón de desocupado, esto nos lleva a pensar que podría no haber una interpretación global de la situación o que es posible que algunos de ellos necesiten realizar procedimientos para dar validez a sus respuestas.

Dentro de los estudiantes que no reconocen la invarianza de la situación y realizan transformaciones inadecuadas, algunos realizan transformaciones parciales que contemplan la determinación de la razón de desocupado del primer tramo, otros hacen una interpretación inadecuada del tiempo al que hace referencia la pregunta lo que les lleva a determinar la razón de desocupado del segundo tramo de manera incorrecta.

6.2 SITUACIÓN 2

Pregunta1. ¿Cuándo el atleta cambia su velocidad, ¿la aumenta o la disminuye? Explique.

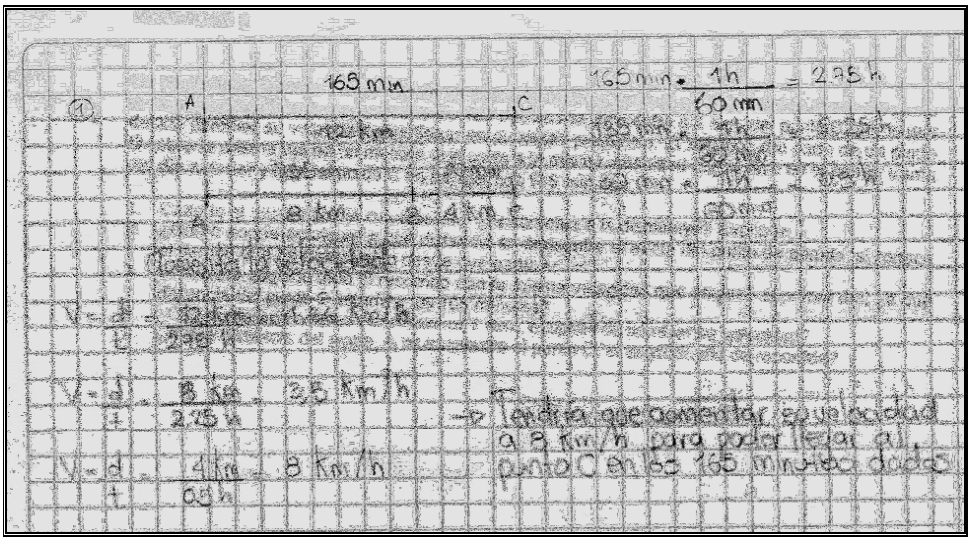
Para hacer el análisis de las respuestas a esta pregunta consideramos tres categorías que caracterizan las producciones escritas de los estudiantes:

- Conversiones que hacen desde el registro verbal
- Articulaciones con otros registros para determinar la velocidad antes y después de 135 minutos
- Tratamientos que realizan para determinar la relación entre las velocidades

La primera categoría permite indagar por las representaciones espontáneas que muestran los estudiantes cuando no se explicita el registro de llegada en una situación asociada a un contexto de posición. Las respuestas de los estudiantes se han clasificado de la siguiente forma:

R_1: Hacen conversiones al registro gráfico cartesiano

R_2: Hacen conversiones al registro gráfico usando diagrama de segmentos horizontales (registro figurativo)



R_3: Hacen conversiones al registro aritmético

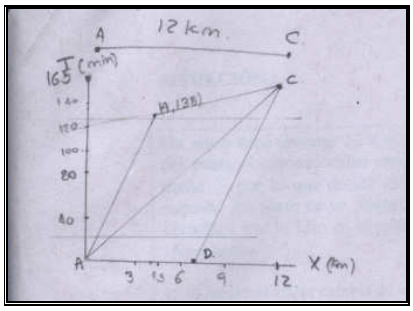
Tabla 21. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan conversiones al registro gráfico y aritmético en una situación asociada a un contexto de posición

Respuesta	Frecuencias	Porcentaje
R_1	4	33.3
R_2	7	58.3
R_3	1	8.3

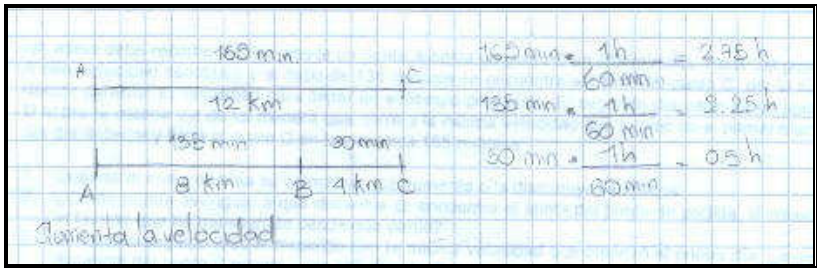
Se observa que el 91.6% tiende a representar la situación mediante gráficos cartesianos o de segmentos horizontales, esto posiblemente se deba al contacto que han tenido con sus cursos de física.

De los estudiantes que utilizan gráficas cartesianas el 50% no representa el segundo día de recorrido a pesar de que conocen la velocidad, esto podría estar asociado con dificultades en las conversiones o en los tratamientos, en el primer caso por el hecho de que el corte con el eje *y* no es explícito en el enunciado y en el segundo con el desconocimiento que la misma razón implica que las rectas sean paralelas.

Llama la atención la representación cartesiana hecha por un estudiante en la que considera el tiempo en el eje vertical y la posición en el eje horizontal, es posible que se deba a una asociación de la variable *x* con el eje de las abscisas.

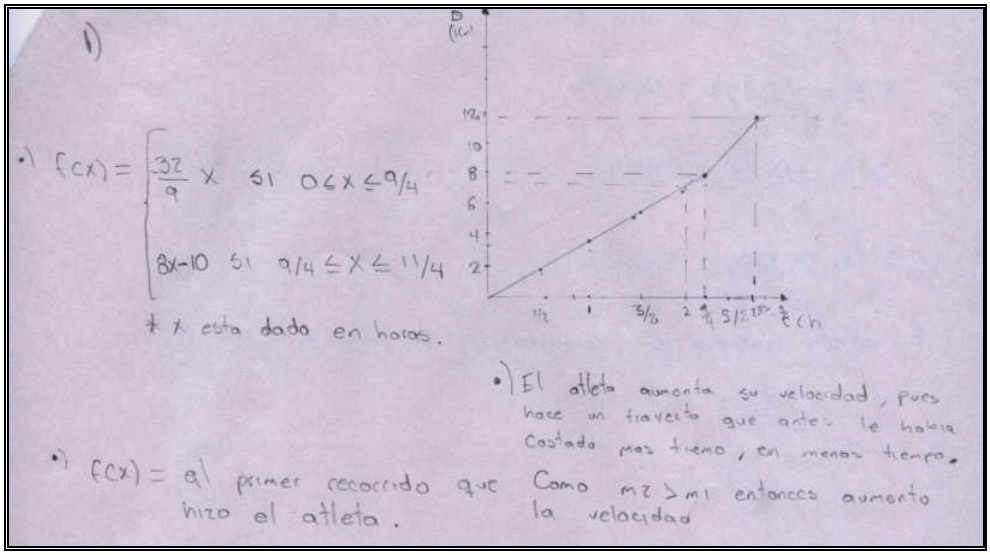


En cuanto a los gráficos de segmentos horizontales se observa que representan simultáneamente la distancia y el tiempo, y permiten establecer de manera directa la relación de velocidad en cada tramo como se observa:

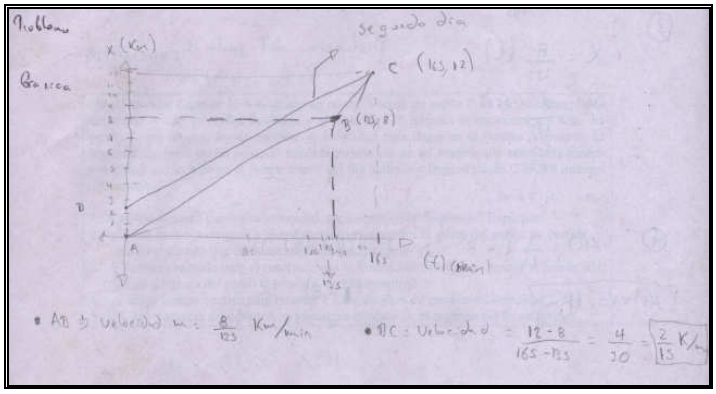


En cuanto a las articulaciones con otros registros para determinar la relación entre las dos velocidades, las respuestas las hemos clasificado así:

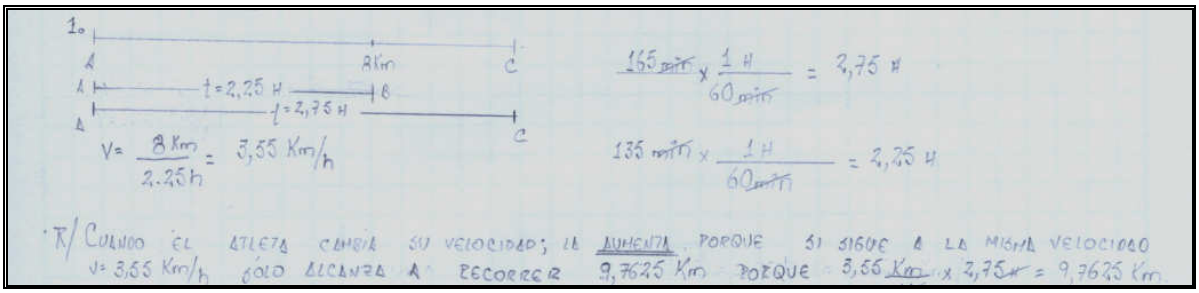
R_4: Hacen articulaciones entre el registro gráfico cartesiano y el registro algebraico funcional. Por ejemplo,



R_5: Hacen articulaciones entre el registro gráfico cartesiano y el registro aritmético. Por ejemplo,



R_6: Hacen articulaciones entre el registro gráfico de segmentos horizontales (registro figurativo), el registro aritmético y el verbal. Por ejemplo,



R_7: Hacen articulaciones entre el registro gráfico de segmentos horizontales y el registro aritmético usando la expresión $v = \frac{d}{t}$

R_8: No hacen articulaciones con otro registro

Tabla 22. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan articulaciones entre registros para determinar la relaciones entre velocidades

Respuesta	Frecuencias	Porcentaje del total
R_4	3	25.0
R_5	1	8.3
R_6	3	25.0
R_7	4	33.3
R_8	1	8.3

Se observa que el 91.7% realiza articulaciones con otro registro, lo cual se podría explicar en términos del contexto de la situación que propicia el uso del modelo físico asociado a la misma.

Se observa que la utilización del registro gráfico de segmentos horizontales no favorece la articulación con el registro algebraico funcional, posiblemente se deba a la asociación de esta representación con el concepto de proporcionalidad.

Por otra parte, de los que usan el registro gráfico cartesiano el 75% de éstos articula con el registro algebraico funcional, esto podría explicarse en términos del modelo que propicia la enseñanza, particularmente los libros, en donde desde la gráfica se pueden obtener puntos para determinar la pendiente y posteriormente la ecuación.

Llama la atención que el 25% utiliza el registro verbal para determinar la relación entre las velocidades, mientras que el 66.6% articula con el registro aritmético.

En cuanto a la respuesta que dan los estudiantes acerca de la relación entre las velocidades, el 83.3% afirma que aumenta independientemente del fenómeno de no congruencia entre registros que se presenta en la situación, lo que evidencia una interpretación global de la situación.

Respecto a los tratamientos utilizados para determinar el aumento de la velocidad se encuentra que:

R_9: Calculan la distancia recorrida usando la expresión $v = \frac{d}{t}$ y la comparan con la distancia total del enunciado

R_{10}: Calculan los tiempos de los dos tramos usando la expresión $v = \frac{d}{t}$ y comparan con el tiempo total

R_{11}: Calculan las velocidades de los dos tramos usando la expresión $v = \frac{d}{t}$

R_{12}: Leen las pendientes de los dos tramos sobre la gráfica cartesiana

Tabla 23. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan tratamientos para determinar la relación entre las velocidades de la situación 2

Respuesta	Frecuencias	Porcentaje
R_9	1	8.3
R_{10}	3	25.0
R_{11}	4	33.3
R_{12}	2	16.7

Se aprecia una gran diversidad de tratamientos para determinar la relación entre las velocidades, pero llama la atención que el 83.3% utiliza dentro de sus tratamientos el modelo físico, a partir de la expresión $v = \frac{d}{t}$.

Pregunta 2. ¿Cómo podría averiguar a qué distancia se encuentra el atleta del punto de partida, si conoce el tiempo que ha transcurrido desde que partió?

La solución a esta pregunta requiere de una interpretación global que permita encontrar la relación entre dos magnitudes que covarían, como lo son la posición y el tiempo. Se aprecia que los estudiantes establecen esta relación mediante la aplicación de diversos tratamientos, es así como el análisis de las respuestas se ha realizado teniendo en cuenta la siguiente clasificación:

R_{13}: Determinan la ecuación de la función inversa

R_{14}: Consideran casos particulares sobre la relación $v = \frac{d}{t}$

R_{15}: Plantean expresiones algebraicas aisladas para cada intervalo

R_{16}: Determinan la ecuación que modela la situación

R_{17}: Hacen explicaciones verbales asociadas con la distancia

R_{18}: Consideran casos particulares del modelo funcional

R_{19}: Dan explicaciones verbales que no expresan relaciones entre el tiempo y la distancia

Tabla 24. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan transformaciones para expresar la distancia en términos del tiempo

Respuesta	Frecuencias	Porcentaje
R_{13}	1	8.3
R_{14}	5	41.6
R_{15}	1	8.3
R_{16}	2	16.6
R_{17}	1	8.3
R_{18}	1	8.3
R_{19}	1	8.3

El 50% hace consideraciones particulares sobre la relación $v = \frac{d}{t}$ o sobre el modelo lineal, lo que podría evidenciar dificultades para expresar de manera general la relación; es posible que este hecho esté asociado a la forma en que el texto guía indaga por las imágenes o preimagenes en un modelo funcional, la cual se hace generalmente de manera puntual.

Sólo el 25% intenta expresar de manera general la relación entre posición y tiempo, y lo hacen desde la ecuación directa o inversa asociada al modelo funcional.

Pregunta 3. Si el primer día hubiera seguido todo el recorrido con la misma velocidad que empezó, ¿a que distancia del punto C estaría a los 165 minutos?

Las respuestas se han clasificado teniendo en cuenta los tratamientos que los estudiantes utilizan para determinar la distancia entre los puntos en referencia:

R_{20}: Aplican la relación $v = \frac{d}{t}$, encuentran la posición al cabo de 165 minutos y responden la pregunta anclados en el punto C

R_{21}: Aplican la relación $v = \frac{d}{t}$, encuentran la posición al cabo de 165 minutos pero no responden la pregunta anclados en el punto C

R_{22}: Aplican la relación $v = \frac{d}{t}$ en forma inadecuada lo que produce una respuesta incoherente

R_{23}: Aplican un modelo funcional inadecuado que produce respuestas incoherentes

Tabla 25. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que determinan la distancia entre dos puntos al reconocer la invarianza de la velocidad en el primer tramo de la situación 2

Respuesta	Frecuencias	Porcentaje
R_{20}	7	58.3
R_{21}	3	25.0
R_{22}	1	8.3
R_{23}	1	8.3

Se aprecia que el 91.7% de los estudiantes aplica la expresión $v = \frac{d}{t}$ para relacionar la velocidad, posición y tiempo con la distancia total, el 83.3% reconoce la invarianza de las unidades significantes del primer tramo lo cual les permite encontrar la posición del atleta en forma adecuada; llama la atención que el 58.3% de los estudiantes responde la pregunta tomando como referencia el punto C del enunciado.

Pregunta4. ¿Cuánto tiempo emplea el atleta para recorrer $1Km.$, después de cambiar su velocidad?

El objetivo de está pregunta es explorar las formas en que el estudiante establece la relación inversa entre dos magnitudes que covarían, para esto se analizan los tratamientos que realizan los cuales hemos clasificado de la siguiente forma:

R_{24}: Plantean una regla de tres teniendo como referencia la velocidad

R_{25}: Utilizan la relación $t = \frac{d}{v}$

R_{26}: Utilizan la ecuación que modela la situación para despejar el tiempo

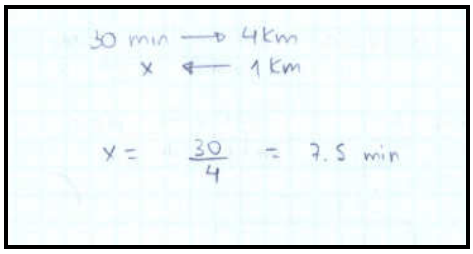
R_{27}: Plantean una ecuación que no corresponde

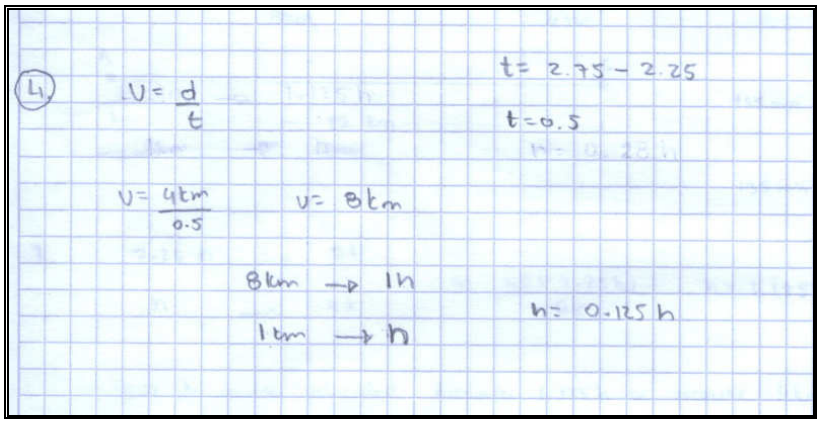
Tabla 26. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan tratamientos para obtener la relación inversa entre dos magnitudes que covarían

Respuesta	Frecuencias	Porcentaje
R_{24}	5	41.6
R_{25}	4	33.3
R_{26}	2	16.6
R_{27}	1	8.3

Se observa que el 91.7% de los estudiantes determina la relación inversa entre magnitudes que covarían, lo que podría indicar una interpretación global de la situación.

Se observa que el 41.6% de los estudiantes utiliza la regla de tres como estrategia de solución, la cual se plantea de diversas formas que dependen de los tratamientos previos que han realizado, como por ejemplo:





Sin embargo, solo el 16.6% trabaja esta relación desde el modelo funcional, evidenciando la preferencia por el uso de las fórmulas o del modelo algorítmico de la regla de tres.

Pregunta 5. ¿A qué distancia del punto *A* se encuentra el punto *D*, el segundo día de recorrido?

La solución a esta pregunta requiere de una interpretación global para relacionar los elementos que no cambian (velocidad, punto de llegada, tiempo total del recorrido) con la posición del punto D. Teniendo en cuenta esto hemos clasificado las respuestas de acuerdo a las transformaciones que realizan para determinar la posición del punto D.

R_{28}: Realizan transformaciones en el registro gráfico

R_{29}: Realizan transformaciones en el registro algebraico funcional

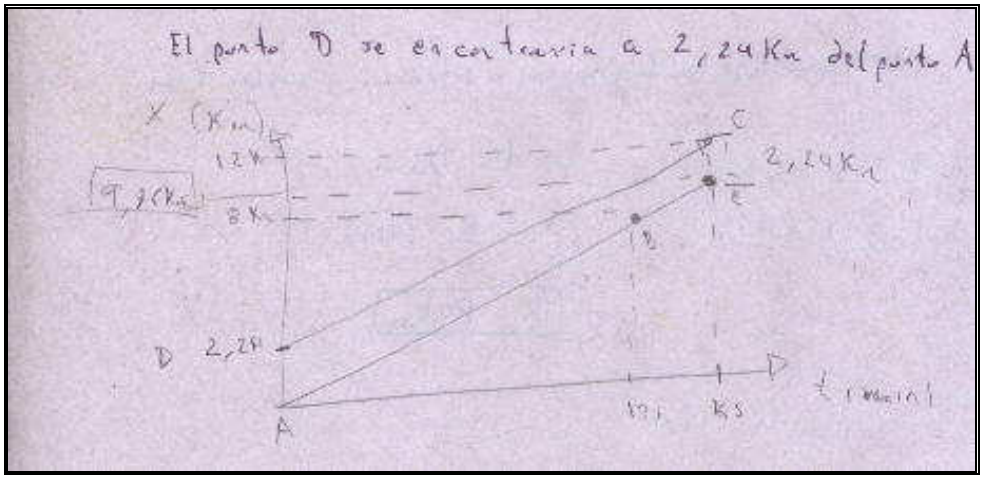
R_{30}: Realizan transformaciones en el registro aritmético apoyados en la expresión $v = \frac{d}{t}$

R_{31}: No responden

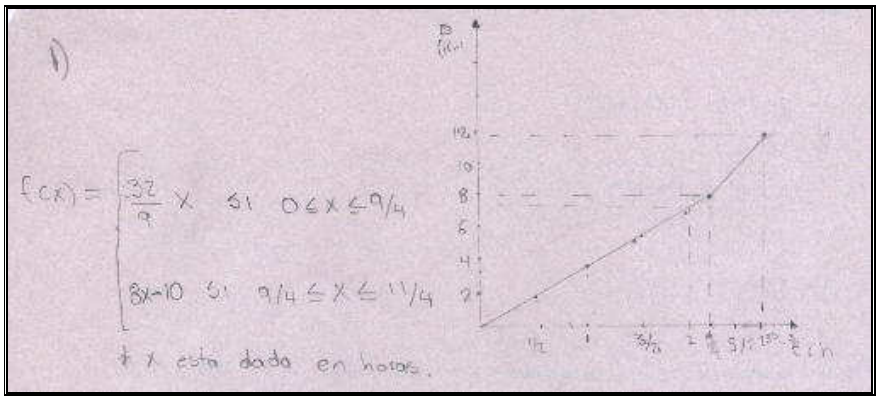
Tabla 27. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan transformaciones para determinar la posición de un punto conociendo la velocidad y el punto de llegada

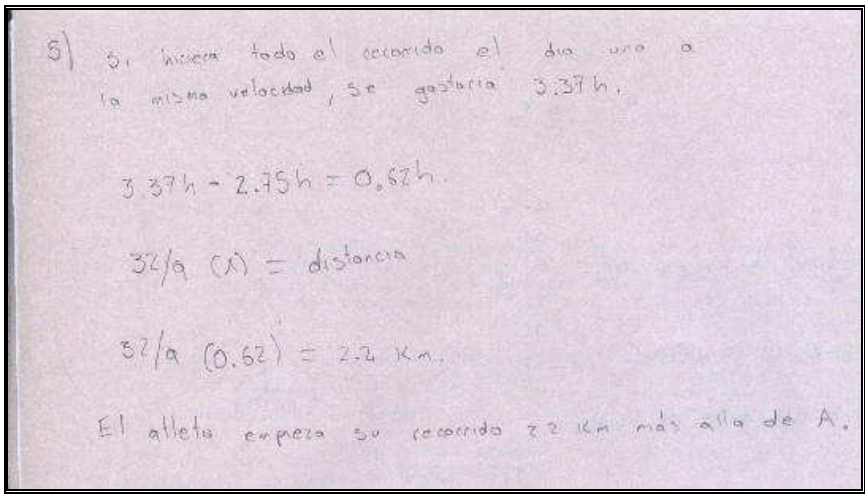
Respuesta	Frecuencias	Porcentaje
R_{28}	1	8.3
R_{29}	2	16.6
R_{30}	6	50.0
R_{31}	3	25.0

Solo el 8.3% determina la posición del punto D a partir del manejo del registro gráfico; como se aprecia en la figura el estudiante traza la recta paralela que pasa por el punto C hasta cortar el eje vertical, determinando así la posición del punto D. Esto podría interpretarse como un reconocimiento de la invarianza tanto de la velocidad en el segundo día de recorrido, como de la distancia entre los puntos A y D y los puntos C y E.



Dentro de los estudiantes que realizan transformaciones en el registro algebraico funcional, nuevamente se observa una interpretación global que permite relacionar los diferentes tiempos para hallar la posición del punto D, como se observa en las figuras siguientes se aprecia la aplicación del modelo funcional planteado en la pregunta 1 sobre el caso particular.





El 50% de los estudiantes hace transformaciones sobre el registro aritmético usando la relación $v = \frac{d}{t}$, lo que confirma la preferencia por el uso de fórmulas y del registro aritmético.

6.3 SITUACIÓN 3

Pregunta 1. Describa el comportamiento de la temperatura durante el ciclo de producción.

Los resultados de esta pregunta se estudian a través de tres categorías de análisis:

- Conversiones que hacen desde el registro verbal
- Discriminación de unidades significantes de la situación
- Articulación entre registros

La primera categoría permite indagar por las representaciones espontáneas que muestran los estudiantes en una situación asociada a un fenómeno de congruencia entre registros, en la que no se explicita el tiempo como variable del fenómeno de variación. Teniendo en cuenta que la totalidad de los estudiantes efectuó una primera conversión al registro gráfico cartesiano, las respuestas se han clasificado como se indica:

R_1: Hacen conversiones correctas al registro gráfico cartesiano

R_2: Hacen conversiones incorrectas al registro gráfico cartesiano

Tabla 28. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que hacen conversiones al registro gráfico cartesiano en la situación 3

Respuesta	Frecuencias	Porcentaje
R_1	7	58.3
R_2	5	41.7

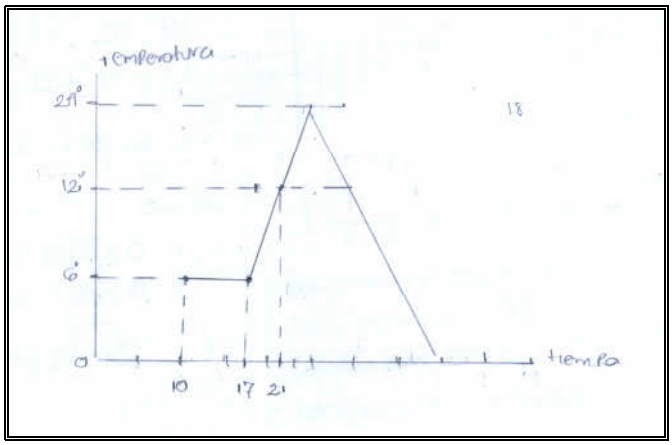
Esta primera clasificación nos da idea de las conversiones que hacen los estudiantes cuando no se explicitan ni el registro de llegada ni la variable independiente; observamos que todos los estudiantes realizan la primera conversión al registro gráfico cartesiano, lo que se podría explicar en términos del contexto de la situación, aunque éste no es un comportamiento usual como lo señala Sierpinska:

> "el concepto de gráfico es bastante difícil, algunos estudiantes nunca llegarán a usar gráficos de dos dimensiones espontáneamente para representar relaciones funcionales" (Sierpinska 1992, citada por Ruiz, p. 381)

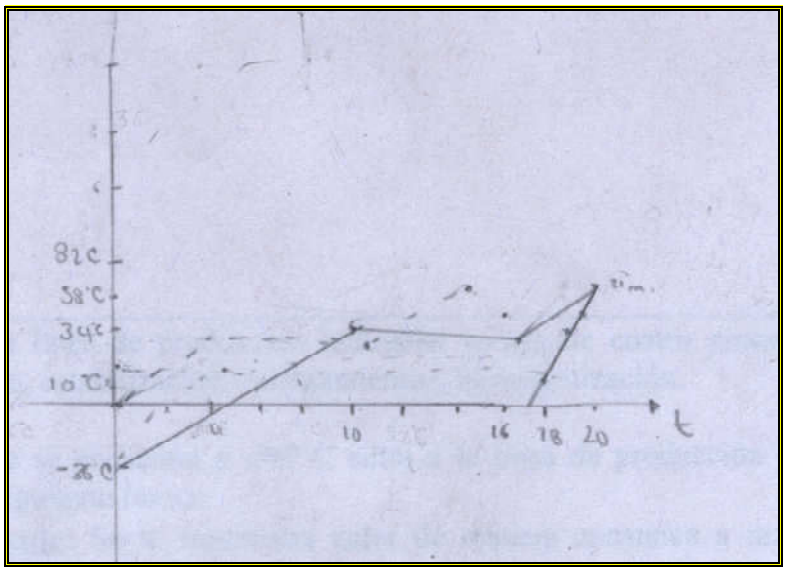
Aunque no todos los gráficos cartesianos corresponden con las características del enunciado, se observa una diferenciación adecuada de las variables dependiente e independiente, que se evidencia en la forma correcta de asignación de magnitudes a los ejes.

De otra parte se aprecia que el 41.7% de los estudiantes hace conversiones incorrectas al registro gráfico cartesiano, lo cual podría atribuirse a la falta de discriminación de las

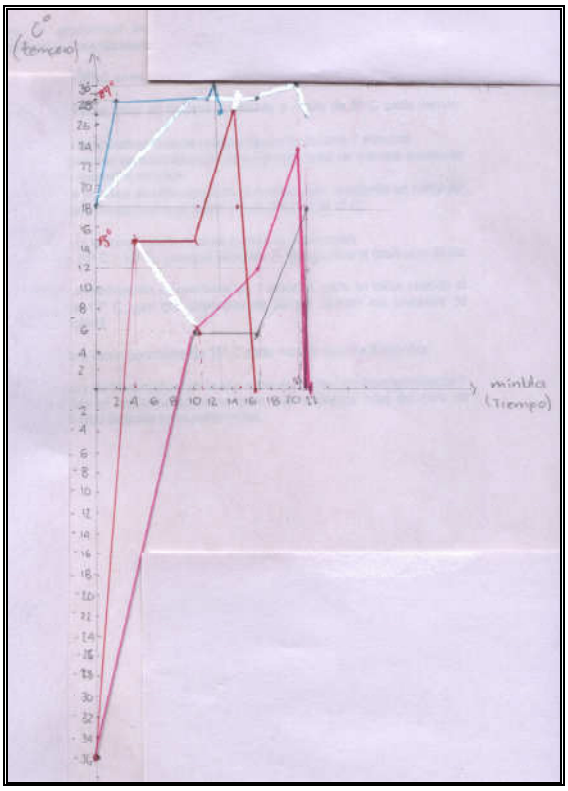
unidades significantes. Se observa que todos estos estudiantes no efectúan correctamente alguna de las conversiones de la razón de cambio de la temperatura del registro verbal al gráfico y adicionalmente uno de ellos no considera la temperatura inicial del material, como se muestra.



También llama la atención la representación gráfica de uno de los estudiantes que asocia "extracción de calor" con el tiempo y no con la temperatura como se ve en su gráfica.



Algunos estudiantes no realizan la conversión de manera correcta, porque realizan la conversión de la razón sin tener en cuenta la variación del tiempo, como se observa.



Hemos tenido en cuenta una tercera categoría que considera la articulación con otros registros, independientemente de que la conversión hecha del registro verbal al gráfico esté correcta o no. Se consideran las siguientes respuestas:

R_3: Muestran articulaciones entre los registros gráfico y aritmético

R_4: Muestran articulaciones entre los registros gráfico y algebraico

R_5: Muestran articulaciones entre los registros gráfico y tabular

R_6: Muestran articulaciones entre los registros gráfico, verbal y algebraico

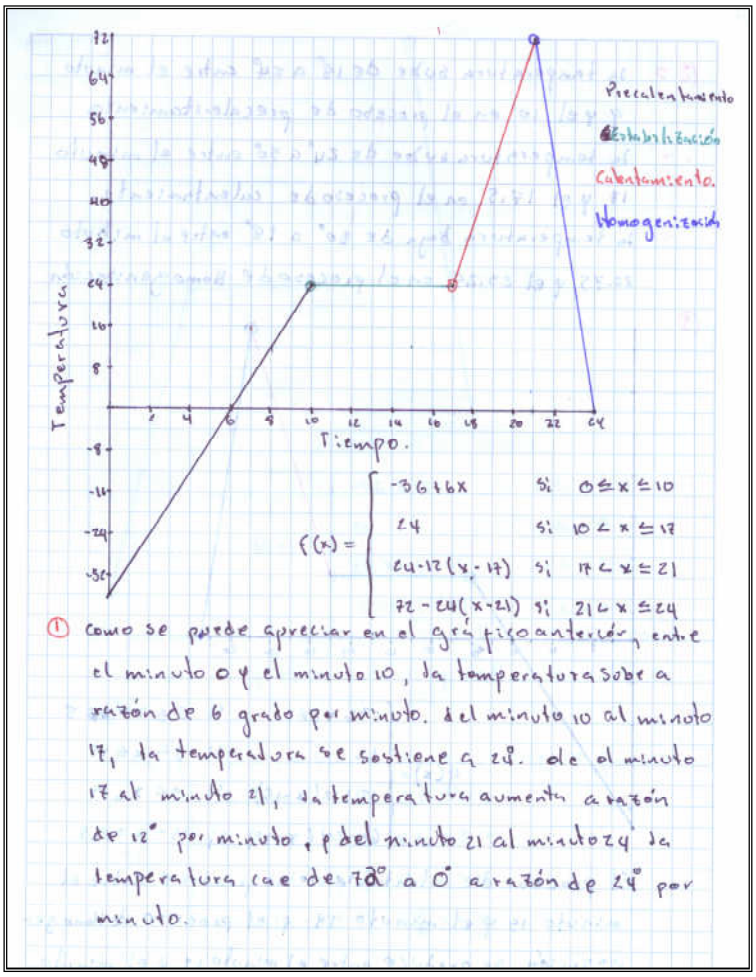
R_7: Muestran articulaciones entre los registros gráfico, verbal y tabular

R_8: No muestran articulación con otros registros

Tabla 30. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que muestran articulaciones entre los diferentes registros en la situación 3

Respuesta	Frecuencias	Porcentaje
R_3	4	33.3
R_4	1	8.3
R_5	1	8.3
R_6	1	8.3
R_7	1	8.3
R_8	4	33.3

Se aprecia que el 66.7% de los estudiantes articula el registro gráfico con otro para poder describir el comportamiento en el primer registro, aunque la articulación no es total en el sentido de que no se describe en el registro diferente al gráfico, sino más bien se utiliza como registro auxiliar para determinar algunas unidades significantes de manera más sencilla. Solamente uno evidencia una articulación total entre el registro verbal, el gráfico, y el algebraico funcional, como se aprecia:



En cuanto a los tratamientos que utilizan para describir el comportamiento de la temperatura durante el ciclo de producción se aprecia que: en el registro aritmético son de dos tipos regla de tres y operaciones aritméticas; en el registro verbal están asociados al uso de palabras para describir la variación tales como aumenta, disminuye, permanece constante; mientras que en el registro tabular tienen que ver con operaciones entre los datos anotados en la tabla.

Pregunta 2. Si la temperatura varía entre 18º C y 30º C, ¿en qué intervalo de tiempo ocurre cada uno de los procesos?

Al analizar las respuestas de los estudiantes se observó que la mayoría hace tratamientos sobre la representación gráfica obtenida en la pregunta anterior; los hemos clasificado de la siguiente forma:

R_9: Leen con precisión desde la gráfica los intervalos de tiempo en cada proceso

R_{10}: Hacen lectura aproximada de los intervalos de tiempo en cada proceso

R_{11}: Hacen lectura incorrecta de los intervalos de tiempo en cada proceso

R_{12}: Respuesta incorrecta que no explicita tratamientos, aunque aparece representación gráfica

Tabla 31. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan tratamientos sobre la gráfica para obtener intervalos de covariación

Respuesta	Frecuencias	Porcentaje
R_9	1	8.3
R_{10}	5	41.7
R_{11}	5	41.7
R_{12}	1	8.3

Se aprecia que el 91.7% de los estudiantes realiza tratamientos en el registro gráfico, pero solo el 8.3% de éstos llega a realizar una lectura exacta sobre la gráfica, aunque queda la duda si ésta es mediada por el uso de transformaciones en otros registros que le permiten dar la respuesta ya que no aparecen en sus desarrollos.

El 41.7% de los estudiantes realiza tratamientos en el registro gráfico que conducen a respuestas aproximadas, lo que evidencia la ausencia de articulaciones con otros registros para precisar la respuesta.

Pregunta 3. Si el tiempo del proceso de estabilización se mantiene en 7 minutos, pero se inicia cuando el precalentamiento alcanza los 12º C, ¿en qué intervalos de tiempo ocurren los procesos de calentamiento y homogenización, si no se cambian las razones de estos últimos?

Se observa que la mayoría de los estudiantes realiza tratamientos para encontrar los intervalos de tiempo correspondientes a los dos últimos procesos, sobre la representación gráfica que obtuvieron en la primera conversión. Es así como hemos clasificado las respuestas de la siguiente forma:

R_{13}: Hacen conversión y tratamientos correctos sobre la gráfica que corresponden a desplazamientos, articulan con el registro algebraico y leen los valores de tiempo correspondientes

R_{14}: Hacen conversión y tratamientos correctos sobre la gráfica que corresponden a desplazamientos y leen los valores de tiempo correspondientes

R_{15}: No hacen transformaciones a la gráfica inicial, pero leen de manera aproximada los intervalos de tiempo de los dos procesos

R_{16}: Hacen conversión incorrecta al registro gráfico y desde la representación resultante leen correctamente los intervalos de tiempo de los dos procesos

R_{17}: Hacen tratamientos incorrectos y dan respuesta incorrecta

R_{18}: No responden

Tabla 32. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan transformaciones que involucran desplazamientos sobre la gráfica

Respuesta	Frecuencias	Porcentaje
R_{13}	1	8.3
R_{14}	2	16.7
R_{15}	3	25.0
R_{16}	2	16.7
R_{17}	3	25.0
R_{18}	1	8.3

Al analizar las respuestas de los estudiantes se constata que el 33.3% de los estudiantes no efectúa la conversión del registro verbal al gráfico, esto podría explicarse en términos de ausencia de un manejo global de la situación o de desconocimiento de las reglas propias al registro gráfico que permita realizar transformaciones asociadas a los desplazamientos horizontales.

Se observa que el 66.7% de los estudiantes reconoce la covariación entre las magnitudes y hace tratamientos sobre la gráfica a pesar de que ésta no sea precisa; solo el 25% de los estudiantes realiza transformaciones correctas y de éstos un estudiante articula varios registros, gráfico, algebraico y verbal.

Pregunta 4. Si el precalentamiento se cambia a razón constante de 15º C cada minuto durante 4 minutos, ¿en qué intervalos de tiempo y de temperatura se lleva a cabo el proceso de homogenización?

Al analizar las respuestas de los estudiantes a esta pregunta se aprecia que la mayoría hace tratamientos sobre el registro gráfico y eventualmente articulan con otro registro, por esta razón las hemos clasificado de la siguiente forma:

R_{19}: Hacen conversión y tratamientos sobre la gráfica que corresponden a desplazamientos, articulan con el registro algebraico y leen los valores de tiempo y de temperatura

R_{20}: Hacen conversión y tratamientos sobre la gráfica que corresponden a desplazamientos y leen valores aproximados de tiempo y de temperatura

R_{21}: Hacen conversión incorrecta y desde la gráfica resultante leen correctamente los intervalos de tiempo y de temperatura

R_{22}: Hacen transformaciones incorrectas

R_{23}: No realizan tratamientos y responden incorrectamente

R_{24}: No responden

Tabla 33. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan transformaciones cuando se cambia una de las razones de cambio de la temperatura respecto al tiempo

Respuesta	Frecuencias	Porcentaje
R_{19}	1	8.3
R_{20}	3	25.0
R_{21}	1	8.3
R_{22}	2	16.6
R_{23}	4	33.3
R_{24}	1	8.3

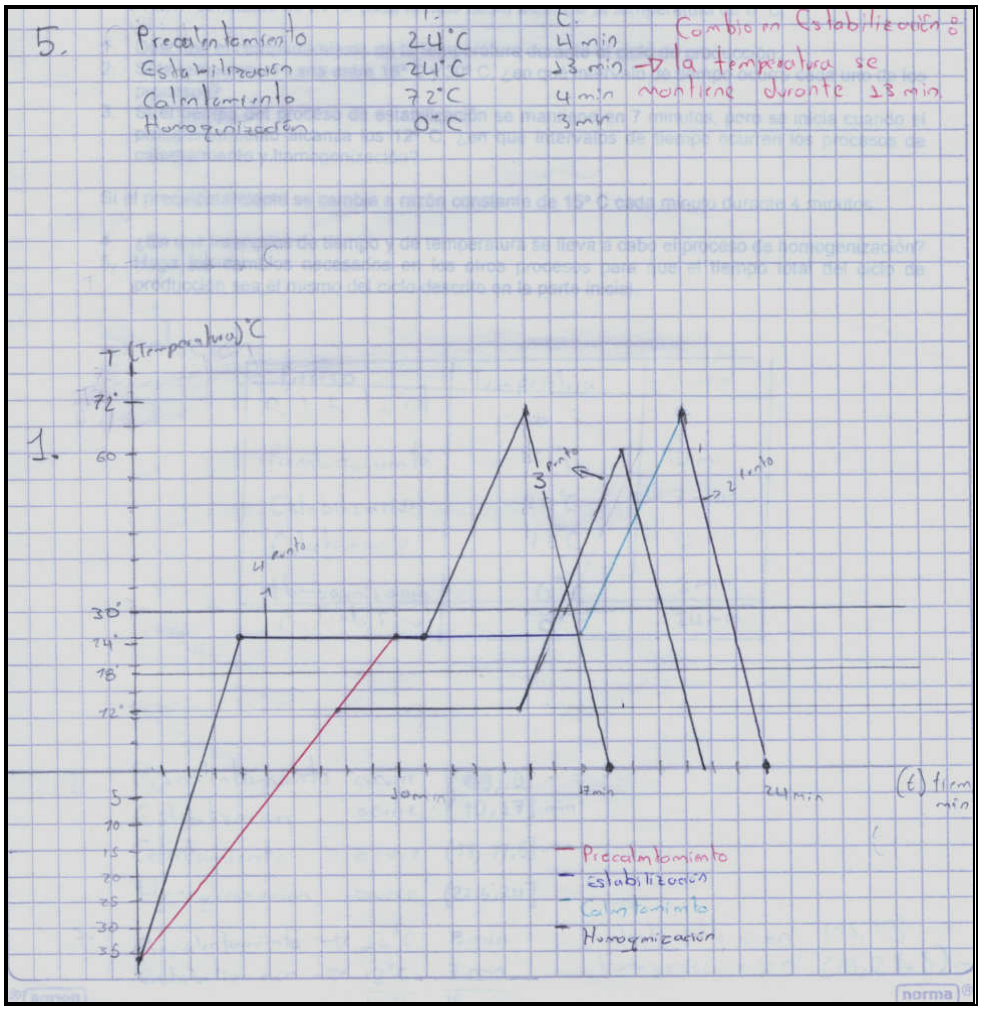
Se observa que el 33.3% de los estudiantes hace conversiones correctas del registro verbal al gráfico, lo cual se traduce en un tratamiento sobre la gráfica que vienen trabajando de las preguntas anteriores, al cambiar la pendiente de la recta que describe el primer proceso. De estos estudiantes el 25% además articula con el registro algebraico. Podemos afirmar que el 66.7% de los estudiantes no coordina el cambio de la razón de uno de los procesos con los cambios de temperatura y de tiempo de los otros procesos.

Podemos afirmar que el 41.6% de los estudiantes realiza tratamientos correctos sobre la gráfica de la función afín, lo que nos hace pensar en un manejo adecuado de la lectura de intervalos de covariación, sin embargo, llama la atención que el 58.2% muestra dificultades para determinar estos intervalos desde el registro gráfico.

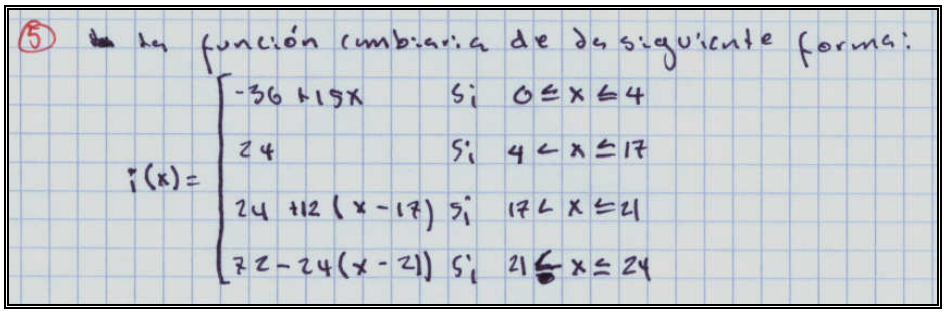
Pregunta 5. Si el precalentamiento se cambia a razón constante de 15º C cada minuto durante 4 minutos, haga los cambios necesarios en los otros procesos para que el tiempo total del ciclo de producción sea el mismo del ciclo descrito en la parte inicial.

Hemos clasificado las respuestas de la siguiente forma:

R_{25}: Realizan tratamientos implícita o explícitamente sobre la representación gráfica y los expresan de manera verbal o en tabla. Por ejemplo,



R_{26}: Realizan tratamientos sobre el registro algebraico que modifican la razón y el tiempo. Por ejemplo,



R_{27}: Realizan tratamientos sobre el registro aritmético modifican la razón y el tiempo

R_{28}: Realizan tratamientos sobre el registro verbal que corresponden a una situación similar pero que no satisfacen el cuestionamiento

R_{29}: No responden

Tabla 34. Frecuencia y porcentaje de estudiantes que realizan tratamientos para cambiar las características de una situación

Respuesta	Frecuencias	Porcentaje
R_{25}	4	33.3
R_{26}	1	8.3
R_{27}	1	8.3
R_{28}	3	25
R_{29}	3	25

Se observa que el 50% manifiesta una interpretación global de la situación que permite realizar cambios pertinentes sobre alguna de las características de los procesos, a través de

tratamientos en los registros algebraico, aritmético o gráfico, en este último se realiza la mayor parte de éstos.

Llama la atención que el 50% de los estudiantes o no responde o hace una interpretación diferente de la pregunta que los conduce a enunciar una situación con características similares a las de la inicial y desde donde no se aprecian las transformaciones realizadas.

7 CONCLUSIONES, CUESTIONES ABIERTAS, RECOMENDACIONES

7.1 CONCLUSIONES DE LA SITUACIÓN 1

1. Se observa un marcado uso del registro aritmético tanto en la parte que es congruente como en la que no lo es, en donde los tratamientos involucrados en su mayoría corresponden a reglas de tres, lo que evidencia una modelización proporcional pero no funcional de la situación. Adicionalmente, una parte significativa de estos estudiantes tiene dificultades para hacer transformaciones adecuadas en este registro. Ruiz señala que las técnicas asociadas al tratamiento de la proporcionalidad tales como "regla de tres", se pueden constituir en un obstáculo para el desarrollo del pensamiento funcional" (1993, p. 431)

2. En general los estudiantes no representan la situación ni en el registro gráfico ni en el algebraico funcional, las razones de este hecho podrían explicarse en términos de falta de discriminación de las unidades significantes o desconocimiento de las reglas propias de formación en cada registro, o por la no identificación de un modelo lineal en la situación.

3. El 75% de los estudiantes evidencia una ausencia del registro verbal como herramienta para comparar dos razones conocidas. Se observa que un alto porcentaje de estudiantes solo encuentra las razones pero no compara los valores, podría estar relacionado con la baja utilización de este registro en las preguntas que formula el texto.

4. El establecimiento de relaciones de covariación inversa genera dificultades para los alumnos, cuando están involucradas varias relaciones entre magnitudes, pareciera que no hay una interpretación global de la situación que permita integrar todas las relaciones en una sola, así como no hay una modelización desde la variación que contribuya a esto.

5. Respecto a la determinación de intervalos de covariación en una situación que se puede modelar con una función a trozos de dos ecuaciones el 58.3% de los estudiantes hace transformaciones para determinar intervalos de covariación entre las dos magnitudes involucradas. Se observa gran variedad de tratamientos para determinarlos que incluyen lectura de gráficas por la vía del punteo, utilización de reglas de tres y aplicación del modelo funcional en el registro algebraico.

6. Cuando se involucra un punto de anclaje muchos de los estudiantes realizan transformaciones en registros diferentes al verbal para encontrar las respuestas a los cuestionamientos, en lugar de dar una respuesta a partir del reconocimiento de la

globalidad de la situación, esto podría dar indicios de falta de interpretación global de la situación.

7. Se observa a lo largo de la situación que el 16.6% utiliza 4 registros de representación en sus procedimientos, mientras que el 83.4% trabaja solamente en un registro, este alto porcentaje podría explicarse por la escogencia del modelo proporcional que limita el uso de otros registros.

7.2 CONCLUSIONES DE LA SITUACIÓN 2

1. Un alto porcentaje de estudiantes utiliza representación gráfica de segmentos horizontales (registro figurativo), con suficiente información que permite establecer de manera directa relaciones entre las magnitudes, pero que de alguna manera limita el carácter variacional de la situación, lo que obliga a usar registros auxiliares como el aritmético o el algebraico a través de fórmulas.

2. El registro verbal es utilizado en un porcentaje muy bajo para sintetizar las respuestas que se han obtenido en otros registros.

3. Los tratamientos que exhiben los estudiantes en la situación asociada al contexto de posición involucran en la mayoría de los casos la relación $v = \frac{d}{t}$, así como el planteamiento de reglas de tres.

4. En cuanto a la utilización de uno o varios registros de representación a lo largo de esta situación, observamos que el 25% utiliza 4 registros de representación dentro de sus procesos, el 66.6% incluye 2 registros en sus producciones y solamente el 8.3% trabaja en un registro de representación.

7.3 CONCLUSIONES DE LA SITUACIÓN 3

1. La totalidad de los estudiantes utiliza el registro gráfico cartesiano, esto podría explicarse en términos del contexto de la situación.

2. Cuando los estudiantes trabajan en el registro gráfico cartesiano generalmente articulan con otro en el que realizan tratamientos que permiten ampliar la información o precisarla. Duval afirma que:

> "En matemáticas los gráficos cartesianos se utilizan siempre en articulación con otros registros de representación" (Duval 2004, p. 66)

3. Cuando a los estudiantes se les proponen tareas relacionadas con la determinación de intervalos de covariación en funciones afines a trozos, se observa que un porcentaje significativo realiza tratamientos adecuados en el registro gráfico que conducen a respuestas aproximadas pero que revelan la falta de articulación con otros registros para precisar las respuestas.

4. Aunque la mayoría de los estudiantes reconocen la covariación entre las magnitudes el porcentaje de los que hacen la conversión de lo verbal a lo gráfico es menor, lo cual evidencia o ausencia de un manejo global de la situación o desconocimiento de las reglas propias al registro gráfico que permita realizar transformaciones asociadas a los desplazamientos horizontales.

5. Un porcentaje alto de estudiantes (66.7%) no coordina el cambio de la razón de uno de los procesos con los cambios de temperatura y de tiempo de los otros procesos. Esto podría estar relacionado con la presentación de los textos guía, en los que no se contemplan este tipo de cuestionamientos.

6. Los estudiantes que modelan la situación de temperatura mediante gráficas cartesianas y que articulan con otro registro en su mayoría lo hacen con el aritmético.

7. Respecto a la utilización de uno o varios registros de representación a lo largo de esta situación, observamos que el 8.3% utiliza 4 registros de representación dentro de sus procesos y el 91.7% incluye 2 registros en sus producciones.

7.4 CONCLUSIONES GENERALES

1. El contexto de la situación de variación influye en los registros de representación y en las transformaciones que utilizan los estudiantes para enfrentarlas. Así, si el estudiante identifica en la situación elementos de proporcionalidad utiliza el registro aritmético y reduce el uso de modelos funcionales y representaciones gráficas; si la situación se asocia con un contexto de posición, usa en su mayoría registro gráfico de segmentos horizontales y fórmulas físicas que corresponden a modelos estáticos y ocultan la variación; en el caso de los contextos de temperatura el registro privilegiado es el gráfico cartesiano.

2. Las conversiones que realizan los estudiantes se ven afectadas cuando el enunciado de la situación incluye elementos que distraen la atención y que impiden la interpretación global de la misma; por ejemplo, en la situación 1 el *doble del volumen*, hace que el 75% centre su atención en este elemento y no reconozca la invarianza de la razón de desocupado a partir del punto en el que el comportamiento permanece igual.

3. Aunque en el texto guía se proponen ejercicios relacionados con la interpretación de la pendiente y del corte en contextos así como con la realización de conversiones de lo gráfico a lo verbal, en general los estudiantes muestran una baja utilización del registro verbal en tareas asociadas con descripción o comparación de razones o magnitudes, así como en sus procedimientos. Esto coincide con los resultados obtenidos por Guzmán (1998) en los que encuentra debilidad en el uso de este registro posiblemente por falta de relevancia en el aula.

   > "La traducción de un lenguaje a otro, la coordinación de registros no es un objetivo de enseñanza que se tome en cuenta explícitamente, y esto sin duda no favorece ni ayuda a los estudiantes a formular sus explicaciones" (p. 18)

4. Se observa que casi la totalidad de los estudiantes hace conversiones a otros registros solamente cuando sienten la necesidad de ampliar la información para dar respuesta al cuestionamiento planteado; pero no se aprecia un interés por poner en correspondencia las unidades significantes entre registros para corroborar o verificar sus resultados. Esto concuerda con la investigación de Guzmán (1998) en la que revela que una vez los estudiantes consiguen la respuesta no tienen ningún interés en articular con otros registros.

5. El registro seleccionado al hacer la primera conversión determina la utilización de uno o varios registros de representación a lo largo del desarrollo de la situación. De esta forma si la primera conversión se realiza en el registro aritmético, las transformaciones

posteriores se siguen efectuando en este mismo registro; mientras que una primera conversión en un registro diferente al aritmético va acompañada en su mayoría de otros registros.

6. Un porcentaje significativo de estudiantes realiza transformaciones para hallar intervalos de covariación. Se observa gran variedad de tratamientos para determinarlos, que de mayor a menor nivel de utilización incluyen reglas de tres, lectura de gráficas por la vía del punteo y aplicación del modelo funcional en el registro algebraico. Los casos en que los estudiantes determinan en el registro gráfico de manera aproximada los intervalos, evidencian falta de articulación con otros registros que podrían contribuir a precisar dichos intervalos.

7. Se aprecia gran dificultad para expresar de manera general la relación directa o inversa entre magnitudes, y su aproximación más cercana es la utilización de casos particulares. Es posible que este hecho esté asociado a la forma en que el texto guía indaga por las imágenes o preimagenes en un modelo funcional, la cual se hace generalmente de manera puntual y conociendo de manera explícita la gráfica o la ecuación. Por ejemplo, en la situación en que aparece involucrada la fórmula $v = \frac{d}{t}$, el 91.7% de los estudiantes realiza tratamientos sobre ésta que permiten determinar la relación de manera general o particular.

8. El porcentaje de éxito de las respuestas se ve fuertemente disminuido cuando están involucrados fenómenos de no congruencia. Esto podría estar relacionado con la forma en que el libro de texto hace la presentación del tema de función afín, en el cual tanto en los ejemplos como en los ejercicios se enfatiza en seguir un modelo que implícitamente conlleva unos pasos para llegar a la solución, pero no se hace hincapié en la identificación de las unidades significantes propias a cada registro para ponerlas en correspondencia con las de otros registros.

7.5 CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LAS HIPÓTESIS[35]

1. Confirmamos la hipótesis 1 que se refiere a la diversidad de tratamientos y conversiones que exhiben los estudiantes al solucionar las situaciones de variación propuestas, así mismo corroboramos que las producciones escritas muestran un bajo nivel de articulación; lo cual se evidencia en el análisis de las respuestas y en las conclusiones anotadas anteriormente.

2. De igual forma confirmamos la hipótesis 2, referida a la baja utilización del modelo funcional lo cual se evidencia a partir de dos elementos: por una parte, los procedimientos que exhiben los estudiantes para dar respuesta a los cuestionamientos y por otra el estudio realizado de los textos guía en donde se observa que la función afín

[35] Formuladas en la sección 3.3

se estudia como objeto en sí mismo, pero no como herramienta útil en la solución de problemas asociados a la variación, lo cual concuerda con la investigación de Ruiz (1993) en la que afirma que:

> El estudio de los fenómenos de variación y cambio no se incluye dentro del sistema de enseñanza, en su lugar se promueve la ejercitación de procedimientos algorítmicos sobre las nociones fragmentadas en las que se ha dividido la función (dominio, rango, gráfica, fórmula,...). "La potencia modelizadora que esta noción tuvo desde sus orígenes queda distorsionada en la actualidad" (p. 426)

3. Por otra parte, respecto a la hipótesis 2 referida al uso de los registros aritmético y algebraico, concluimos que los estudiantes no siempre representan mediante éstos y que es el contexto de la situación el que determina su elección. Esto se relaciona con los resultados de Hiebert y Carpenter (1992, p. 16) quienes afirman que "la situación o contexto influye en la cantidad de transferencia que realmente ocurre".

4. Confirmamos la hipótesis 3 referida a los elementos que se promueven en la presentación de los textos guía y que aparecen en las producciones escritas de los estudiantes, lo cual se evidencia en el análisis de las respuestas, en el estudio de los textos guía, así como en las conclusiones anotadas anteriormente.

7.6 CUESTIONES ABIERTAS

Consideramos que a pesar de haber incluido diversas variables en este estudio no hemos agotado las cuestiones relacionadas con el tema, a continuación mencionamos algunos aspectos sobre los que se debiera seguir indagando:

- Estudio de las unidades significantes propias a cada registro de representación en el campo de problemas de la función afín.
- Complementación de la caracterización de las producciones escritas de los estudiantes, mediante la aplicación de otros instrumentos tales como entrevistas, videos, observación directa, que podrían evidenciar las transformaciones que realizan, así como las articulaciones que son capaces de hacer y que no son explícitas en sus escritos.
- Estudio de situaciones de variación desde otros registros de representación derivados del uso de la tecnología.
- Estudio de transformaciones con situaciones de características diferentes a las propuestas en este estudio, por ejemplo, en donde el registro de partida no necesariamente sea el verbal, o se consideren contextos de variación diferentes a los propuestos.

- Estudio de las transformaciones que realizan estudiantes de semestres posteriores de ingeniería de la misma institución, en situaciones de variación de las mismas características que las propuestas.

7.7 RECOMENDACIONES

- Es necesario proponer a los estudiantes situaciones de variación de diferentes contextos, en los que se muestre la utilidad de la función como herramienta en la modelización.
- Es necesario incluir situaciones de dependencia que permitan articular diferentes registros de representación para que los estudiantes adquieran un pensamiento variacional adecuado que les permita alcanzar una mejor conceptualización de la función.

REFERENCIAS

Acosta y otros (2002). Informe de investigación no publicado. *Caracterización de los niveles de conceptualización de variación en los estudiantes de los primeros semestres de la Escuela Colombiana de Ingeniería*.

Aviles–Garay, E. (2001). *Using multiple coordinated representations in a technology intensive setting to teach linear functions at the colege level*. Tesis doctoral. Illinois: University of Illinois.

Carlson, M., et al. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA. 8(2), 121-156*

D'Amore, B. (2002). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la evolución.

Denzin y Lincoln, (2000). The discipline and practice of qualitative research. En Denzin & Lincoln (Eds.) *Handbook of Qualitative Research*. Sage publications, Inc.

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones. La articulación de dos registros. Antología en Educación Matemática. Cinvestav. IPN. México.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Duval, R. (2004). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Font, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. *Revista EMA. 6(2), 180-200*

García, Vázquez e Hinojosa (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Revista Ingenierías 7(24), 27-34*

García, Serrano y Espitia (2000). Hacia la noción de función como dependencia y patrones de la función lineal. Conciencias, Universidad Pedagógica Nacional.

García y otros (1995). Elementos para construir una didáctica de la función: avance de investigación. Universidad Pedagógica Nacional.

Goetz, J. y Lecompte M. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. Ediciones Morata. Madrid.

González, M. y Hernández, E. (año). Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas.

Guacaneme, E. (2003).Estudio de la variación conjunta en la identificación de funciones. Memorias Seminario matemática educativa: fundamentos de las matemáticas universitarias.

Guzmán, I (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Relime. 1(1), 5–21*

Hernández, R. y otros. (1991). Metodología de la investigación. McGraw Hill. México

Hiebert y Carpenter (1992). Aprendizaje y enseñanza con comprensión. Traducción hecha por Alfonso H. y Perry, P.

Hitt, F. (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Revista de Educación Matemática. 7(1), 63–75*

Hitt, F. (1997) Sistemas semióticos de representación. Avance y perspectiva. [on line] Hemeroteca virtual. http://www.hemerodigital.unam.mx/ANUIES/

Lacasta, E. (2000). Determinación de concepciones y funcionamientos del gráfico cartesiano de funciones: problemáticas de didáctica. XIV jornadas del seminario universitario de investigación en didáctica de las matemáticas.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares.* Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Peralta, J. (2002). Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal (on line)
www.mat.uson.mx/semana/memorias%20XIII/peralta%20garcia.pdf

Planchart, O. (2000). *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función*. Tesis doctoral. Cuernavaca: Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Romero, I. (2000). Representación y comprensión en pensamiento numérico. Memorias IV Simposio SEIEM. Huelva.

Ruiz, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Schoenfeld, (1999). Looking toward the 21st century : Challenges of educational theory and practice. Educational researcher.

Séptimo encuentro de redes del sur. (2003). [on line].
http://usuarios.lycos.es/redesdelsur/FORO/TEMA.htm

Stewart, Redlin y Watson. Precálculo. Editorial Thomson.

Stewart. Cálculo. Trascendentes tempranas. Cuarta edición. Editorial Thomson.

Streun, A. (2000). Representation in applying function. *International journal of mathematical education in science and technology. 31(5). 703 - 725*