

Titulo: ***CENTRO DE GRAVEDAD, CENTRO DE MASA Y CENTROIDE.***

Año escolar: Estática - Ingeniería

Autor: José Luis Albornoz Salazar

Ocupación: Ing Civil. Docente Universitario

País de residencia: Venezuela

Correo electrónico: martilloatomico@gmail.com

El autor de este trabajo solicita su valiosa colaboración en el sentido de enviar cualquier sugerencia y/o recomendación a la siguiente dirección :

martilloatomico@gmail.com

Igualmente puede enviar cualquier ejercicio o problema que considere pueda ser incluido en el mismo.

Si en sus horas de estudio o práctica se encuentra con un problema que no pueda resolver, envíelo a la anterior dirección y se le enviará resuelto a la suya.

CENTRO DE GRAVEDAD, CENTRO DE MASA Y CENTROIDE

El **centro de gravedad** es el punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas de gravedad que actúan sobre las distintas porciones materiales de un cuerpo, de tal forma que el momento respecto a cualquier punto de esta resultante aplicada en el centro de gravedad es el mismo que el producido por los pesos de todas las masas materiales que constituyen dicho cuerpo.

En otras palabras, el centro de gravedad de un cuerpo es el punto respecto al cual las fuerzas que la gravedad ejerce sobre los diferentes puntos materiales que constituyen el cuerpo producen un momento resultante nulo.

El centro de gravedad de un cuerpo no corresponde necesariamente a un punto material del cuerpo. Así, el c.g. de una esfera hueca está situado en el centro de la esfera que, obviamente, no pertenece al cuerpo

En física, además del centro de gravedad aparecen los conceptos de centro de masa y de centro geométrico o centroide que, aunque pueden coincidir con el centro de gravedad, son conceptualmente diferentes.

Centro de masa y centro de gravedad: El centro de masas coincide con el centro de gravedad sólo si el campo gravitatorio es uniforme; es decir, viene dado en todos los puntos del campo gravitatorio por un vector de magnitud y dirección constante.

Centro geométrico (Centroide) y centro de masa: El centro geométrico de un cuerpo material coincide con el centro de masa si el objeto es homogéneo (densidad uniforme) o cuando la distribución de materia en el sistema es simétrico.

En nuestros estudios de Ingeniería Civil se asume que el cuerpo se encuentra en “condición ideal”, es decir, el campo gravitatorio es

uniforme y el objeto motivo de estudio es homogéneo; luego el centro de gravedad, el centro de masa y el centroide coinciden en un mismo punto.

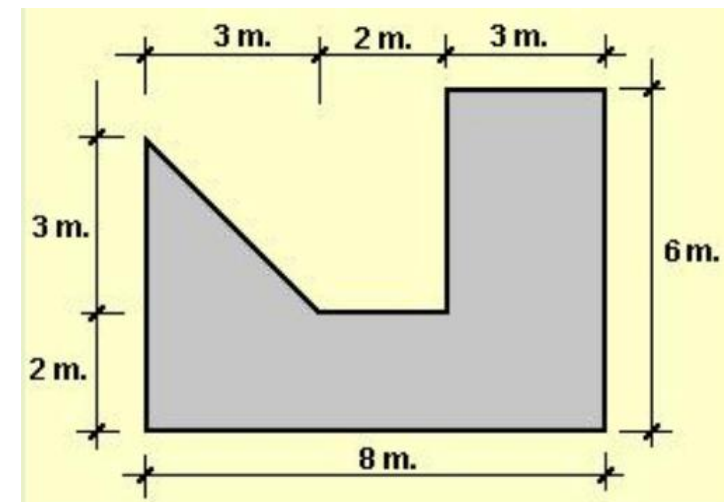
Los dos métodos más utilizados para el cálculo del CENTROIDE de una figura geométrica plana son el Método de las áreas y el Método de integración directa.

Si una figura geométrica posee un eje de simetría, el centroide de la figura coincide con este eje.

Para “fijar” las consideraciones anteriores procederemos a resolver algunos ejercicios.

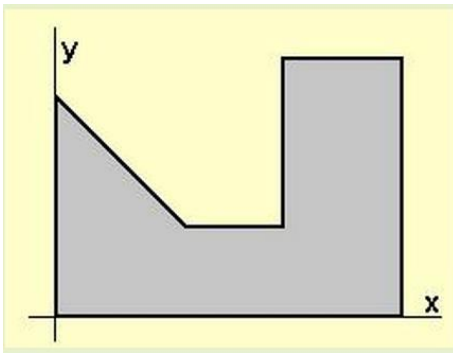
Método de las áreas :

Ejercicio 1 : Calcular la ubicación del Centroide de la siguiente figura geométrica.

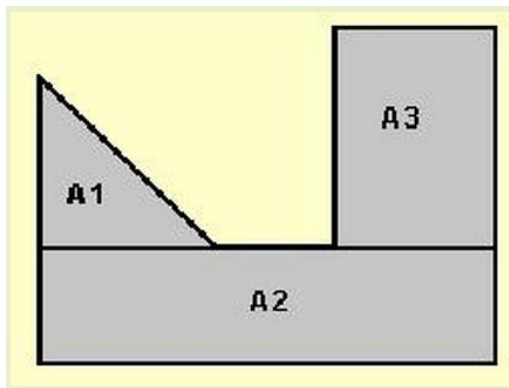


Solución:

Como primer paso se fija el sistema de coordenadas rectangulares que nos servirá de referencia:



Posteriormente dividimos la figura en áreas más simples de centroides conocidos.



Calculamos las áreas de las tres figuras conocidas:

Area A1 (Triángulo) : Base por altura entre dos.

$$A_1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(3)(3)}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$$

Area A2 (Rectángulo) : Base por altura.

$$A_2 = (8)(2) = 16$$

Area A3 (Rectángulo) : Base por altura.

$$A_3 = (3)(4) = 12$$

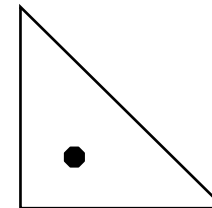
Los ejes centroidales de una figura plana vienen dados por las siguientes formulas :

$$X_{centroide} = \frac{A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 + A_3 \cdot X_3 + \dots + A_n \cdot X_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}$$

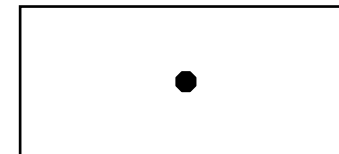
$$Y_{centroide} = \frac{A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2 + A_3 \cdot Y_3 + \dots + A_n \cdot Y_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}$$

Donde “Ai” es el área de la figura simple estudiada, “Xi” es la abscisa del centroide de dicha figura simple y “Yi” la ordenada del centroide de la misma figura simple.

Es bueno recordar que el centroide de un triángulo rectángulo está ubicado a un tercio de su base y a un tercio de su altura.

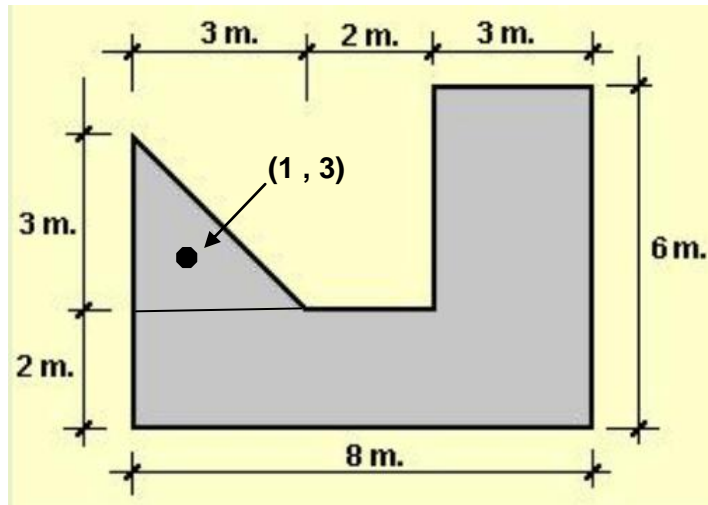


El centroide de un rectángulo está ubicado a un medio de su base y a un medio de su altura.



Luego, resulta más cómodo determinar los valores de “X” y “Y” del centroide de cada una de las figuras simples para incluirlas en la fórmula respectiva, tomando en cuenta el sistema de coordenadas de referencia.

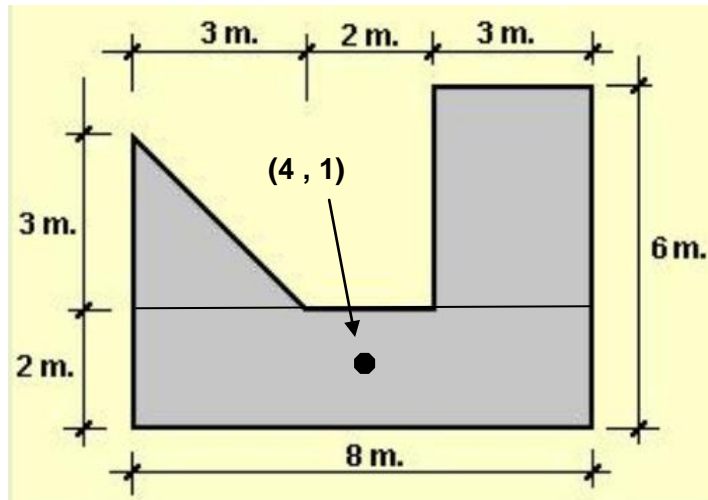
Estudiando la figura 1 (Triángulo) :



$$X_1 = 1$$

$$Y_1 = 3$$

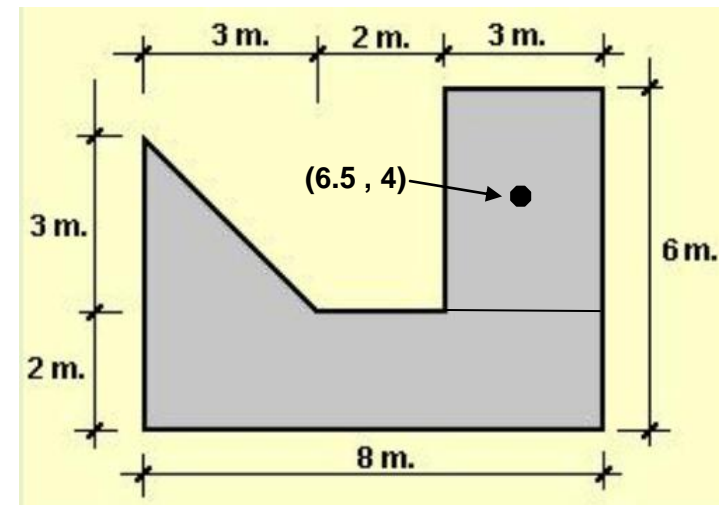
Estudiando la figura 2 (Rectángulo) :



$$X_2 = 4$$

$$Y_2 = 1$$

Estudiando la figura 3 (Rectángulo) :



$$X_3 = 6,5$$

$$Y_3 = 4$$

Con toda esta información el problema se limita a introducir estos valores en las dos fórmulas:

$$X_{centroide} = \frac{A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 + A_3 \cdot X_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$Y_{centroide} = \frac{A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2 + A_3 \cdot Y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

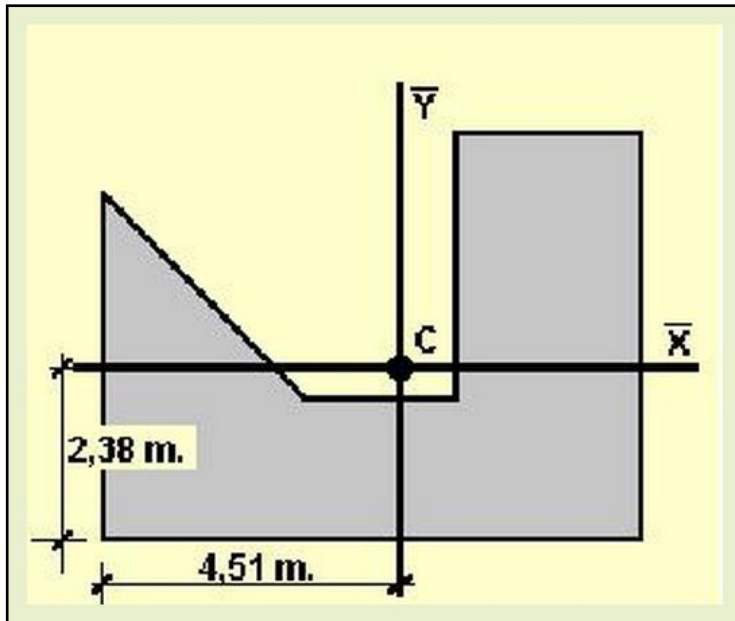
$$X_{centroide} = \frac{(4,5)(1) + (16)(4) + (12)(6,5)}{4,5 + 16 + 12}$$

$$= \frac{4,5 + 64 + 78}{32,5} = \frac{146,5}{32,5} = 4,51$$

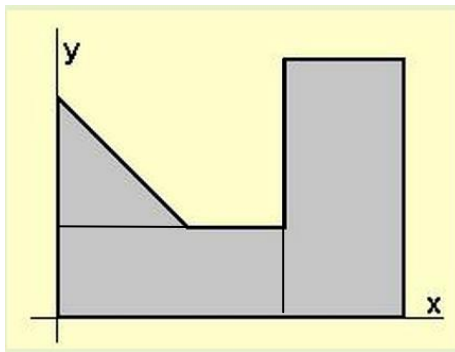
$$Y_{centroide} = \frac{(4,5)(3) + (16)(1) + (12)(4)}{4,5 + 16 + 12}$$

$$= \frac{13,5 + 16 + 48}{32,5} = \frac{77,5}{32,5} = 2,38$$

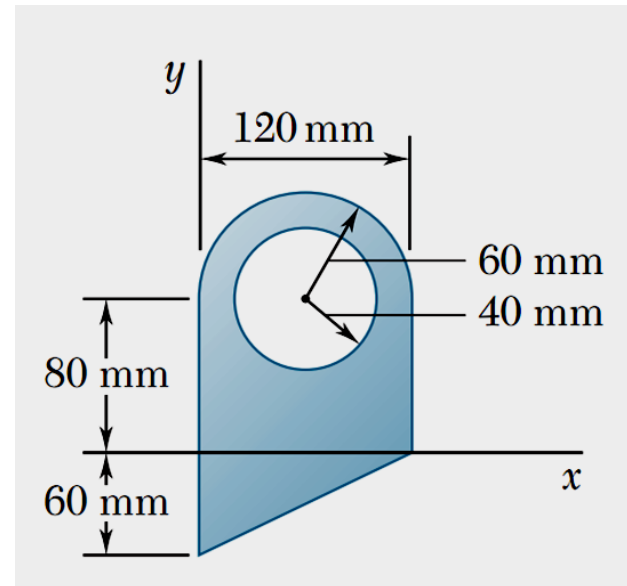
El Centroide de la figura completa estará ubicado en :



SUGERENCIA: Divida la figura como se muestra a continuación y aplique los pasos anteriores. El resultado debe ser el mismo.



Ejercicio 2 : Calcular la ubicación del Centroide de la siguiente figura geométrica.



Solución:

El área se obtiene con la suma de un rectángulo, un triángulo y un semicírculo y después se resta un círculo (se sobre entiende que la figura tiene un hueco en forma de círculo).

Area A1 (Rectángulo) : Base por altura.

$$A_1 = (120)(80) = 9.600 \text{ mm}^2$$

Area A2 (Triángulo) : Base por altura entre dos.

$$A_2 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(120)(60)}{2} = \frac{7200}{2} = 3.600 \text{ mm}^2$$

Area A3 (Semicírculo) :

$$A_3 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi (60)^2}{2} = 5.654,87 \text{ mm}^2$$

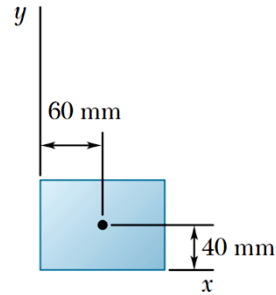
Area A4 (Círculo) :

$$A_4 = \pi r^2 = \pi (40)^2 = 5.026,55 \text{ mm}^2$$

$$\text{Area Total} = A_1 + A_2 + A_3 - A_4 = 13.828,32 \text{ mm}^2$$

Luego, resulta más cómodo determinar los valores de "X" y "Y" del centroide de cada una de las figuras simples para incluirlas en la fórmula respectiva, tomando en cuenta el sistema de coordenadas de referencia.

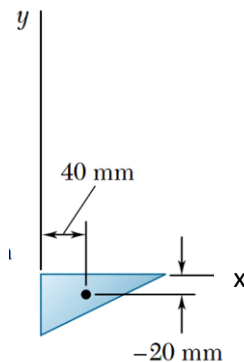
Estudiando la figura 1 (Rectángulo) :



$$X_1 = 60 \text{ mm}$$

$$Y_1 = 40 \text{ mm}$$

Estudiando la figura 2 (Triángulo) :

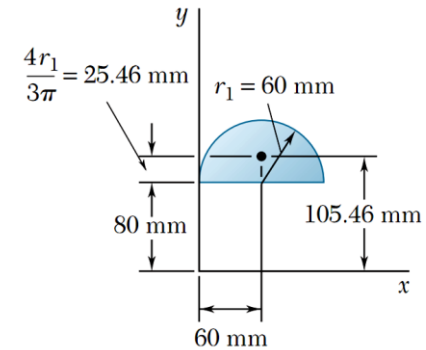


$$X_2 = 40 \text{ mm}$$

$$Y_2 = -20 \text{ mm}$$

Nótese que la coordenada "Y" del centroide del triángulo es negativa para el sistema de coordenadas rectangulares tomado como referencia.

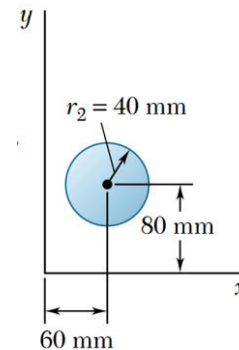
Estudiando la figura 3 (Semicirculo) :



$$X_3 = 60 \text{ mm}$$

$$Y_3 = 105,46 \text{ mm}$$

Estudiando la figura 4 (Circulo) :



$$X_4 = 60 \text{ mm}$$

$$Y_4 = 80 \text{ mm}$$

Con toda esta información el problema se limita a introducir estos valores en las dos fórmulas:

$$X_{\text{centroide}} = \frac{A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 + A_3 \cdot X_3 + \dots + A_n \cdot X_n}{\text{Area total de la figura}}$$

$$Y_{\text{centroide}} = \frac{A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2 + A_3 \cdot Y_3 + \dots + A_n \cdot Y_n}{\text{Area total de la figura}}$$

Debiendo tomar en cuenta que el valor del área del círculo (A_4) tendrá signo negativo y el valor de la coordenada "Y" del centroide del triángulo (Y_2) también tendrá signo negativo

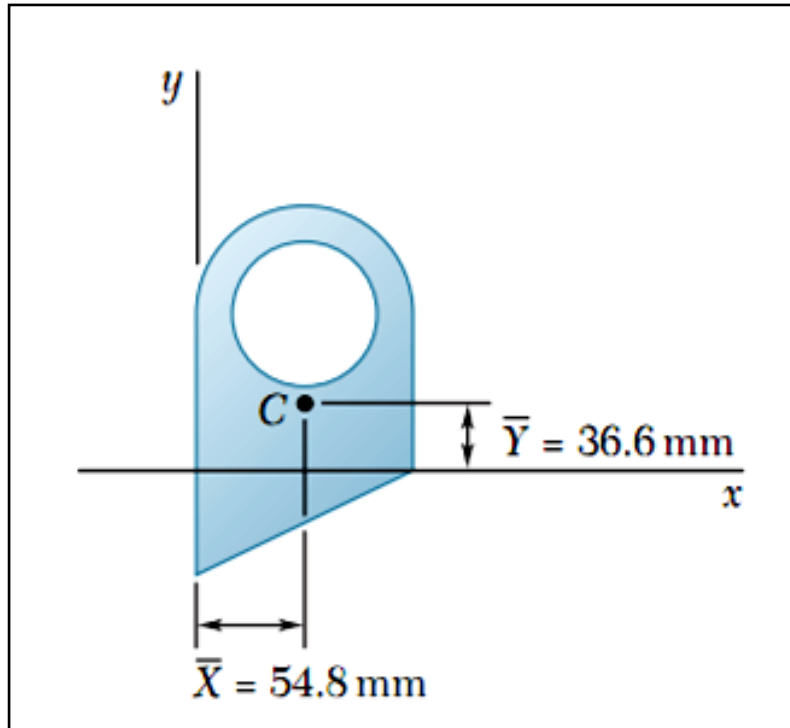
$$X_{cent} = \frac{(9600)(60) + (3600)(40) + (5654,87)(60) + (-5026,55)(60)}{13.828,32}$$

$$\underline{X_{centroide} = 54,8 \text{ mm}}$$

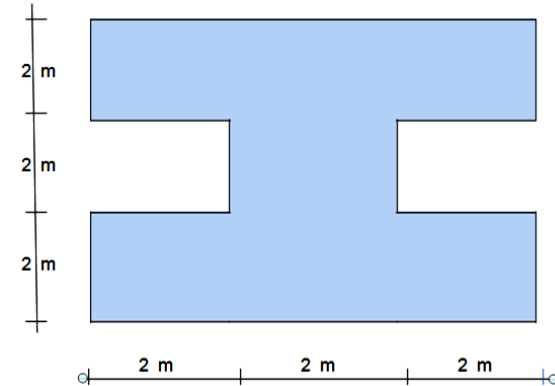
$$Y_{cent} = \frac{(9600)(40) + (3600)(-20) + (5654,87)(105,46) + (-5026,55)(80)}{13.828,32}$$

$$\underline{Y_{centroide} = 36,6 \text{ mm}}$$

El Centroide de la figura completa estará ubicado en :

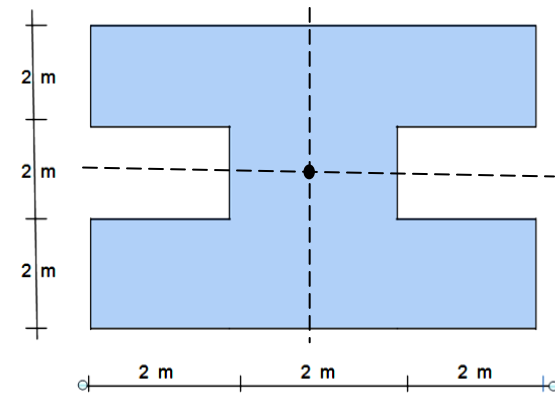


Ejercicio 3 : Calcular la ubicación del Centroide de la siguiente figura geométrica.



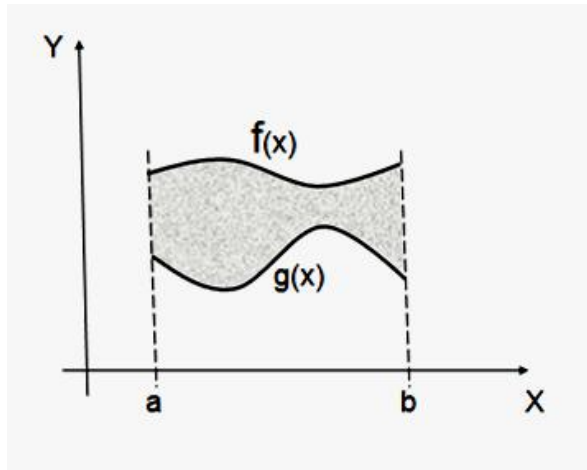
Como apuntamos al inicio de esta guía : Si una figura geométrica posee un eje de simetría, el centroide de la figura coincide con este eje.

Esta figura en particular posee un eje de simetría horizontal y un eje de simetría vertical, luego su centroide estará ubicado en el punto de intersección de sus dos ejes de simetría.



Se recomienda que utilice los procedimientos explicados en los dos ejercicios anteriores y verifique la ubicación del centroide de la figura.

Método de integración directa :



Para calcular el centroide de una figura plana que está limitada por arriba por la función "f(x)", por debajo por la función "g(x)", por la izquierda por la recta "X = a" y por la derecha por la recta "X = b"; se utilizan las siguientes fórmulas :

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]dx}{A}$$

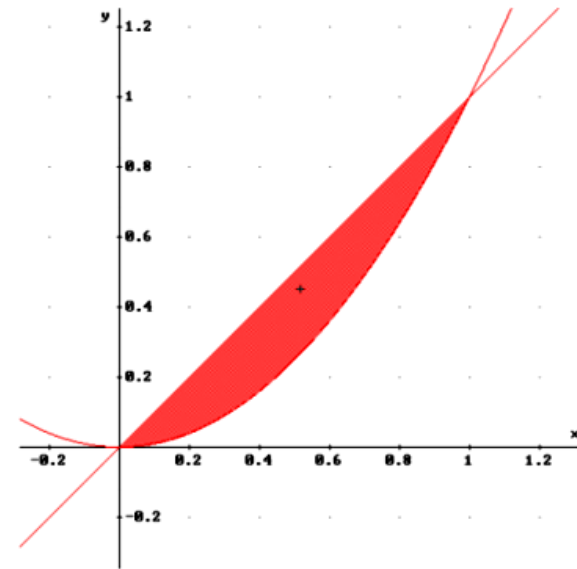
Donde "A" representa el área de la figura plana a la que se le está calculando el centroide.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Ejercicio 4 : Calcular la ubicación del Centroide de la región acotada por "Y = X²" y "Y = X"

Solución:

El primer paso consiste en graficar las dos funciones para determinar cuál queda ubicada arriba y cuál debajo. Igualmente se deben calcular los puntos de intersección de las dos funciones para conocer los índices superior e inferior de la integral definida.



Una vez hecha la gráfica podemos decir que :

$$\begin{aligned} f(x) &= "Y = X" \\ g(x) &= "Y = X^2" \\ a &= 0 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Calculando el área de la región acotada :

$$A = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Calculando las coordenadas del centroide :

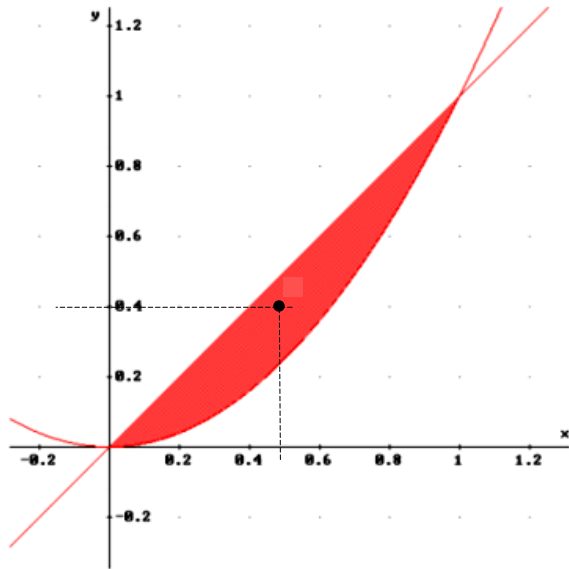
$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}{A} = \frac{\int_0^1 x(x - x^2)dx}{1/6} = 6 \int_0^1 (x^2 - x^3)dx$$

$$\bar{x} = 6 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right)_0^1 = 6 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 6 \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]dx}{A} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 [x^2 - x^4]dx}{1/6} =$$

$$\bar{y} = 3 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right)_0^1 = 3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = 3 \left(\frac{2}{15} \right) = \frac{2}{5}$$

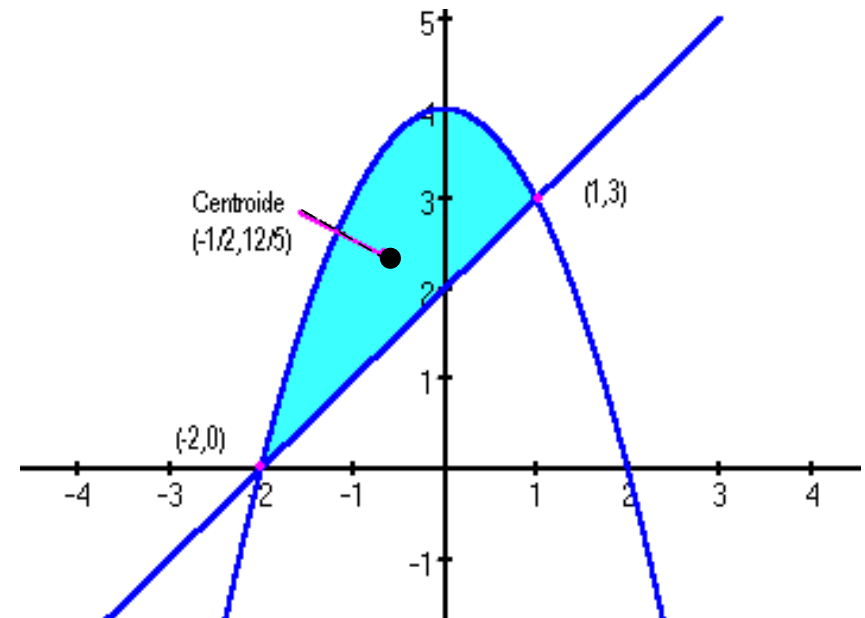
El centroide estará ubicado en el punto (0.5 , 0.4)



Ejercicio 5 : Calcular la ubicación del Centroide de la región acotada por "f (x)= 4-x²" y "g (x)= x+2" :

Solución:

El primer paso consiste en graficar las dos funciones para determinar cuál queda ubicada arriba y cuál debajo. Igualmente se deben calcular los puntos de intersección de las dos funciones para conocer los índices superior e inferior de la integral definida.



Estas 2 curvas se cortan en (-2,0) y en (1,3), por lo que el área es:

$$A = \int_{-2}^1 [(4 - x^2) - (x + 2)]dx$$

$$= \int_{-2}^1 (2 - x - x^2)dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}$$

El centroide tiene coordenadas:

$$\bar{x} = \frac{\int_{-2}^1 x[(4 - x^2) - (x + 2)]dx}{\frac{9}{2}}$$

$$\bar{x} = \frac{2}{9} \int_{-2}^1 (-x^3 - x^2 + 2x)dx = \frac{2}{9} \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-2}^1 = -\frac{1}{2}$$

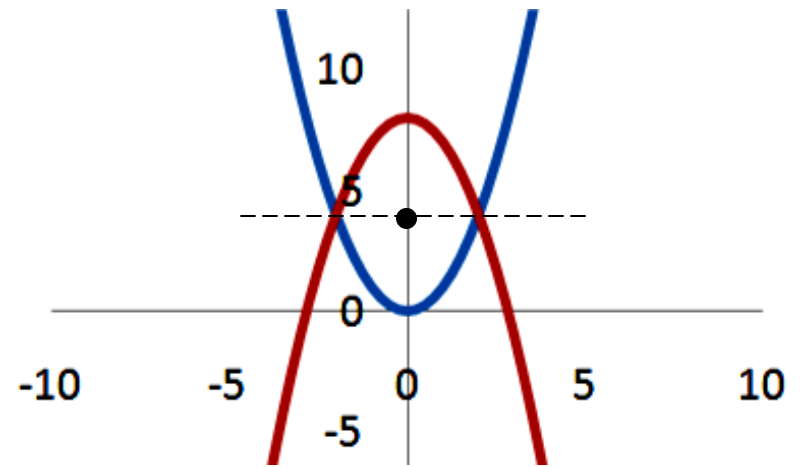
$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_{-2}^1 [(4 - x^2)^2 - (x + 2)^2]dx}{\frac{9}{2}}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{9} \int_{-2}^1 (x^4 - 9x^2 - 4x + 12)dx = \frac{1}{9} \left[\frac{x^5}{5} - 3x^3 - 2x^2 + 12x \right]_{-2}^1 = \frac{12}{5}$$

El centroide es: (-1/2, 12/5)

El centroide es: (-0.5 , 2.4)

Ejercicio 6 : Calcular la ubicación del Centroide de la región acotada por “Y = X²” y “Y = 8 – X²”



Como apuntamos al inicio de esta guía : Si una figura geométrica posee un eje de simetría, el centroide de la figura coincide con este eje.

Esta figura en particular posee un eje de simetría horizontal y un eje de simetría vertical, luego su centroide estará ubicado en el punto de intersección de sus dos ejes de simetría.

Se recomienda que utilice los procedimientos explicados en los dos ejercicios anteriores y verifique la ubicación del centroide de la figura.

$$\text{Area} = \frac{64}{3}$$

El centroide es: (0 , 4)