

Título: ***ECUACIONES IRRACIONALES***

Año escolar: 5to. año de bachillerato

Autor: José Luis Albornoz Salazar

Ocupación: Ing Civil. Docente Universitario

País de residencia: Venezuela

Correo electrónico: [martilloatomico@gmail.com](mailto:martilloatomico@gmail.com)

*El autor de este trabajo solicita su valiosa colaboración en el sentido de enviar cualquier sugerencia y/o recomendación a la siguiente dirección :*

***[martilloatomico@gmail.com](mailto:martilloatomico@gmail.com)***

*Igualmente puede enviar cualquier ejercicio o problema que considere pueda ser incluido en el mismo.*

*Si en sus horas de estudio o práctica se encuentra con un problema que no pueda resolver, envíelo a la anterior dirección y se le enviará resuelto a la suya.*

## **ECUACIONES IRRACIONALES**

Las ecuaciones irracionales, o ecuaciones con radicales, son aquellas que tienen la incógnita bajo el signo radical.

Por ejemplo :

$$\sqrt{x-8}=2 ; \sqrt{x+10}-\sqrt{x+19}=-1 ; \sqrt{9x+10}-2\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}$$

**Para resolver una ecuación irracional se recomienda seguir los siguientes pasos :**

- 1) Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos, aunque tengan también radicales.
- 2) Se elevan ambos miembros de la ecuación al índice que posea la raíz.
- 3) Se resuelve la ecuación obtenida.
- 4) **Se comprueba si las soluciones obtenidas verifican la ecuación inicial.** Hay que tener en cuenta que al elevar al cuadrado una ecuación se obtiene otra que tiene las mismas soluciones que la dada y, además las de la ecuación que se obtiene cambiando el signo de uno de los miembros de la ecuación (Se dice que al elevar ambos miembros al cuadrado podemos estar añadiendo una solución ficticia).
- 5) Si la ecuación tiene varios radicales, se repiten los dos primeros pasos del proceso hasta eliminarlos todos.

**Ejemplo 1 :** Resolver  $\sqrt{x-8}=2$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación :

$$(\sqrt{x-8})^2 = 2^2$$

Al elevar al cuadrado el miembro de la izquierda se elimina la raíz cuadrada, y al elevar al cuadrado el miembro de la derecha se obtiene 4:

$$(\sqrt{x-8})^2 = 2^2$$

$$x-8=4$$

Una vez eliminado el radical se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita :

$$X=4+8 ; \quad X=12$$

Para comprobar el resultado debo sustituir el valor obtenido (X=12) en la ecuación inicial :

$$\sqrt{X-8} = 2$$

$$\sqrt{12-8} = 2$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$2 = 2$$

Al verificar que se cumple la igualdad podemos afirmar que la ecuación irracional  $\sqrt{x-8}=2$  se cumple "si y solo si" **X=12**.

**Ejemplo 2 : Resolver**  $3 + \sqrt{3X + 1} = X$

**1ero.** Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos

$$\sqrt{3X + 1} = X - 3$$

**2do.** Se elevan al cuadrado los dos miembros.

$$(\sqrt{3X + 1})^2 = (X - 3)^2$$

**3ero.** Se resuelve la ecuación obtenida.

Al elevar al cuadrado el miembro de la izquierda se elimina la raíz cuadrada, y al elevar al cuadrado el miembro de la derecha debemos recordar el producto notable que dice que el cuadrado de la diferencia de un binomio es igual al cuadrado del primer miembro menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo :

$$3X + 1 = X^2 - (2)(X)(3) + (3)^2 \quad ; \quad 3X + 1 = X^2 - 6X + 9$$

Una vez "eliminada" la raíz, la ecuación puede ser resuelta como una ecuación de segundo grado.

$$3X + 1 - X^2 + 6X - 9 = 0$$

$$- X^2 + 9X - 8 = 0$$

Al aplicar la fórmula general de segundo grado o resolvente podemos determinar que los valores que anulan la ecuación anterior (raíces) son :

$$X = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(-1)(-8)}}{2(-1)}$$

$$X_1 = 8 \quad \text{y} \quad X_2 = 1$$

**4to.** Se comprueba si las soluciones obtenidas verifican la ecuación inicial. Hay que tener en cuenta que al elevar al cuadrado una ecuación se obtiene otra que tiene las mismas soluciones que la dada y, además las de la ecuación que se obtiene cambiando el signo de uno de los miembros de la ecuación (Se dice que al elevar ambos miembros al cuadrado podemos estar añadiendo una solución ficticia).

Comprobando con  $X_1 = 8$  , para lo cual sustituyo este valor en la ecuación irracional inicial :

$$3 + \sqrt{3X + 1} = X \quad ; \quad 3 + \sqrt{3(8) + 1} = 8$$

$$3 + \sqrt{24 + 1} = 8 \quad ; \quad 3 + \sqrt{25} = 8 \quad ; \quad 3 + 5 = 8$$

$$8 = 8$$

Esto nos indica que  $X = 8$  **SI ES SOLUCIÓN**

Comprobando con  $X_2 = 1$  , para lo cual sustituyo este valor en la ecuación irracional inicial :

$$3 + \sqrt{3X + 1} = X \quad ; \quad 3 + \sqrt{3(1) + 1} = 1$$

$$3 + \sqrt{3 + 1} = 1 \quad ; \quad 3 + \sqrt{4} = 1 \quad ; \quad 3 + 2 = 1$$

$$5 \neq 1$$

Esto nos indica que  $X = 1$  **NO ES SOLUCIÓN**

**La ecuación irracional estudiada se resuelve con  $X = 8$**

**Ejemplo 3 : Resolver**  $2X - 6 - \sqrt{X^2 - 9} = 0$

**1ero.** Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos (en este caso es más "cómodo" pasar el radical al miembro de la derecha)

$$2X - 6 = \sqrt{X^2 - 9}$$

**2do.** Se elevan al cuadrado los dos miembros.

$$(2X - 6)^2 = (\sqrt{X^2 - 9})^2$$

**3ero.** Se resuelve la ecuación obtenida.

Al elevar al cuadrado el miembro de la derecha se elimina la raíz cuadrada, y al elevar al cuadrado el miembro de la izquierda debemos recordar el producto notable que dice que el cuadrado de la diferencia de un binomio es igual al cuadrado del primer miembro menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo :

$$(2X)^2 - (2)(2X)(6) + (6)^2 = X^2 - 9$$

Una vez "eliminada" la raíz, la ecuación puede ser resuelta como una ecuación de segundo grado.

$$4X^2 - 24X + 36 = X^2 - 9 \quad ; \quad 4X^2 - 24X + 36 - X^2 + 9 = 0$$

$$3X^2 - 24X + 45 = 0$$

Al aplicar la fórmula general de segundo grado o resolvente podemos determinar que los valores que anulan la ecuación anterior (raíces) son :

$$X = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(3)(45)}}{2(3)}$$

ECUACIONES IRRACIONALES

$$X_1 = 3 \quad y \quad X_2 = 5$$

**4to.** Se comprueba si las soluciones obtenidas verifican la ecuación inicial. Hay que tener en cuenta que al elevar al cuadrado una ecuación se obtiene otra que tiene las mismas soluciones que la dada y, además las de la ecuación que se obtiene cambiando el signo de uno de los miembros de la ecuación (Se dice que al elevar ambos miembros al cuadrado podemos estar añadiendo una solución ficticia).

Comprobando con  $X_1 = 3$  , para lo cual sustituyo este valor en la ecuación irracional inicial :

$$2X - 6 - \sqrt{X^2 - 9} = 0 \quad ; \quad 2(3) - 6 - \sqrt{(3)^2 - 9} = 0$$

$$6 - 6 - \sqrt{9 - 9} = 0 \quad ; \quad 6 - 6 - \sqrt{0} = 0$$

$$0 = 0$$

Esto nos indica que  $X = 3$  **SI ES SOLUCIÓN**

Comprobando con  $X_2 = 5$  , para lo cual sustituyo este valor en la ecuación irracional inicial :

$$2X - 6 - \sqrt{X^2 - 9} = 0 \quad ; \quad 2(5) - 6 - \sqrt{(5)^2 - 9} = 0$$

$$10 - 6 - \sqrt{25 - 9} = 0 \quad ; \quad 10 - 6 - \sqrt{16} = 0$$

$$10 - 6 - 4 = 0 \quad ; \quad 0 = 0$$

Esto nos indica que  $X = 5$  **SI ES SOLUCIÓN**

**Se debe indicar que ambos valores (3 y 5) resuelven dicha ecuación irracional.**

**Ejemplo 4 : Resolver**

$$7 + \sqrt[3]{5x - 2} = 9$$

**1ero.** Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos

$$\sqrt[3]{5x - 2} = 9 - 7 \quad ; \quad \sqrt[3]{5x - 2} = 2$$

**2do.** Se elevan al cubo los dos miembros.

$$(\sqrt[3]{5x - 2})^3 = 2^3$$

**3ero.** Se resuelve la ecuación obtenida.

$$\begin{aligned} 5x - 2 &= 8 \\ 5x &= 10 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Para comprobar el resultado debo sustituir el valor obtenido ( $X=2$ ) en la ecuación inicial :

$$7 + \sqrt[3]{5x - 2} = 9 \quad ; \quad 7 + \sqrt[3]{5(2) - 2} = 9$$

$$7 + \sqrt[3]{10 - 2} = 9 \quad ; \quad 7 + \sqrt[3]{8} = 9$$

$$7 + 2 = 9 \quad ; \quad 9 = 9$$

Al verificar que se cumple la igualdad podemos afirmar que la ecuación irracional  $7 + \sqrt[3]{5x - 2} = 9$  se cumple "si y solo si"  $X = 2$ .

**Ejemplo 5 : Resolver**

$$\sqrt{x + 10} - \sqrt{x + 19} = -1$$

**1ero.** Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos

$$\sqrt{x + 10} = \sqrt{x + 19} - 1$$

**2do.** Se elevan al cuadrado los dos miembros.

$$(\sqrt{x + 10})^2 = (\sqrt{x + 19} - 1)^2$$

**3ero.** Se resuelve la ecuación obtenida.

Al elevar al cuadrado el miembro de la izquierda se elimina la raíz cuadrada, y al elevar al cuadrado el miembro de la derecha debemos recordar el producto notable que dice que el cuadrado de la diferencia de un binomio es igual al cuadrado del primer miembro menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo :

$$\begin{aligned} x + 10 &= x + 19 - 2\sqrt{x + 19} + 1 \\ -10 &= -2\sqrt{x + 19} \\ 5 &= \sqrt{x + 19} \end{aligned}$$

Podemos notar que una vez simplificada la ecuación presenta un radical en uno de sus miembros, en dicho caso se puede repetir el segundo y tercer paso :

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación :

$$5^2 = (\sqrt{x + 19})^2$$

Se resuelve la ecuación :

$$25 = X + 19 \quad ; \quad 25 - 19 = X$$

$$6 = X$$

Para comprobar el resultado debo sustituir el valor obtenido ( $X=6$ ) en la ecuación inicial :

$$\sqrt{X + 10} - \sqrt{X + 19} = -1$$

$$\sqrt{6 + 10} - \sqrt{6 + 19} = -1$$

$$\sqrt{16} - \sqrt{25} = -1$$

$$4 - 5 = -1$$

$$-1 = -1$$

Al verificar que se cumple la igualdad podemos afirmar que la ecuación irracional  $\sqrt{X + 10} - \sqrt{X + 19} = -1$  se cumple "si y solo si"  $X = 6$

**Ejemplo 6 :** Resolver

$$\sqrt{18x - 8} - \sqrt{2x - 4} - 2\sqrt{2x + 1} = 0$$

Si la ecuación tiene varios radicales, se repiten los dos primeros pasos del proceso hasta eliminarlos todos.

$$\left(\sqrt{18x - 8}\right)^2 = \left(\sqrt{2x - 4} + 2\sqrt{2x + 1}\right)^2$$

El radical del miembro izquierdo se elimina directamente, pero el miembro de la derecha se resuelve como un producto notable (cuadrado de la suma de dos cantidades).

El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al **cuadrado** de la primera cantidad **más** el doble producto de la primera cantidad por la segunda **más** el cuadrado de la segunda cantidad.

$$18x - 8 = 2x - 4 + 4\sqrt{4x^2 - 6x - 4} + 4(2x + 1)$$

Simplificando la ecuación:

$$18x - 8 = 10x + 4\sqrt{4x^2 - 6x - 4}$$

$$8x - 8 = 4\sqrt{4x^2 - 6x - 4}$$

$$2x - 2 = \sqrt{4x^2 - 6x - 4}$$

Notamos que el miembro de la derecha es un radical de grado dos, luego puedo eliminarlo elevando ambos miembros al cuadrado :

$$(2x - 2)^2 = \left(\sqrt{4x^2 - 6x - 4}\right)^2$$

$$4x^2 - 8x + 4 = 4x^2 - 6x - 4$$

$$-2x = -8$$

$$x = 4$$

Para comprobar el resultado debo sustituir el valor obtenido ( $X=4$ ) en la ecuación inicial :

$$\sqrt{18X - 8} - \sqrt{2X - 4} - 2\sqrt{2X + 1} = 0$$

$$\sqrt{18(4) - 8} - \sqrt{2(4) - 4} - 2\sqrt{2(4) + 1} = 0$$

$$\sqrt{72 - 8} - \sqrt{8 - 4} - 2\sqrt{8 + 1} = 0$$

$$\sqrt{64} - \sqrt{4} - 2\sqrt{9} = 0$$

$$8 - 2 - 2(3) = 0$$

$$8 - 2 - 6 = 0$$

$$0 = 0$$

**La ecuación irracional estudiada se resuelve con  $X = 4$**

**Ejemplo 7 :** Resolver

$$\sqrt{9x+10} - 2\sqrt{x+3} = \sqrt{x-2}$$

Si la ecuación tiene varios radicales, se repiten los dos primeros pasos del proceso hasta eliminarlos todos.

$$(\sqrt{9x+10} - 2\sqrt{x+3})^2 = (\sqrt{x-2})^2$$

ECUACIONES IRRACIONALES

$$9x + 10 - 4\sqrt{9x^2 + 37x + 30} + 4(x+3) = x - 2$$

$$13x + 22 - x + 2 = 4\sqrt{9x^2 + 37x + 30}$$

$$12x + 24 = 4\sqrt{9x^2 + 37x + 30}$$

$$3x + 6 = \sqrt{9x^2 + 37x + 30}$$

Notamos que el miembro de la derecha es un radical de grado dos, luego puedo eliminarlo elevando ambos miembros al cuadrado :

$$(3x+6)^2 = (\sqrt{9x^2 + 37x + 30})^2$$

$$9x^2 + 36x + 36 = 9x^2 + 37x + 30$$

$$36 - 30 = 37x - 36x$$

$$6 = x$$

Para comprobar el resultado debo sustituir el valor obtenido ( $X=6$ ) en la ecuación inicial :

$$\sqrt{9X + 10} - 2\sqrt{X + 3} = \sqrt{X - 2}$$

$$\sqrt{9(6) + 10} - 2\sqrt{6 + 3} = \sqrt{6 - 2}$$

$$\sqrt{54 + 10} - 2\sqrt{9} = \sqrt{4}$$

$$\sqrt{64} - 2(3) = 2$$

$$8 - 6 = 2$$

$$2 = 2$$

**La ecuación irracional estudiada se resuelve con  $X = 6$**

**Ejemplo 8 :** Resolver  $\sqrt[3]{4 + \sqrt{X + 2}} = 2$

En el miembro izquierdo observamos que hay una raíz cuadrada dentro de una raíz cúbica, luego procedemos a elevar al cubo ambos miembros de la ecuación para anular la raíz cúbica :

$$\left( \sqrt[3]{4 + \sqrt{X + 2}} \right)^3 = 2^3$$

$$4 + \sqrt{X + 2} = 8$$

Se aísla el radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos

$$\sqrt{X + 2} = 8 - 4$$

Se elevan al cuadrado los dos miembros.

$$(\sqrt{X + 2})^2 = (4)^2$$

Se resuelve la ecuación obtenida.

$$X + 2 = 16 \quad ; \quad X = 16 - 2 \quad ; \quad \mathbf{X = 14}$$

Comprobando los resultados :

$$\sqrt[3]{4 + \sqrt{14 + 2}} = 2 \quad ; \quad \sqrt[3]{4 + \sqrt{16}} = 2$$

$$\sqrt[3]{4 + 4} = 2 \quad ; \quad \sqrt[3]{8} = 2 \quad ; \quad \mathbf{2 = 2}$$

**La ecuación irracional estudiada se resuelve con  $X = 14$**

**Ejemplo 9 :** Resolver  $\sqrt{2X - 1} + \sqrt{2X + 1} = \frac{1}{\sqrt{2X - 1}}$

Al notar que el miembro de la derecha presenta una fracción se recomienda indicar toda la ecuación de manera lineal, para ello podemos "pasar" el denominador del miembro de la derecha "multiplicando" todo el miembro de la izquierda :

$$(\sqrt{2X - 1}) \cdot (\sqrt{2X - 1} + \sqrt{2X + 1}) = 1$$

Al aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación obtendremos :

$$(\sqrt{2X - 1}) \cdot (\sqrt{2X - 1}) + (\sqrt{2X - 1}) \cdot (\sqrt{2X + 1}) = 1 \quad \text{(a)}$$

Si recordamos que :

$$\text{Primero } (\sqrt{2X - 1}) \cdot (\sqrt{2X - 1}) = (\sqrt{2X - 1})^2 = 2X - 1$$

$$\begin{aligned} \text{Segundo } (\sqrt{2X - 1}) \cdot (\sqrt{2X + 1}) &= \sqrt{(2X - 1) \cdot (2X + 1)} \\ &= \sqrt{(2X)^2 - 1^2} = \sqrt{4X^2 - 1} \end{aligned}$$

La ecuación (a) quedará indicada como :

$$2X - 1 + \sqrt{4X^2 - 1} = 1$$

Luego podemos continuar su solución de manera similar a lo explicado en el ejemplo 3 de esta guía (página 3) :

Se aísla el radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos :

$$\sqrt{4X^2 - 1} = 1 - 2X + 1 \quad ; \quad \sqrt{4X^2 - 1} = 2 - 2X$$



Se elevan al cuadrado los dos miembros de la ecuación :

$$(\sqrt{4X^2 - 1})^2 = (2 - 2X)^2$$

$$4X^2 - 1 = 4 - 8X + 4X^2$$

$$4X^2 - 1 - 4 + 8X - 4X^2 = 0$$

$$-5 + 8X = 0 \quad ; \quad 8X = 5 \quad ; \quad X = \frac{5}{8}$$

Comprobando el resultado

$$\sqrt{2 \cdot \frac{5}{8} - 1} + \sqrt{2 \cdot \frac{5}{8} + 1} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \frac{5}{8} - 1}}$$

$$\sqrt{\frac{10}{8} - 1} + \sqrt{\frac{10}{8} + 1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{8} - 1}}$$

Para facilitar los cálculos sustituimos a 1 por  $\frac{8}{8}$

$$\sqrt{\frac{10}{8} - \frac{8}{8}} + \sqrt{\frac{10}{8} + \frac{8}{8}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{8} - \frac{8}{8}}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{8}} + \sqrt{\frac{18}{8}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{8}}}$$

Reduciendo las fracciones (dividiendo numerador y denominador entre dos) :

$$\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}$$

Aplicando propiedad de la división de radicales :

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}}$$

Aplicando la "doble c" en el miembro de la derecha :

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}$$

Sacando las raíces cuadradas :

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{4}{2} = 2 \quad ; \quad 2 = 2$$

La ecuación irracional estudiada se resuelve con

$$X = \frac{5}{8}$$