

**Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de La Plata**



ESTRUCTURAS III

Introducción a la Teoría de Elementos Finitos (Elementos Resorte, Barra y Viga)

Autores:

Ing. Santiago Pezzotti
Ing. Federico Antico

1-Introducción

El método de los **elementos finitos** (MEF en castellano o FEM en inglés) es un método de cálculo utilizado en diversos problemas de ingeniería, que se basa en considerar al cuerpo o estructura dividido en elementos discretos, con determinadas condiciones de vínculo entre sí, generándose un sistema de ecuaciones que se resuelve numéricamente y proporciona el estado de tensiones y deformaciones. También se utiliza en matemáticas como método nodal aproximado para resolver ecuaciones diferenciales en forma numérica.

Es un procedimiento numérico aplicable a un gran número de problemas con condiciones de borde impuestas (en las estructuras las condiciones de borde serían: restricciones y cargas externas). Varios de estos problemas no tienen solución analítica o es muy difícil obtenerla, por lo que se convierte en la única alternativa de resolución. Con este método se pueden resolver sistemas los cuales no son fáciles de resolver mediante modelos matemáticos simples.

Existen dos tipos de caminos para su formulación, basándose en el principio de los trabajos virtuales, es decir, formulaciones variacionales, o mediante el método de Galerkin, Método directo o bien con Ritz..

Si bien fue originalmente desarrollado para el análisis de estructuras, con este método se pueden representar entre otros, los siguientes fenómenos físicos:

- Fenómenos termodinámicos: distribución de temperaturas en un sólido.
- Simulación de efectos dinámicos: Choque de dos cuerpos.
- Geomecánica: Comportamiento de la corteza terrestre.

2- Concepto

La base del método de los elementos finitos es la representación de un cuerpo por un ensamble de subdivisiones llamadas *elementos*. Estos elementos se interconectan a través de puntos llamados *nodos*.

Una manera de discretizar un cuerpo o estructura es dividirla en un sistema equivalente de cuerpos pequeños, tal que su ensamble representa el cuerpo original. La solución que se obtiene para cada unidad se combina para obtener la solución total. Por ende, La solución del problema consiste en encontrar los desplazamientos de estos puntos y a partir de ellos, las deformaciones y las tensiones del sistema analizado. Las propiedades de los elementos que unen a los nodos, están dadas por el material asignado al elemento, que definen la rigidez del mismo, y la geometría de la estructura a modelizar (a partir de las Leyes de la Elástica). Las deformaciones y las fuerzas externas se relacionan entre sí mediante la rigidez y las relaciones constitutivas del elemento. Trabajando en régimen elástico, las ecuaciones que definen el sistema pueden expresarse de forma matricial como se muestra a continuación:

$$[K] \cdot \{\delta\} = \{F\}$$

Donde :

- $[K]$: es la matriz rigidez del sistema
- $\{\delta\}$: es el vector desplazamientos
- $\{F\}$: es el vector de esfuerzos

Los tipos de elementos utilizados generalmente en la resolución a través de Fem son:

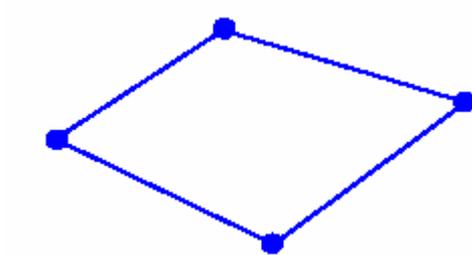
- Elementos Lineales (1-D)



Estos pueden ser:

- Resorte
- Barras
- Vigas
- Caños

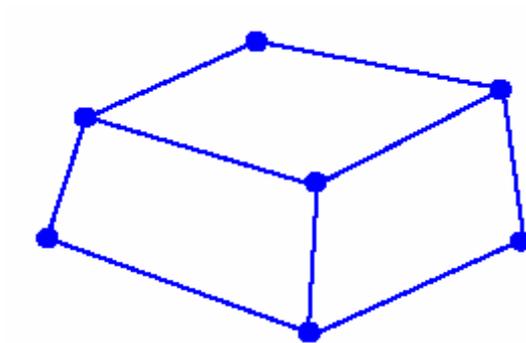
- Elementos Planos (2-D)



Estos pueden ser:

- membranas
- placas

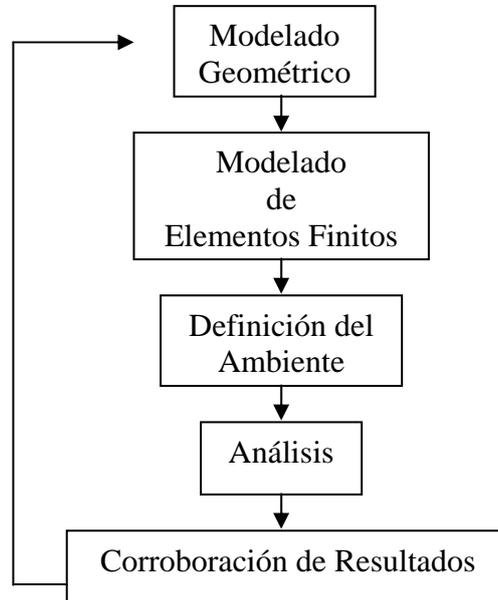
- Elementos Sólidos (3-D)



Es importante destacar que se puede utilizar combinaciones de estos elementos actuando en conjunto.

3-Proceso de Análisis por Elementos Finitos

El proceso de análisis por elementos finitos se puede describir como:

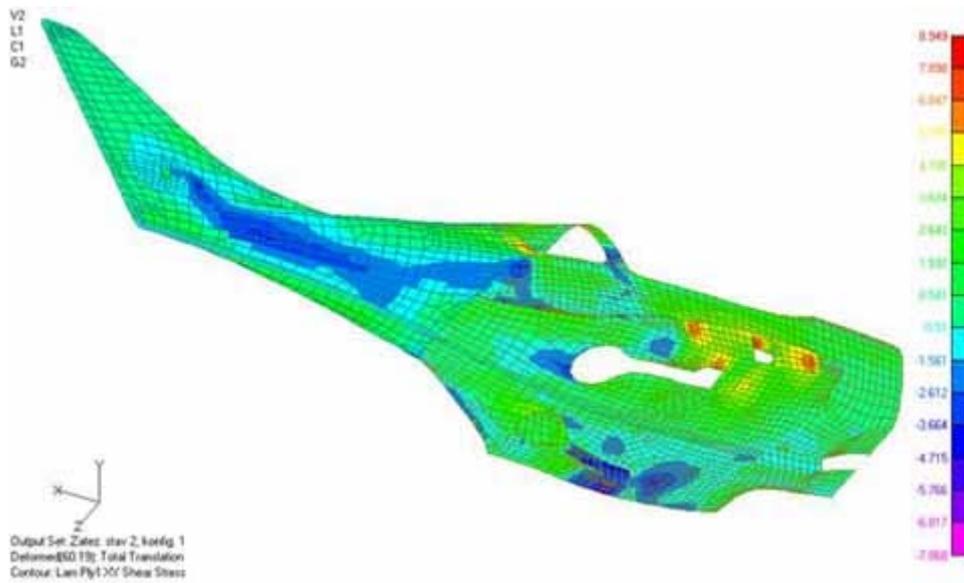
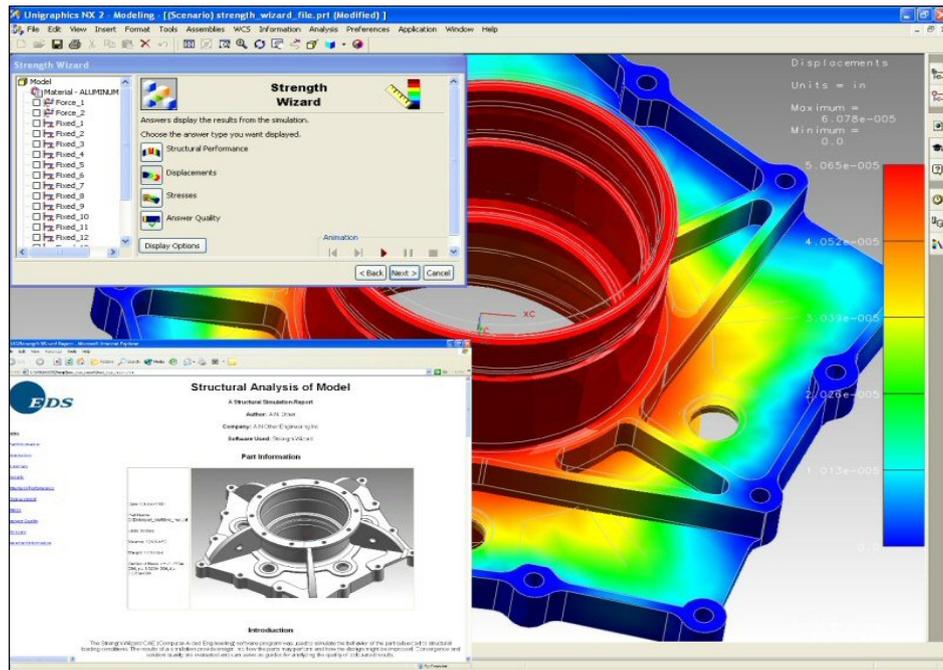


- *Modelado Geométrico*: Creación del modelo matemático del objeto o del conjunto. Reproducción del sólido en forma precisa y de la geometría de la superficie.
- *Modelado de Elementos Finitos*: Subdividir la geometría del modelo en elementos discretos. Asignar las propiedades del material y del elemento.
- *Definición del Ambiente*: Aplicar las cargas y las condiciones de borde para simular el ambiente de la operación.
- *Análisis*: Computar los resultados (tensiones, deformaciones, etc.) a partir de análisis estáticos, dinámicos o de transferencia de calor.
- *Corroboración de Resultados*: Comparar los resultados con los criterios de diseño. Rediseñar la estructura y repetir el proceso si fuese necesario.

En la actualidad la utilización de este método ha crecido notablemente debido a la utilización de software avanzado (además de un hardware potente que debe poseer gran velocidad y mucha memoria).

Los software mas utilizados en la actualidad son:

- Msc Nastran
- Msc Patran
- Ansys
- Dyna 3D
- Abaqus

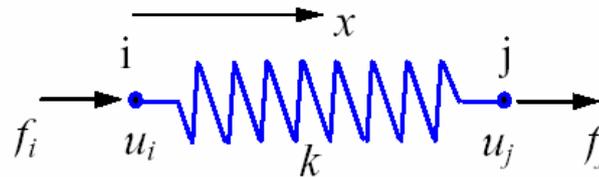


Cabe destacar que la utilización de software no implica la obtención del resultado exacto y real, es solo una aproximación y esta en el criterio del usuario el saber discernir entre un resultado coherente y uno que no lo es; además de conocer los márgenes de error y las limitaciones del modelo y el método.

4- Método Directo

4-1-Elemento Resorte

Dado un resorte con fuerzas aplicadas en la dirección longitudinal del mismo:



El sistema se compone de:

- Dos Nodos: i, j
- Constante Elástica del Resorte: k

El mismo está sometido:

- Fuerzas en los Nodos: f_i, f_j

El elemento tiene dos grados de libertad, en el sentido longitudinal del elemento, cualquier desplazamiento de los nodos en el sentido normal al elemento no generará esfuerzos internos:

- Dos desplazamientos: u_i, u_j

La relación entre la fuerza F y el desplazamiento Δ en régimen lineal será:

$$F = K \cdot \Delta \quad \text{donde } \Delta = u_j - u_i$$

Donde K es la rigidez del elemento o la constante elástica del resorte.

Haciendo equilibrio de fuerzas internas en los Nodos:

Nodo i :

$$f_i = -F = -k(u_j - u_i) = ku_i - ku_j$$

Nodo j :

$$f_j = F = k(u_j - u_i) = -ku_i + ku_j$$

Expresado matricialmente:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

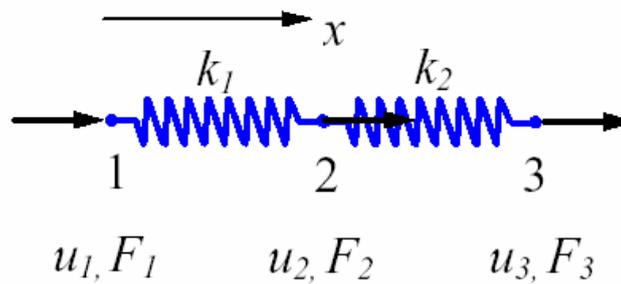
O bien, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$

Donde:

- k : es la matriz rigidez
- u : es el vector desplazamiento
- f : es el vector de fuerzas internas

4-2-Sistema de Resortes

Considerando un par de resortes en serie:



Para el Elemento 1:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{Bmatrix}$$

Para el Elemento 2:

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}$$

Donde f_i^m es la fuerza interna local del Nodo i actuando en el Elemento m ($i=1,2$).
Considerando la condición de equilibrio estático de fuerzas: F externas = F internas

Nodo 1:

$$F_1 = f_1^1$$

Nodo 2:

$$F_2 = f_2^1 + f_1^2$$

Nodo 3:

$$F_3 = f_2^2$$

Desarrollando con los valores de las fuerzas internas en función de la rigidez de cada elemento:

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1 u_1 - k_1 u_2 \\ F_2 &= -k_1 u_1 + (k_1 + k_2) u_2 - k_2 u_3 \\ F_3 &= -k_2 u_2 + k_2 u_3 \end{aligned}$$

De forma Matricial:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

O bien, $\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$

Donde: \mathbf{K} : es la matriz rigidez del sistema completo de resortes

Se puede plantear por separado y luego plantear superposición:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}$$

Planteando superposición se obtiene:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix}$$

A modo de ejemplo si consideramos un sistema que posee las siguientes condiciones:

$$u_1 = 0 \quad \text{and} \quad F_2 = F_3 = P$$

Reemplazando:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ P \end{Bmatrix}$$

Se reduce a:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \end{Bmatrix}$$

Y,

$$F_1 = -k_1 u_2$$

Como incógnita tenemos:

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo,

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P/k_1 \\ 2P/k_1 + P/k_2 \end{Bmatrix}$$

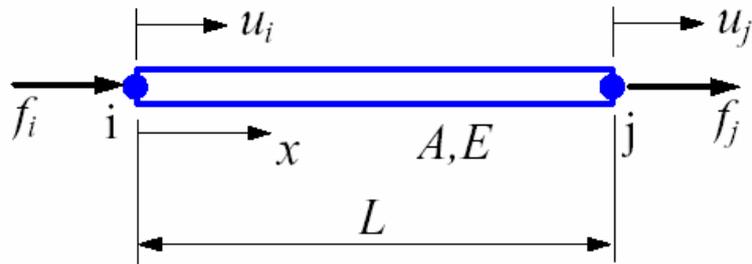
Reemplazando se obtiene la fuerza de reacción:

$$\boxed{F_1 = -2P}$$

Como conclusión, para un sistema de “n” nodos, el método de elementos finitos permite generar “n” ecuaciones, las cuales deberán tener “n” incógnitas para ser un sistema definido. Las incógnitas podrán ser parte del vector desplazamiento o ser parte del vector fuerza. Cada nodo deberá tener su desplazamiento o su fuerza actuante como condición de borde impuesta. Este sistema permite, cómo veremos más adelante resolver sistemas isoestáticos e hiperestáticos sin necesidad de cambiar el método.

4-3-Elemento Barra en Una Dimensión

Consideremos una barra de sección constante:



El sistema se compone de:

- Dos Nodos: i, j
- Modulo de Elasticidad E
- Área de la Sección Transversal A
- Longitud del Elemento L

El mismo esta sometido:

- Fuerzas en los Nodos: f_i, f_j

El elemento tiene dos grados de libertad, en el sentido longitudinal del elemento, cualquier desplazamiento de los nodos en el sentido normal al elemento no generara esfuerzos internos:

- Dos desplazamientos: u_i, u_j

Sabiendo que la rigidez a tracción / compresión de una barra es:

$$\frac{EA}{L}$$

Y haciendo una analogía con el elemento resorte, tenemos que:

$$k = \frac{EA}{L}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

O bien,

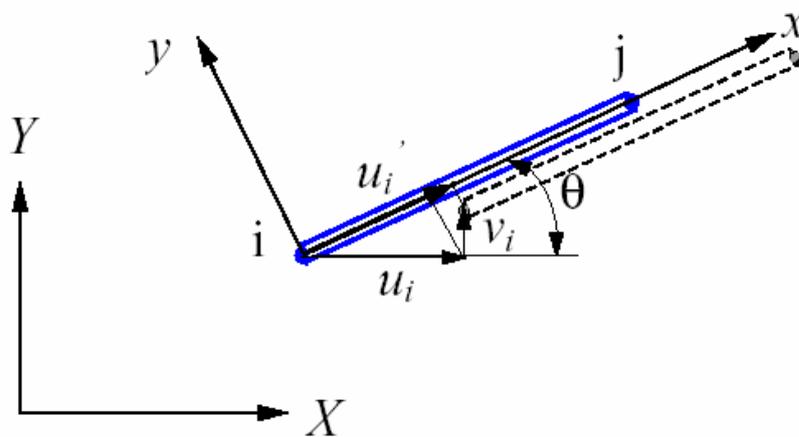
$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la ecuación de equilibrio del Elemento será:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

Para la resolución de este sistema se procede de la misma manera que en el elemento resorte.

4-4-Elemento Barra en Dos Dimensiones



Local	Global
x,y	X,Y
u_i', v_i'	u_i, v_i
1 grado de Libertad	2 grados de Libertad

Nota: El desplazamiento lateral v_i' no contribuye a la deformación de la barra.

La idea es trabajar con las coordenadas globales, por lo tanto se deben hacer las siguientes transformaciones:

$$u_i' = u_i \cos \theta + v_i \sin \theta = \begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$v_i' = -u_i \sin \theta + v_i \cos \theta = \begin{bmatrix} -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

Donde:

$$l = \cos \theta, \quad m = \sin \theta$$

Escrito en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

O bien,

$$\mathbf{u}'_i = \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{u}_i$$

Donde la *matriz transformación*:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix}$$

Donde la relación con la *matriz ortogonal*:

$$\tilde{\mathbf{T}}^{-1} = \tilde{\mathbf{T}}^T$$

A modo de ejemplo, se puede decir que para un sistema de elemento barra con dos nodos tenemos que:

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

O bien,

$$\mathbf{u}' = \mathbf{T} \mathbf{u}$$

Con,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix}$$

Las fuerzas nodales son transformadas de la misma manera:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{T} \mathbf{f}$$

Para obtener la matriz rigidez en dos dimensiones:

En el sistema local de coordenadas tenemos que:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_i \\ u'_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_i \\ f'_j \end{Bmatrix}$$

Esto se puede escribir en su totalidad como:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_i \\ 0 \\ f'_j \\ 0 \end{Bmatrix}$$

O bien,

$$\mathbf{k}' \mathbf{u}' = \mathbf{f}'$$

Utilizando las transformaciones

$$\mathbf{u}' = \mathbf{T}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{f}' = \mathbf{T}\mathbf{f}$$

Obtenemos:

$$\mathbf{k}' \mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{f}$$

Multiplicando ambos lados por \mathbf{T}^T y como $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{I}$, obtenemos:

$$\mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

La matriz rigidez en el sistema global quedara de la siguiente manera:

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}$$

La cual es una matriz simétrica de 4X4. Escrita de manera explicita tenemos que:

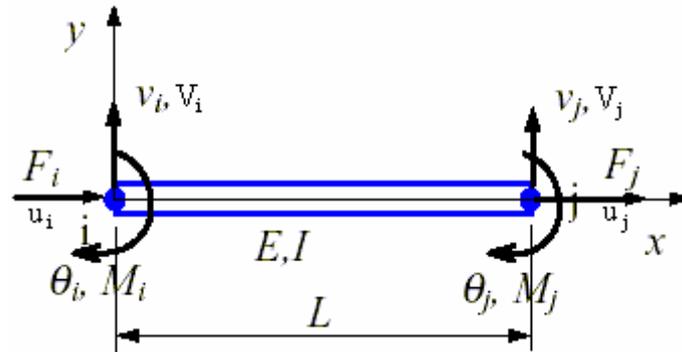
$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L} \begin{matrix} & \begin{matrix} u_i & v_i & u_j & v_j \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Donde los cosenos directores l y m son:

$$l = \cos \theta = \frac{X_j - X_i}{L}, \quad m = \sin \theta = \frac{Y_j - Y_i}{L}$$

4-5-Elemento Viga

Se considera una viga en el plano. Esta toma esfuerzos de Corte, Axiles y Momentos, todas consideradas en el plano. Cada Nodo posee tres Grados de Libertad (u , v , q). Un elemento que toma estas cargas, tiene asociado para el calculo a E , J , I y A .



El sistema se compone de:

- Dos Nodos: i, j
- Modulo de Elasticidad E
- Área de la Sección Transversal A
- Longitud del Elemento L
- Momento de Inercia I

El mismo esta sometido:

- Fuerzas en los Nodos: F_i, F_j, V_i, V_j
- Momento en los Nodos: M_i, M_j

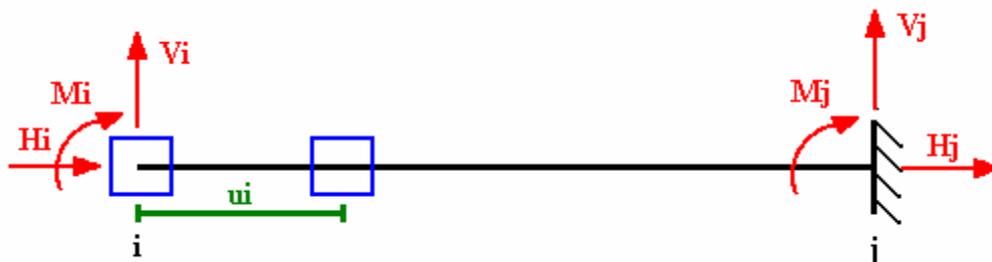
Habrà tres grados de libertad por cada nodo

- Cuatro desplazamientos: u_i, u_j, v_i, v_j
- Dos Giros: θ_i, θ_j

Para crear la Matriz Rigidez se suponen casos con desplazamientos unitarios, que luego mediante Superposición se ensamblan y dan forma a dicha matriz.

Se adoptan giros en sentido horario y desplazamientos positivos.

- Se supone $u_i=1$
 $u_j, v_i, v_j, \theta_i, \theta_j=0$



Aplicando la Ley de Hooke, tal como se hace con elemento barra, tenemos que:

$$H_i = \frac{EA}{l} \cdot u_i$$

Por lo tanto,

$$H_i = \frac{EA}{l}$$

Realizando un equilibrio de fuerzas,

$$H_j = -\frac{EA}{l}$$

➤ Se supone $v_i = 1$
 $u_i, u_j, v_j, \theta_i, \theta_j = 0$



Se puede demostrar calculando por Método de las Fuerzas que para un Desplazamiento Transversal en el extremo i, los esfuerzos en el sistema son:

$$V_i = \frac{12EJ}{l^3}$$

$$M_i = \frac{6EJ}{l^2}$$

$$V_j = -\frac{12EJ}{l^3}$$

$$M_j = \frac{6EJ}{l^2}$$

$$H_i = 0$$

$$H_j = 0$$

➤ Se supone $\theta_i = 1$

$$u_i, u_j, v_i, v_j, \theta_j = 0$$



De la misma manera que en el caso anterior, tenemos que:

$$V_i = -\frac{6EJ}{l^2}$$

$$M_i = \frac{4EJ}{l}$$

$$V_j = \frac{6EJ}{l^2}$$

$$M_j = \frac{2EJ}{l}$$

$$H_i = 0$$

$$H_j = 0$$

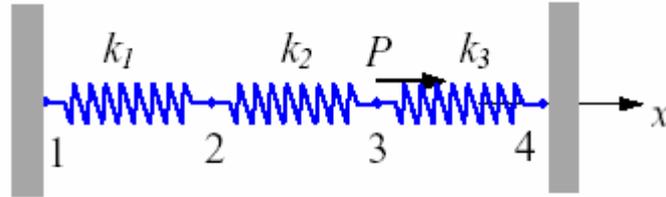
Procediendo de forma análoga para los desplazamientos del Nodo j , obtendremos los restantes coeficientes de la Matriz Rigidez del Elemento.

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

5- Ejemplos Prácticos

5-1-Elemento Resorte

Sea un sistema de resortes en serie, con una carga P aplicada:



Datos:

$$k_1 = 100 \text{ N/mm}, \quad k_2 = 200 \text{ N/mm}, \quad k_3 = 100 \text{ N/mm}$$

$$P = 500 \text{ N}, \quad u_1 = u_4 = 0$$

Se pide:

- Encontrar la matriz rigidez del sistema.
- Desplazamientos en los Nodos 2 y 3.
- Las fuerzas en los empotramientos (Nodos 1 y 4).
- La fuerza en el resorte 2.

Solución

- La matriz rigidez de cada elemento es:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \text{ (N/mm)}$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \text{ (N/mm)}$$

$$\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \text{ (N/mm)}$$

Aplicando el principio de superposición se obtiene la matriz rigidez del sistema completo:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 100+200 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 200+100 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

o bien,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

La Ecuación Matricial de Equilibrio quedara de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 300 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ P \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

b) Aplicando las Condiciones de Borde:

$$u_1 = u_4 = 0$$

en la Ecuación Matricial de Equilibrio y tachando la primera y cuarta fila y columna, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 300 & -200 \\ -200 & 300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

Cuya solución es:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P/250 \\ 3P/500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \text{ (mm)}$$

c) Con la primera y cuarta fila de la Ecuación de Equilibrio, y con los datos de los desplazamientos ya calculados, tenemos que:

$$F_1 = -100u_2 = -200 \text{ (N)}$$

$$F_4 = -100u_3 = -300 \text{ (N)}$$

d) La ecuación de equilibrio del elemento 2 es:

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

donde,

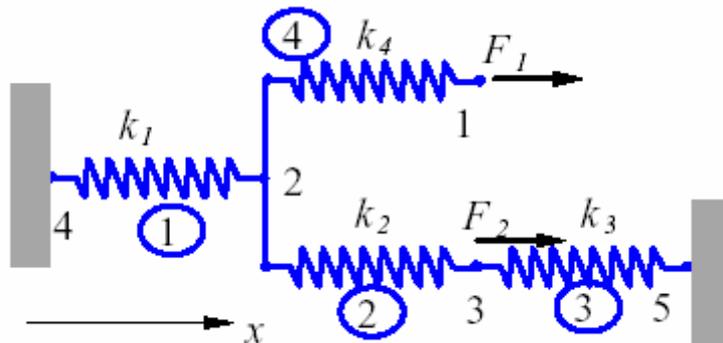
$$i = 2, j = 3$$

Por lo tanto se puede calcular, la fuerza como:

$$\begin{aligned} F = f_j = -f_i &= [-200 \quad 200] \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\ &= [-200 \quad 200] \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \\ &= 200 \text{ (N)} \end{aligned}$$

5-2- Sistema de Resortes

Sea un sistema de resortes en serie-paralelo con cargas aplicadas:



Se pide:

Para el Sistema de Resortes de la figura, cuyos nodos fueron numerados de forma arbitraria, encontrar la Matriz Rigidez Global.

Solución:

Se construye una Tabla de Conectividad de Elementos:

<i>Element</i>	<i>Node i (1)</i>	<i>Node j (2)</i>
1	4	2
2	2	3
3	3	5
4	2	1

La matriz rigidez de cada elemento:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{matrix} & u_4 & u_2 \\ \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \mathbf{k}_2 = \begin{matrix} & u_2 & u_3 \\ \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

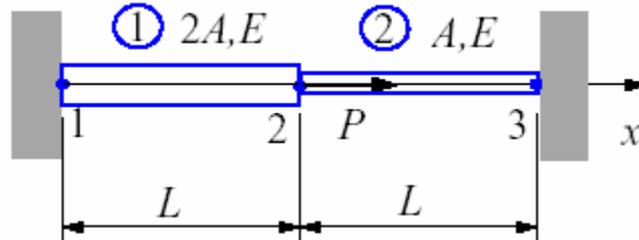
$$\mathbf{k}_3 = \begin{matrix} & u_3 & u_5 \\ \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \mathbf{k}_4 = \begin{matrix} & u_2 & u_1 \\ \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 \\ -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Por lo tanto, aplicando el Principio de Superposición, obtendremos la Matriz Rigidez Global del Sistema:

$$\mathbf{K} = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\ -k_4 & k_1 + k_2 + k_4 & -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & 0 & -k_3 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

5-3-Elemento Barra

Sean dos barras de igual Longitud, igual Modulo de Elasticidad y el Área de una es dos veces la de la otra:



Se pide:

Hallar el desplazamiento en el Nodo 2.

Solución:

La Matriz Rigidez de cada elemento:

Elemento 1

$$\mathbf{k}_1 = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} & u_1 & u_2 \\ 1 & & -1 \\ -1 & & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento 2

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} & u_2 & u_3 \\ 1 & & -1 \\ -1 & & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando el Principio de Superposición, obtenemos la Matriz Rigidez Global, y así, obtenemos la Ecuación de Equilibrio.

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Aplicando las Condiciones de Borde:

$$u_1 = u_3 = 0, \quad F_2 = P$$

y reemplazando, se obtiene:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Para hallar el desplazamiento en el Nodo 2, utilizamos solo la segunda fila:

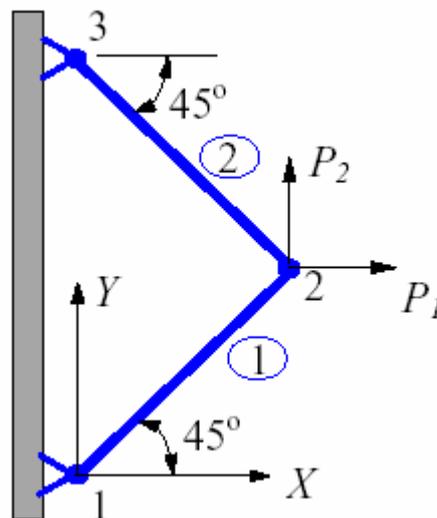
$$\frac{EA}{L} [3] \{u_2\} = \{P\}$$

Por lo tanto,

$$u_2 = \frac{PL}{3EA}$$

5-4-Elemento Barra en Dos Dimensiones

Sean dos barras idénticas que poseen el mismo Modulo de Elasticidad, la misma Área Transversal y la misma Longitud:



Se pide:

Hallar el desplazamiento del Nodo 2.

Solución:

En el sistema Local de Coordenadas, la matriz rigidez de los elementos es:

$$\mathbf{k}'_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{k}'_2$$

Estas matrices no pueden ser ensambladas juntas, ya que cada una esta en diferentes Sistemas Coordinados. Por esta razón se debe trabajar con un Sistema Coordinado Global.

Trabajaremos con cada elemento por separado:

Elemento 1:

$$\theta = 45^\circ, \quad l = m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La matriz rigidez del elemento 1 respecto a la Terna Global es:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{T}_1^T \mathbf{k}'_1 \mathbf{T}_1 = \frac{EA}{2L} \begin{matrix} & u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Elemento 2:

$$\theta = 135^\circ, \quad l = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La matriz rigidez del elemento 1 respecto a la Terna Global es:

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{T}_2^T \mathbf{k}'_2 \mathbf{T}_2 = \frac{EA}{2L} \begin{matrix} & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Aplicando el Principio de Superposición, podemos armar la Ecuación de Equilibrio:

$$\frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

Utilizando las Condiciones de Borde:

$$u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0, \quad F_{2X} = P_1, \quad F_{2Y} = P_2$$

Consideramos solo la tercer y cuarta fila, junto a la tercer y cuarta columna, y obtenemos:

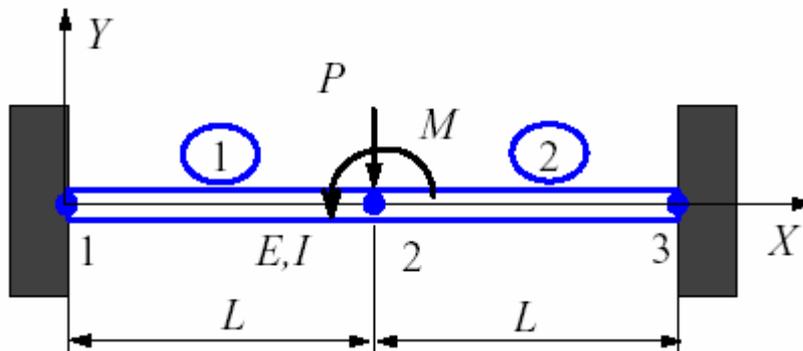
$$\frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{EA} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

5-5-Elemento Viga

Sea una viga empotrada-empotrada, con una carga P aplicada en $L/2$ y un Momento actuando en el mismo punto:



Se pide:

- a) Hallar la Rotación y Deflexión del Nodo 2.
 b) Hallar las Reacciones de Vinculo en los Empotramientos.

Nota: Para este ejemplo, se tomo como convención que el momento antihorario es positivo. No solo como condición de borde, sino en el análisis matricial, y es por eso que la matriz rigidez difiere en signos con la de la explicación de la pagina 15.

Solución:

- a) La Matriz Rigidez de cada Elemento es:

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{matrix} & \begin{matrix} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La Ecuación de Equilibrio Global es:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \left[\begin{matrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{matrix} \right] \end{matrix} = \begin{matrix} \left[\begin{matrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{2Y} \\ M_2 \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{matrix} \right] \end{matrix}$$

Aplicando las Condiciones de Borde:

$$F_{2Y} = -P, \quad M_2 = M$$

$$v_1 = v_3 = \theta_1 = \theta_3 = 0$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto, resolviendo:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{24EI} \begin{Bmatrix} -PL^2 \\ 3M \end{Bmatrix}}$$

b) Reemplazando en la Matriz Global, tenemos:

$$\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L \\ 6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo tenemos,

$$\boxed{\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 2P + 3M/L \\ PL + M \\ 2P - 3M/L \\ -PL + M \end{Bmatrix}}$$

6- Referencias

- "Análisis de Estructuras mediante el Método de los Elementos Finitos". Ing. Ruben Lopez Triaca. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
- "Introduction to Finite Element Method". Yijun Liu. University of Cincinnati.
- "Finite Elements in Solids and Structures". Astley.
- "Resistencia de Materiales". Stio-pin