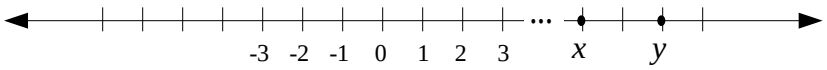
Coordenadas rectangulares y gráficas

Objetivos: Al terminar esta lección podrás usar un sistema de coordenadas rectangulares para identificar puntos en un plano y podrás representar gráficamente una ecuación lineal en dos variables. También, dados cualesquiera dos puntos, podrás determinar la distancia entre ellos y el punto medio entre ellos.

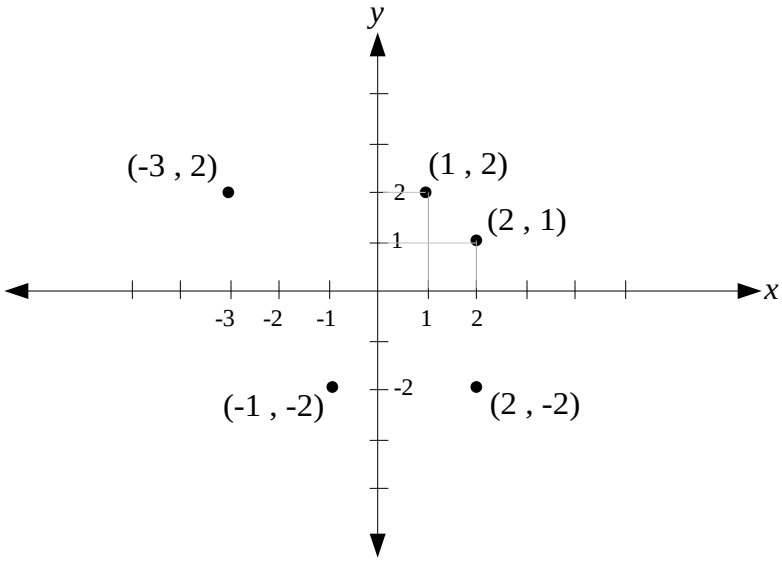
En un curso elemental de álgebra aprendiste a representar los números reales como puntos en una línea recta que llamamos *recta numérica*. Ese hecho nos permite apreciar mejor algunas relaciones que existen entre distintos números reales. Por ejemplo, si un número real x es menor que un número real y, sus puntos correspondientes están en la recta numérica de modo que el punto de x está a la izquierda del punto de y.



Más aún, aprendiste que existe una correspondencia "uno a uno" entre los números reales y los puntos de una recta. Por esa razón es a veces conveniente hablar del número y de su punto correspondiente en la recta numérica como si fueran la misma cosa.

En esta lección aprenderás cómo describir algebraicamente puntos que se encuentran en un plano. Recuerda que un plano puede imaginarse como una pared que se extiende infinitamente a lo ancho y a lo alto.

Para especificar un punto en un plano nos valdremos de un *sistema de coordenadas rectangulares* formado al intersecar perpendicularmente por el origen de ambas a dos rectas numéricas en el plano. A una de las rectas la representamos horizontalmente y la llamamos el *eje de abscisas* o *eje de x*. A la otra recta la representamos verticalmente y la llamamos el *eje de ordenadas* o *eje de y*.



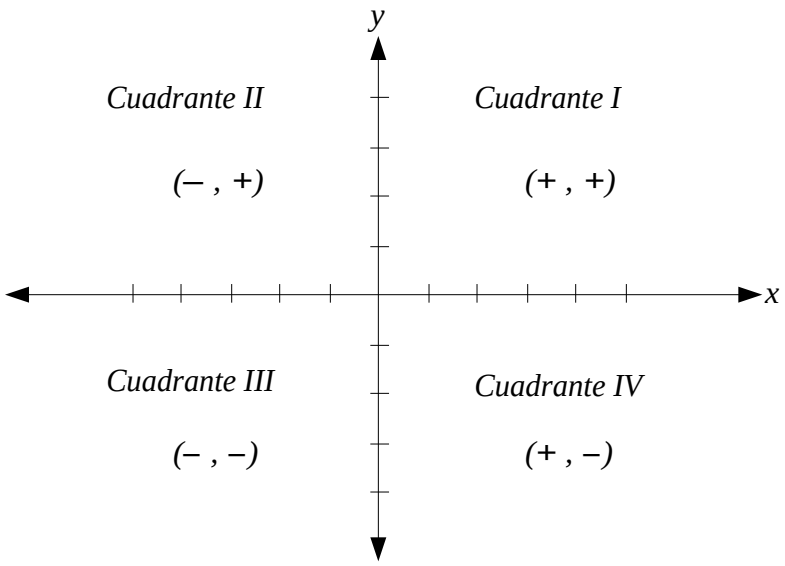
Recomiendo la inserción de un applet que presente un sistema de coordenadas fijo y un "punto" movible por el usuario con el ratón (o equivalente) de su computadora. Según se mueve el punto se mostrará a su lado el par ordenado que corresponde a la posición.

Asociaremos a un punto **A** en el plano, un *par ordenado* de números reales (x , y), de los cuales, el primero, x , es el punto en el eje x intersecado por una recta vertical que pasa por el punto **A**; y

el segundo de los números, y, es el punto en el eje y, intersecado por una recta horizontal que pasa por el punto **A**. Al par ordenado (x , y) lo llamamos las coordenadas de **A** y a cada uno de los números en el par ordenado lo llamamos un *componente* o *coordenada*. Note que el orden en que escribimos los componentes del par ordenado es muy importante. En el dibujo previo puedes apreciar que las coordenadas (1 , 2) corresponden a un punto distinto del que corresponde a las coordenadas (2 , 1).

Para cada par de números reales (x , y), existe sólamente un punto en el plano que le corresponde y, recíprocamente, para cada punto en el plano existe sólo un para ordenado (x , y) que le corresponde. Por eso decimos que **existe una correspondencia "uno a uno" entre los puntos del plano y los pares ordenados de números reales**.

El sistema de coordenadas rectangulares que estamos describiendo divide al plano en cuatro regiones o *cuadrantes*. Al cuadrante que está arriba del eje x y a la derecha del eje y lo llamamos el cuadrante uno (cuadrante I). Al cuadrante a la izquierda del cuadrante uno lo llamamos el cuadrante dos (cuadrante II). Debajo del cuadrante dos está el cuadrante tres (cuadrante III). A la derecha del cuadrante III está el cuadrante cuatro (cuadrante IV). Puedes verificar que para todos los puntos del cuadrante I ambas coordenadas son positivas; para los puntos del cuadrante II, la coordenada x es negativa y la y es positiva. En el cuadrante III ambas coordenadas son negativas y en el cuadrante IV la coordenada x es positiva y la coordenada y es negativa. El siguiente dibujo resume esas observaciones.



Ejercicio 1:

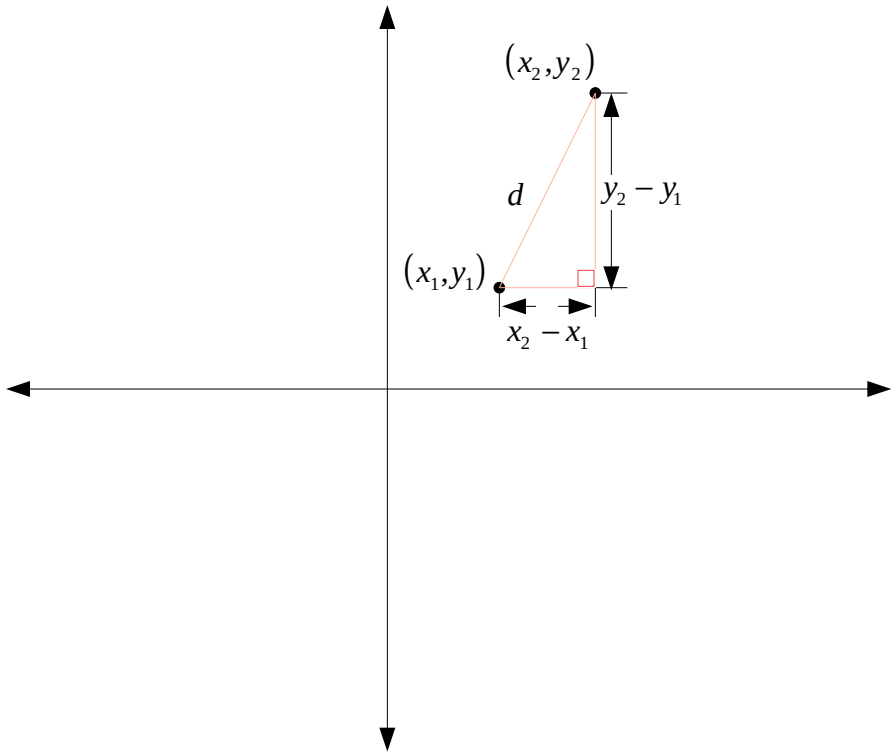
Dibuje un sistema de coordenadas rectangulares y especifique en él los puntos cuyas coordenadas son (3 , 3) , (0 , –2) , (–0.5 , 1.8) , (–10 , 0) , (–3 , –5)

Respuestas

Distancia entre dos puntos y el punto medio

El teorema de Pitágoras es un resultado muy importante en las matemáticas que establece que para un triágulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos lados menores equivale al cuadrado de la longitud del tercer lado. En un triángulo rectángulo, el lado mayor es el que está opuesto al ángulo recto y lo llamamos hipotenusa del triángulo.

Usaremos el teorema de Pitágoras para hallar la distancia entre los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) . Considere la siguiente ilustración:



Hemos representado dos puntos, (x_1,y_1) y (x_2,y_2), y además del segmento que los conecta, podemos ver otros dos segmentos que junto con el primero forman un triángulo rectángulo. d es el largo de la hipotenusa. Aplicando el teorema de Pitágoras a este triángulo obtenemos

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 .$$

Como d es un número positivo, al sacar la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,,}$$

que es la fórmula de distancia entre dos puntos en el plano. En el dibujo mostramos al punto (x_2,y_2) arriba y a la derecha de (x_1,y_1). Si estuviera en otra posición la longitud del lado horizontal podría ser $x_1 - x_2$ en vez de $x_2 - x_1$. Pero al cuadrarse, $x_1 - x_2$ y $x_1 - x_2$ producen el mismo valor. Una observación similar con respecto a la longitud del lado vertical nos lleva a concluir que la fórmula previa es válida para cualesquiera dos puntos en el plano.

Ejemplo 1
La distancia entre los puntos (2 , -3) y (-1 , 1) está dada por
$\sqrt{(-1-2)^2+(1-(-3))^2}=\sqrt{9+16}=5$.

Usando la fórmula de distancia podemos verificar que la distancia entre (x_1,y_1) y $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ es igual a la distancia entre (x_2,y_2) y $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Por esa razón llamamos a $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ el punto medio entre los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2).

Ejemplo 2
El punto medio entre (2 , -3) y (-4 , 5) es $\left(\frac{2+(-4)}{2},\frac{-3+5}{2}\right)=(1\ ,\ 1)$.

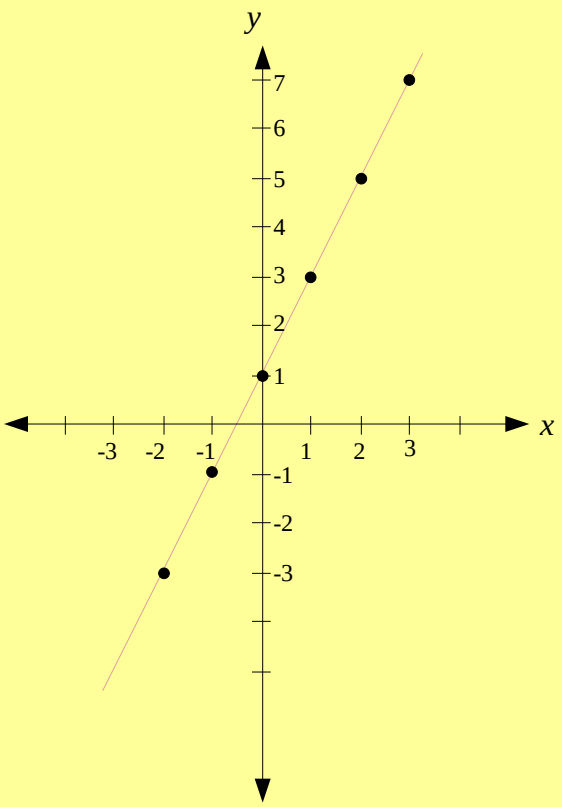
Ejercicios

2) Calcule la distancia entre los siguientes pares de puntos:
   a) (1 , 0) y (0 , 2) b) (-2 , -3) y (4 , 5) c) $(\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2})$ y (0 , 0)
3) Halle los posibles valores de x si el punto $(x,-2)$ está a distancia $\sqrt{18}$ del punto (4 , 1).
4) Determine el punto medio del segmento cuyos extremos son (1.5 , 2.1) y (3.4 , 8.08).

Gráficas de ecuaciones
Una solución a una ecuación en las variables x y y es una pareja de un valor a para x y un valor b para y, que al sustituir a x y a y en la ecuación, producen un enunciado cierto. A esa pareja de valores la podemos representar con un par ordenado (a , b). Por ejemplo, la ecuación $3x+5y=30$ tiene entre sus soluciones a (5 , 3) pues si x =5 y y =3, la ecuación se convierte en $3\bullet 5+5\bullet 3=30$, lo cual es un enunciado cierto. También (10 , 0) es una solución, e infinidad de otros pares ordenados son solución a la ecuación. Como un par ordenado puede representarse con un punto, la colección de todas las soluciones de una ecuación puede ser representada con un conjunto de puntos en un sistema de coordenadas rectangulares. A tal colección de puntos la llamamos la *gráfica de la ecuación*.

Ejemplo 3
Para hacer la gráfica de la ecuación $y=2x+1$ comenzaremos determinando un conjunto de pares ordenados (x,y) que satisfacen la ecuación, lo cual es fácil para esta ecuación si asignamos valores a x y determinamos el correspondiente valor de y como en la siguiente tabla.

x	y
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5
3	7



A la derecha de la tabla hemos representado con un punto a cada pareja (x, y) dada por cada fila en la tabla. Nótese que todos los puntos se encuentran en una línea recta que dibujamos con trazo punteado en rojo. Si determináramos más soluciones a la ecuación y las representáramos en el sistema de coordenadas a la derecha, encontraremos que todas ellas se encuentran en la recta dibujada. Por otra parte, podremos verificar que las coordenadas (x, y) de cada punto en la recta satisfacen la ecuación $y = 2x + 1$. Esto sugiere que la recta dibujada contiene exactamente todos los puntos que corresponden a una solución de la ecuación. Entonces concluimos que la gráfica de la ecuación es la línea recta que sugerimos con el trazo punteado.

En general, la gráfica de toda ecuación de la forma $y = mx + b$, donde m y b son cualesquiera constantes reales, es una línea recta. Conviene recordar que para trazar una recta sólo necesitamos dos puntos. Por lo tanto, para este tipo de ecuaciones no necesitamos hacer una tabla con tantos puntos como la del ejemplo previo. Basta determinar dos puntos que satisfagan la ecuación (de una recta) para construir su gráfica. No olvidemos que ecuaciones de otras clases tienen diferentes gráficas. Por ejemplo, la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 14$ no es una recta sino un círculo cuyo centro está en (-3,2) y cuyo radio es 1.

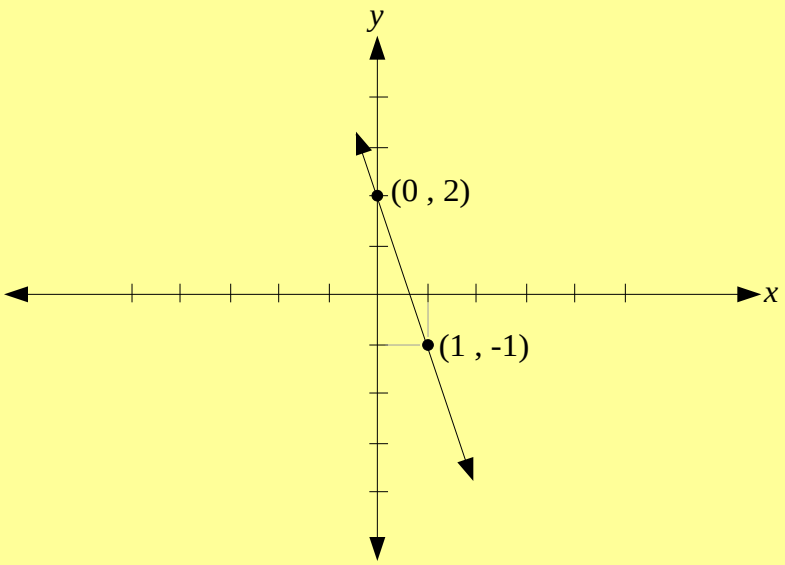
Ejemplo 4

Haga la gráfica de la ecuación $y = -3x + 2$.

Solución:

Primero determinamos dos puntos que satisfagan la ecuación. Para hallar esos dos puntos podemos usar cualesquiera dos valores para x y determinar los

correspondientes valores de y. Si $x = 0$, $y = -3(0) + 2 = 2$. Por lo tanto el punto (0 , 2) es un punto de la gráfica. Si Si $x = 1$, $y = -3(1) + 2 = -1$. Por lo tanto el punto (1 , -1) también es un punto de la gráfica. La gráfica es

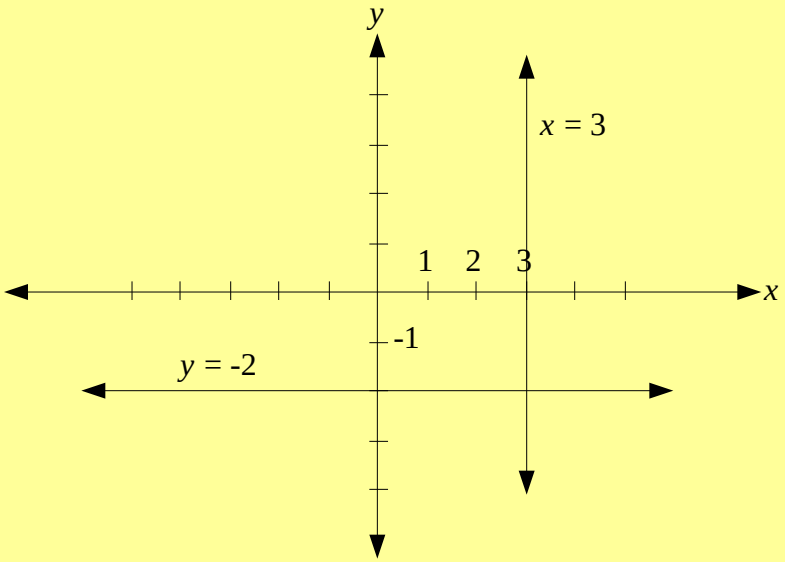


Las rectas verticales y las horizontales tienen ecuaciones especialmente sencillas. Note que todos los puntos en una recta vertical tienen el mismo componente x, por lo tanto su ecuación será de la forma $x = c$. En las rectas horizontales, los puntos tienen un mismo componente en y, por lo tanto su ecuación será de la forma $y = c$.

Ejemplo 5

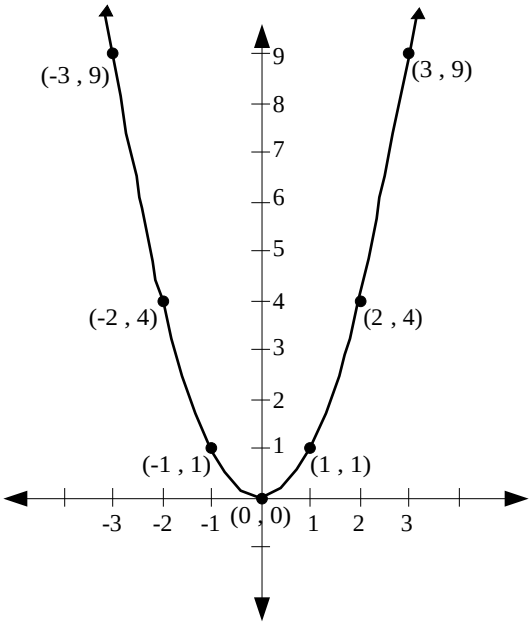
Bosqueje las gráficas de las ecuaciones $y = -2$ y $x = 3$.

Solución:



Si la ecuación no es lineal en x ni en y, entonces la gráfica podrá ser un trazo no recto. Considere la ecuación $y = x^2$. La siguiente tabla muestra varios puntos en la gráfica de la ecuación. La curva sugerida por los puntos es llamada una *parábola*.

x	y
0	0
-1	1
1	1
-2	4
2	4
-3	9
3	9



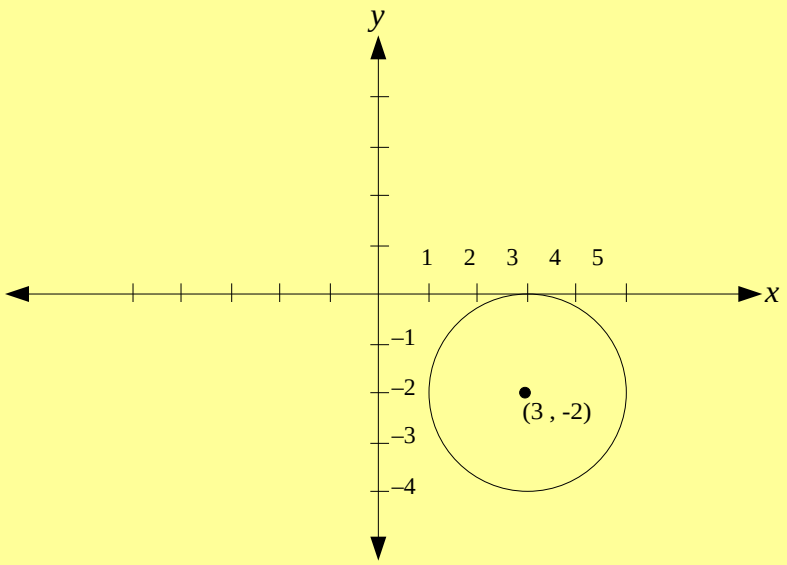
Este es un buen lugar para insertar un applet que permite al usuario proveer una definición de curva "y = ..." y obtener al instante su gráfica.

En general, la gráfica de cualquier ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, es una parábola. Si $a > 0$, la parábola abrirá hacia arriba, como la del ejemplo previo. Si $a < 0$, la parábola abrirá hacia abajo.

Una clase de ecuaciones importantes es la que corresponde a círculos. Posiblemente recuerdas que un círculo cuyo centro es el punto P y cuyo radio es r es la colección de todos los puntos que están a una distancia r de P. Si P tiene coordenadas (h , k) y un punto cualquiera del círculo es denotado con (x , y), entonces usando la fórmula de distancia obtenemos la siguiente ecuación: $\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$. Cuadrando en ambos lados de esta ecuación obtenemos $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, que es menos "fea" y a la que llamaremos *ecuación estándar del círculo*.

Ejemplo 6

La ecuación $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$ tiene la forma de la ecuación estándar del círculo con h = 3, k = -2, y r = 2. Por lo tanto su gráfica es un círculo con centro en (3 , -2) y radio 2.



Recomiendo insertar un applet que permite al usuario trasladar y dilatar el círculo, de una forma intuitiva y obtener al instante su ecuación.

Ejercicios:

Bosqueja la gráfica de las siguientes ecuaciones

5) $y = 3x - 1$

6) $4x + 5y = 10$ (Sugerencia: Es más fácil construir una tabla de pares ordenados si despejas y en la ecuación antes de llenar la tabla.)

7) $y = |x|$

8) $y = 2x^2 - 3x + 1$

9) $y = -x^2 + 2x - 1$

10) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$

Respuestas

Asignación:

- **Leer del texto las páginas 60-65**
- **Hacer los problemas 1- 19 (impares) en la página 65, y los problemas 1-9 de la pág. 98**