Titulo: ***COMO GRAFICAR UNA FUNCION RACIONAL***

Año escolar: 4to. año de bachillerato
Autor: José Luis Albornoz Salazar
Ocupación: Ing Civil. Docente Universitario
País de residencia: Venezuela
Correo electrónico: martilloatomico@gmail.com

El autor de este trabajo solicita su valiosa colaboración en el sentido de enviar cualquier sugerencia y/o recomendación a la siguiente dirección :

martilloatomico@gmail.com

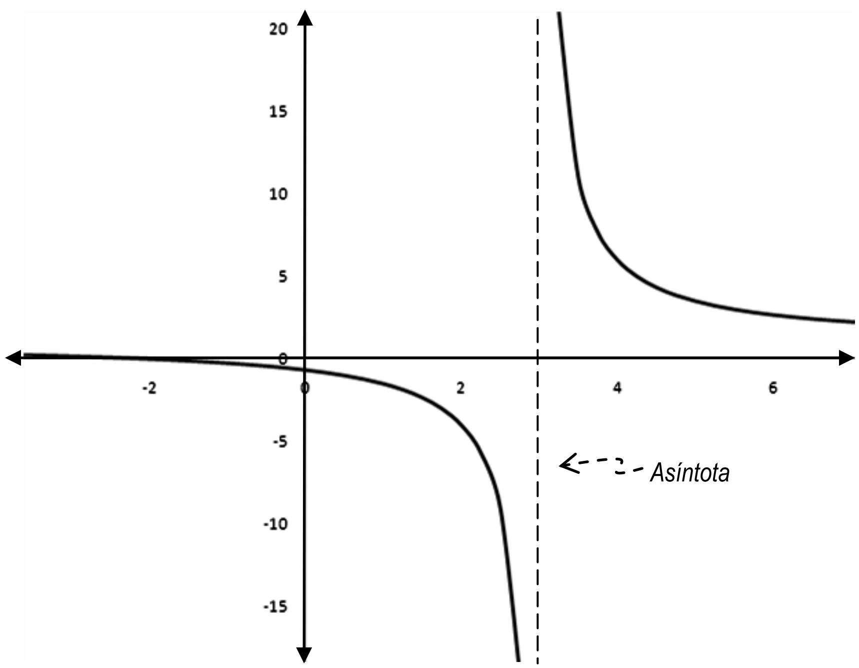
Igualmente puede enviar cualquier ejercicio o problema que considere pueda ser incluido en el mismo.

Si en sus horas de estudio o práctica se encuentra con un problema que no pueda resolver, envíelo a la anterior dirección y se le enviará resuelto a la suya.

COMO GRAFICAR UNA FUNCION RACIONAL

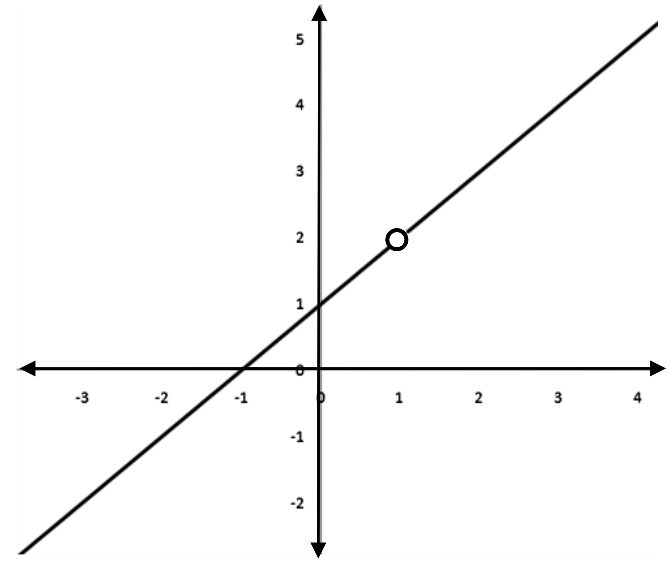
Graficar este tipo de función requiere mayor atención que las otras, sobre todo por la presencia de las "ASÍNTOTAS" y "HUECOS".

Una ***ASÍNTOTA*** *es una recta a la cual se aproxima la gráfica, al crecer indefinidamente "X" o "Y", pero nunca la toca.*



La figura muestra la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{X+2}{X-3}}$ *y podemos observar la presencia de una "asíntota vertical" en X = 3.*

Un ***HUECO*** *representa el valor que no se le puede asignar a la función por presentar una indeterminación al sustituir la variable "X en la misma. Recuerde que* $\frac{0}{0}$ *es una indeterminación.*



Así, en la gráfica de $\boldsymbol{f(x) = \frac{X^2-1}{X-1}}$ *podemos observar un "hueco" cuando X = 1.*

Tipos de asíntotas :

ASÍNTOTA HORIZONTAL :

Para saber si una función racional tiene asíntota horizontal solo se comparan los grados del numerador y denominador.

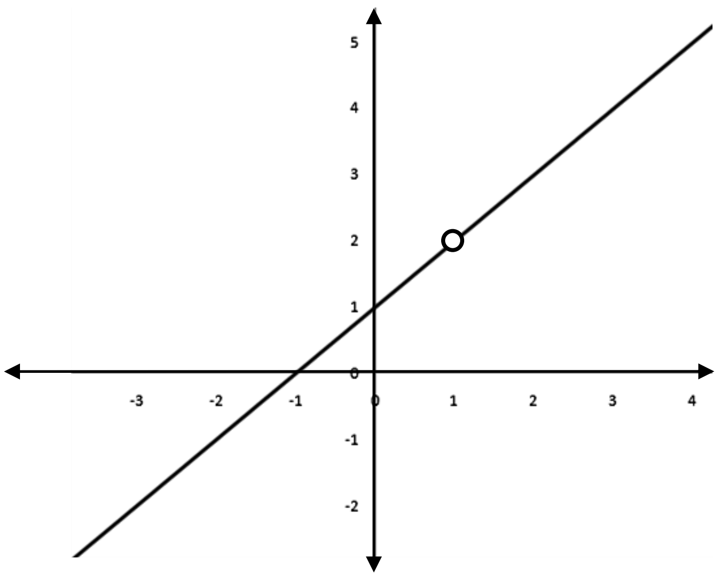
Si en la función $$f(x) = \frac{a\,X^n + \ldots\ldots + c}{b\,X^m + \ldots\ldots + d}$$

1) **n > m** *f(x) NO posee asíntota horizontal*
2) **n = m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es la recta* $y = \frac{a}{b}$
3) **n < m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es el eje X.*

Ejemplo del caso 1 : **n > m** *f(x) NO posee asíntota vertical.*

$$f(x) = \frac{X^2 - 1}{X - 1}$$

n = 2 ; m = 1

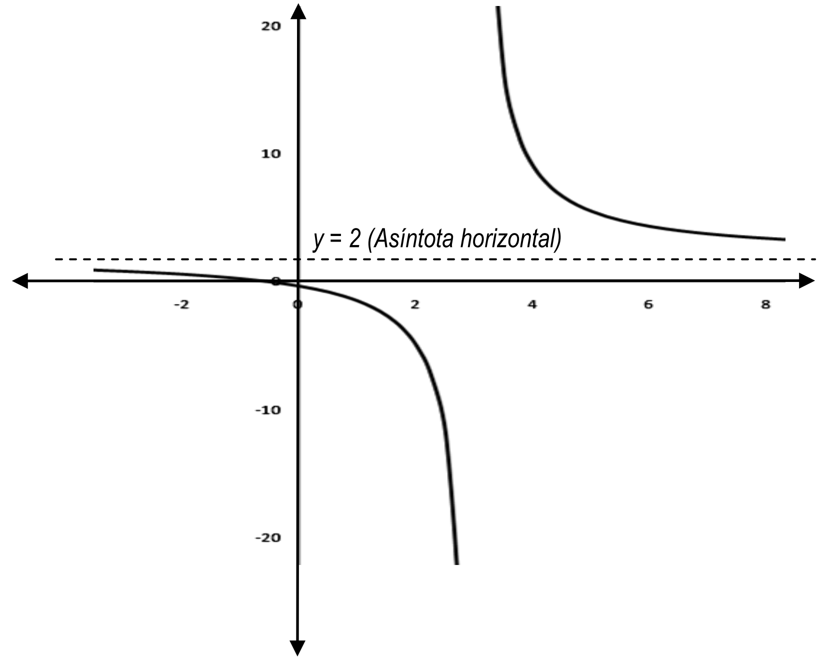


Ejemplo del caso 2 : **n = m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es la recta* $y = \frac{a}{b}$

$$f(x) = \frac{4X + 2}{2X - 6}$$

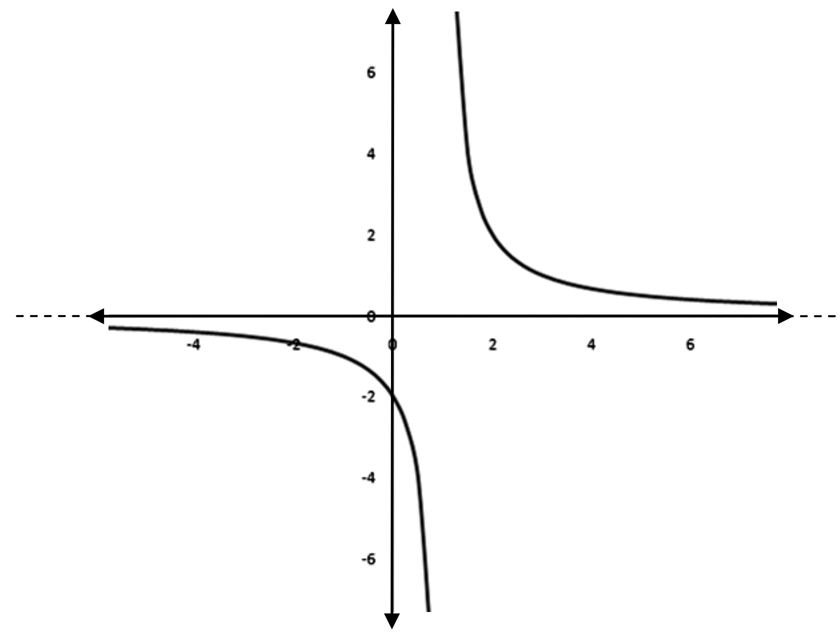
n = 1 ; m = 1

Como a = 4 y b = 2 la asíntota horizontal será la recta $y = \frac{4}{2} = 2$



Ejemplo del caso 3 : **n < m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es el eje X.*

$$f(x) = \frac{2}{X - 1} \quad ; \quad n = 0 \quad ; \quad m = 1$$

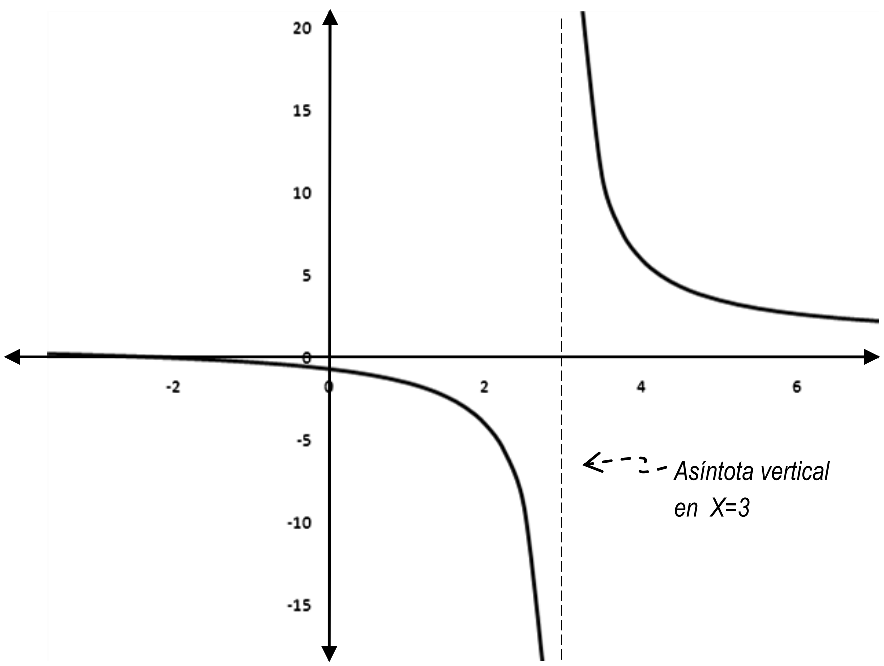


ASÍNTOTA VERTICAL :

Para encontrar una asíntota vertical se iguala el denominador a cero. Las raíces del polinomio que conforma el denominador de la función representarán los valores de X por donde pasa la asíntota vertical (Perpendicular al eje X).

Ejemplo 1 : $f(x) = \dfrac{X+2}{X-3}$

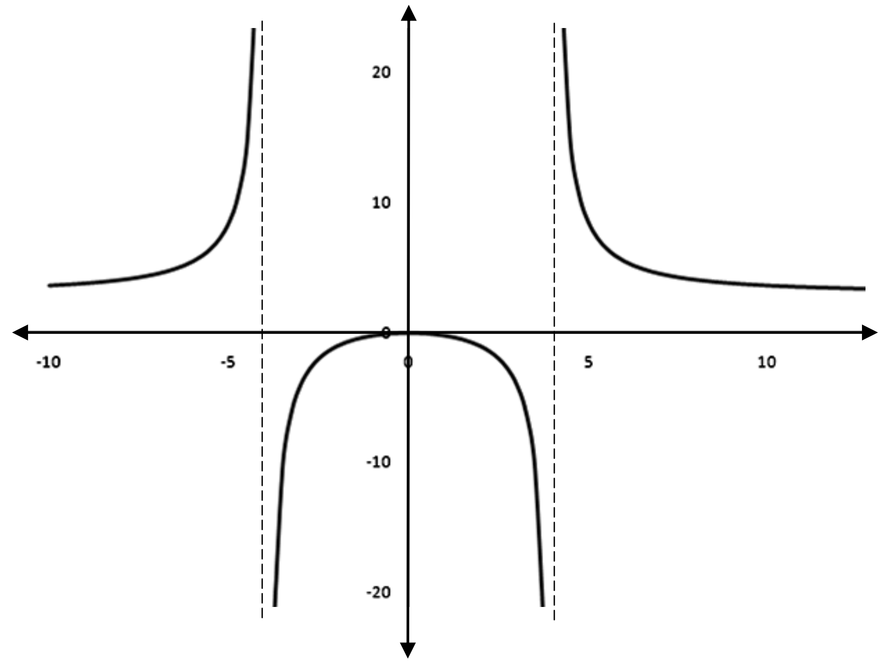
Cuando $X - 3 = 0$; $X = 3$; nos indica que por X=3 pasará una asíntota vertical (perpendicular al eje X) :



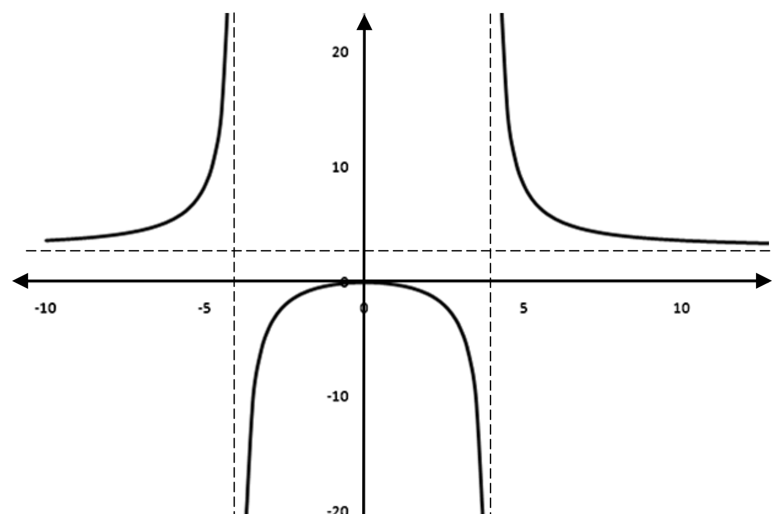
Una función puede tener más de una asíntota vertical, todo depende de las raíces que posee el denominador. Sin embargo, algunas veces, una de las raíces del denominado indica la presencia de un "hueco" de la función (este caso será explicado más adelante con un ejemplo).

Ejemplo 2 : $f(x) = \dfrac{3X^2+1}{X^2-16}$

Como el denominador posee dos raíces : X = 4 y X = - 4, nos indica la presencia de dos asíntotas verticales (una en cada raíz).



Una función puede poseer asíntotas horizontales y verticales a la vez.



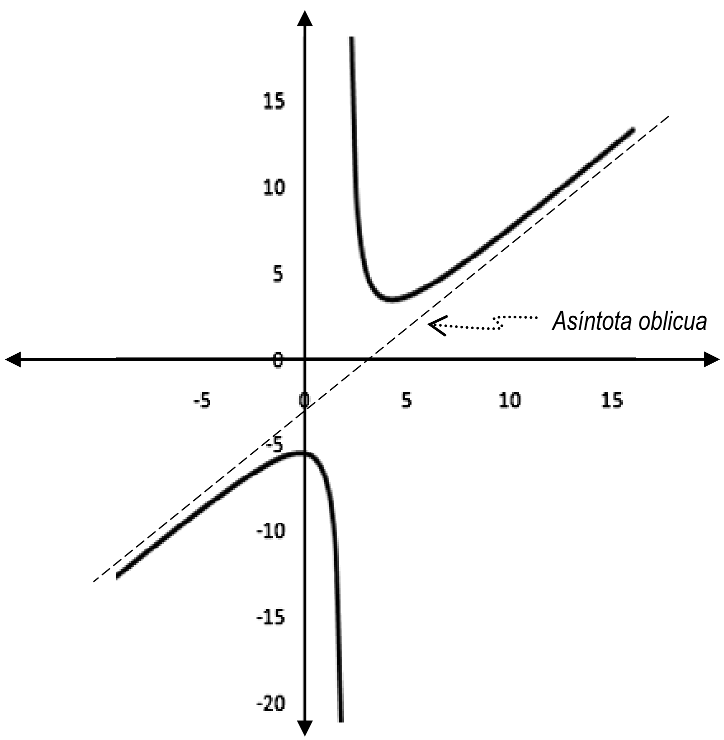
ASÍNTOTA OBLICUA :

La asíntota oblicua es una asíntota que no es horizontal ni vertical.

¿Cómo identificar una asíntota oblicua en una función?

Si en una función el grado del numerador es una unidad mayor que el denominador, la función tiene asíntota oblicua.

Ejemplo : $$f(x) = \frac{X^2 - 5X+11}{X-2}$$



Una función puede poseer asíntotas oblicuas y verticales a la vez.

Observe bien la gráfica anterior y notará que además de la asíntota oblicua señalada también hay una asíntota vertical en X = 2. Aspecto que resulta lógico ya que el denominador de la función es X - 2

Tomando en cuenta los aspectos señalados anteriormente se sugieren los siguientes pasos para graficar una función racional :

1) *Identificar y graficar en "líneas punteadas" las posibles asíntotas que pueda tener la función.*
2) *Determinar si existen cortes con el eje "X" (Esto se obtiene igualando el numerador a cero).*
3) *Determinar si existen cortes con el eje "Y" (Esto se obtiene haciendo "X=0" en la función). En otras palabras calculando f(0).*
4) *Calcular tres o cuatro puntos de la función en cada uno de los intervalos en que quedó dividido el sistema de coordenadas una vez graficadas las asíntotas verticales.*

Con la finalidad de fijar bien los pasos indicados anteriormente se procederá a resolver varios ejercicios de menor a mayor grado de dificultad.

Ejercicio 1 : *Graficar la función* $f(x) = \frac{X+2}{X-3}$

Primero : ***Identificar y graficar en "líneas punteadas" las posibles asíntotas que pueda tener la función.***

ASÍNTOTA HORIZONTAL :

Para saber si una función racional tiene asíntota horizontal solo se comparan los grados del numerador y denominador.

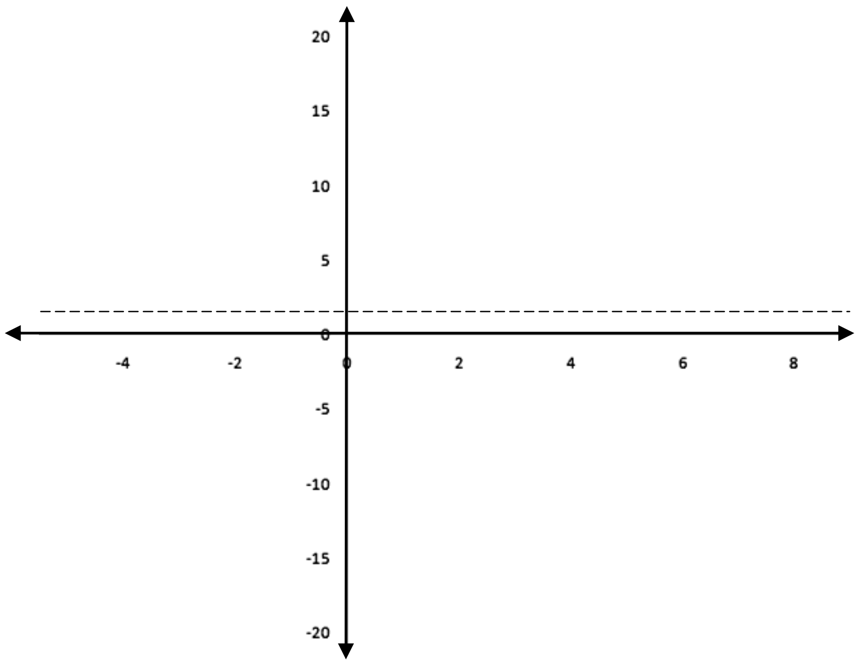
Si en la función $$f(x) = \frac{a\,X^n + ...+ c}{b\,X^m + ...+ d}$$

1) **n > m** f(x) NO posee asíntota horizontal

2) **n = m** f(x) SI posee asíntota horizontal y es la recta $y = \frac{a}{b}$

3) **n < m** f(x) SI posee asíntota horizontal y es el eje X.

Esta función cumple con el caso 2, luego la **asíntota horizontal** *es la recta* ***"Y = 1"*** $(Y = \frac{1}{1})$

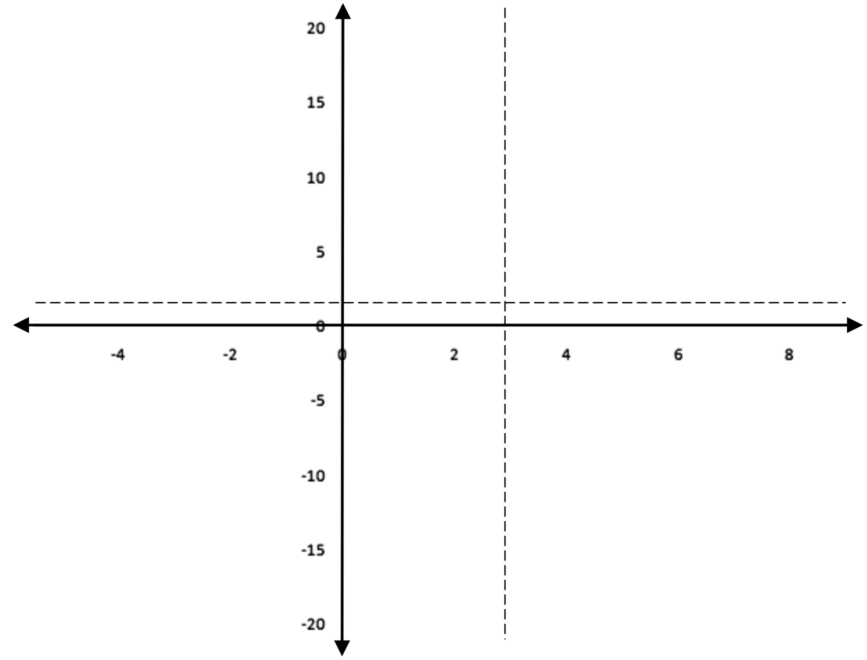


ASÍNTOTA VERTICAL :

Para encontrar una asíntota vertical se iguala el denominador a cero. Las raíces del polinomio que conforma el denominador de la función representarán los valores de X por donde pasa la asíntota vertical (Perpendicular al eje X).

Cuando $X - 3 = 0 \quad ; \quad X = 3$

Esto nos indica que por ***"X = 3"*** *pasará una asíntota vertical (perpendicular al eje X) :*



ASÍNTOTA OBLICUA :

Si en una función el grado del numerador es una unidad mayor que el denominador, la función tiene asíntota oblicua.

Como en este caso ambos grados son iguales no hay asíntota oblicua.

***Segundo :* Determinar si existen cortes con el eje "X" (Esto se obtiene igualando el numerador a cero).**

$X + 2 = 0 \quad ; \quad X = -\ 2$

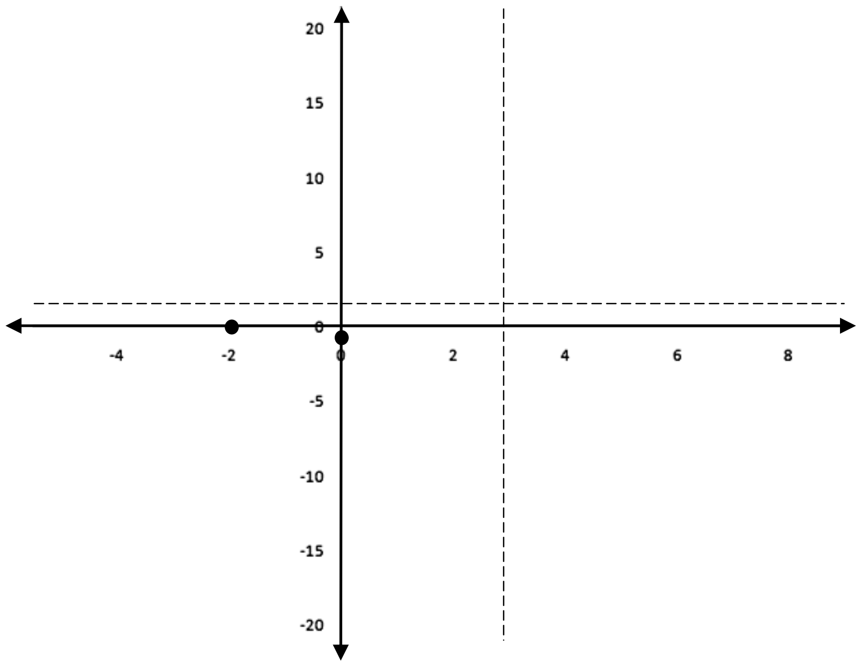
Esto nos indica que la función corta al eje X en el punto ***(– 2,0)***

***Tercero :* Determinar si existen cortes con el eje "Y" (Esto se obtiene haciendo "X=0" en la función). En otras palabras calculando f(0).**

$f(x) = \frac{X+2}{X-3}$; $f(0) = \frac{0+2}{0-3}$; $f(0) = \frac{2}{-3}$ = -0,67

*Esto nos indica que la función corta al eje Y en el punto **(0 , – 0.67)***

Graficando estos "puntos de corte" en el plano se nos va facilitando la visualización de la futura gráfica :



***<u>Cuarto :</u>* Calcular tres o cuatro puntos de la función en cada uno de los intervalos en que quedó dividido el sistema de coordenadas una vez graficadas las asíntotas verticales.**

Notamos que el eje X quedó dividido en dos intervalos, uno a la izquierda y otro a la derecha de la asíntota vertical en X = 3.

En el intervalo de la izquierda ya están graficados dos puntos (los cortes con los ejes), luego sería necesario graficar uno o dos puntos más.

<u>Para X = 1</u>

$f(x) = \frac{X+2}{X-3}$; $f(1) = \frac{1+2}{1-3}$; $f(1) = \frac{3}{-2}$ = -1,5

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(1 , -1.5)***

<u>Para X = 2</u>

$f(x) = \frac{X+2}{X-3}$; $f(2) = \frac{2+2}{2-3}$; $f(2) = \frac{4}{-1}$ = -4

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(2 , -4)***

Dando valores a la derecha de la asíntota vertical :

<u>Para X = 4</u>

$f(x) = \frac{X+2}{X-3}$; $f(4) = \frac{4+2}{4-3}$; $f(4) = \frac{6}{1}$ = 6

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(4,6)***

<u>Para X = 5</u>

$f(x) = \frac{X+2}{X-3}$; $f(5) = \frac{5+2}{5-3}$; $f(5) = \frac{7}{2}$ = 3,5

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(5 , 3.5)***

<u>Para X = 6</u>

$f(x) = \frac{X+2}{X-3}$; $f(6) = \frac{6+2}{6-3}$; $f(6) = \frac{8}{3}$ = 2,67

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(6 , 2.67)***

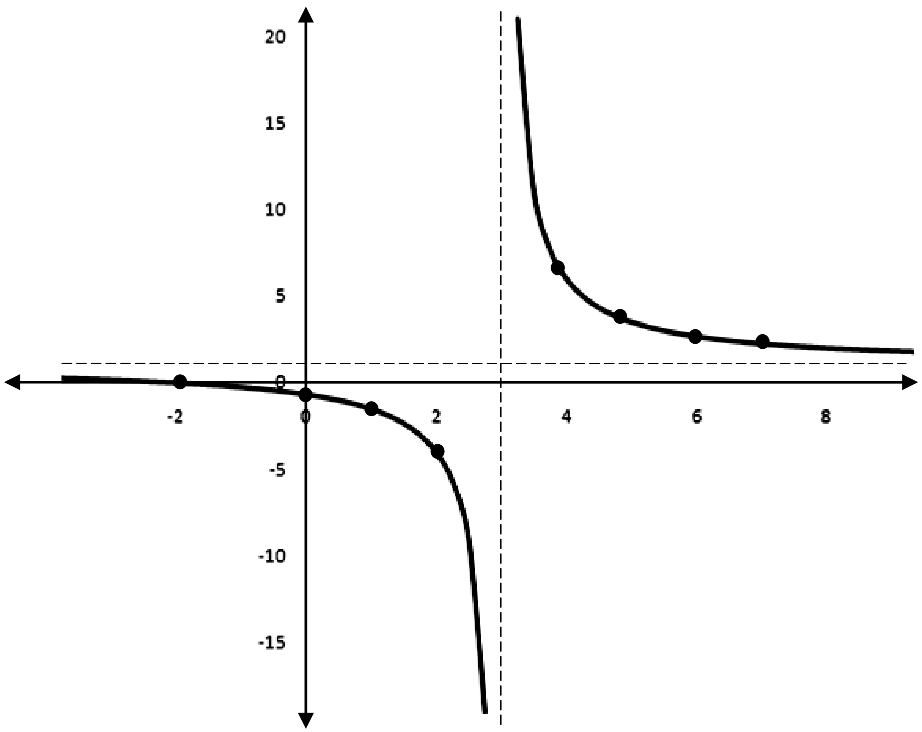
<u>Para X = 7</u>

$f(x) = \frac{X+2}{X-3}$; $f(7) = \frac{7+2}{7-3}$; $f(7) = \frac{9}{4}$ = 2,25

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(7 , 2.25)***

Todos estos puntos se grafican sobre el mismo sistema de coordenadas

Una vez graficados los puntos y recordando el concepto de asíntota, la gráfica quedará expresada así :



X	-2	0	1	2	4	5	6	7
Y	0	-0,67	-1,5	-4	6	3,5	2,67	2,25

Este ejercicio está explicado de manera excelente y "paso a paso" en el video 2 de PROPIEDADES Y REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES RACIONALES que podrás ver gratuitamente en la página web :

www.lamatematicadefidel.com

Ejercicio 2 : *Graficar la función* $f(x) = \frac{X-1}{2X+3}$

Primero : Identificar y graficar en "líneas punteadas" las posibles asíntotas que pueda tener la función.

ASÍNTOTA HORIZONTAL :

Para saber si una función racional tiene asíntota horizontal solo se comparan los grados del numerador y denominador.

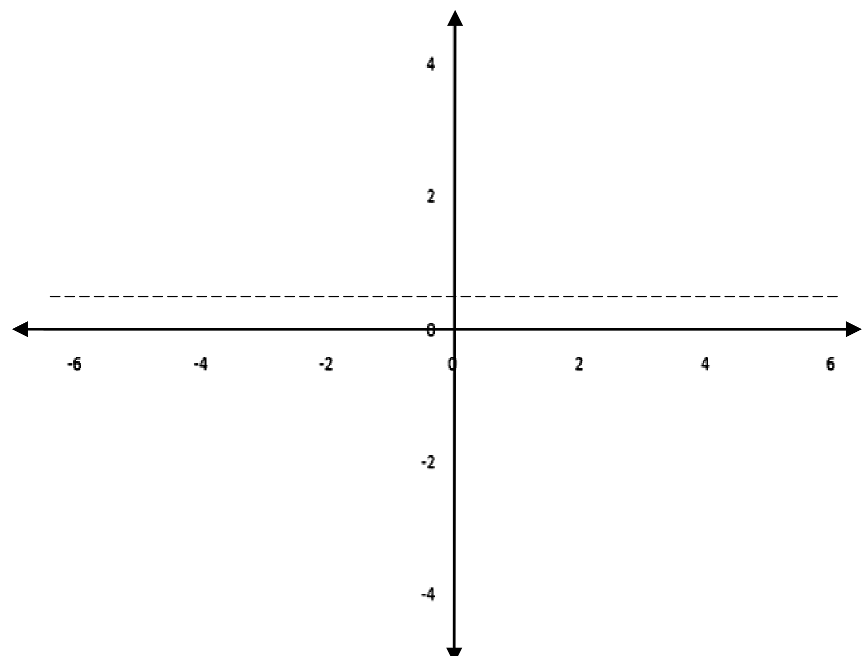
Si en la función $f(x) = \frac{a\,X^n + \ldots + c}{b\,X^m + \ldots + d}$

1) **n > m** *f(x) NO posee asíntota horizontal*

2) **n = m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es la recta* $y = \frac{a}{b}$

3) **n < m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es el eje X.*

Esta función cumple con el caso 2, luego la **asíntota horizontal** *es la recta* ***Y =*** $\frac{1}{2}$ ***= 0,5***

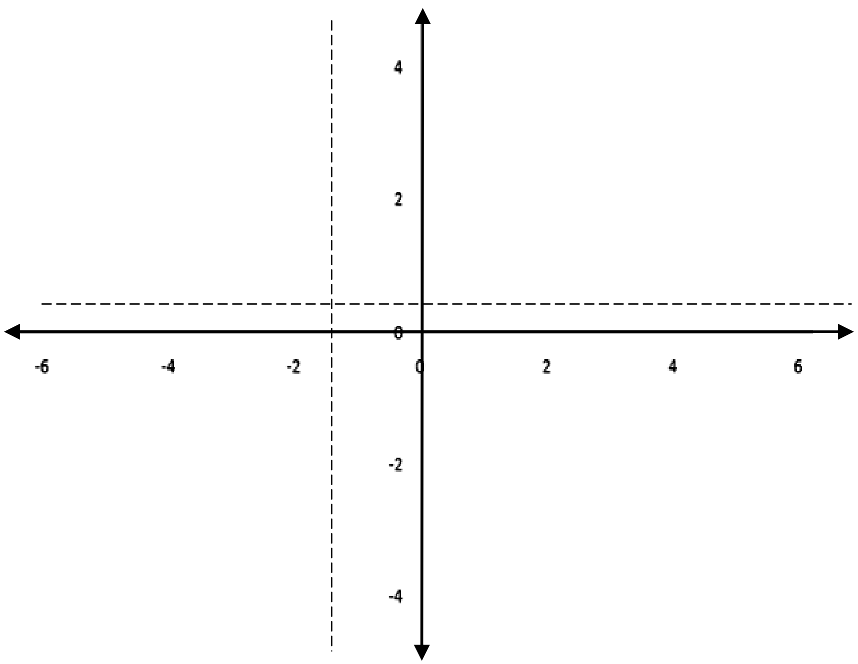


ASÍNTOTA VERTICAL :

Para encontrar una asíntota vertical se iguala el denominador a cero. Las raíces del polinomio que conforma el denominador de la función representarán los valores de X por donde pasa la asíntota vertical (Perpendicular al eje X).

Cuando $2X + 3 = 0$; $2X = -3$; $Y = \frac{-3}{2} = -1{,}5$

Esto nos indica que por ***"X = -1,5"*** *pasará una asíntota vertical (perpendicular al eje X) :*



ASÍNTOTA OBLICUA :

Si en una función el grado del numerador es una unidad mayor que el denominador, la función tiene asíntota oblicua.

Como en este caso ambos grados son iguales no hay asíntota oblicua.

***Segundo :* Determinar si existen cortes con el eje "X" (Esto se obtiene igualando el numerador a cero).**

$X - 1 = 0$; $X = 1$

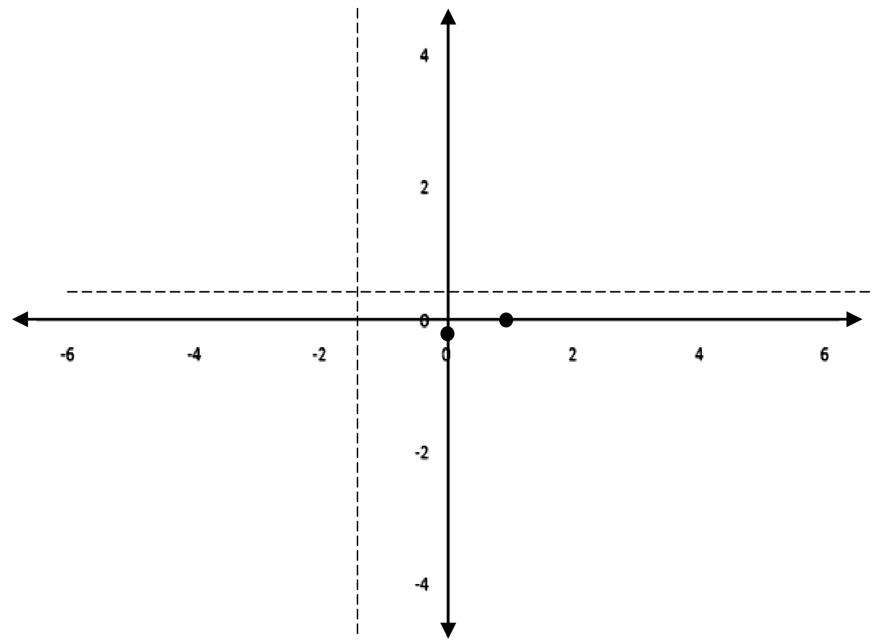
Esto nos indica que la función corta al eje X en el punto ***(1,0)***

***Tercero :* Determinar si existen cortes con el eje "Y" (Esto se obtiene haciendo "X=0" en la función). En otras palabras calculando f(0).**

$f(x) = \frac{X-1}{2X+3}$; $f(0) = \frac{0-1}{2(0)+3}$; $f(0) = \frac{-1}{3}$ = -0,33

Esto nos indica que la función corta al eje Y en el punto ***(0 , – 0.33)***

Graficando estos "puntos de corte" en el plano se nos va facilitando la visualización de la futura gráfica :



***Cuarto :* Calcular tres o cuatro puntos de la función en cada uno de los intervalos en que quedó dividido el sistema de coordenadas una vez graficadas las asíntotas verticales.**

Notamos que el eje X quedó dividido en dos intervalos, uno a la izquierda y otro a la derecha de la asíntota vertical en X = -1,5.

En el intervalo de la derecha ya están graficados dos puntos (los cortes con los ejes), luego sería necesario graficar uno o dos puntos más.

Para X = -1

$f(x) = \frac{X-1}{2X+3}$; $f(-1) = \frac{-1-1}{2(-1)+3}$; $f(-1) = \frac{-2}{1}$ = -2

Esto nos indica que la función "pasa" por el punto ***(-1 , -2)***

Para X = 2

$f(x) = \frac{X-1}{2X+3}$; $f(2) = \frac{2-1}{2(2)+3}$; $f(2) = \frac{1}{7}$ = 0,14

Esto nos indica que la función "pasa" por el punto ***(2 , 0.14)***

Dando valores a la izquierda de la asíntota vertical :

Para X = -2

$f(-2) = \frac{-2-1}{2(-2)+3}$; $f(-2) = \frac{-3}{-1}$ = 3

Esto nos indica que la función "pasa" por el punto ***(-2,3)***

Para X = -3

$f(-3) = \frac{-3-1}{2(-3)+3}$; $f(-3) = \frac{-4}{-3}$ = 1,33

Esto nos indica que la función "pasa" por el punto ***(-3 , 1.33)***

Para X = -4

$f(-4) = \frac{-4-1}{2(-4)+3}$; $f(-4) = \frac{-5}{-5}$ = 1

Esto nos indica que la función "pasa" por el punto ***(-4 , 1)***

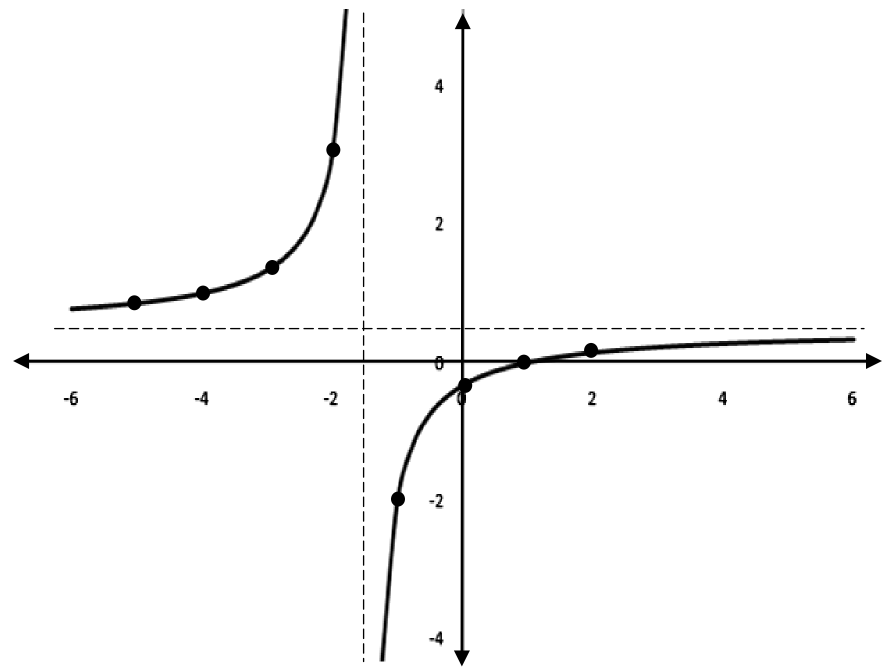
Para X = -5

$f(-5) = \frac{-5-1}{2(-5)+3}$; $f(-5) = \frac{-6}{-7}$ = 0,86

Esto nos indica que la función "pasa" por el punto ***(-5 , 0.86)***

Todos estos puntos se grafican sobre el mismo sistema de coordenadas.

Una vez graficados los puntos y recordando el concepto de asíntota, la gráfica quedará expresada así :



X	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
Y	0,86	1	1,33	3	-2	-0,33	0	0,14

Este ejercicio está explicado de manera excelente y "paso a paso" en el video 3 de PROPIEDADES Y REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES RACIONALES que podrás ver gratuitamente en la página web :

www.lamatematicadefidel.com

Ejercicio 3 : *Graficar la función* $f(x) = \frac{X^2 - 1}{X - 1}$

Cuando observe que una función racional presenta un polinomio igual o mayor de segundo grado (en el numerador o en el denominador) es recomendable efectuar su factorización.

Esto nos permitirá visualizar si existen raíces comunes en el numerador y denominador.

Si existe alguna raíz o raíces comunes esto nos indicará que existe uno o varios puntos donde la función posee una indeterminación del tipo "cero entre cero" ($\frac{0}{0}$). Esta raíz representará la presencia de un "hueco" y no de asíntotas.

En la función que queremos graficar observamos que el numerador es un polinomio de segundo grado. Al factorizarlo (diferencia de cuadrados) obtendremos :

$$X^2 - 1 = (X + 1).(X - 1)$$

Luego la función quedará expresada como :

$$f(x) = \frac{(X+1).(X-1)}{X-1}$$

El factor "X – 1" se encuentra tanto en el numerador como en el denominador. Cuando este factor se "haga" igual a cero es evidente que se generará una indeterminación del tipo cero sobre cero.

Para que $X - 1 = 0$; $X = 1$; entonces $X = 1$ es una raíz común del numerador y denominador.

Si tomamos en cuenta que se puede suprimir el factor (X – 1) tanto en el numerador como en el denominador notaremos que surge una función equivalente a la estudiada :

$$f(x) = \frac{(X+1).\cancel{(X-1)}}{\cancel{(X-1)}} = X + 1$$

El hecho de factorizar la función nos facilita el procedimiento para graficarla, ya que la función equivalente obtenida es de menor grado y es más fácil calcular sus puntos.

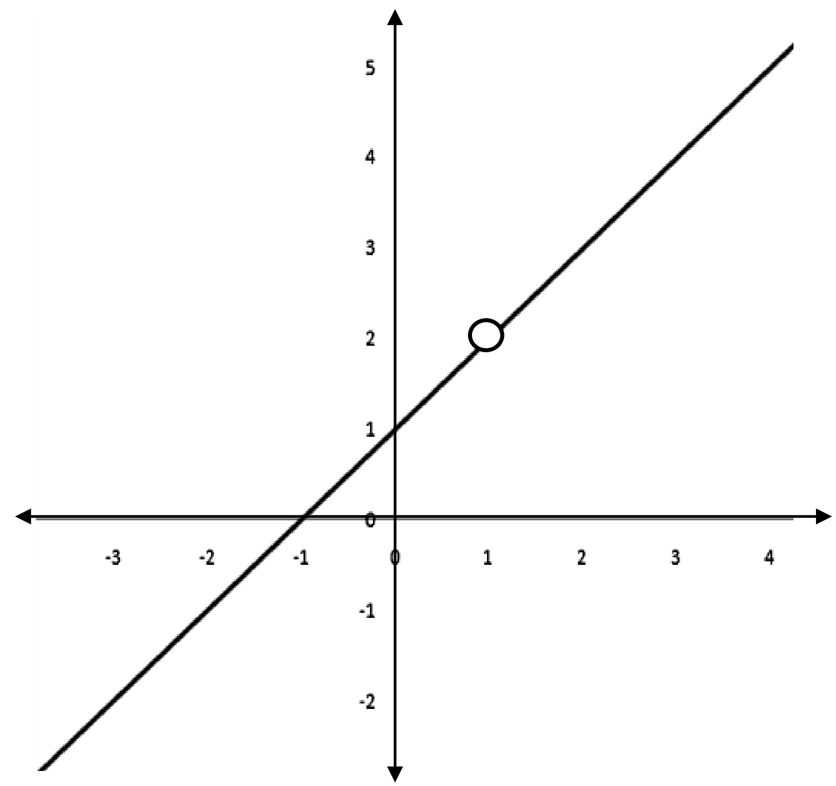
Sin embargo, NO SE DEBE OLVIDAR que se debe graficar el "hueco" que generará la raíz que es común al numerador y el denominador.

En este ejercicio ese valor está representado por "X = 1". Introduciendo este valor en la función equivalente obtendré la ubicación del "hueco".

$$f(x) = X + 1 \quad ; \quad f(1) = 1 + 1 = 2$$

Esto nos indica que la función tiene un "hueco" en ***(1 , 2)***

Ahora grafico la función equivalente $f(x) = X + 1$ *e indico la presencia del "hueco".*



Ejercicio 4 : *Graficar la función* $f(x) = \dfrac{X^2 + 3x+2}{X^2 - 2X-3}$

Cuando observe que una función racional presenta un polinomio igual o mayor de segundo grado (en el numerador o en el denominador) es recomendable efectuar su factorización.

Esto nos permitirá visualizar si existen raíces comunes en el numerador y denominador.

Si existe alguna raíz o raíces comunes esto nos indicará que existe uno o varios puntos donde la función posee una indeterminación del tipo "cero entre cero" ($\frac{0}{0}$). Esta raíz representará la presencia de un "hueco" y no de asíntotas.

En la función que queremos graficar observamos que tanto el numerador como el denominador son polinomios de segundo grado. Al factorizarlos obtendremos :

$$f(x) = \frac{X^2 + 3x+2}{X^2 - 2X-3} \quad ; \quad f(x) = \frac{(X+2)(X+1)}{(X-3)(X+1)}$$

El factor "X + 1" se encuentra tanto en el numerador como en el denominador. Cuando este factor se "haga" igual a cero es evidente que se generará una indeterminación del tipo cero sobre cero.

Para que X + 1 = 0 ; X = –1 ; entonces X = –1 es una raíz común del numerador y denominador.

Si tomamos en cuenta que se puede suprimir el factor (X + 1) tanto en el numerador como en el denominador notaremos que surge una función equivalente a la estudiada :

$$f(x) = \frac{(X+2)\cancel{(X+1)}}{(X-3)\cancel{(X+1)}} \quad ; \quad f(x) = \frac{(X+2)}{(X-3)}$$

El hecho de factorizar la función nos facilita el procedimiento para graficarla, ya que la función equivalente obtenida es de menor grado y es más fácil calcular sus puntos.

Sin embargo, NO SE DEBE OLVIDAR que se debe graficar el "hueco" que generará la raíz que es común al numerador y el denominador.

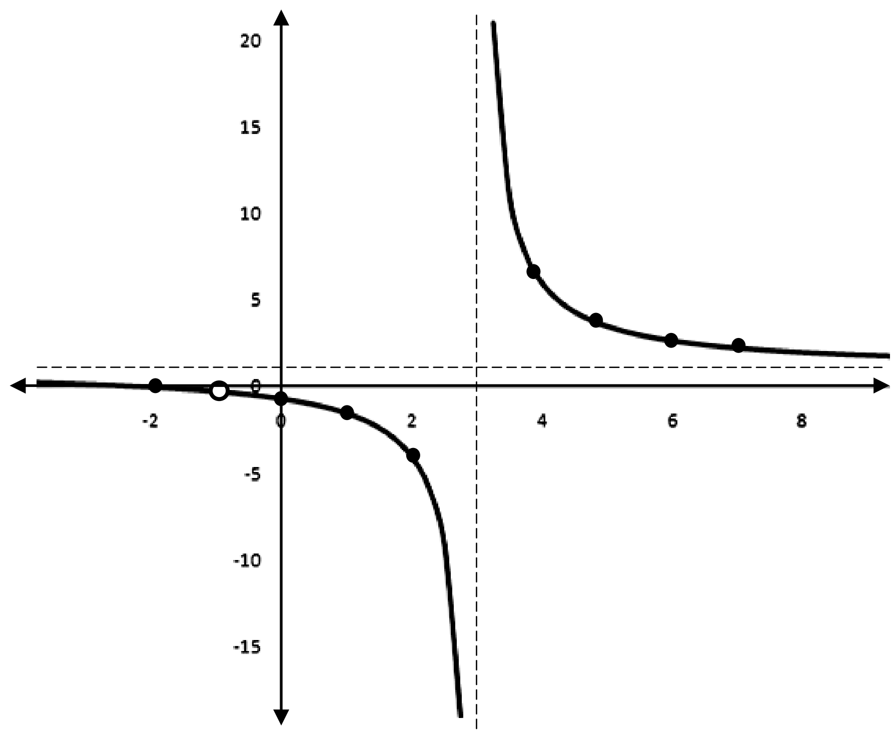
En este ejercicio ese valor está representado por "X = –1". Introduciendo este valor en la función equivalente obtendré la ubicación del "hueco".

$$f(x) = \frac{(X+2)}{(X-3)} \quad ; \quad f(-1) = \frac{(-1+2)}{(-1-3)} = \frac{1}{-4} = -0{,}25$$

Esto nos indica que la función tiene un "hueco" en ***(-1 , -0.25)***

Ahora grafico la función equivalente $f(x) = \dfrac{(X+2)}{(X-3)}$ *e indico la presencia del "hueco".*

La gráfica de esta función equivalente está explicada en el ejercicio 1 de esta guía.



Ejercicio 5 : *Graficar la función* $f(x) = \dfrac{4X^2+4}{2X^2-8}$

Cuando observe que una función racional presenta un polinomio igual o mayor de segundo grado (en el numerador o en el denominador) es recomendable efectuar su factorización.

Esto nos permitirá visualizar si existen raíces comunes en el numerador y denominador.

Si existe alguna raíz o raíces comunes esto nos indicará que existe uno o varios puntos donde la función posee una indeterminación del tipo "cero entre cero" ($\frac{0}{0}$). Esta raíz representará la presencia de un "hueco" y no de asíntotas.

En la función que queremos graficar observamos que tanto el numerador como el denominador son polinomios de segundo grado.

Al tratar de factorizar el numerador ($4X^2 + 4$) notaremos que es un polinomio "NO FACTORIZABLE" (al aplicar la formula general de segundo grado o resolvente notaremos que dentro de la raíz cuadrada se presentará un número negativo y éstos generan una raíz imaginaria).

Esto nos indica que no existen "huecos" en la función ni cortes con el eje X.

Ahora procedo de acuerdo a lo indicado en los ejercicios 1 y 2 de esta guía.

Primero : Identificar y graficar en "líneas punteadas" las posibles asíntotas que pueda tener la función.

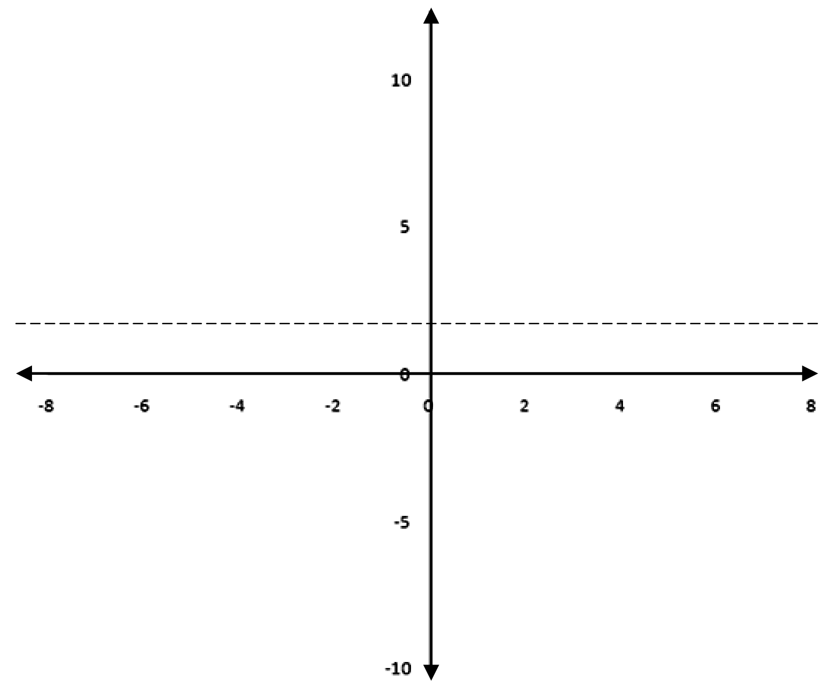
ASÍNTOTA HORIZONTAL :

Para saber si una función racional tiene asíntota horizontal solo se comparan los grados del numerador y denominador.

Si en la función $f(x) = \dfrac{a\,X^n + \ldots + c}{b\,X^m + \ldots + d}$

1) **n > m** *f(x) NO posee asíntota horizontal*
2) **n = m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es la recta* $y = \frac{a}{b}$
3) **n < m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es el eje X.*

Esta función cumple con el caso 2, luego la **asíntota horizontal** *es la recta* **" Y =** $\frac{4}{2} = 2$ **"**



ASÍNTOTA VERTICAL :

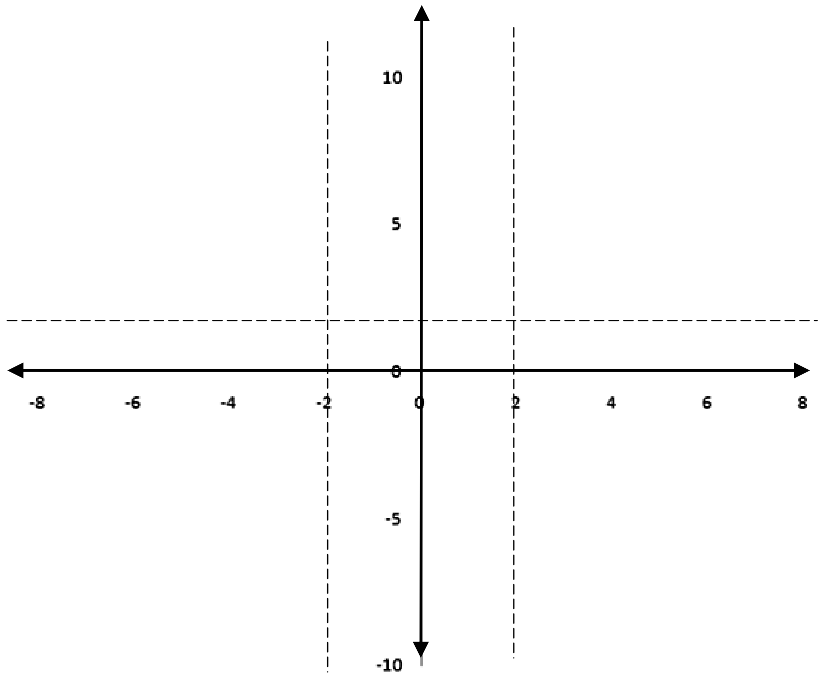
Para encontrar una asíntota vertical se iguala el denominador a cero. Las raíces del polinomio que conforma el denominador de la función representarán los valores de X por donde pasa la asíntota vertical (Perpendicular al eje X).

Las raíces del polinomio $\underline{\mathbf{2X^2 - 8}}$ *son :*

X = 2   *y*   ***X = - 2***

Estas raíces las puede obtener aplicando la formula general de segundo grado o el método de factorización que le sea más cómodo.

Esto nos indica que la gráfica presentará dos asíntotas verticales, una en ***X = 2*** *y otra en* ***X = - 2***



ASÍNTOTA OBLICUA :

Si en una función el grado del numerador es una unidad mayor que el denominador, la función tiene asíntota oblicua.

Como en este caso ambos grados son iguales no hay asíntota oblicua.

***Segundo :* Determinar si existen cortes con el eje "X" (Esto se obtiene igualando el numerador a cero).**

Como ya pudimos notar al principio de este ejercicio, el polinomio que conforma el numerador no tiene raíces reales, por lo tanto LA FUNCIÓN NO "CORTA" AL EJE X.

***Tercero :* Determinar si existen cortes con el eje "Y" (Esto se obtiene haciendo "X=0" en la función). En otras palabras calculando f(0).**

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(0) = \frac{4(0)^2+4}{2(0)^2-8} \quad ; \quad f(0) = \frac{4}{-8}$$

$$f(0) = \frac{4}{-8} = -0{,}5$$

Esto nos indica que la función corta al eje Y en el punto ***(0 , – 0.5)***

***Cuarto :* Calcular tres o cuatro puntos de la función en cada uno de los intervalos en que quedó dividido el sistema de coordenadas una vez graficadas las asíntotas verticales.**

Notamos que el eje X quedó dividido en tres intervalos, uno a la izquierda de "-2", uno entre "-2" y "2", y otro a la derecha de "2".

Estudiando el intervalo a la izquierda de "-2" :

Para X = -6

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(-6) = \frac{4(-6)^2+4}{2(-6)^2-8} = 2{,}31$$

Esto nos indica que la función "pasa" por el punto ***(-6 , 2.31)***

Para X = -5

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(-5) = \frac{4(-5)^2+4}{2(-5)^2-8} = 2{,}47$$

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(-5 , 2.47)***

Para X = -4

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(-4) = \frac{4(-4)^2+4}{2(-4)^2-8} = 2{,}83$$

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(-4 , 2.83)***

Para X = -3

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(-3) = \frac{4(-3)^2+4}{2(-3)^2-8} = 4$$

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(-3 , 4)***

Estudiando el intervalo entre "-2" y "2" :

*En este intervalo sabemos que existe el corte con el eje "Y". Fue calculado en el paso 3 [la función corta al eje Y en el punto **(0 , – 0.5)**]*

Luego es necesario estudiar un punto antes y otro después del corte con el eje Y. Esto nos permite visualizar fácilmente si la concavidad es positiva o negativa.

Para X = -1

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(-1) = \frac{4(-1)^2+4}{2(-1)^2-8} = -1{,}33$$

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(-1 , -1.33)***

Para X = 1

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(1) = \frac{4(1)^2+4}{2(1)^2-8} = -1{,}33$$

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(1 , -1.33)***

Estudiando el intervalo a la derecha de "2" :

Para X = 3

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(3) = \frac{4(3)^2+4}{2(3)^2-8} = 4$$

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(3 , 4)***

Para X = 4

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(4) = \frac{4(4)^2+4}{2(4)^2-8} = 2{,}83$$

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(4 , 2.83)***

Para X = 5

$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(5) = \frac{4(5)^2+4}{2(5)^2-8} = 2{,}47$$

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(5 , 2.47)***

Para X = 6

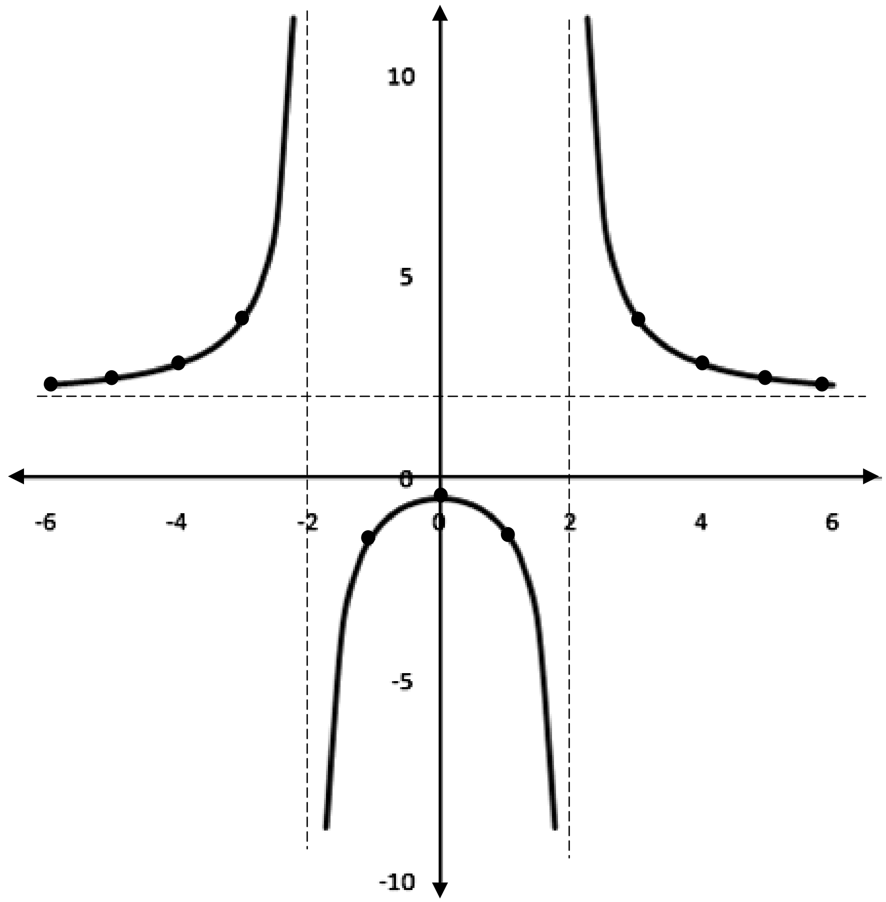
$$f(x) = \frac{4X^2+4}{2X^2-8} \quad ; \quad f(6) = \frac{4(6)^2+4}{2(6)^2-8} = 2{,}31$$

*Esto nos indica que la función "pasa" por el punto **(6 , 2.31)***

Con esta información podemos graficar la función de una manera bastante precisa.

Se recomienda que se vaya graficando intervalo por intervalo y tomando mucho en cuenta la definición de asíntota y los cortes con el eje horizontal y el eje vertical cuando los haya.

X	-6	-5	-4	-3	-1	0	1	3	4	5	6
Y	2,31	2,47	2,83	4	-1,33	-0,5	-1,33	4	2,83	2,47	2,31



Ejercicio 6 : *Graficar* $f(x) = \dfrac{X^2 - 5X + 11}{X - 2}$

Cuando observe que una función racional presenta un polinomio igual o mayor de segundo grado (en el numerador o en el denominador) es recomendable efectuar su factorización.

Esto nos permitirá visualizar si existen raíces comunes en el numerador y denominador.

Si existe alguna raíz o raíces comunes esto nos indicará que existe uno o varios puntos donde la función posee una indeterminación del tipo "cero entre cero" ($\frac{0}{0}$). Esta raíz representará la presencia de un "hueco" y no de asíntotas.

En la función que queremos graficar observamos que el numerador es un polinomio de segundo grado.

Al tratar de factorizar el numerador notaremos que es un polinomio "NO FACTORIZABLE" (al aplicar la formula general de segundo grado o resolvente notaremos que dentro de la raíz cuadrada se presentará un número negativo y éstos generan una raíz imaginaria).

Esto nos indica que no existen "huecos" en la función ni cortes con el eje X.

Ahora procedo de acuerdo a lo indicado en los ejercicios 1 y 2 de esta guía.

***Primero :* Identificar y graficar en "líneas punteadas" las posibles asíntotas que pueda tener la función.**

ASÍNTOTA HORIZONTAL :

Para saber si una función racional tiene asíntota horizontal solo se comparan los grados del numerador y denominador.

Si en la función $f(x) = \dfrac{a\,X^n + \ldots + c}{b\,X^m + \ldots + d}$

1) **n > m** *f(x) NO posee asíntota horizontal*

2) **n = m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es la recta* $y = \frac{a}{b}$

3) **n < m** *f(x) SI posee asíntota horizontal y es el eje X.*

Esta función cumple con el caso 2, **n > m** *f(x)* ***NO posee*** *asíntota horizontal*

<u>ASÍNTOTA VERTICAL :</u>

Para encontrar una asíntota vertical se iguala el denominador a cero. Las raíces del polinomio que conforma el denominador de la función representarán los valores de X por donde pasa la asíntota vertical (Perpendicular al eje X).

$$X - 2 = 0 \qquad ; \qquad X = 2$$

Esto nos indica que por ***"X = 2"*** *pasará una asíntota vertical (perpendicular al eje X) :*

<u>ASÍNTOTA OBLICUA :</u>

Si en una función el grado del numerador es una unidad mayor que el denominador, la función tiene asíntota oblicua.

Como en este caso la afirmación anterior se cumple, se procede a calcular la ecuación de la asíntota oblicua.

Para calcular la ecuación de la asíntota oblicua se divide el numerador por el denominador y el cociente obtenido representará la ecuación buscada (se recomienda "repasar" DIVISION DE POLINOMIOS).

En este caso en particular :

$$\frac{X^2 - 5X + 11}{X - 2} = (X - 3) + 5$$

Cociente Resto

El cociente obtenido (X – 3) es la ecuación de una recta y su gráfica representará la asíntota oblicua de la función estudiada.

<u>Segundo :</u> Determinar si existen cortes con el eje "X" (Esto se obtiene igualando el numerador a cero).

Como ya pudimos notar al principio de este ejercicio, el polinomio que conforma el numerador no tiene raíces reales, por lo tanto LA FUNCIÓN NO "CORTA" AL EJE X.

<u>Tercero :</u> Determinar si existen cortes con el eje "Y" (Esto se obtiene haciendo "X=0" en la función). En otras palabras calculando f(0).

$$f(x) = \frac{X^2 - 5X + 11}{X - 2} \qquad ; \qquad f(0) = \frac{(0)^2 - 5(0) + 11}{0 - 2}$$

$$f(0) = \frac{11}{-2} = -5{,}5$$

Esto nos indica que la función corta al eje Y en el punto ***(0 , – 5.5)***

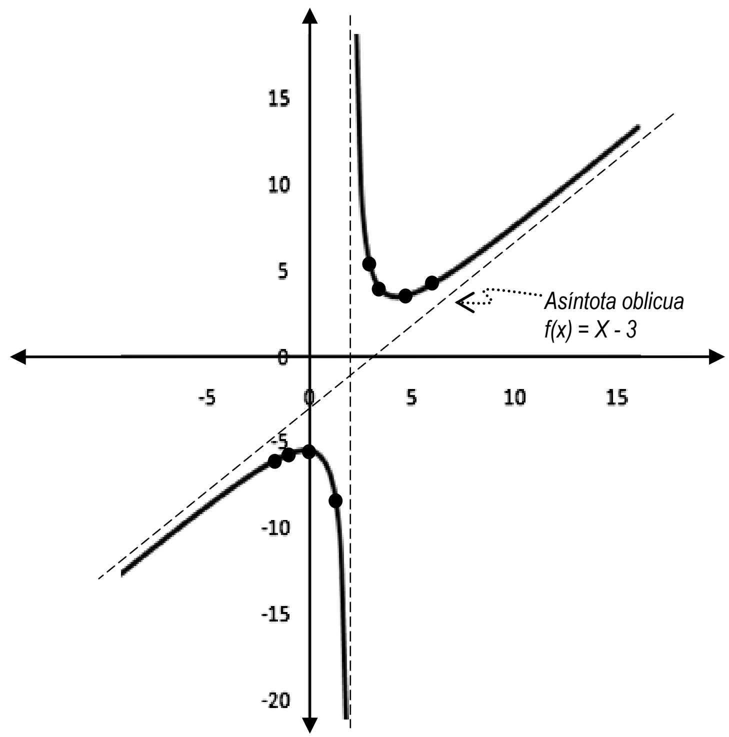
<u>Cuarto :</u> Calcular tres o cuatro puntos de la función en cada uno de los intervalos en que quedó dividido el sistema de coordenadas una vez graficadas las asíntotas verticales.

Notamos que el eje X quedó dividido en dos intervalos, uno a la izquierda y otro a la derecha de la asíntota vertical en X = 2.

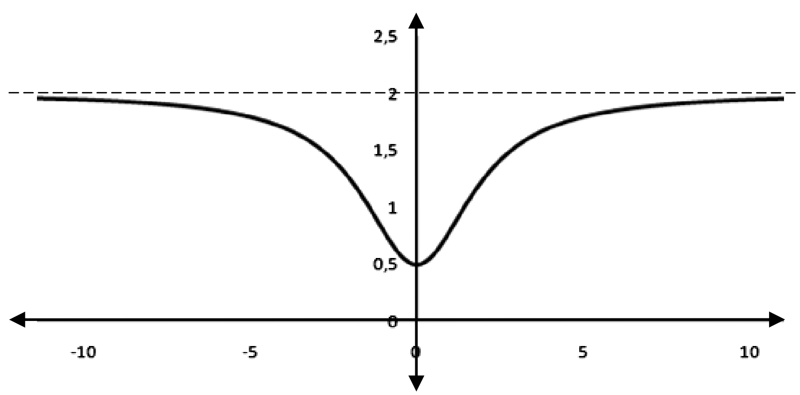
Con esta información podemos graficar la función de una manera bastante precisa.

Se recomienda que se vaya graficando intervalo por intervalo y tomando mucho en cuenta la definición de asíntota y los cortes con el eje horizontal y el eje vertical cuando los haya.

X	-2	-1	0	1	3	4	5	6
Y	-6,25	-5,67	-5,5	-7	5	3,5	3,67	4,24



Ejercicio 7 : Graficar la función $f(x) = \dfrac{4X^2+4}{2X^2+8}$



Ejercicio 8 : Graficar la función $f(x) = \dfrac{X^3+3X^2+2X}{X^2+3x+2}$

Este ejercicio ha "asustado" a muchos de los estudiantes de bachillerato y de la universidad. Al ver que el numerador es un polinomio de tercer grado se imaginan que la gráfica resultará muy difícil.

Vean lo fácil que es graficar esta función :

Factorizando el numerador y denominador tendremos :

$$f(x) = \frac{X^3+3X^2+2X}{X^2+3x+2} \quad ; \quad f(x) = \frac{X.(X^2+3X+2)}{X^2+3X+2}$$

$$f(x) = \frac{X.\cancel{(X+2)}.\cancel{(X+1)}}{\cancel{(X+2)}.\cancel{(X+1)}} \quad ; \quad f(x) = X$$

Lo que nos indica que la función a graficar será "Y = X" pero presentando "huecos" cuando X+2=0 y cuando X+1=0 (X=-2 y X=-1)