Universidad de La Habana
Facultad de Matemática y Computación
Departamento de Matemática

Centro de Estudios Avanzados de Cuba
Departamento de Simulación y modelación

SOBRE LAS FUNCIONES DE p-VARIACIÓN ACOTADA

Tesis presentada en opción al grado de
Máster en Ciencias Matemáticas

Autor: Lic. Rolby Milian Pérez
Tutora: Dra. Rita Roldán Inguanzo

Ciudad de La Habana
2009

AGRADECIMIENTOS

Creo que es esta una parte muy complicada en la escritura de la Memoria, sí, porque hay varias personas que, en mayor o menor grado han puesto su granito de arena para que este trabajo salga bien, como no puedo hacer un capítulo de agradecimientos; trataré de no olvidar a ninguno de los más importantes:

Antes que todo a Rita por su tiempo y disposición a ayudarme en cualquier momento.

A Karen y a sus padres, por los ánimos, por creer en mí y por el apoyo en los momentos de "stop".

A mi mamá, a mis tías (la china y Nelsy), a Pepe, Luisito, Juanito, Yariel, Tony y Nailia, Harold y Elizabeth, mi familia incondicional y desinteresada.

A Ariel Felipe, por la incesante preocupación por este trabajo.

A todos aquellos que me hicieron reír o me facilitaron alguna penosa gestión, y a Dios, por traerme hasta aquí.

A la memoria de los que nunca se detuvieron.
La muerte es solo el comienzo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En el Análisis Funcional, el problema de la representación de los funcionales lineales continuos sobre un espacio dado, juega un papel esencial. La resolución de dicho problema se hace particularmente difícil en el caso de espacios de funciones, resultando que, en la mayoría de los casos, los elementos del espacio dual solo pueden ser representados a través de clases de equivalencia. En especial, la cuestión de la dualidad del espacio de las funciones de p-variación acotada y las absolutamente p-continuas ha conseguido quitar el sueño a más de un matemático, y esa es una de las razones que sustenta el tema de esta tesis. Por ello se hace necesario una breve introducción que recorra a grandes rasgos el camino por el que han transitado las investigaciones.

Entre los pioneros más destacados, según la opinión del autor, se encuentra Hadamard (1865-1963), quien ataca el problema de representar los funcionales lineales y continuos sobre $C[a,b]$, obteniendo un resultado que Frechet(1878-1973) mejora en 1904, y no se conforma con ello, sino que comienza a investigar problemas similares sustituyendo $C[a,b]$ por otros espacios de funciones. Tan pronto como comenzó el estudio del espacio de Hilbert, Frechet y Riesz (1880-1956) independientemente demuestran que para toda funcional lineal f continua sobre l^2 existe un único elemento $x_0 \in l^2$ tal que $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ para toda $x \in l^2$. Tal resultado se conoce como Teorema de Riesz-Frechet o Teorema de Representación de Riesz (ver, por ejemplo, [19]).

Por otra parte, en su tesis de 1935, I. M. Gelfand (ver [12]) extiende la definición de función de variación acotada a función abstracta de variación acotada y generaliza el Teorema de Representación de Riesz, demostrando que el espacio de los operadores lineales y continuos definidos en el espacio de las funciones absolutamente continuas sobre un intervalo y con valores en un espacio normado débilmente completo es isomorfo al espacio de las funciones abstractas de variación acotada.

Luego, en el año 1937, en los trabajos de E.R. Love y L.C. Young (ver [21]), aparece la noción de función de p-variación acotada sobre el intervalo $[a,b]$. En esta línea se destacan también los polacos Musielak y Orlicz (ver [28]), quienes en el año 1959 demostraron en conjunto la separabilidad del espacio $C_p[a,b]$ de las funciones absolutamente p-continuas en $[a,b]$.

En 1984 aparece un trabajo del matemático ruso V.Kisliakov (ver [18]), donde se demuestra de forma indirecta que el espacio bidual a $C_p[a,b]$ de las funciones absolutamente p-continuas en $[a,b]$ es isomorfo al espacio $V_p[a,b]$ de las funciones de p-variación acotada en $[a,b]$. De esta forma, la búsqueda de una demostración directa de la relación $C^{**}[a,b] \simeq V_p[a,b]$ se convierte en el objetivo principal del desarrollo de la tesis de doctorado (ver [33]) de la cubana Rita A. Roldán durante su estancia en Alemania (Jena) en 1989. Entre otros resultados, en la búsqueda de un isomorfismo isométrico entre los espacios $C_p[a,b]$ y $V_q[a,b]$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ en analogía con el caso clásico para $q=1$ y $p=1$, ya que $C_\infty[a,b]=C[a,b]$, se da una representación de los funcionales lineales y continuos sobre $C_p[a,b]$ a través de integrales de Stieltjes respecto a funciones de q-variación acotada en $[a,b]$. Se hace notar que $V_q[a,b]$ no puede ser el espacio dual de $C_p[a,b]$, mostrándose, no obstante, una condición suficiente para la existencia de la integral de Stieltjes, de forma tal que esta representa un funcional continuo.

A partir de este momento, en la literatura a disposición del autor de esta tesis, sólo se encuentran referencias a estos espacios en relación con otro tipo de problemas (por ejemplo, probabilísticos), y no se tiene noticia de que se haya continuado el estudio de la representación del espacio dual de $C_p[a,b]$ o de $V_p[a,b]$ hasta el año 2005, donde Y. Puig de Dios retoma el tema. En su tesis de licenciatura (ver [32]), Puig define los espacios de funciones abstractas de p-variación acotada y absolutamente p-continuas fuerte y débil, generalizando el problema. En este sentido demuestra que

i) El espacio de los operadores lineales y continuos

$$U : C_p[a,b] \to E$$

(siendo E un espacio normado débilmente completo). Es isomorfo al espacio de las funciones abstractas de q-variación acotada fuerte en $[a,b]$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ y $1 \leq p < \infty$.

ii) Sea $1 < p < \infty$, para cada $q < p'$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, el espacio de las funciones abstractas de q-variación acotada fuerte en $[a,b]$ es isomorfo a un subconjunto del espacio de los operadores lineales y continuos $U : C_p[a,b] \to E$ siendo E un espacio normado débilmente completo.

Nuevamente, aquí tampoco se obtiene isometría; aunque Puig presenta algunos resultados importantes en esta dirección. Luego, en 2008, en su tesis de licenciatura, el autor de esta tesis desarrolla un trabajo donde se aborda el problema, considerando al espacio de las funciones de p-variación acotada como un álgebra compleja, aprovechando así los elegantes resultados de la teoría de Gelfand de las álgebras de Banach, para obtener un teorema de representación (isométrica) a través de una integral con respecto a una medida regular definida sobre el espacio de ideales maximales del anillo normado, pero este último espacio queda sin caracterizar.

En esta tesis, como objetivo principal el autor se propone dar continuidad a su trabajo de licenciatura, exponiendo resultados referidos a la representación de C_p, la regularidad del álgebra en cuestión, la caracterización del espacio de ideales maximales de la subálgebra de las funciones de salto, la posibilidad de definir una involución en V_p, entre otros. Además, en un intento de hacer honor a los trabajos realizados para la búsqueda de una representación del espacio de las funciones de p-variación acotada y absolutamente p-continuas, se plantea colectar, de forma amena y autocontenida algunos reultados interesantes que contribuyen a describir el proceso evolutivo por el que han transitado las investigaciones. También, se aborda en la Memoria, aunque con bastante brevedad y en cortas exposiciones, el tema de las aplicaciones de las funciones en estudio.

La tesis consta de una introducción y cuatro capítulos de contenido, además de las conclusiones y recomendaciones. En el primer capítulo (*Preliminares*) se exponen las definiciones de p-variación acotada y p-continuidad absoluta de funciones definidas sobre un intervalo real $[a, b]$, así como algunos resultados interesantes (no relacionados directamente con la dualidad de estos espacios) ya existentes en la literatura. Además se expondrán aquí algunas definiciones y teoremas clásicos de la teoría de Gelfand de las álgebras de Banach que serán útiles para la correcta comprensión del trabajo.

En el segundo capítulo (*En busca de una Representación*), se plasmarán los resultados obtenidos producto de la búsqueda de una representación del espacio dual de los espacios V_p y C_p, con el objetivo de evidenciar la evolución en el tratamiento del problema.

El tercer capítulo (*El Álgebra de las Funciones de p-Variación Acotada*) estará dedicado a exponer algunos resultados importantes de la tesis de licenciatura del autor y se expondrán otros a modo de continuidad de este trabajo, a saber, se da una representación de C_p, se definen las funciones de salto y se estudia el espacio de ideales maximales de esta subálgebra, proponiendo paralelamente una descomposición de los elementos de álgebra. Además, se define una involución sobre V_p y se observan algunas de sus implicaciones, que pueden resultar útiles para la comprención del comportamiento de ciertos elementos del anillo. Por otro lado, a partir de un interesante teorema sobre la inversibilidad de algunos elementos carácteristicos del espacio y de un resultado de Wiener y Pitt (*ver*[38]), se obtiene un resultado concluyente sobre la regularidad del álgebra. Finalmente se propone un nuevo enfoque para el estudio del problema, definiendo p-semivariación, β-regulación y una relación de estos conceptos con las formas bilineales continuas; se obtienen algunos resultados a partir de trabajos recientes de Barbanti(*ver*[2]) y Blasco(*ver*[3]).

El cuarto capítulo (*Algunas Aplicaciones*), contiene resultados de algunos trabajos relacionados con la aparición en las aplicaciones, del concepto de p-variación acotada, incluyendo el caso $p = 1$. Se comentará sobre un trabajo relacionado con la descomposición de imágenes, de Stanley Osher, Andrés Solé y Luminita Vese, (ver[31]) de 2003 y otro de Yuriy Krvavych de 2002 (ver[20]), sobre al aplicación a la cuestión de redefinir el modelo de Black-Scholes de precio de las acciones utilizando el movimiento browniano fraccionario (fBm), y el papel en este sentido de la p-variación acotada.

Finalmente se presentan las conclusiones y recomendaciones, donde se resume el estado de cumplimiento de los objetivos de la tesis y se propone el sentido en que se le pudiera dar continuidad a la investigación.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En este capítulo se exponen algunos resultados elementales sobre la teoría de Gelfand de las álgebras de Banach que será conveniente tener en cuenta para el posterior desarrollo del trabajo. Tiene además una sección dedicada a exponer algunas propiedades importantes de las funciones de p-variación acotada que serán útiles para la ulterior comprensión de la Memoria.

1.1. Algebras de Funciones

Las definiciones y resultados de este epígrafe se pueden consultar (siempre que no se indique otra cosa) en (*ver*[11]).

DEFINICIÓN 1.1
Un álgebra de Banach es un espacio de Banach complejo A, el cual es también un álgebra asociativa, donde la multiplicación y la norma estan ligadas por la relación

$$\|fg\| \leq \|f\|\|g\|, \qquad \textit{para cualesquiera } f, g \in A.$$

El álgebra de Banach A es conmutativa si se cumple $fg = gf$ para todas $f, g \in A$.
Se dice que el álgebra de Banach A tiene una identidad si existe en ella un elemento $1 \in A$, tal que $\|1\| = 1$ y $1f = f1$ para toda $f \in A$.

En esta tesis se centrará el interés en las álgebras de Banach conmutativas con identidad.

1.1.1. Espectro y resolvente

La teoría espectral de operadores acotados encuentra su homólogo en los resultados sobre las álgebras de Banach que se exponen a continuación.

Definición 1.2

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad.
Se dice que un elemento $f \in A$ es inversible si existe un elemento $g \in A$ tal que $fg = 1$. En ese caso, el inverso g de f es evidentemente único, y se denota por f^{-1}.
La familia de los elementos inversibles de A se denota por A^{-1}.
Se dice que un número complejo λ es elemento del conjunto resolvente de $f \in A$ si $\lambda - f = \lambda 1 - f$ es inversible. El conjunto resolvente de f se denota por $\rho(f)$.
Si el número complejo λ no pertenece al conjunto resolvente, se dice que λ es elemento del espectro de f, el cual se denota por $\sigma(f)$.

Para el espectro de un elemento de un álgebra de Banach conmutativa con identidad se cumple:

Teorema 1.1

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad y sea $f \in A$. Entonces el espectro $\sigma(f)$ es un subconjunto compacto no vacío del plano complejo. Además, si $\lambda \in \sigma(f)$, la función $(\lambda - f)^{-1}$ depende analíticamente de λ; es decir, $(\lambda - f)^{-1}$ es localmente expresable como serie de potencias convergente.

Demostración: Si $|\lambda| > \|f\|$, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n}{\lambda^{n+1}}$$

converge a la función $g(\lambda)$, la cual es analítica en el infinito. Un cálculo directo muestra que $g(\lambda)(\lambda - f) = (\lambda - f)g(\lambda) = 1$; es decir, $g(\lambda) = (\lambda - f)^{-1}$. Luego, $\sigma(f)$ está contenido en el disco cerrado de radio $\|f\|$.

Por otra parte, si $\lambda_0 \in \rho(f)$, entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_0 - \lambda)^n}{(\lambda_0 - f)^{n+1}}$$

converge a la función $h(\lambda)$, la cual es analítica en el disco

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(\lambda_0 - f)^{-1}\|} \right\}.$$

Nuevamente un cálculo directo muestra que $h(\lambda) = (\lambda - f)^{-1}$. Consecuentemente el conjunto resolvente de f es abierto y $(\lambda - f)^{-1}$ es analítica en él.

Ahora, para cualquier funcional lineal continuo L definido sobre A, se tiene que $L((\lambda - f)^{-1})$ es una función de λ analítica sobre el conjunto resolvente de f que se anula en el infinito. Si el espectro $\sigma(f)$ fuera vacío, entonces la función $L((\lambda - f)^{-1})$

sería identicamente nula. Por el teorema de Hahn-Banach $(\lambda - f)^{-1}$ sería también cero, lo cual es imposible. Entonces $\sigma(f)$ no es vacío, quedando así demostrado el teorema.

Q.e.d.

En el curso de la demostración anterior se han establecido los siguientes resultados:

TEOREMA 1.2
Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad y sea $f \in A$. Si λ es un elemento del espectro $\sigma(f)$, entonces se cumple que $|\lambda| \leq \|f\|$.

TEOREMA 1.3
Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad y sea $f \in A$. Si λ es un elemento del conjunto resolvente $\rho(f)$ y $d(\lambda, \sigma(f))$ es la distancia de λ a $\sigma(f)$, entonces

$$d(\lambda, \sigma(f)) \geq \frac{1}{\|(\lambda - f)^{-1}\|}.$$

El siguiente teorema es crucial en la teoría.

TEOREMA 1.4 ***(Gelfand-Mazur)***
Un álgebra de Banach conmutativa y unitaria que es un campo es isométricamente isomorfo al campo de los números complejos.

Demostración: Toda álgebra de Banach con identidad A contiene una subálgebra isométricamente isomorfa al campo de los números complejos, (el álgebra de los múltiplos complejos de la identidad). Esto es suficiente para mostrar que si A es un campo, entonces cualquier $f \in A$ es un múltiplo complejo de la identidad.
Sea $f \in A$. Por el teorema 1.1, existe un número complejo λ, tal que $\lambda - f$ no es inversible. Como A es un campo, entonces debe ser $\lambda - f = 0$; es decir, $f = \lambda$, lo cual demuestra el teorema. **Q.e.d.**

1.1.2. El espacio de ideales maximales

De suma importancia por su estructura algebraica resulta resulta el estudio de los ideales de un álgebra de Banach. A continuación se presentan algunos detalles importantes relativos a estos subconjuntos.

DEFINICIÓN 1.3
Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad.
Un subconjunto $I \subset A$ es un ideal si para todos $f \in I$ y $g \in A$ se cumple que $fg \in I$.
Un ideal J de A se dice maximal si $J \neq A$ y J no está contenido en otro ideal de A.El conjunto de los ideales maximales de A es llamado espacio de ideales maximales de A y se denota por M_A.

Más adelante se introducirá una topología para el espacio de ideales maximales M_A.

El siguiente lema es elemental y es válido en general para anillos conmutativos con identidad.

LEMA 1.1.1
Cualquier ideal propio de un álgebra de Banach A conmutativa con identidad está contenido en un ideal maximal. Un ideal J es maximal si y solo si A/J es un campo.

TEOREMA 1.5
Todo ideal maximal de un álgebra de Banach conmutativa con identidad A es cerrado. Si J es un ideal maximal de A entonces A/J es isométricamente isomorfo al campo de los números complejos.

Demostración: Nótese que cualquier función de A que cumpla $\|1 - f\| < 1$ es inversible. En efecto si $\|1 - f\| < 1$, entonces 1 es elemento del conjunto resolvente de $1 - f$ por el teorema 1.2 y $f = 1 - (1 - f) \in A^{-1}$.
Si I es cualquier ideal propio, y $f \in I$, entonces $f \notin A^{-1}$, por lo que $\|1 - f\| \geq 1$. Esta misma desigualdad es también válida para f en la clausura $\bar{I}$ de I. Luego, la clausura de todo ideal propio es un ideal propio, y todos los ideales maximales deben ser cerrados.
Sea ahora J un ideal maximal de A. Como J es cerrado, A/J es un espacio de Banach con la norma

$$\|f + J\| = \inf_{g \in J} \|f + g\|.$$

Resulta sencillo comprobar que para $f, g \in A$ se cumple

$$\|fg + J\| \leq \|f + J\| \|g + J\|,$$

siendo entonces A/J un álgebra de Banach. Como $\|g + 1\| \geq 1$ para todo $g \in A$, se cumple que $\|1 + J\| = 1$. Consecuentemente $1 + J$ es la identidad para A/J.
Por el teorema de Gelfand-Mazur, A/J es isométricamente isomorfo al campo de los números complejos. Esto completa la demostración. **Q.e.d.**

Sea J un ideal maximal del álgebra de Banach conmutativa con identidad A. La proyección de $A \to A/J$ es un homomorfismo de álgebras de núcleo J. El teorema de Gelfand-Mazur permite identificar a A/J con el campo complejo. De esta manera J resulta el núcleo de un homomorfismo complejo no nulo ϕ.
Si $f \in A$, entonces se puede definir a $\phi(f)$ explícitamente como el único número complejo λ, tal que $f + J = \lambda + J$; es decir, tal que $f - \lambda \in J$.

Recíprocamente, si ϕ es un homomorfismo complejo no nulo de A y A_ϕ es el núcleo de ϕ, entonces A/A_ϕ es un campo, por lo que A_ϕ es un ideal maximal en A. Esto se resume en el siguiente teorema:

Teorema 1.6

Sean A un álgebra de Banach conmutativa con identidad y ϕ un homomorfismo complejo no nulo de A de núcleo A_ϕ. Entonces la correspondencia $\phi \mapsto A_\phi$ es una correpondencia biyectiva del espacio de los homomorfismos complejos no nulos sobre A en el espacio de ideales maximales de A.

En lo adelante se identificarán todos los ideales maximales de A con homomorfismos complejos, como es la costumbre.

El siguiente lema permitirá definir una topología para el espacio de ideales maximales M_A de A. Nótese que la afirmación relativa a la continuidad de ϕ se deduce del teorema 1.5, ya que que los funcionales lineales son continuos si y sólo si su núcleo es cerrado.

Lema 1.1.2

Sean A un álgebra de Banach conmutativa con identidad y ϕ un homomorfismo complejo no nulo de A. Entonces ϕ es continuo y se cumple que

$$\|\phi\| = 1 = \phi(1).$$

El lema anterior permite identificar a M_A con un subconjunto de la esfera unitaria del dual A^* de A y se define en M_A la topología heredada de A_*. En otras palabras, una red ϕ_α en M_A converge a ϕ si y sólo si $\phi_\alpha(f) \to \phi(f)$ para todo $f \in A$. Una base de vecindades abiertas de $\psi \in M_A$ está dada por conjuntos de la forma

$$N(\psi; f_1, ..., f_n; \epsilon) = \{\phi \in M_A; \quad |\phi(f_i) - \psi(f_j)| < \epsilon\},$$

donde $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $f_1, ..., f_n \in A$.

Teorema 1.7

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad. Entonces el espacio de ideales maximales M_A de A es un espacio de Hausdorff compacto.

Demostración:
El límite *- débil de homomorfismos que satisfacen $\phi(1) = 1$ es nuevamente un homomorfismo no nulo. Por lo tanto M_A es un subconjunto cerrado en la topología *-débil de la bola unidad de A^*. Por el teorema de Alaoglu (ver [5]), la bola unidad de A^* es *-débil compacta. Consecuentemente M_A es compacto. **Q.e.d.**

Definición 1.4

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad y sea $f \in A$. La transformada de Gelfand de $f \in A$ es la función compleja $\widehat{f}$ sobre M_A, definida por $\widehat{f}(f) = \phi(f)$.

Teorema 1.8
Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad. Entonces la transformada de Gelfand es un homomorfismo de A en el álgebra $\widehat{A}$ de las funciones continuas sobre M_A. El álgebra $\widehat{A}$ separa puntos en M_A y contiene a las constantes. La transformada de Gelfand satisface la relación

$$\|\widehat{f}\|_{M_A} \leq \|f\|, \qquad \forall f \in A.$$

Teorema 1.9
Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad. Si $f \in A$, entonces $\sigma(f)$ coincide con $\widehat{f}(M_A)$.

A continuación se presentan algunos ejemplos clásicos que ilustran lo anteriormente expuesto.

Ejemplo 1:

El álgebra $C(X)$ de todas las funciones complejas continuas sobre un espacio de Hausdorff compacto X es un álgebra de Banach con la norma usual del supremo

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Cualquier $x \in X$ determina el homomorfismo evaluación $\phi_x \in M_{C(X)}$ definido por

$$\phi_x(f) = f(x), \quad \forall f \in C(X).$$

Teorema 1.10
Cualquier $\phi \in M_{C(X)}$ es un homomorfismo evaluación en algún punto $x \in X$.

Demostración: Sea $\phi \in M_{C(X)}$ distinto de ϕ_x para toda $x \in X$. Entonces para cualquier $x \in X$, se selecciona $f_x \in C(X)$ tal que $f_x(x) \neq 0$, mientras que $\phi(f) = 0$. De este modo $|f_x^2|$ es positivo en una vecindad de x y se tiene que

$$\phi(|f_x|^2) = \phi(f_x)\phi(\overline{f_x}) = 0.$$

Seleccionando $x_1 ... x_n \in X$, tales que $|f_{x_1}| ... |f_{x_n}| = g$ es positivo en X, se cumple que g es inversible en $C(X)$. Esto contradice que el hecho de que $\phi(g) = 0$. **Q.e.d.**

Este teorema muestra que X y $C(X)$ son homeomorfos. En particular el espacio X está completamente determinado por la estructura de álgebra de Banach de $C(X)$.

Ejemplo 2:

Cualquier álgebra uniformemente cerrada A de $C(X)$, que contenga a las constantes, es un álgebra de Banach conmutativa con la norma del supremo. Si A separa los puntos de X, la correspondencia $x \mapsto \phi_x$ es una inmersión de X como subconjunto cerrado de M_A. El siguiente caso especial muestra cómo pueden surgir ideales maximales que no estén incluidos en X.

Se denota por Δ al disco unidad cerrado $\{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 1\}$ en el plano complejo. Su frontera $\partial\Delta$ es el círculo unidad $\{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$. La subálgebra de las funciones en $C(\partial\Delta)$ que pueden ser aproximadas uniformemente sobre $\partial\Delta$ por polinomios en z se denota por $P(\partial\Delta)$.

El k-ésimo coeficiente de Fourier de la función $f \in C(\partial\Delta)$ está dado por

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\phi})e^{ik\phi}d\phi = \frac{1}{2\pi i}\int_{b\Delta} f(z)z^{-k-1}dz.$$

Por el teorema de Fejer (ver [17]), f es el límite uniforme de las funciones

$$\sigma_n = \frac{f_0 + ... + f_n}{n+1},$$

donde

$$f_m = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ik\phi} = \sum_{k=-m}^{m} c_k z^k, \qquad z = e^{i\phi}.$$

Si los coeficientes de Fourier negativos de la función $f \in C(\partial\Delta)$ se anulan, entonces las f_m y las σ_n son polinomios en z. Así $f \in P(\partial\Delta)$. Además, por el principio del módulo máximo, los polinomios σ_n convergen uniformemente sobre Δ al prolongamiento continuo $\bar{f}$ de f a Δ, el cual es analítico en $int(\Delta)$.

Recíprocamente, si $f \in C(\partial\Delta)$ puede ser prolongada continuamente a Δ y analíticamente en $int(\Delta)$, entonces, por el teorema de Cauchy, los coeficientes de Fourier negativos de f se anulan. En particular los coeficientes de Fourier negativos de cualquier $f \in P(\partial\Delta)$ se anulan.

Esto muestra que la equivalencia de las siguientes afirmaciones para una función $f \in C(\partial\Delta)$

(i) $f \in P(\partial\Delta)$.

(ii) f se prolonga continuamente a Δ y analíticamente en $int(\Delta)$.

(iii) Los coeficientes de Fourier negativos de f se anulan.

Cualquier $\lambda \in \Delta$ determina un homomorfismo ϕ_λ de $P(\partial\Delta)$, obtenido de evaluar el prolongamiento analítico de funciones en $P(\partial\Delta)$ en λ. La correspondencia $\lambda \mapsto \phi_\lambda$ sumerge a Δ como subconjunto cerrado de $M_{P(\partial\Delta)}$. Se acostumbra a identificar a Δ con su imagen por la inmersión en $M_{P(\partial\Delta)}$.

Sea ahora $\phi \in M_{P(\partial\Delta)}$ y sea $\lambda = \phi(z)$, donde z es la función coordenada. Puesto que $\|z\|_{\partial\Delta} = 1$, se tiene que $|\lambda| \leq 1$, es decir, $\lambda \in \Delta$. También se cumple que $\phi(p(z)) = p(\lambda) = \phi_\lambda(p)$ para todos los polinomios p. Puesto que los polinomios son densos en $P(\partial\Delta)$, se deduce que ϕ coincide con ϕ_λ.

Consecuentemente el espacio de ideales maximales de $P(\partial\Delta)$ coincide con Δ.

Ejemplo 3:

Sea $0 < \alpha \leq 1$ y sea $Lip_\alpha[0,1]$ el conjunto de todas las funciones continuas con valores complejos en $[0,1]$ que satisfacen una condición de Lipschitz de orden α. La norma en $Lip_\alpha[0,1]$ está dada por

$$\|f\|_\alpha = \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)| + \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{|f(s)-f(t)|}{|s-t|^\alpha}$$

El espacio $Lip_\alpha[0,1]$ es un álgebra de Banach con el producto puntual usual de funciones. Se comprueba fácilmente que el espacio de ideales maximales de $Lip_\alpha[0,1]$ es $[0,1]$.

Ejemplo 4:

Sea G un grupo abeliano localmente compacto con medida de Haar σ. El espacio de Banach $L^1(\sigma)$, junto con el producto de convolución definido por

$$(f * g)(x) = \int_G f(x-y)g(y)d\sigma(y)$$

es un álgebra de Banach conmutativa, que se denota por $L^1(G)$. El álgebra $L^1(G)$ no tiene identidad a menos que G sea discreto.

Se define un caracter de G como un homomorfismo continuo de G en el disco unidad. El conjunto $\widehat{G}$ de todos los caracteres de G es un grupo, cuya operación es la multiplicación puntual. Con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, $\widehat{G}$ se convierte en un grupo abeliano localmente compacto, llamado el grupo caracter o grupo dual de G. El teorema de la dualidad de Pontriaguin establece que el grupo dual de $\widehat{G}$ es G.

Cualquier caracter χ de $\widehat{G}$ determina un homomorfismo continuo de $L^1(G)$ a través de la fórmula

$$(f * g)(x) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}d\sigma(x)$$

De esta manera, cualquier homomorfismo continuo no nulo de $L^1(G)$ se origina a partir de un caracter de G. El espacio de ideales maximales de $L^1(G)$ es homeomorfo a $\widehat{G}$.

Sea ahora G el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$. Todo caracter de $\mathbb{R}$ es de la forma $s \mapsto e^{ist}$ para algún número real t. Luego $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. La transformada de Gelfand se convierte entonces en la transformada de Fourier usual

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-ist}ds.$$

A continuación se presentan dos teoremas que resultan básicos y sumamente importantes en el desarrollo de la teoría de las álgebras de Banach. El primero es relativo a la aplicación de determinadas funciones analíticas a elementos de álgebras de Banach. El segundo es una fórmula para el radio espectral.

TEOREMA 1.11
: *Sean A un álgebra de Banach conmutativa con identidad y $f \in A$. Sea h una función con valores complejos que está definida y es analítica en una vecindad de $\widehat{f}(M_A) = \sigma(f)$. Entonces existe $g \in A$, tal que $\widehat{g} = h \circ \widehat{f}$.*

El radio espectral de $f \in A$ es por definición el valor

$$\sup_{\lambda \in \sigma(f)} |\lambda|.$$

Por el teorema 1.9, el radio espectral de f coincide con $\|\widehat{f}\|_{M_A}$.

TEOREMA 1.12
: *Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad. Entonces el radio espectral de $f \in A$ está dado por la fórmula*

$$\|\widehat{f}\|_{M_A} = \lim_{n\to\infty} \|f^n\|^{1/n}.$$

COROLARIO 1.1.1
: *Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad. La transformada de Gelfand $f \to \widehat{f}$ es una isometría si y solo si $\|f^2\| = \|f\|^2$ para todo $f \in A$.*

La demostración del teorema puede hallarse en [3]. El corolario se demuestra utilizando el hecho de que A es un álgebra de Banach (desigualdad de la norma).

1.1.3. B^*-Álgebras conmutativas

A continuación se expone un resultado importante en la teoría de las álgebras de Banach, relativo a la posibilidad de inclusion isomorfa e isométrica de un álgebra en otra $C(X)$, siendo X un espacio de Hausdorff compacto. Con este propósito se introduce una versión abstracta del operador de conjugación complejo, que transforma a una función en su conjugado complejo.

Definición 1.5

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con identidad. Una involución de A es una operación $f \mapsto f^*$ de A en A, que satisface

(i) $f^{**} = f$,

(ii) $(f+g)^* = f^* + g^*$,

(iii) $(\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*$,

(iv) $(fg)^* = f^* g^*$,

donde f y g son elementos de A y λ es un número complejo.
Una B^*-álgebra conmutativa es un álgebra de Banach conmutativa A con una involución $f \to f^*$ que satisface

$$\|f^* f\| = \|f\|^2 \quad \forall f \in A.$$

El siguiente teorema se refiere a la transformada de Gelfand en una B^*-álgebra conmutativa.

Teorema 1.13

Sea A una B^*-álgebra conmutativa. Entonces la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico de A en $C(M_A)$, el cual satisface

$$\widehat{f^*} = \overline{\widehat{f}} \quad \forall f \in A.$$

La afirmación más importante del teorema es el hecho de que la transformada de Gelfand convierte a la involución en conjugación compleja. Para demostrarlo resulta conveniente presentar primeramente los siguientes lemas:

Lema 1.1.3

Sea A una B^*-álgebra conmutativa. Si $f \to f^*$ es una involución de A, entonces $1^* = 1$.

Demostración: $1^* = 11^* = 1^{**}1^* = (1^*1)^* = 1^{**} = 1$. **Q.e.d.**

LEMA 1.1.4
Si A es una B^*-álgebra conmutativa y $f \in A$, entonces se cumple que

$$\|f^2\| = \|f\|^2 \quad y \quad \|f\| = \|f^*\|.$$

Demostración:

$$\|f^2\|^2 = \|(f^2)^* f^2\| = \|(f^*f)^*(f^*f)\| = \|f^*f\|^2 = \|f\|^4.$$

De esta manera es $\|f^2\| = \|f\|^2$. Así mismo se tiene

$$\|f\|^2 = \|f^*f\| = \|f^{**}f^*\| = \|f^*\|^2,$$

por lo que $\|f\| = \|f^*\|$. **Q.e.d.**

LEMA 1.1.5
Sea A una B^* -álgebra conmutativa. Si $f \in A$ satisface $f^* = f^{-1}$, entonces $|\widehat{f}| = 1$. Si $g \in A$ satisface $g^* = g$, entonces $\widehat{g}$ es real.

Demostración: Sea $f^* = f^{-1}$. Entonces también $(f^{-1})^* = f$. Así es

$$1 = \|f^*f\| = \|f\|^2 \quad \text{y} \quad 1 = \|(f^{-1})^* f^{-1}\| = \|f^{-1}\|^2.$$

Esto se deduce de que $\sigma(f)$ y $\sigma(f^{-1})$ están contenidos en el disco unidad Δ, lo cual sólo sucede cuando $|\lambda| = 1$ para todo $\lambda \in \sigma(f)$, es decir, cuando $\widehat{f}$ tiene módulo 1.
Ahora, si h pertenece a cualquier álgebra de Banach, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}$$

converge a un elemento e^h que satisface $\widehat{e^h} = e^{\widehat{h}}$. Puede comprobarse fácilmente que e^h es inversible y su inverso es e^{-h}.
En este caso, la involución $h \to h^*$ es continua, por el lema 1.1.4. Consecuentemente para $h \in A$ se tiene

$$(e^h)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h^n)^*}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h^*)^n}{n!} = e^{h^*}.$$

Sea ahora $g^* = g$ y sea $f = e^{ig}$. Entonces

$$f^* = e^{-ig^*} = e^{-ig} = f^{-1}.$$

Por la primera parte del lema, $\sigma(f)$ es un subconjunto del círculo unidad. Por lo tanto, $\sigma(g)$ debe ser real. Esto completa la prueba. **Q.e.d.**

Demostración del teorema 1.13:

Por el corolario del teorema 1.12 y el lema 1.1.4, la transformada de Gelfand es una isometría de A sobre la subálgebra cerrada $\widehat{A}$ de $C(M_A)$.

Si $f \in A$, sean

$$g = \frac{f + f^*}{2} \qquad \text{y} \qquad h = \frac{f - f^*}{2i}.$$

Entonces $f = g + ih$, $g = g^*$ y $h = h^*$. De esta manera es $f^* = g^* - ih^*$. Aplicando el lema 1.1.5, se obtiene

$$\widehat{f^*} = \widehat{g^*} - i\widehat{h^*} = \widehat{g} - i\widehat{h^*} = \overline{\widehat{f}}.$$

Esta fórmula muestra, en particular, que si $\widehat{f} \in \widehat{A}$, entonces el conjugado complejo $\overline{\widehat{f}}$ de $\widehat{f}$ también está en $\widehat{A}$. Puesto que $\widehat{A}$ contiene a las constantes y separa los puntos de M_A, $\widehat{A}$ debe coincidir con $C(M_A)$, por el teorema de Stone-Weierstrass (ver [5]). Esto completa la demostración. **Q.e.d.**

El teorema de representación de Riesz (ver [17]) para funcionales continuos definidos en el espacio de las funciones continuas que se anulan en el infinito será de gran utilidad en el desarrollo de los resultados esta tesis.

Teorema 1.14 ***(de representación de Riesz)***

Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Entonces para cada funcional lineal continuo Λ sobre $C_0(X)$, existe una única medida regular $\mu \in MR(X)$, tal que para todo $f \in C_0(X)$ se tiene la representación

$$\Lambda f = \int f d\mu$$

y se cumple que

$$\|\Lambda\| = \|\mu\|.$$

También resultará útil el teorema de la unicidad de la transformada de Fourier en $L^1(G)$ (ver [12]), para un grupo localmente compacto G.

Teorema 1.15

Si $x, y \in L^1(G)$, siendo G un grupo localmente compacto, y

$$\int x(g)e^{i\chi(g)}dg = \int y(g)e^{i\chi(g)}dg$$

para todos los los caracteres χ del grupo G, entonces $x(g)$ y $y(g)$ coinciden para toda $g \in G$.

Un resultado importante que será utilizado porteriormente en este trabajo es el siguiente teorema, su demostración puede encontrarse en (*ver*[16]).

Teorema 1.16

Sea A un álgebra de Banach conmutativa e I un ideal cerrado en A. Entonces el espacio de ideales maximales de I como subálgebra, es el complemento de la envoltura de I en el espacio de ideales maximales de A.
La envoltura se define como el conjunto de todos los ideales maximales que contienen a I.

1.2. El espacio $V_p[a, b]$ de las funciones de p-variación acotada

Los resultados que se presentan en esta sección pueden encontrarse en (*ver*[8]), (*ver*[18]), (*ver*[28]) y (*ver*[33]).
En el centro de este trabajo están las funciones de p-variación acotada. Se parte del conocimiento de que una función f definida sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ es de variación acotada (1-variación acotada) si el valor

$$V_1(f) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

es finito, donde el supremo se toma sobre todas las particiones

$$\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

de $[a, b]$. Definimos la *p-variación* de una función de manera análoga:

Una función f definida sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ es de p-variación acotada $(1 \leq p < \infty)$ si el valor

$$V_p(f) = \sup_{\pi} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1}$$

es finito, donde el supremo se toma sobre todas las particiones de $[a, b]$ de la forma

$$\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b.$$

Definimos además el valor $V_\infty(f)$ en la forma

$$V_\infty(f) = \sup \{|f(x) - f(y)|; \quad x, y \in [a, b]\}. \tag{1.2}$$

Se llama entonces a

$$V_p[a, b] = \{|f : [a, b] \to R; \quad f(a) = 0 \quad \text{y} \quad V_p(f) < \infty\} \tag{1.3}$$

espacio de las funciones (normadas) de p-variación acotada en $[a, b]$. La condición $f(a) = 0$ se plantea por comodidad.

Es conocido que el espacio $V_\infty[a, b]$ de las funciones acotadas en el intervalos cerrado $[a, b]$ y el valor inicial cero es un espacio de Banach con la norma

$$\| f \|_{sup} = \sup \{|f(t)|; \quad t \in [a, b]\}.$$

Pero resulta sencillo comprobar que $V_\infty(\cdot)$ es también una norma sobre $V_\infty[a, b]$ y que se cumple la relación

$$\| f \|_{sup} \leq V_\infty(f) \leq 2 \| f \|_{sup}$$

para toda función f de $V_\infty[a, b]$. Así, el espacio $V_\infty[a, b]$ es también un espacio de Banach respecto a la norma $V_\infty(\cdot)$.

En el caso más general del espacio $V_p[a, b]$ con $1 \leq p < \infty$ se cumple el siguiente teorema:

Teorema 1.17
El espacio $V_p[a, b]$ de las funciones de p-variación acotada sobre $[a, b]$ es un espacio de Banach con la norma $\| \cdot \|_{V_p} = V_p(\cdot)$.

Demostración: Con la ayuda de la desigualdad de Minkowski se pueden demostrar fácilmente las propiedades de la norma. La prueba de la completitud se dará en el Capítulo 3 para un caso más general.

Se mostrarán ahora algunas propiedades sencillas de las funciones de p-variación acotada $(1 \leq p < \infty)$.

La validez del siguiente teorema se deduce directamente de la definición de $V_p(\cdot)$.

Teorema 1.18
Toda función de p-variación acotada en el intervalo cerrado $[a, b]$ es acotada en ese intervalo.

Para la siguiente propiedad es necesario recordar la definición de la clase de funciones $Lip_\alpha[a,b]$: Una función f definida en el intervalo cerrado $[a,b]$ pertenece a la clase de Lipschitz $Lip_\alpha[a,b]$ con $0 < \alpha \leq 1$, si se cumple la desigualdad

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha, \tag{1.4}$$

donde x, y son puntos cualesquiera de $[a,b]$ y M es una constante que sólo depende de f. Se considera aquí también la condición adicional $f(a) = 0$. Es conocido que el espacio $Lip_\alpha[a,b]$ con la norma

$$\| f \|_\alpha = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}; \qquad x, y \in [a,b], \qquad x \neq y \right\} \tag{1.5}$$

es un espacio de Banach. La siguiente propiedad muestra una relación entre los espacios $Lip_\alpha[a,b]$ $(0 < \alpha \leq 1)$ y $V_p[a,b]$ $(p \geq 1)$:

TEOREMA 1.19
Toda función f de la clase $Lip_{\frac{1}{p}}[a,b]$ $(1 \leq p < \infty)$ es de p-variación acotada en $[a,b]$.

Demostración: Sea f de $Lip_{\frac{1}{p}}[a,b]$, es decir, para todas x, y de f de $[a,b]$ se tiene

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^{\frac{1}{p}},$$

donde M es una constante que sólo depende de f. Entonces es

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq M \left(\sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

o sea,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq M(b-a)^{\frac{1}{p}},$$

para toda partición $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ de $[a,b]$.

De ello se deduce que

$$V_p(f) \leq M(b-a)^{\frac{1}{p}},$$

y así f es de p-variación acotada en $[a,b]$. **Q.e.d.**

Se ha demostrado que

$$\| f \|_{V_p} \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \; \| f \|_{\frac{1}{p}} . \tag{1.6}$$

El teorema 1.19 presenta una condición suficiente para la pertenencia de una función a $V_p[a,b]$ con $1 \leq p < \infty$. Un ejemplo de ello es la función de Weierstrass ya estudiada por L.C.Young.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-\frac{n}{2}} \cos(2\pi a^n x) \qquad x \in [0,1], \tag{1.7}$$

donde a es un número natural mayor que 1.

Nótese que la serie (1.7) converge absolutamente para $a > 1$, pues obviamente se puede acotar por la serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{-\frac{n}{2}},$$

la cual converge para $a > 1$. Entonces la definición de la función (1.7) tiene sentido y la función es continua como límite uniforme de una sucesión de funciones continuas.

El cálculo de la p-variación de esta función es demasiado complicado, pues en él aparecen sumas infinitas. Sin embargo, es muy sencillo demostrar que la función (1.7) pertenece a la clase $Lip_{\frac{1}{2}}[0,1]$. Para ello se calculará la diferencia $f(x+h)-f(x)$ para un número real h cualquiera. Sea (sin perder generalidad) $h < \frac{1}{2a}$. Se cumple

$$|f(x+h) - f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a^{-\frac{n}{2}} (\cos(2\pi a^n (x+h)) - \cos(2\pi a^n x)) \right|.$$

Es conocida para cualesquiera números reales α, β la identidad

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

De ello se deduce

$$|\cos(2\pi a^n(x+h)) - \cos(2\pi a^n x)| = |2\sin(\pi a^n(2x+h))\sin(\pi a^n h)|.$$

Aplicando la desigualdad triangular se obtiene

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a^{-\frac{n}{2}} |2\sin(\pi a^n(2x+h))\sin(\pi a^n h)|.$$

Pero como para la función $\sin(x)$ se cumple siempre la acotación $|\sin(x)| \leq 1$, se cumple

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a^{-\frac{n}{2}} |2\sin(\pi a^n h)|.$$

Como $ah < \frac{1}{2}$ existe un número natural n_0, tal que

$$a^{n_0}|h| < \frac{1}{2} \leq a^{n_0+1}|h|. \tag{1.8}$$

Entonces es obvio que

$$\begin{aligned} |\sin(\pi a^n h)| &\leq \pi a^n |h| \quad \text{para} \quad n \leq n_0 \\ |\sin(\pi a^n h)| &\leq 1 \quad \text{para} \quad n > n_0. \end{aligned}$$

De ello se deduce que

$$|f(x+h) - f(x)| \leq 2\pi|h| \sum_{n=1}^{n_0} a^{\frac{n}{2}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a^{-\frac{n}{2}}.$$

La parte derecha de esa desigualdad es muy fácil de calcular. La primera suma es una suma geométrica finita, por lo que

$$\sum_{n=1}^{n_0} a^{\frac{n}{2}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}(\sqrt{a^{n_0}} - 1).$$

La segunda suma es una serie geométrica que converge para $a > 1$. Así es

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a^{-\frac{n}{2}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \frac{1}{\sqrt{a^{n_0+1}}}.$$

De aquí se deduce entonces

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \left(2\pi|h|(\sqrt{a^{n_0}} - 1) + \frac{2}{\sqrt{a^{n_0+1}}} \right).$$

Escribiendo ahora la parte derecha de la desigualdad anterior de otro modo, a saber,

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \sqrt{|h|} \left(2\pi\sqrt{|h|}(\sqrt{a^{n_0}} - 1) + \frac{2}{\sqrt{a^{n_0+1}|h|}} \right).$$

Aplicando la desigualdad (1.8), teniendo en cuenta que $\sqrt{a^{n_0}} - 1 < \sqrt{a^{n_0}}$, entonces se tiene

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \frac{\sqrt{2}\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}(\pi + 2)\sqrt{|h|}.$$

Ahora se puede, obviamente, acotar siempre por 24 al valor

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}(\pi + 2).$$

De modo que se obtiene

$$|f(x+h) - f(x)| \leq 24\sqrt{|h|},$$

es decir, la función estudiada pertenece a la clase $Lip_{\frac{1}{2}}[0,1]$ y, por tanto, por el teorema 1.19, pertenece también a la clase $V_2[0,1]$.

De manera análoga se puede demostrar para las sumas parciales

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a^{-\frac{n}{2}} \cos(2\pi a^n x) \qquad x \in [0,1],$$

la acotación

$$V_2(f_N) \leq 24.$$

Teorema 1.20
Para $1 \leq p < \infty$, cada función de $V_p[a,b]$ pertenece también a $V_q[a,b]$ para todo número real $q > p$.

Ahora, si f es una función continua definida sobre el intervalo cerrado $[a,b]$, que es diferenciable en (a,b), entonces es conocido que ella pertenece a la clase $Lip_1[a,b]$ y, con ello por el teorema 1.19, pertenece a $V_1[a,b]$. Luego, se obtiene por el teorema 1.20 que la función f es de p-variación acotada para todo número real $p \geq 1$.

Posteriormente se ofrecerá también, para cualquier p un ejemplo de una función que no es de p-variación acotada, pero es de q-variación acotada para todo número real $q > p$. Veamos entonces el siguiente teorema:

Teorema 1.21
Sea $f \in V_p[a,b]$ y $a < c < b$. Entonces se cumple la acotación

$$(V_p^p(f;a,c) + V_p^p(f;c,b))^{\frac{1}{p}} \leq V_p(f) \leq 2^{1-\frac{1}{p}}(V_p(f;a,c) + V_p(f;c,b)), \quad (1.9)$$

donde $V_p(f;\alpha,\beta)$ representa la p-variación de la función f en el intervalo $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$.

Demostración:

(i) Sea $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$ que contiene al punto $c = t_k$. Entonces

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad &\leq \quad \left(\sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\sum_{i=k+1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

o sea,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (V_p(f;a,c)+V_p(f;c,b)).$$

Sea ahora $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ una partición cualquiera de $[a,b]$. Entonces existe un número natural $0 < k \leq n$, tal que $t_{k-1} \leq c \leq t_k$. Así se cumple obviamente

$$|f(t_k)-f(t_{k-1})|^p \leq 2^{p-1}(|f(t_k)-f(c)|^p+|f(c)-f(t_{k-1})|^p).$$

Luego, se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{1-\frac{1}{p}}(V_p(f;a,c)+V_p(f;c,b)),$$

de donde se deduce la parte derecha de la desigualdad (1.9).

(ii) Por la definición de $V_p(f)$, para cada $\epsilon > 0$ existen particiones

$$\pi' : a = t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_m = c \quad \text{y} \quad \pi'' : c = t''_0 < t''_1 < \ldots < t''_s = b$$

de $[a,c]$ y $[a,b]$ respectivamente, tales que

$$\sum_{i=1}^{m}|f(t'_i)-f(t'_{i-1})|^p > V_p^p(f;a,c)+\frac{\epsilon}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{s}|f(t''_i)-f(t''_{i-1})|^p > V_p^p(f;c,b)+\frac{\epsilon}{2}.$$

Si se unen estas particiones se obtiene una nueva partición

$$\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

de $[a,b]$, para la cual se cumple

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|^p &= \sum_{i=1}^{m}|f(t'_i)-f(t'_{i-1})|^p+\sum_{i=1}^{s}|f(t''_i)-f(t''_{i-1})|^p \\ &> V_p^p(f;a,c)+V_p^p(f;c,b)-\epsilon.\end{aligned}$$

Pero esto es válido para cualquier $\epsilon > 0$, por lo que

$$V_p(f) = V_p(f;a,b) \geq (V_p^p(f;a,c)+V_p^p(f;c,b))^{\frac{1}{p}},$$

y con ello queda demostrado el teorema. **Q.e.d.**

Si se denominan *funciones escalonadas* a aquellas funciones definidas sobre el intervalo cerrado $[a,b]$ que toman un número finito de valores y sólo tienen un número finito de discontinuidades, todas de tipo salto, entonces se cumple el siguiente teorema.

TEOREMA 1.22
Toda función escalonada ϕ es de p-variación acotada en $[a,b]$ para todo número real $p \geq 1$.

Demostración: Es claro que la función escalonada ϕ es de 1-variación acotada en $[a,b]$. Entonces del teorema 1.20 se deduce la tesis de este teorema. **Q.e.d.**

De la teoría de las funciones de 1-variación acotada se conoce que la 1-variación de una función en el intevalo $[a,x]$ es monótona creciente como función del argumento x. Con el siguiente teorema se quiere mostrar la propiedad análoga para la p-variación de una función.

TEOREMA 1.23
Si f es una función de p-variación acotada en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces la función $V_p(f;a,x)$ es monótona creciente en $[a,b]$.

Demostración: Sean x_1 y x_2 puntos cualesquiera de $[a,b]$ con $x_1 < x_2$. Por el teorema 1.21 es

$$V_p(f;a,x_2) \geq (V_p^p(f;a,x_1) + V_p^p(f;x_1,x_2))^{\frac{1}{p}},$$

o sea,

$$V_p(f;a,x_2) \geq V_p^p(f;a,x_1),$$

con lo cual queda demostrado el teorema. **Q.e.d.**

TEOREMA 1.24
Sea f una función de p-variación acotada en $[a,b]$. Entonces f sólo tiene una cantidad numerable discontinuidades, a lo sumo de primera especie.

Demostración:

(i) Asúmase que existe un $\widehat{x} \in [a,b]$, tal que no existe el límite

$$\lim_{x \to \widehat{x}+} f(x),$$

es decir, existe una sucesión $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ de $(a,b]$, que converge por la izquierda a $\widehat{x}$, de modo que la sucesión de los valores de la función $(f(x_i))_{i=1}^{\infty}$ diverge. Entonces $(f(x_i))_{i=1}^{\infty}$ no es una sucesión de Cauchy, o sea, existe un número real ϵ_0, de modo que para todo número natural N existen números naturales $n, m \geq N$, para los que se cumple

$$|f(x_n) - f(x_m)| \geq \epsilon_0. \tag{1.10}$$

Sea ahora sin perder generalidad una partición

$$\pi_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = \widehat{x}$$

de $[a, \widehat{x}]$, cuyos puntos cumplen la relación (1.10). Entonces es

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq n^{\frac{1}{p}} \epsilon_0.$$

De ello se deduce la existencia de una sucesión de particiones $(\pi_n)_{n=1}^{\infty}$ del intervalo $[a, \widehat{x}]$, de manera que la sucesión de las sumas

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

crece de manera no acotada, lo cual contradice la p-variación acotada de f. Entonces existe el límite $\lim_{x \to \widehat{x}+} f(x)$. De modo análogo se demuestra la existencia del límite $\lim_{x \to \widehat{x}-} f(x)$ para $\widehat{x} \in [a, b)$

(ii) Por la definición de la p-variación de una función, la suma la potencia p-ésima de las alturas de todos los saltos de la función f no puede sobrepasar el valor $V_p(f)$. Sean los subconjuntos A_n del conjunto de todos los saltos con

$$A_n = \left\{ x \in [a, b]; \qquad |f(x) - f(x-)|^p > \frac{1}{n} \quad \text{ó} \quad |f(x) - f(x+)|^p > \frac{1}{n} \right\}$$

para $n = 1, 2, \ldots$. Estos conjuntos son finitos a causa de la p-variación acotada de la función f. Si numeramos entonces los elementos de los conjuntos A_n $(n = 1, 2, \ldots)$, de ello se deduce la numerabilidad del conjunto de las discontinuidades de f. **Q.e.d.**

TEOREMA 1.25
El espacio $V_p[a, b]$ no es separable.

Demostración: Sea M un subconjunto denso de $V_p[a, b]$ cualquiera. Se demostrará que M es no numerable, de donde se deriva la no separabilidad de $V_p[a, b]$.

Sea dada la función característica de $\{x_0\}$ del intervalo abierto (a, b)

$$\chi_{x_0} = \begin{cases} 1 & t = x_0 \\ 0 & t \neq x_0 \end{cases},$$

la cual está naturalmente en $V_p[a, b]$. Obviamente para diferentes puntos x e y de (a, b) existen elementos f_x y f_y de M, tal que

$$\| f_x - \chi_x \|_{V_p} < \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad \| f_y - \chi_y \|_{V_p} < \frac{1}{4}.$$

Pero, por otra parte es

$$\| \chi_x - \chi_y \|_{V_p} = 4^{\frac{1}{p}} > 1.$$

Aplicando la desigualdad triangular se obtiene entonces

$$\| f_x - f_y \|_{V_p} > \frac{1}{2}.$$

De aquí se deduce la existencia de al menos tantos elementos en el conjunto M como funciones características de la forma $\chi_x(t)$ con x de (a, b), de donde se deduce la no numerabilidad del conjunto M. **Q.e.d.**

El siguiente teorema muestra la existencia de un subespacio de $V_p[a, b]$ isomorfo a c_0. Para ello se necesitan los siguientes resultados previos:

Sea B un espacio de Banach cualquiera. Una serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

con $x_n \in B$ $(n = 1, 2, \ldots)$, se dice *incondicionalmente convergente débil*, si para toda funcional f del espacio dual B^* de B la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|$$

es finita.

El siguiente lema ofrece una caracterización de las series incondicionalmente convergentes débil en el espacio de Banach B (ver [8]):

Lema 1.2.1 ***Bessaga/Pelczynski***

Sea B un espacio de Banach cualquiera. Una serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

de elementos x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ de B es incondicionalmente convergente débil, si y sólo si existe una constante real positiva C, tal que para toda sucesión $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in l_\infty$ se cumple la acotación

$$\sup_n \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\| \leq C \sup_n |\alpha_n|.$$

Sean B_1 y B_2 espacios de Banach cualesquiera con bases $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ respectivamente. Se dice que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ son *equivalentes*, si la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

es equivalente a la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n;$$

es decir, si existe un isomorfismo de B_1 sobre B_2 que a cada elemento x_n asigna el elemento y_n.

Corolario 1.2.1

Dada la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ del espacio de Banach B, sea la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

incondicionalmente convergente débil, y supongamos además que

$$\inf_n \| x_n \| > 0.$$

Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a la base canónica de c_0. (ver [8], pág. 45)

Con esta base se puede entonces demostrar el siguiente teorema:

Teorema 1.26

El espacio $V_p[a, b]$ contiene un subespacio isomorfo a c_0.

Demostración: El principio de la demostración consiste en presentar una sucesión de funciones de p-variación acotada, que cumple la condición $\inf_n \| x_n \| > 0$, y cuya serie infinita es incondionalmente convergente débil, de modo que del corolario 1.2.1 se deduce la tesis del teorema.

(i) Para simplificar la demostración, considérense las funciones de p-variación acotada sobre el intervalo cerrado $[0,1]$.

Se construyen entonces las funciones $g_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ según el siguiente esquema (ver figura 1.1):

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &= \begin{cases} 2x & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -2x+2 & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \\
g_2(x) &= \begin{cases} 4x & x \in [0, \frac{1}{4}] \\ -4x+2 & x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ 4x-2 & x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ -4x+4 & x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}, \\
&\ldots \\
g_n(x) &= \begin{cases} 2^n x - 2k & x \in [\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}] & (k = 0, \ldots, 2^{n-1}-1) \\ -2^n x + 2k & x \in [\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}] & (k = 1, \ldots, 2^{n-1}) \end{cases},
\end{aligned}
$$

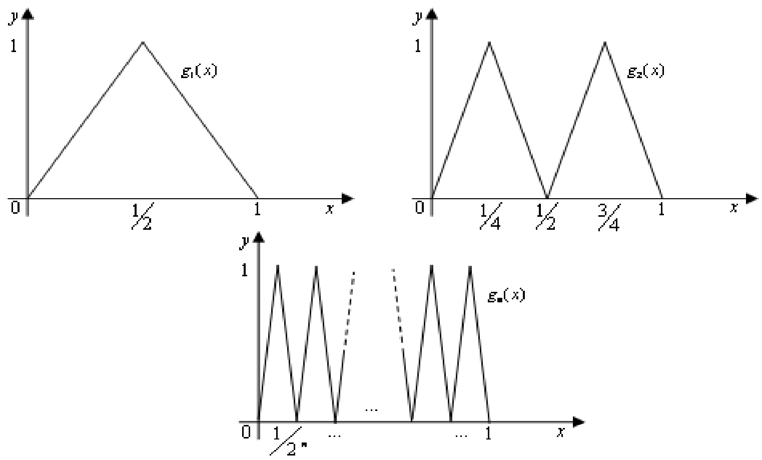

Figura 1.1:

Para toda $n \in \mathbb{N}$ la función $g_n(x)$ es obviamente de 1-variación acotada con

$$V_1(g_n) = 2^n.$$

Pero entonces se cumple (ver 1.20)

$$V_p(g_n) \leq 2^{\frac{n}{p}}.$$

para toda $1 \leq p < \infty$, y g_n es de p-variación acotada en $[0,1]$.

Considérense ahora las funciones

$$f_n(x) = 2^{-\frac{n}{p}} g_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Obviamente se tiene entonces para todo número natural n

$$V_p(f_n) \leq 1.$$

Por otra parte es

$$\inf_n \parallel f_n \parallel > 0. \tag{1.11}$$

Pues, para los puntos $t_k = \frac{k}{2^n} \in [0,1] \quad (k = 0, \ldots, 2^n)$ se cumple

$$\left(\sum_{k=1}^{2^n} |f_n(t_k) - f_n(t_{k-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

y por tanto es

$$V_p(f_n) \geq 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.12}$$

Luego, por (1.12) es

$$\inf_n \parallel f_n \parallel = 1,$$

de donde se deduce (1.11).

(ii) Sea ahora $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada cualquiera de números reales, es decir $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in l_\infty$. Puede calcularse entonces una cota superior para el valor

$$\left\| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n f_n \right\|_{V_p} = \left\| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n 2^{-\frac{n}{p}} g_n \right\|_{V_p}.$$

Sea $\pi : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ una partición cualquiera del intervalo cerrado $[0,1]$. Entonces es claro que

$$\begin{array}{c} \left(\sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n (f_n(t_i) - f_n(t_{i-1})) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ \leq \sup_n |\alpha_n| \left(\sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{n=1}^{k} 2^{-\frac{n}{p}} (g_n(t_i) - g_n(t_{i-1})) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{array} \tag{1.13}$$

Sea ahora $1 \leq i \leq m$ fijo. Dividiendo la suma

$$\sum_{n=1}^{k} \sum_{n=1}^{k} 2^{-\frac{n}{p}} (g_n(t_i) - g_n(t_{i-1})) = S_1 + S_2 \tag{1.14}$$

en dos sumas S_1, S_2, donde

$$S_1 = \sum_{n:2^{-n} \geq t_i - t_{i-1}} 2^{-\frac{n}{p}} (g_n(t_i) - g_n(t_{i-1}), \tag{1.15}$$

$$S_2 = \sum_{n:2^{-n} < t_i - t_{i-1}} 2^{-\frac{n}{p}} (g_n(t_i) - g_n(t_{i-1}). \tag{1.16}$$

Obviamente se cumple para $t_i - t_{i-1} \leq \frac{1}{2^n}$ la acotación

$$|g_n(t_i) - g_n(t_{i-1})| \leq 2^{-\frac{n}{p}} |t_i - t_{i-1})|.$$

Entonces es

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \textstyle\sum_{n:2^{-n} \geq t_i - t_{i-1}} \left(2^{-\frac{n}{p}} 2^n |t_i - t_{i-1}| \right) \\ &= (t_i - t_{i-1}) \textstyle\sum_{n:2^{-n} \geq t_i - t_{i-1}} \left(2^{n(1-\frac{n}{p})} \right) \end{aligned} . \tag{1.17}$$

Reescribiendo esta desigualdad es

$$S_1 \leq (t_i - t_{i-1}) \sum_{n=0}^{m_i} 2^{n(1-\frac{n}{p})}, \tag{1.18}$$

donde

$$2^{m_i} \leq \frac{1}{t_i - t_{i-1}}, \tag{1.19}$$

pero

$$2^{m_i+1} > \frac{1}{t_i - t_{i-1}}. \tag{1.20}$$

Pero la suma en la parte derecha de (1.18) es una progresión geométrica finita. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{m_i} 2^{n(1-\frac{n}{p})} &= \frac{1 - 2^{(m_i+1)(1-\frac{1}{p})}}{1 - 2^{1-\frac{1}{p}}} \\ &\leq \frac{1}{2^{(1-\frac{1}{p})} - 1} 2^{(m_i+1)(1-\frac{1}{p})} \\ &= \frac{2^{(1-\frac{1}{p})}}{2^{(1-\frac{1}{p})} - 1} 2^{m_i(1-\frac{1}{p})}. \end{aligned}$$

De ello se deduce entonces por (1.19) la acotación

$$S_1 \leq C_p^{(1)} (t_i - t_{i-1})^{\frac{1}{p}} \tag{1.21}$$

con

$$C_p^{(1)} = \frac{2^{(1-\frac{1}{p})}}{2^{(1-\frac{1}{p})}-1}.$$

Por otra parte, por definición es

$$|g_n(t_i) - g_n(t_{i-1})| \leq 1$$

para todos x, y del intervalo cerrado $[0,1]$ y todo número natural n. Entonces es

$$S_2 \leq \sum_{n:2^{-n}<t_i-t_{i-1}} 2^{-\frac{n}{p}}.$$

Reescribiendo esta desigualdad, a saber

$$S_2 \leq (t_i - t_{i-1}) \sum_{n=n_i}^{\infty} 2^{-\frac{n}{p}}, \tag{1.22}$$

donde

$$\frac{1}{t_i - t_{i-1}} < 2^{n_i}, \tag{1.23}$$

pero

$$\frac{1}{t_i - t_{i-1}} \geq 2^{n_i-1}. \tag{1.24}$$

Pero la parte derecha de la desigualdad (1.22) corresponde a la serie geométrica. Entonces

$$\sum_{n=n_i}^{\infty} 2^{-\frac{n}{p}} = 2^{-\frac{n_i}{p}} \frac{1}{1-2^{1-\frac{1}{p}}}.$$

De ello se deduce entonces por (1.19) la acotación

$$S_2 \leq C_p^{(2)} (t_i - t_{i-1})^{\frac{1}{p}} \tag{1.25}$$

con

$$C_p^{(2)} = \frac{1}{1-2^{(1-\frac{1}{p})}}.$$

De (1.14), (1.21) y (1.25) se deduce entonces

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\frac{n}{p}} (g_n(t_i) - g_n(t_{i-1})) \leq C_p,$$

con

$$C_p = C_p^{(1)} + C_p^{(2)}.$$

Entonces, por (1.13), se cumple

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \right\|_{V_p} \leq C_p \sup_n |\alpha_n|. \tag{1.26}$$

(iii) Ahora, por (1.26), la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

es incondicionalmente convergente débil (ver lema 1.2.1). Con ello la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de $V_p[0,1]$ es equivalente a la base canónica de c_0 (ver corolario 1.2.1), quedando así demostrado el teorema. **Q.e.d.**

1.3. El espacio $C_p[a,b]$ de las funciones absolutamente p-continuas

Sea $p > 1$. Se denomina *módulo de p-continuidad de la función f* al valor

$$\omega_p(\delta)(f) = \sup_{\pi_\delta} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.27}$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $\pi_\delta : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ del intervalo cerrado $[a,b]$, para las que se cumple $t_i - t_{i-1} < \delta$ para toda $1 \leq i \leq n$. Obviamente se cumple para dos funciones f y g de p-variación acotada en $[a,b]$ la desigualdad

$$\omega_p(\delta)(f+g) \leq \omega_p(\delta)(f) + \omega_p(\delta)(g).$$

Una función f de $V_p[a,b]$ se dice *absolutamente p-continua* si se cumple

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_p(\delta)(f) = 0. \tag{1.28}$$

Se le llamará al conjunto

$$C_p[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R}; \quad f \in V_p[a,b] \quad \text{y} \quad \lim_{\delta \to 0} \omega_p(\delta)(f) = 0 \right\} \tag{1.29}$$

espacio de las funciones absolutamente p-continuas en $[a,b]$. El concepto de la p-continuidad absoluta aparece por vez primera en 1937, introducido por Love y Young (ver [21]).

Considérese ahora la norma del supremo para $p=\infty$, entonces $C_\infty[a,b]=C[a,b]$ es el espacio de las funciones continuas sobre el intervalo cerrado $[a,b]$ con el valor inicial $f(a)=0$. Pues, en ese caso es

$$\omega_\infty(\delta)(f)=\sup\left\{|f(x)-f(y)|; \quad |x-y|<\delta \quad \text{y} \quad x,y\in[a,b]\right\}.$$

Obviamente para toda $p>1$ es $C_p[a,b]\subset V_p[a,b]$. Es conocido que $C_\infty[a,b]=C[a,b]$ es un subespacio cerrado de $V_\infty[a,b]=M[a,b]$. Ahora se quiere demostrar la relación correspondiente para el caso más general $1<p<\infty$:

TEOREMA 1.27
$C_p[a,b]$ es un subespacio cerrado de $V_p[a,b]$ para toda $1<p<\infty$.

Demostración: Sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones de $C_p[a,b]$, que converge a una función f de $V_p[a,b]$; es decir, para todo $\epsilon>0$ existe un número natural n_ϵ, de modo que para toda $n\geq n_\epsilon$ se cumple la desigualdad

$$\| f_n-f\|_{V_p}<\frac{\epsilon}{2}.$$

Se cumple

$$\omega_p(\delta)(f)\leq\omega_p(\delta)(f-f_n)+\omega_p(\delta)(f_n).$$

Entonces es

$$\omega_p(\delta)(f)<\frac{\epsilon}{2}+\omega_p(\delta)(f_n)$$

para $n\geq n_\epsilon$. Sea ahora $n=n_\epsilon$ fijo. Entonces

$$\omega_p(\delta)(f_{n_\epsilon})<\frac{\epsilon}{2}$$

para $\delta<\delta_\epsilon$, pues la funciones f_n pertenecen a $C_p[a,b]$ para todo número natural n. De aquí que sea

$$\omega_p(\delta)(f)<\epsilon$$

para $\delta<\delta_\epsilon$, y con ello queda demostrado el teorema. **Q.e.d.**

De la definición de $\omega_p(\delta)(f)$ se deduce directamente la continuidad de toda función f de $C_p[a,b]$. El recíproco de esa proposición no se cumple en general. Así se observa el ejemplo de la función

$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{p}} & x\in(0,1] \\ 0 & x=0\end{cases}$$

(ver (1.9)), la cual es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, pero no es de p-variación acotada, por lo que no es absolutamente p-continua.

El siguiente teorema presenta una caracterización de la p-continuidad absoluta:

Teorema 1.28
Una función f de p-variación acotada en $[a, b]$ es absolutamente p-continua $(1 < p < \infty)$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$, tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(\alpha_i) - f(\beta_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$$

para todo conjunto finito de subintervalos disjuntos (α_i, β_i) $(i = 1, \ldots, n)$ de $[a, b]$, para los que se cumple

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \delta.$$

Demostración: (Necesidad) Sea $f \in C_p[a, b]$; es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$, tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$$

para toda partición $\pi_\delta : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ con $t_i - t_{i-1} < \delta$ $(1 \leq i \leq n)$. Seleccionamos un conjunto finito cualquiera de subintervalos disjuntos $(\alpha_i, \beta_i) \subset [a, b]$ $(i = 1, \ldots, m)$, tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{m} (\beta_i - \alpha_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \delta.$$

Entonces es $(\beta_i - \alpha_i) < \delta$ $(i = 1, \ldots, m)$, y por hipótesis se cumple la acotación

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |f(\alpha_i) - f(\beta_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$$

para una partición $\pi_\delta : a = t_o < t_1 < \ldots < t_n = b$ de $[a, b]$ conformada a partir de los intervalos (α_i, β_i) agregando una cantidad cualquiera de puntos t_{i_k} con

$$\beta_{i-1} < t_{i_1} < \ldots < t_{i_r} < \alpha_i$$
$$(t_{i_k} - t_{i_{k-1}}) < \delta, \quad (t_{i_1} - \beta_{i-1}) < \delta, \quad (\alpha_i - t_{i_r}) < \delta.$$

(Suficiencia) Sea $\epsilon > 0$. Elegimos un número real $\delta > 0$, tal que para todo conjunto finito de subintervalos disjuntos $(\alpha_i, \beta_i) \subset [a, b]$ $(i = 1, \ldots, m)$, tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{m} (\beta_i - \alpha_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \delta.$$

se cumple la desigualdad

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |f(\alpha_i) - f(\beta_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Sea ahora un δ' seleccionado de modo que para $0 < x < \delta'$ sea

$$x^{p-1} < \frac{\delta^p}{b-a},$$

por ejemplo,

$$\delta' = \left(\frac{\delta^p}{b-a} \right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{1.30}$$

Sea $\pi_{:} a = t_o < t_1 < \ldots < t_n = b$ una partición cualquiera de $[a, b]$ con $t_i - t_{i-1} < \delta'$. Entonces es

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{|t_i - t_{i-1}|^p}{|t_i - t_{i-1}|} |t_i - t_{i-1}| \right)^{\frac{1}{p}},$$

o sea,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\delta}{(b-a)^{\frac{1}{p}}} \left(\sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}| \right)^{\frac{1}{p}} = \delta.$$

Pero de aquí se deduce por hipótesis la acotación

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon,$$

y por tanto, la función f es absolutamente p-continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. **Q.e.d.**

Hasta ahora se ha definido la p-continuidad absoluta sólo para el caso $p > 1$. Consideremos ahora el caso $p = 1$. Nótese que en ese caso no funciona la demostración anterior, pues se obtendría cero en el denominador del exponente al seleccionar δ'

(ver (1.30)). Sea f una función absolutamente 1-continua, de modo que para todo $\epsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$, tal que

$$\omega_1(\delta)(f) = \sup_{\pi_\delta} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \right) < \epsilon,$$

donde $\pi_\delta : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ es una partición cualquiera de $[a, b]$ con $t_i - t_{i-1} < \delta$ $(1 \leq i \leq n)$.

Si t es un punto cualquiera de $[a, b]$, se escoge una partición

$$\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

de $[a, b]$ con $t_i - t_{i-1} < \delta$ $(1 \leq i \leq n)$, de modo que $t = t_k$ $(1 \leq k \leq n)$ es un punto de la partición. Entonces obviamente es

$$|f(t) - f(a)| \leq \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

Pero se tiene

$$\sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq \omega_1(\delta)(f),$$

entonces

$$|f(t) - f(a)| < \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$. De aquí es entonces

$$f(t) = f(b) = 0$$

para todo $t \in [a, b]$, y ello significa que la función $f \in C_1[a.b]$ es idénticamente nula. Hemos demostrado así que el espacio $C_1[a, b]$ sólo consta de la función $f \equiv 0$, y por ello $C_1[a, b]$ carece de interés para este estudio.

Pero en el caso $p = 1$, la caracterización del teorema 1.18 corresponde a la conocida clase de las funciones absolutamente continuas, la cual se relaciona estrechamente con la clase de las funciones de 1-variación acotada. Se dice entonces que una función f definida sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ es *absolutamente continua* si para todo $\epsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$, tal que para todo sistema finito de subintervalos disjuntos $(\alpha_i, \beta_i) \subset [a, b]$ $(i = 1, \ldots, n)$ con longitud total

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) < \delta$$

se cumple la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \epsilon.$$

El ejemplo más sencillo de función absolutamente continua es toda función f de la clase de Lipschitz $Lip_1[a,b]$.

Considérese el caso más general del espacio $C_p[a,b]$ para $1 < p < \infty$.

En el epígrafe 1.2 se demostró la desigualdad

$$\left(V_p^p(f;a,c) + V_p^p(f;c,b)\right)^{\frac{1}{p}} \leq V_p(f)$$

para una función cualquiera de p-variación acotada en $[a,b]$ y un punto c cualquiera de (a,b) (ver teorema 1.5). Ahora, si $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ es una partición cualquiera de $[a,b]$ con $t_i - t_{i-1} < \delta$ $(1 \leq i \leq n)$, entonces procediendo de modo análogo al teorema 1.5 se obtiene la acotación

$$\left(\sum_{i=1}^{n} V_p^p(f, t_{i-1}, t_i)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \omega_p(\delta)(f). \tag{1.31}$$

Se cumple el siguiente teorema:

TEOREMA 1.29
Sean $p, q > 1$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dados. Entonces se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} V_p(f, t_{i-1}, t_i) V_q(f, t_{i-1}, t_i) \leq \omega_p(\delta)(f)\omega_q(\delta)(g). \tag{1.32}$$

para toda partición $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ de $[a,b]$ con $t_i - t_{i-1} < \delta$ para $1 \leq i \leq n$ y para dos funciones cualesquiera $f \in V_p[a,b]$ y $g \in V_q[a,b]$.

Demostración: La tesis de este teorema se deduce de la desigualdad (1.31) y de la desigualdad de Hölder, pues

$$\sum_{i=1}^{n} V_p(f, t_{i-1}, t_i) V_q(f, t_{i-1}, t_i) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} V_p^p(f, t_{i-1}, t_i)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} V_q^q(g, t_{i-1}, t_i)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Entonces por (1.31) se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} V_p(f, t_{i-1}, t_i) V_q(f, t_{i-1}, t_i) \leq \omega_p(\delta)(f)\omega_q(\delta)(g).$$

Q.e.d.

Teorema 1.30

Si la función f es absolutamente p-continua en $[a,b]$, entonces la función

$$\phi(x) = V_p(f,a,x)$$

(ver teorema 1.23) es también absolutamente p-continua en $[a,b]$.

El siguiente teorema presenta una relación entre la clase de Lipschitz $Lip_\alpha[a,b]$ para $0 < \alpha \leq 1$ y la clase de las funciones absolutamente p-continuas para todo número real $p > \frac{1}{\alpha}$.

Teorema 1.31

Si la función f pertenece a la clase de Lipschitz $Lip_\alpha[a,b]$ $(0 < \alpha \leq 1)$, entonces f es absolutamente p-continua para todo número real $p > \frac{1}{\alpha}$.

Demostración: Sea dada $f \in Lip_\alpha[a,b]$ $(0 < \alpha \leq 1)$. Entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha,$$

donde x, y son puntos cualesquiera de $[a,b]$ y M es una constante que no depende de x, y.
Sea $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ una partición cualquiera del intervalo cerrado $[a,b]$ con $t_i - t_{i-1} < \delta$ para $1 \leq i \leq n$ y un número real positivo δ. Se cumple

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|^p}{|t_i - t_{i-1}|}|t_i - t_{i-1}|\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $f \in Lip_\alpha[a,b]$ es

$$\frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|^p}{|t_i - t_{i-1}|} \leq M^p(t_i - t_{i-1})^{\alpha p - 1},$$

siendo por hipótesis $\alpha p - 1$ un exponente positivo. Así es

$$\frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|^p}{|t_i - t_{i-1}|} \leq M^p \delta^{\alpha p - 1}.$$

De ello se deduce

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M(b-a)^{\frac{1}{p}} \delta^{\frac{\alpha p - 1}{p}}.$$

Entonces, para todo número real $\epsilon > 0$ existe un número real

$$\delta = \left(\frac{\epsilon}{M(b-a)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{p}{\alpha p - 1}},$$

tal que para toda partición $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ de $[a, b]$ con $t_i - t_{i-1} < \delta$, se cumple

$$\omega_p(\delta)(f) < \epsilon$$

para $p > \frac{1}{\alpha}$, de donde se deduce la p-continuidad absoluta de f para $p > \frac{1}{\alpha}$.

Q.e.d.

En este punto es importante notar que esta demostración no funciona en el caso $p \leq \frac{1}{\alpha}$, pues el exponente $\alpha p - 1$ no es positivo. De aquí la importancia de la condición $p > \frac{1}{\alpha}$.

Ahora, si f es una función continua definida en el intervalo $[a, b]$, que es diferenciable en (a, b), entonces se conoce que f es Lipschitz-continua de orden 1. A sí, por el teorema 1.31, f es absolutamente p-continua para todo número real $p > 1$.

El teorema 1.31 es muy importante para la determinación de un número real p, de modo que una función dada f sea absolutamente p-continua. Ejemplo de ello es la función de Weierstrass que ya fue estudiada en el epígrafe 1.2 (ver 12.7), la cual pertenece a la clase $Lip_{\frac{1}{2}}[0, 1]$ y, por tanto, pertenece también a $C_p[0, 1]$ para $p > 2$.

Musielack y Orlicz demostraron en 1959, en una relación más general, la separabilidad del espacio $C_p[a, b]$ de las absolutamente p-continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Así se cumple el siguiente teorema (ver [28], págs.25, 26):

TEOREMA 1.32

El espacio $C_p[a, b]$ es separable.

Capítulo 2

EN BUSCA DE UNA REPRESENTACIÓN

En este Capítulo se presentará una parte importante de los resultados obtenidos en las investigaciones para encontrar una caracterización de los espacios duales a los espacios de funciones de p-variación acotada y absolutamente p-continuas.

2.1. Funciones reales de p-variación acotada

2.1.1. Una acotación de las sumas de Riemann-Stieltjes

Sean f, g dos funciones cualesquiera definidas sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Sea $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ una partición cualquiera de $[a, b]$ y sean los puntos $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para $1 \leq i \leq n$. Entonces el valor

$$\sigma_\pi(f, g) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) \tag{2.1}$$

se llama *suma de Riemann-Stieltjes de f respecto a g y π*. Decimos que existe la integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

de f respecto a g en $[a, b]$, si existe un número real I, tal que, para todo $\epsilon > 0$ existe un número real $\delta_\epsilon > 0$ con

$$|\sigma_\pi(f, g) - I| < \epsilon$$

para cualquier selección de los puntos intermedios ξ_i, siempre que sea

$$\max_{1 \leq i \leq n}(t_i - t_{i-1}) < \delta_\epsilon.$$

El número real I se llama *integral de Riemann-Stieltjes de f respecto a g en $[a,b]$*.

En este punto surge la pregunta: ¿Qué relación deben tener los números reales $p, q > 1$, para que las sumas de Riemann-Stieltjes de f respecto a g en el intervalo cerrado $[a,b]$ estén acotadas por las normas de f y g, para dos funciones f y g de p-variación acotada y q-variación acotada respectivamente?

En este epígrafe se expondrán algunos teoremas, así como desigualdades de tipo Hölder, que resultan necesarios para responder la pregunta anterior.

Lema 2.1.1
Sean $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ dos conjuntos de números reales y sean $p, q > 0$ dados. Entonces existe un índice k $(0 < k \leq n)$, tal que se cumple

$$|a_k b_k| \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.2}$$

La demostración rigurosa del lema anterior puede encontrarse en [33].

Sean ahora $\widehat{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $\widehat{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ sucesiones finitas. La desigualdad de Hölder garantiza que

$$\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i\beta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Debe notarse que la desigualdad de Hölder también es válida para exponentes p, q con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} > 1$, pues si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $q' < q$, se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}},$$

ya que el espacio l'_q es un subespacio de l_q y la norma de la inclusión de l'_q en l_q es igual a 1. Entonces se cumple también

$$\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i\beta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

para los exponentes reales positivos p, q con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$

En las siguientes desigualdades sucederá algo similar. La suma

$$\sum_{0<r\leq s\leq n}\alpha_r\beta_s$$

será acotada superiormente por la mayor de un número finito de sumas, que se derivan de una sencilla operación que se describirán a continuación:

La operación de sustituir por signos de "+" un cierto número de las comas que separan a los elementos de la sucesión finita $\widehat{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ se denota por Z. Es decir,

$$Z(\widehat{a}) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \qquad (m \leq n),$$

donde cada ξ_j $(1 \leq j \leq m)$ es una suma de α_i consecutivos, y cada α_i $(1 \leq 1 \leq n)$ aparece como sumando en exactamente un ξ_j. Obviamente, la operación Z así definida es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ con $m \leq n$. Se llamará $\mathcal{Z}$ al conjunto de todas esas aplicaciones.

Sean ahora $\widehat{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $\widehat{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ dos sucesiones finitas cualesquiera. Sea

$$s_{p,q}(\widehat{a}, \widehat{b}) = \sup_{\mathcal{Z}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m} |\eta_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}, \tag{2.3}$$

donde

$$\begin{aligned} \widehat{x} &= (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = Z(\widehat{a}) \\ \widehat{y} &= (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m) = Z(\widehat{a}) \end{aligned}$$

para cualquier $Z \in \mathcal{Z}$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$.

Entonces se cumple el siguiente teorema (ver [21], pág.254):

Teorema 2.1 ***(L.C.Young; Desigualdad de tipo Hölder para sucesiones finitas)***

Sean $\widehat{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $\widehat{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ dos sucesiones finitas y sean dados $p, q > 0$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$. Entonces se cumple la desigualdad

$$\left| \sum_{0<r\leq s\leq n} \alpha_r \beta_s \right| \leq \left\{ 1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \right\} s_{p,q}(\widehat{a}, \widehat{b}), \tag{2.4}$$

donde

$$\zeta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}$$

es la función Zeta de Riemann.

Sean ahora f y g dos funciones definidas sobre $[a,b]$ con $f(a) = g(a) = 0$. Sea $\pi : a = t_o < t_1 < \ldots < t_N = b$ una partición cualquiera de $[a,b]$. Consideremos las sumas de Riemann-Stieltjes

$$\sigma_\pi(f,g) = \sum_{i=1}^{N} f(t_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})).$$

Se cumple

$$\sigma_\pi(f,g) = \sum_{0<r\leq s\leq N} \{(f(t_r) - f(t_{r-1}))(g(t_s) - g(t_{s-1}))\}, \tag{2.5}$$

pues

$$\begin{aligned}
&\sum_{0<r\leq s\leq N} \{(f(t_r) - f(t_{r-1}))(g(t_s) - g(t_{s-1}))\} \\
&\quad = \sum_{s=1}^{N} \{(f(t_s) - f(t_0))(g(t_s) - g(t_{s-1}))\} \\
&\quad\quad = \sum_{s=1}^{N} \{f(t_s)(g(t_s) - g(t_{s-1}))\},
\end{aligned}$$

dado que $f(t_0)f(a) = 0$.

Denotemos por $S_{p,q}(f,g)$ al supremo (si es finito) del producto

$$S_{p,q}(f,g) = \sup_{\pi} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{N} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} |g(t_i) - g(t_{i-1})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \tag{2.6}$$

sobre todas las particiones $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ de $[a,b]$.

Si aplicamos a las sucesiones $(f(t_i) - f(t_{i-1}))_{i=1}^{N}$ y $(g(t_i) - g(t_{i-1}))_{i=1}^{N}$ una aplicación $Z \in \mathcal{Z}$, se obtienen una sucesiones de la misma estructura, pero que corresponden a una partición π' de $[a,b]$ que es más gruesa que π. Pues, sea

$$\alpha_i = f(t_i) - f(t_{i-1}), \qquad \beta_i = g(t_i) - g(t_{i-1}), \qquad (i = 1, \ldots, N),$$

entonces es

$$Z(\widehat{a}) = (\xi_1, \ldots, \xi_M), \qquad Z(\widehat{b}) = (\eta_1, \ldots, \eta_M), \qquad (M \leq N),$$

con

$$\xi_k = f(t_{i_k}) - f(t_{ik-1}), \qquad \eta_i = g(t_{i_k}) - g(t_{ik-1}), \qquad (1 \leq k \leq M)$$

para t_{i_k} de la partición π $(k = 1, \ldots, M)$ y $a = t_{i_1} < t_{i_2} < \ldots < t_{i_M} = b$. De ello se deduce el siguiente teorema.

Teorema 2.2 ***(L.C.Young; Desigualdad de tipo Hölder para funciones en un intervalo)***

Sean dados $p, q > 0$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$, y sean f, g dos funciones definidas en $[a, b]$ con $f(a) = g(a) = 0$. Entonces se cumple la desigualdad

$$|\sigma_\pi(f, g)| \leq \left\{1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right\} S_{p,q}(f, g) \tag{2.7}$$

para toda partición π de $[a, b]$ ($S_{p,q}(f, g)$ puede ser infinito).

En la demostración de este resultado se utiliza el teorema anterior, entre otros argumentos.

Ahora, si las funciones f, g definidas sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ son de p-variación acotada y q-variación acotada respectivamente con $p, q > 1$. Entonces obviamente $S_{p,q}(f, g)$ es finito y se cumple

$$S_{p,q}(f, g) \leq V_p(f)V_q(g).$$

Luego, por el teorema 2.2 se obtiene la acotación

$$|\sigma_\pi(f, g)| \leq \left\{1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right\} V_p(f)V_q(g) \tag{2.8}$$

para funciones f y g de p-variación acotada y q-variación acotada en $[a, b]$ respectivamente con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$.

La acotación (2.8) no implica necesariamente la existencia de la integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b f(x)dg(x).$$

Sin embargo, si se asegura la existencia de la integral de Riemann-Stieltjes de f respecto a g en $[a, b]$ para $f \in V_p[a, b]$ y $g \in V_q[a, b]$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$, entonces se tiene la acotación

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leq \left\{1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right\} V_p(f)V_q(g). \tag{2.9}$$

Debemos hacer notar que en el caso $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$, no es posible encontrar una constante $M = M(p)$ tal que se cumpla

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leq MV_p(f)V_q(g).$$

para todas las funciones $f \in V_p[a,b]$ y $g \in V_q[a,b]$, para las que existe la integral

$$\int_a^b f(x)dg(x).$$

En el siguiente ejemplo se considera la función de Weierstrass estudiada anteriormente en el epígrafe 1.2.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-\frac{n}{2}} \cos(2\pi a^n x) \\ g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-\frac{n}{2}} \sin(2\pi a^n x) \end{array} \qquad x \in [0,1] \tag{2.10}$$

para un número natural cualquiera $a > 1$.

Sean la sumas parciales

$$\begin{array}{ll} f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a^{-\frac{n}{2}} \cos(2\pi a^n x) \\ g_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a^{-\frac{n}{2}} \sin(2\pi a^n x) \end{array} \qquad x \in [0,1]. \tag{2.11}$$

Se ha demostrado ya la acotación

$$V_2(f_N) \leq 24. \tag{2.12}$$

De modo análogo se puede demostrar para la suma parcial $g_N(x)$ la acotación

$$V_2(g_N) \leq 24. \tag{2.13}$$

Calculando ahora la integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_0^1 f_N(x)dg_N(x).$$

para un número natural N cualquiera.

Se cumple

$$\int_0^1 f_N(x)dg_N(x) = \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} a^{-\frac{n}{2}} \cos(2\pi a^n x) d\left(\sum_{m=1}^{N} a^{-\frac{m}{2}} \sin(2\pi a^m x)\right).$$

Pero la función g_N es continuamente diferenciable, pues es suma finita de funciones continuamente diferenciables. Entonces

$$\int_0^1 f_N(x)dg_N(x) = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{N} a^{-\frac{n}{2}} \cos(2\pi a^n x) \sum_{m=1}^{N} a^{-\frac{m}{2}} 2\pi a^m \cos(2\pi a^m x)\right) dx.$$

Así es

$$\int_0^1 f_N(x)dg_N(x) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} a^{-(\frac{1}{2})(n+m)} 2\pi a^m \int_0^1 \cos(2\pi a^n x)\cos(2\pi a^m x)dx.$$

Calcuando la integral del lado derecho de la expresión anterior. Se tiene

$$\int_0^1 \cos(2\pi a^n x)\cos(2\pi a^m x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (\cos(2\pi(a^n + a^m)x) + \cos(2\pi(a^n - a^m)x))dx.$$

De ello se deduce

$$\int_0^1 \cos(2\pi a^n x)\cos(2\pi a^m x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2} & m = n \end{cases}.$$

Pero entonces es

$$\int_0^1 \cos(2\pi a^n x)\cos(2\pi a^m x)dx = \sum_{n=1}^{N} \pi = N\pi.$$

Supóngase ahora que existe un número real positivo M, tal que se cumple la acotación

$$\left|\int_0^1 \cos(2\pi a^n x)\cos(2\pi a^m x)dx\right| \leq MV_2(f)V_2(g).$$

Entonces se cumple para $N \geq 24$

$$N\pi = \left|\int_0^1 \cos(2\pi a^n x)\cos(2\pi a^m x)dx\right| \leq M24^2;$$

es decir, para toda $N \geq 24$ se cumple

$$N\pi \leq M24^2,$$

lo cual es imposible. Entonces no existe ninguna constante universal $M = M(p)$ tal que se cumpla la acotación

$$\left|\int_0^1 \cos(2\pi a^n x)\cos(2\pi a^m x)dx\right| \leq MV_2(f)V_2(g)$$

para cualquier N.

Luego de este ejemplo se puede comprobar fácilmente que no existe la integral

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} a^{-\frac{n}{2}} \cos(2\pi a^n x) d\left(\sum_{m=1}^{\infty} a^{-\frac{m}{2}} \sin(2\pi a^m x)\right),$$

a pesar de que las funciones de Weierstrass f y g son continuas, pues se conoce que las funciones f_N y g_N convergen uniformemente a f y g respectivamente, de donde, de existir esta integral, se deduciría la acotación uniforme de las integrales

$$\int_0^1 f_N(x)dg_N(x).$$

Resulta entonces obvio que la función de Weierstrass (2.10) no puede ser de 1-variación acotada, por tanto, tampoco es Lipschitz-continua de orden 1.

Teorema 2.3 *(**Recíproco de la desigualdad de tipo Hölder para sucesiones finitas**)*

Sean p, q dos números reales positivos con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sea $(\beta_1, \ldots, \beta_N)$ una sucesión finita de números reales y sea

$$B = sup_{\mathcal{Z}} \left(\sum_{i=1}^{M} |\eta_i|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

donde $(\eta_1, \ldots, \eta_M)$ es la imagen de $(\beta_1, \ldots, \beta_N)$ por una aplicación $Z \in \mathcal{Z}$ cualquiera. Entonces existe una sucesión finita $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, tal que

$$\left| \sum_{0<r\leq s\leq N} \alpha_r \beta_s \right| \geq \frac{AB}{2^{1+\frac{1}{q}}},$$

donde

$$A = sup_{\mathcal{Z}} \left(\sum_{i=1}^{M} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

y $(\xi_1, \ldots, \xi_M) = Z(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ por una aplicación cualquiera $Z \in \mathcal{Z}$.

Tampoco se demostrará aquí el teorema anterior, pues en la opinión del autor, los argumentos se apartan un poco del objetivo de la tesis. El lector interesado puede remitirse a [33].

2.1.2. Sobre la dualidad de $C_p[a, b]$

En un artículo de Kisliakov de 1984 (ver[18]) se demuestra que el espacio bidual del espacio $C_p[a, b]$ es isométricamente isomorfo al espacio $V_p[a, b]$ de las funciones de p-variación acotada; y se plantea aqui el interés por encontrar una demostración directa de esa afirmación.

Es conocido que en el caso $p = 1$ el espacio bidual de $C[a, b]$ es isométricamente isomorfo al espacio $V_1[a, b]$ de las funciones de 1-variación acotada. Partiendo de estos hechos y de la “cierta similitud” de los espacios estudiados con los conocidos espacios l_p, se impone la pregunta de si será posible encontrar un isomorfismo isométrico entre los espacios $(C_p[a, b])^*$ y $V_q[a, b]$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ en analogía con el caso de $C[a, b]$.

Pero del hecho de que $V_p[a, b]$ contiene una copia isomomorfa de c_0 (ver teorema 1.26) se deriva que todo predual de $V_p[a, b]$ debe contener una copia isomomorfa de l_1. Por otra parte, es conocido (ver por ejemplo, [18]) que el espacio $C_p[a, b]$ $(1 < p < \infty)$ no contiene ningún subespacio isomomorfo a l_1. Entonces $V_q[a, b]$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ no puede ser es espacio dual de $C_p[a,b]$.

En lugar de eso se plantean las siguientes cuestiones:

- ¿Se puede representar a toda funcional lineal continua sobre $C_p[a,b]$ como integral de Riemann-Stieltjes?
- ¿Hasta dónde se puede pedir a la función g una condición más débil que la 1-variación acotada, de manera que se garantice la existencia de la integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b f(x) f g(x)$$

de f respecto a g en $[a,b]$, cuando se exige a la función f la condición más fuerte de la p-continuidad absoluta?

El siguiente teorema muestra una representación de las funcionales lineares continuas sobre $C_p[a,b]$. Por su importancia se incluye aquí la demostración.

Teorema 2.4
Toda funcional lineal continua sobre $C_p[a,b]$ es una integral de Riemann-Stieltjes de la forma

$$\int_a^b f(x) f g(x),$$

donde g es una función de q-variación acotada con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Demostración:

(i) Sea F una funcional lineal continua sobre $C_p[a,b]$. Como $C_p[a,b]$ es un subespacio cerrado de $V_p[a,b]$ (ver teorema 1.27), por el Teorema de Hahn-Banach se puede prolongar la funcional F a $V_p[a,b]$ conservando la norma. Sea $\widehat{F}$ dicho prolongamiento. Se construye la función

$$g(\tau) = F(f_\tau),$$

donde

$$\begin{aligned} f_\tau(t) &= \begin{cases} 1 & 0 < t \leq \tau \\ 0 & t = a \text{ y } t > \tau \end{cases} \qquad (\tau \in (a,b]), \\ f_a(t) &= 0 \qquad (t \in [a,b]). \end{aligned}$$

Se demostrará que $g \in V_q[a,b]$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ y

$$V_q(g) \leq 2^{1+\frac{1}{q}} \parallel F \parallel . \tag{2.14}$$

Supóngase que no se cumple la desigualdad anterior. Entonces existe una partición $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ de $[a, b]$ con

$$\left(\sum_{s=1}^{n} |g(t_s) - g(t_{s-1})|^q \right)^{\frac{1}{q}} > 2^{1+\frac{1}{q}} \parallel F \parallel . \tag{2.15}$$

Sea $\beta_s = g(t_s) - g(t_{s-1})$, entonces existe una sucesión finita $(\alpha_i)_{i=1}^{n}$ (ver [33]), tal que

$$\left| \sum_{s=1}^{n} (\alpha_1 + \ldots + \alpha_s)(g(t_s) - g(t_{s-1})) \right| > \frac{AB}{2^{1+\frac{1}{q}}},$$

donde

$$A = \sup_{\mathcal{Z}} \left(\sum_{l=1}^{L} |\xi_l|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad B = \sup_{\mathcal{Z}} \left(\sum_{l=1}^{L} |\eta_l|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

con

$$\begin{aligned} (\xi_1, \ldots, \xi_L) &= Z(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n), \\ (\eta_1, \ldots, \eta_L) &= Z(\beta_1 + \ldots + \beta_n) \end{aligned}$$

para una aplicación cualquiera $Z \in \mathcal{Z}$. Se tiene además (ver [33] que

$$B > 2^{1+\frac{1}{q}} \parallel F \parallel,$$

y por tanto

$$\left| \sum_{s=1}^{n} (\alpha_1 + \ldots + \alpha_s)(g(t_s) - g(t_{s-1})) \right| > A \parallel F \parallel . \tag{2.16}$$

La parte izquierda de esta desigualdad es el valor de $|\widehat{F}(\phi)|$ para la función escalonada

$$\phi(x) = \sum_{s=1}^{n} (\alpha_1 + \ldots + \alpha_s)(f_{t_s} - f_{t_{s-1}})(x),$$

la cual toma el valor $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_s)$ para $t_{s-1} < t \leq t_s$ y se anula para $t = a$. Pero la función escalonada ϕ es obviamente de p-variación acotada y se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda partición $\pi : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ de $[a,b]$, cuyos puntos x_i $(i = 1, \ldots, m)$ (sin perder generalidad) están en subintervalos diferentes de la partición π, donde

$$\xi_i = \sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} \alpha_j \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

para $x_{i-1} \in \left[t_{j_{i-1}} - 1, t_{j_{i-1}}\right]$ y $x_i \in [t_{j_i-1}, t_{j_i}]$. Entonces es claro que

$$Vp(\phi) \leq A.$$

Luego, se tiene

$$|\widehat{F}(\phi)| \leq \parallel \widehat{F} \parallel V_p(\phi) \leq A \parallel F \parallel,$$

lo que contradice la desigualdad (2.16). Entonces se cumple

$$V_q(g) \leq 2^{1+\frac{1}{q}} \parallel F \parallel .$$

(ii) Sea ahora f una función absolutamente p-continua. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que

$$\omega_p(\delta)(f) = \sup_{\pi_\delta} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$$

para todas las particiones π_δ con $(t_i - t_{i-1}) < \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$. Elegimos una partición $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ de $[a,b]$ con esta propiedad y consideramos la suma

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\widehat{F}(f_{t_k}) - \widehat{F}(f_{t_{k-1}}))$$

para cualesquiera $\xi_k \in (t_{k-1}, t_k]$, $(k = 1, \ldots, n)$.

Pero la suma anterior es el valor de la funcional $\widehat{F}$ en la función escalonada $\widehat{f}$ con

$$\widehat{f}(t) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(f_{t_k}(t) - f_{t_{k-1}}(t)), \tag{2.17}$$

la cual toma el valor $f(\xi_i)$ en el intervalo $(t_{i-1}, t_i]$ para $(i = 1, \ldots, n)$ y se anula para $t = a$. Entonces

$$\widehat{F}(\widehat{f}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})). \tag{2.18}$$

Puede calcularse una cota superior para la suma

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |(f-\widehat{f})(x_i)-(f-\widehat{f})(x_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $\pi_x : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ es una partición cualquiera de $[a,b]$. Separamos la suma anterior en dos: una sobre todos los subintervalos de la partición π_x que están contenidos totalmente en un subintervalo de la partición π y la otra sobre los subintervalos restantes de la partición π_x.

Sean entonces x_{i-1} y x_i contenidos en el mismo subintervalo $(t_{j_i-1}, t_{j_i}]$ de π. Así es obviamente

$$|(f-\widehat{f})(x_i)-(f-\widehat{f})(x_{i-1})|^p = |f(x_i)-f(x_{i-1})|^p.$$

De ello se deduce

$$\left(\sum |(f-\widehat{f})(x_i)-(f-\widehat{f})(x_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum |f(x_i)-f(x_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pero obviamente es $(x_i - x_{i-1}) < \delta$. Entonces es

$$\left(\sum |(f-\widehat{f})(x_i)-(f-\widehat{f})(x_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon. \tag{2.19}$$

Ahora, si $x_i \in (t_{j_i-1}, t_{j_i}]$ y $x_{i-1} \in (t_{k_i-1}, t_{k_i}]$ para $k_i \neq j_i$, se cumple

$$|(f-\widehat{f})(x_i)-(f-\widehat{f})(x_{i-1})|^p = |(f(x_i)-f(t_{j_i}))-(f(x_{i-1})-f(t_{k_i})|^p.$$

Aplicando la desigualdad de Minkowski se deduce de ello, teniendo en cuenta que $|x_i - t_{j_i}| < \delta$ y $|x_{i-1} - t_{k_i}| < \delta$, la acotación

$$\left(\sum |(f-\widehat{f})(x_i)-(f-\widehat{f})(x_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} < 2\epsilon. \tag{2.20}$$

De (2.19) y (2.20) se deduce entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |(f-\widehat{f})(x_i)-(f-\widehat{f})(x_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} < 3\epsilon,$$

es decir,

$$\| f - \widehat{f} \|_{V_p} < 3\epsilon. \tag{2.21}$$

Pero por otra parte, el valor $\widehat{F}(\widehat{f})$ es una suma aproximante de la integral (si existe)

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

en relación con la partición considerada. Se cumple

$$|\widehat{F}(f) - \widehat{F}(\widehat{f})| \leq \| F \| \| f - \widehat{f} \|_{V_p},$$

o sea, es

$$|\widehat{F}(f) - \widehat{F}(\widehat{f})| \leq 3\epsilon \| F \| . \tag{2.22}$$

Entonces las sumas $\widehat{F}(\widehat{f})$ convergen al valor $\widehat{F}(f) = F(f)$ de la funcional F para toda función $f \in C_p[a,b]$, con lo que se asegura la existencia de la integral de Riemann-Stieltjes de f respecto a g en $[a,b]$, es decir,

$$F(f) = \int_a^b f(x)dg(x),$$

quedando así demostrado el teorema.

Q.e.d.

Es conocido que el valor de la integral de Riemann-Stieltjes no cambia si varía el valor de la función g en una cantidad numerable de puntos. A pesar de ello, en el presente caso no es posible cambiar la función g de manera que la norma de la nueva función g' cumpla la desigualdad

$$\| g' \|_{V_q} \leq 2^{1+\frac{1}{q}} \| g \|_{V_q} \leq \| F \|,$$

pues se conoce que la p-variación de una función varía en relación con su continuidad y no se tienen datos sobre la continuidad de la función g.

El teorema anterior presenta entonces una aplicación biunívoca entre el espacio dual de $C_p[a,b]$ y un subespacio del espacio de las funciones de q-variación acotada con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. El siguiente teorema presenta una condición suficiente para la existencia de la integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b f(x)dg(x),$$

constituyendo una funcional lineal continua sobre $C_p[a,b]$.

Teorema 2.5

Sea f una función absolutamente p-continua y g una función de q-variación acotada en $[a,b]$ para un número real $q < p'$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces existe la integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

y se cumple

$$\left| \int_a^b f(x)dg(x) \right| \leq \left\{ 1 + \zeta \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \right\} V_p(f) V_q(g).$$

Demostración: Sea dada $f \in C_p[a,b]$ para $p > 1$. Entonces para todo número real positivo ϵ existe un número real $\delta_\epsilon > 0$, tal que

$$\omega_p(\delta)(f) < \epsilon$$

para todo $\delta < \delta_\epsilon$.

(i) Sea cualquier $\epsilon > 0$ dado. Se demostrará la independencia del límite

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

de la selección de los puntos intermedios $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $(i = 1, \ldots, n)$, donde el límite se toma sobre todas las particiones $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ de $[a,b]$ que cumplen la condición $(t_i - t_{i-1}) < \delta$.

Sean ξ_i y η_i puntos cualesquiera de $[t_{i-1}, t_i]$ para $i = 1, \ldots, n$. Introduciendo las notaciones

$$\begin{aligned} \sigma_\pi^{(\xi)} &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) \\ \sigma_\pi^{(\eta)} &= \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})). \end{aligned}$$

Obviamente es

$$|\sigma_\pi^{(\xi)} - \sigma_\pi^{(\eta)}| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i) - f(\eta_i)||g(t_i) - g(t_{i-1})|.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder se deduce de ello

$$|\sigma_\pi^{(\xi)} - \sigma_\pi^{(\eta)}| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i) - f(\eta_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pero la función g es de q-variación acotada para $q < p'$, por lo que también es de p'-variación acotada. De ello se deduce (ver teorema 1.20)

$$|\sigma_\pi^{(\xi)} - \sigma_\pi^{(\eta)}| \leq CV_{p'}(g) \left(\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i) - f(\eta_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde C es una constante independiente de la partición π. Como la partición π cumple la condición $(t_i - t_{i-1}) < \delta$ y $f \in C_p[a, b]$, entonces es

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i) - f(\eta_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \omega_p(\delta)(f) < \epsilon.$$

De ello se deduce entonces

$$|\sigma_\pi^{(\xi)} - \sigma_\pi^{(\eta)}| \leq \epsilon CV_{p'}(g)$$

para todo $\epsilon > 0$ y por tanto, el límite

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

existe independiente de la selección de los puntos intermedios $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para $i = 1, \ldots, n$ en las sumas de Riemann-Stieltjes $\sigma_{\pi_\delta}(f, g)$.

(ii) Sean ahora

$$\pi' : a = t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_n = b \qquad \text{y} \qquad \pi'' : a = t''_0 < t''_1 < \ldots < t''_m = b$$

dos particiones cualesquiera de $[a, b]$ con $(t'_i - t'_{i-1}) < \delta$ y $(t''_j - t''_{j-1}) < \delta$ para $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, m$. Superponiendo ambas particiones,se obtiene una nueva partición $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_s = b$ de $[a, b]$ que también cumple la condición $(t_i - t_{i-1}) < \delta$ $(i = 1, \ldots, s)$ y $s \leq n + m$. Comparando las sumas $\sigma_\pi(f, g)$ y $\sigma_{\pi'}(f, g)$ en las que se consideran como puntos intermedios a los extremos t_i y t'_{j-1} de los subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ y $[t_{j-1}, t'_j]$ de las particiones π y π' respectivamente.

Se cumple

$$\sigma_\pi(f, g) - \sigma_{\pi'}(f, g) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \tag{2.23}$$

con

$$\gamma_j = \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} f(t_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) - f(t'_{j-1})(g(t'_j) - g(t'_{j-1})), \tag{2.24}$$

donde la suma en (2.24) se desarrolla sobre todos los subintervalos $[t_{k-1}, t_k]$ de la partición π que están contenidos en el subintervalo $[t'_{j-1}, t'_j]$ de la partición π'. Escribimos la última desigualdad de otro modo, a saber

$$\gamma_j = \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} (f(t_k) - f(t'_{j-1}))(g(t_k) - g(t_{k-1})),$$

y consideramos el módulo de la diferencia $\sigma_\pi(f,g) - \sigma_{\pi'}(f,g)$. Nótese que $t'_{j-1} = t_k$. Entonces es (ver (2.5))

$$|\gamma_j| \leq \sum_{k_j < l \leq k \leq k_{j+1}} |f(t_l) - f(t_{l-1})||g(t_k) - g(t_{k-1})|.$$

Aplicando el teorema 2.2, se deduce de ello la acotación (ver también (2.8))

$$\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j| \leq \left\{1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right\} \sum_{j=l}^{n} (V_p(f; t'_{j-1}, t'_j) V_q(g; t'_{j-1}, t'_j)). \tag{2.25}$$

Se aplica el teorema 1.29 a la desigualdad anterior y se obtiene (ver(2.23))

$$|\sigma_\pi(f,g) - \sigma_{\pi'}(f,g)| \leq \left\{1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right\} V_q(g)\epsilon.$$

De manera análoga es

$$|\sigma_{\pi''}(f,g) - \sigma_\pi(f,g)| \leq \left\{1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right\} V_q(g)\epsilon,$$

y con ello se asegura la existencia del límite

$$\int_a^b f(x)dg(x),$$

con la ayuda del criterio de convergencia de Cauchy.

(iii) Ahora, del teorema 2.2 se deduce la acotación

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leq \left\{1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right\} V_p(f)V_q(g).$$

quedando así demostrado el teorema.

Q.e.d.

2.2. Funciones abstractas de p-variación acotada fuerte y débil

En relación con el estudio de la dualidad de los espacios de funciones de p-variación acotada y absolutamente p-continuas también puede mencionarse como trabajo relevante el de Puig de Dios (ver [32]), quien en 2005 introduce, con la intención de generalizar los resultados de Gelfand para las funciones abstractas de variación acotada, los conceptos de p-variación y p-continuidad absoluta en sentido abstracto. A continuación se expondrán algunos resultados importantes de este trabajo.

Definición 2.1
Sea E un espacio normado. La función abstracta $X : [a,b] \to E$ se dice de p-variación acotada fuerte en $[a,b]$ con $1 \leq p \leq \infty$ si y solo si, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \|X(t_{i+1}) - X(t_i)\|^p \leq M \tag{2.26}$$

para cualquier partición del intervalo $[a,b]$ y para todo n natural. En ese caso se llama p-variación fuerte de X al valor

$$VF_p^E(X) = \sup_{\Pi} \left(\sum_{i=1}^{n} \|X(t_{i+1}) - X(t_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

donde el supremo se toma sobre el conjunto de todas las particiones Π de $[a,b]$.

Definición 2.2
Dados $1 \leq p \leq \infty$ y un espacio normado E. Se llama espacio de las funciones abstractas de p-variación acotada fuerte en $[a,b]$ al espacio de las funciones abstractas. $VF_p^E([a,b]) = \{X : [a,b] \to E; X(a) = 0 \quad y \quad VF_p^E(X) \leq \infty\}$.

Definición 2.3
Sea E un espacio normado. La función abstracta $X : [a,b] \to E$ se dice de p-variación acotada débil $(1 \leq p \leq \infty)$ si y solo si para toda $f \in E^*$ la función real $fX(\cdot)$ es de p-variación acotada en $[a,b]$.

El siguiente teorema proporciona una justificación del uso de las denominaciones de fuerte y débil.

Teorema 2.6
Sean E un espacio normado y $X \in VF_p^E([a,b])$. Entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$V_p(fX(\cdot)) \leq k\|f\| \qquad \forall f \in E^*$$

Corolario 2.2.1

Sean E un espacio normado y $X \in VF_p^E([a,b])$. Entonces, para toda $f \in E^*$, la función real $t \mapsto fX(t)$ es de p-variación acotada en $[a,b]$.

Con el corolario anterior se evidencia la inclusión $VF_p^E([a,b]) \subset VAD_p^E([a,b])$, dándole sentido a las denominaciones de débil y fuerte.

En [32] se demuestra que el espacio de las funciones de p-variación acotada fuerte es un espacio de Banach si se toma como norma la p-variación fuerte. La demostración es extensa, aunque no se aleja de los razonamientos seguidos posteriormente en este trabajo para demostrar tesis similares, por ello no se mostrará aquí.

Por otra parte, puede definirse la clase de Liptchiz $Lip_\alpha^E[a,b]$ con $0 \leq \alpha \leq 1$ para funciones abstractas X de $[a,b]$ en un espacio normado E, como el conjunto de aquellas funciones que satisfacen la desigualdad $\|X(t_1) - X(t_0)\| \leq M|t_1 - t_0|^\alpha$, para cualesquiera t_0 y t_1 en $[a,b]$, siendo M una constante que sólo depende de la función X. No es difícil ver que la clase $Lip_\alpha^E[a,b]$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|X\| = \sup_{t_1 \neq t_0 \in [a,b]} \frac{\|X(t_1) - X(t_0)\|}{|t_1 - t_0|^\alpha}.$$

En este sentido se tiene que $Lip_{\frac{1}{p}}^E[a,b] \subset VF_p^E([a,b])$, resultado análogo al del caso de las funciones reales.

Otros resultados interesantes que se demuestran de forma más o menos análoga al caso real son la no separabilidad del espacio de las funciones de p-variación acotada fuerte y el hecho de que el conjunto de los puntos de discontinuidad de las funciones de p-variación débil es (a lo sumo) numerable.

En la búsqueda de un teorema de representación de los operadores sobre los espacios de funciones abstractas en cuestión es de suma importancia conocer la siguiente definición de integral abstracta de Stieltjes.

Definición 2.4

Sea E un espacio normado y sean $X : [a,b] \to E$ y $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se dice que phi es integrable (abstracto) de Stieltjes respecto a X si existe un elemento $\xi \in E^{**}$ tal que

$$\xi f = \int_a^b \phi(t) dfX(t) \quad \forall f \in E^{**}$$

y el valor de la integral abstracta de Stieltjes será

$$\int_a^b \phi(t) dX(t) = \xi.$$

Los operadores lineales y continuos que aplican $C_p[a,b]$ en E, siendo este último un espacio normado débilmente completo, tienen una representación a través de estas integrales. Ello se expresa en el siguiente teorema cuya demostración no se hará aquí por referirse a resultados de la integración abstracta de Riemman-Stieltjes que resultaría superfluo exponer en esta tesis. La prueba puede hallarse en ([32]).

Teorema 2.7
Sea E un espacio normado débilmente completo y sean $1 < p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, para cada operador lineal y continuo $U : C_p[a,b] \to E$ existe una función abstracta $Y \in VAF_q^E[a,b]$, tal que

$$U(\theta) = \int_a^b \theta(t)dY(t), \quad \forall\ \theta \in C_p[a,b].$$

Igualmente se puede deducir la siguiente condición suficiente respecto a la representación buscada.

Teorema 2.8
Sea E un espacio normado débilmente completo y sea $1 < p < \infty$ y $q \le p'$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces para cada función abstracta $X \in VAF_q^E[a,b]$ existe un operador lineal y continuo $U : C_p[a,b] \to E$ tal que $U : \phi \mapsto \int_a^b \phi dX(t)$ para cada $\phi \in C_p[a,b]$.

Demostración:

Sean $1 < p < \infty$ y $q \le p'$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $X \in VAF_q^E[a,b]$. Entonces para cada $f \in E^*$ la función real $t \mapsto fX(t)$ es de q-variación acotada en $[a,b]$, por lo que para cada $\phi \in C_p[a,b]$ existe la integral $\int_a^b \phi(t)dfX(t)$. De aquí que

$$\left| \int_a^b \phi(t)dfX(t) \right| \le \left\{ 1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \right\} V_p(\phi)V_q(fX(\cdot))$$

Luego, existe un $k \in \mathbb{R}$ tal que $|\xi f| \le \left\{ 1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \right\} V_p(\phi)k\|f\|$ para toda $f \in E^*$, es decir

$$\|\xi\| \le \left\{ 1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \right\} V_p(\phi)k.$$

De aquí que sea $\xi \in E^{**}$ y por tanto existe la integral abstracta de Stieltjes $\int_a^b \phi(t)dX(t)$.

Definamos el operador

$$U : \phi \mapsto \int_a^b \phi(t)dX(t).$$

Como E es débilmente completo, entonces $\int_a^b \phi(t)dX(t) \in E$ para todo $\phi \in C_p[a,b]$. Luego, U aplica a C_p en E y evidentemente es lineal. Demostremos que es continuo:

$$\|U\phi\| = \|\xi\| \leq \left\{1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right\} V_p(\phi)k = \left\{1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right\} k\|\phi\|_{V_p},$$

o sea $\|U\| \leq \left\{1 + \zeta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right\} k$ y la acotación de U implica la continuidad. **Q.e.d.**

Obsérvese que:

(i) Para $1 < p < \infty$, del teorema sobre la representación de los operadores sobre $C_p[a,b]$ se desprende que el espacio de los operadores lineales y continuos $U : C_p[a,b] \to E$, con E normado débilmente completo, es isomorfo a un subconjunto del espacio $VAF_q^E[a,b]$ de las funciones abstractas de q-variación acotada fuerte en $[a,b]$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(ii) Por otra parte, del último teorema se tiene que si $1 < p < \infty$, para cada $q < p'$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, el espacio $VAF_q^E[a,b]$ de las funciones abstractas de q-variación acotada fuerte en $[a,b]$ es isomorfo a un subconjunto del espacio de los operadores lineales y continuos $U : C_p[a,b] \to E$, siendo E un espacio normado débilmente completo. Nótese que no se logra obtener isometría y que las relaciones obtenidas se representan a través de la integral abstracta de Stieltjes.

(iii) Sin embargo, en general no podemos afirmar que el espacio $VAF_q^E[a,b]$ es isomorfo a un subconjunto del espacio de los operadores lineales y continuos $U : C_p[a,b] \to E$; $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. Para ello basta considerar $E = \mathbb{R}$. En efecto, del hecho que $V_p[a,b]$ contiene un subespacio isomorfo a c_0, se tiene que, cada predual de $V_p[a,b]$ contiene una copia isomorfa a l^1. Pero es conocido que el espacio $C_p[a,b]$ $(1 < p < \infty)$ no contiene ningún subespacio isomorfo a l^1. Luego, $V_q[a,b]$ no puede ser el espacio dual a $C_p[a,b]$. Para $E = \mathbb{R}$ se obtiene el clásico Teorema de Representación de Riesz, ya que los espacios $VAD_1^{\mathbb{R}}[a,b]$ y $VAF_1^{\mathbb{R}}[a,b]$ coinciden.

De forma análoga se puede generalizar el concepto de función de absolutamente p-continua al caso abstracto, siendo

$$W_p^E(\delta)(X) = \sup_{\delta\Pi} \left(\sum_{i=1}^{n} \|X(t_{i+1}) - X(t_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

el módulo de p-continuidad de la función abstracta X (se consideran particiones $\delta\Pi$ de $[a,b]$ de norma menor que δ). A partir de ello se define:

Definición 2.5
Sea E un espacio normado. La función abstracta $X : [a, b] \to E$ de p-variación acotada fuerte en $[a, b]$ se llama absolutamente p- continua fuerte en $[a, b]$ si y solo si $\lim_{\delta\to 0} W_p^E(\delta)(X) = 0$. De esta forma se denomina a

$$FC_p^E[a,b] = \Big\{X : [a,b] \to E; \quad X \in VAF_p^E[a,b]; \quad \lim_{\delta\to 0} W_p^E(\delta)(X) = 0\Big\}$$

espacio de las funciones abstractas absolutamente p-continuas fuerte en $[a, b]$. Para el caso $p = \infty$ se define

$$W_\infty^E = \sup\{\|X(s) - X(t)\| : \quad |s-t| \le \delta \quad y \quad s,t \in [a,b]\}$$

siendo así que $FC_\infty^E[a, b]$ coincide con el espacio de las funciones abstractas fuertemente continuas (ver [14]) en $[a, b]$ con el valor $X(a) = 0$.

En [32] se demuestra también que $FC_p^E[a, b]$ es un subespacio cerrado de $VAF_p^E[a, b]$ y las funciones abstractas α-liptchitzianas son absolutamente p-continuas fuerte para $\alpha \ge \frac{1}{p}$.

Igualmente puede definirse también la p-continuidad absoluta débil como:

Definición 2.6
Sea E un espacio normado. La función abstracta $X : [a, b] \to E$ se dice absolutamente p-continua débil en $[a, b]$ si para cada $f \in E^*$, la función $t \mapsto fX(t)$ es absolutamente p-continua en $[a, b]$. Se denota por $DC_p^E[a, b]$ al espacio de las funciones absolutamente p-continuas débil; y es claro además que se cumple $FC_p^E[a, b] \subset DC_p^E[a, b]$.

Para esta funciones se cumple el siguiente teorema.

Teorema 2.9
Sea E un espacio normado. Entonces para cada operador lineal y continuo $U : E \to C_p[a, b]$, existe una función abstracta $f \in DC_p^{E^*}[a, b]$, tal que U puede ser representado en la forma $Ux = \phi$ con $\phi(t) = f(t)(x)$, para $x \in E$ y $\phi \in C_p[a, b]$. Además, $\|U\| = \|f\|_{DC_p^{E^*}}$.

Demostración:

Sea U un operador lineal y continuo tal que $Ux = \phi$, para $x \in E$ y $\phi \in Cp[a, b]$. Para t fijo, definamos la funcional $f(t) : x \mapsto \phi(t)$. La aplicación $f(t)$ resulta continua, por ser la composición de las aplicaciones continuas

$$U : x \mapsto \phi$$
$$\phi : t \mapsto \phi(t).$$

La linealidad de $f(t)$ es evidente. Luego, para cada $t \in [a,b]$ resulta que $f(t) \in E^*$. De esta forma, se ha construido una función abstracta $f : [a,b] \to E^*$, de modo que U puede representarse en la forma $Ux = \phi$ con $\phi(t) = f(t)(x)$, o sea, $Ux = f(\cdot)(x)$. A contnuavión se verá que $f \in DC_p^{E^*}[a,b]$. Como $Ux = f(\cdot)(x)$ e $ImU \subset C_p[a,b]$, entonces la función $t \mapsto f(t)(x)$ es absolutamente p-continua en $[a,b]$ para cada $x \in E$, de donde $f \in DC_p^{E^*}[a,b]$.

Sólo resta probar que $\|U\| = \|f\|_{DC_p^{E^*}}$. Partiendo del hecho de que $C_p[a,b] \subset C[a,b]$, convéngase tomar $\|\phi\| = \text{máx}_t\, |\phi(t)|$. Entonces

$$\begin{aligned} \|U\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ux\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \max_{a\leq t\leq b} |f(t)(x)| \\ &= \sup_{a\leq t\leq b} \sup_{\|x\|\leq 1} |f(t)(x)| = \sup_{a\leq t\leq b} \|f(t)\| \\ &= \|f\|_{DC_p^{E^*}} \end{aligned}$$

Q.e.d.

De aquí se infiere que el espacio de los operadores $U : E \to C_p[a,b]$ lineales y continuos es isométricamente isomorfo al espacio $DC_p^{E^*}[a,b]$ de las funciones abstractas $f : [a,b] \to E^*$ absolutamente p-continuas débil en $[a,b]$.

Llegando al final del capítulo, es importante aclarar que se han expuesto aquí solo los resultados que el autor considera más relevantes y de mayor trascendencia en el estudio de la dualidad del espacio de las funciones de p-variación acotada hasta el momento.

Capítulo 3

EL ÁLGEBRA DE LAS FUNCIONES DE p-VARIACIÓN ACOTADA

Es objetivo principal de este Capítulo, exponer el enfoque que ha abordado el autor hasta la presente fecha en el tratamiento del problema de la dualidad de el espacio de las funciones de p-variación acotada, con este fin se demuestran algunos de los resultados más importantes de su tesis de Diploma y los obtenidos por este recientemente en relación a las subálgebras de V_p,su regularidad y la posibilidad de definir una involución, entre otros. Además se da un salto hacia otros puntos de vista que pudieran resultar de mucha utilidad para próximos trabajos.

3.1. Las álgebras V_p y C_p

En el presente epígrafe se generaliza la definición de los espacios de funciones de p-variación acotada y de funciones absolutamente p-continuas al caso de funciones complejas de variable real y se exponen algunas propiedades que son útiles para la comprensión del comportamiento de los mismos.

Definición 3.1

Sea Π *el conjunto de todas las particiones de compactos* K *de* $\mathbb{R}$ *y* $p > 1$ *un número real. Se dice que una función compleja definida sobre la recta real es de p-variación acotada, si para cualquier partición* $\pi = \{t_i\}_{i=0}^n \in \Pi$ *se cumple que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

En ese caso se llama p-variación de f al valor

$$pvar(f) = \sup_K \sup_\Pi \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_i - i)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde los supremos se toman sobre todos los compactos K de $\mathbb{R}$ y todas las particiones $\pi \in \Pi$.
Se denota por V_p al espacio de las funciones de p-variación acotada, continuas por la izquierda, tales que el límite cuando t tiende a infinito de f, que se denotará $f(+\infty)$, existe y es finito y $f(-\infty) = 0$.

Nótese que de esta definición se deduce que la p-variación de una función $f \in V_p$ es uniformemente acotada en todo compacto de $\mathbb{R}$.

Se cumple el siguiente teorema.

TEOREMA 3.1
V_p es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_p = pvar(f).$$

Demostración: Se puede comprobar fácilmente que la p-variación es una norma (la desigualdad triangular se verifica con la ayuda de la desigualdad de Minkowski). Sea ahora $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en V_p. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe N_ε tal que $\|f_m - f_s\|_p < \varepsilon$ para todos $m, s \geq N_\varepsilon$, o sea,

$$\sup_K \sup_\Pi \left(\sum_{i=1}^{n} |(f_m - f_s)(t_i) - (f_m - f_s)(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall m, s \geq N_\varepsilon.$$

Entonces para todo t fijo, la sucesión $\{f_m(t)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, pues para la partición $\pi_a : -a < t < a$ se tiene

$$\begin{aligned} |(f_m - f_s)(t)|^p &\leq |(f_m - f_s)(t) - (f_m - f_s)(-a)|^p \\ &\quad + |(f_m - f_s)(a) - (f_m - f_s)(t)|^p < \varepsilon. \end{aligned}$$

Sea $f(t) = \lim f_m(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. A continuación se analiza la convergencia de $\|f_m - f\|_p$.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |(f_m - f_s)(t_i) - (f_m - f_s)(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall m, s \geq N_\varepsilon.$$

Pasando al límite cuando $s \to \infty$ es

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |(f_m - f)(t_i) - (f_m - f)(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall m \geq N_\varepsilon,$$

de aquí que sea

$$\|f_m - f\|_p \leq \varepsilon \qquad \forall m \geq N_\varepsilon.$$

Por otra parte, para un $m \geq N_\varepsilon$, se cumple $f = (f - f_m) + f_m$, siendo $f_m \in V_p$ y $f - f_m \in V_p$, por lo que $f \in V_p$. Luego, V_p es un espacio de Banach. **Q.e.d.**

Resulta importante notar que las propiedades relativas a la norma en el espacio $V_p[a, b]$ presentadas en el *Capítulo 1* se extienden de manera natural al espacio V_p. En este sentido conviene destacar las siguientes:

TEOREMA 3.2
Sean $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q > 1$ y $p < q$ entonces se cumple que $V_p \subset V_q$.

Demostración: Sea f de V_p dada. Resulta sencillo comprobar que f es acotada. Sea

$$M = \sup\{|f(x) - f(y)|; \quad x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces es

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{q-p}\right)^{\frac{1}{q}},$$

para toda partición $\pi = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ de un compacto cualquiera K de $\mathbb{R}$, o sea,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq (M^{q-p})^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

De aquí se deduce entonces

$$\|f\|_q \leq \widehat{M} \|f\|_p^{\frac{p}{q}} < \infty,$$

siendo

$$\widehat{M} = M^{\frac{q-p}{q}},$$

y por tanto f pertenece también a V_q. **Q.e.d.**

TEOREMA 3.3
Toda función $f \in V_p$ es acotada en $\mathbb{R}$ y sólo puede tener una cantidad numerable de discontinuidades, a lo sumo de primera especie.

Demostración:

(i) La acotación de f en $\mathbb{R}$ es obvia. Supongamos que existe un $\widehat{x} \in \mathbb{R}$, tal que no existe el límite

$$\lim_{x \to \widehat{x}-} f(x),$$

es decir, existe una sucesión $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ de números reales, que converge por la izquierda a $\widehat{x}$, de modo que la sucesión de los valores de la función $(f(x_i))_{i=1}^{\infty}$ diverge. Entonces $(f(x_i))_{i=1}^{\infty}$ no es una sucesión de Cauchy, o sea, existe un número real ε_0, de modo que para todo número natural N existen números naturales $n, m \geq N$, para los que se cumple

$$|f(x_n) - f(x_m)| \geq \varepsilon_0. \tag{3.1}$$

Sea ahora sin perder generalidad para $a < \widehat{x}$ la partición

$$\pi_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = \widehat{x}$$

de $[a, \widehat{x}]$, cuyos puntos cumplen la relación (3.1). Entonces es

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq n^{\frac{1}{p}} \varepsilon_0.$$

De ello se deduce la existencia de una sucesión de particiones $(\pi_n)_{n=1}^{\infty}$ del intervalo $[a, \widehat{x}]$, de manera que la sucesión de las sumas

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

crece de manera no acotada, lo cual contradice la p-variación acotada de f. Entonces existe el límite $\lim\limits_{x \to \widehat{x}-} f(x)$. De modo análogo se demuestra la existencia del límite $\lim\limits_{x \to \widehat{x}+} f(x)$.

(ii) Por la definición de la p-variación de una función, la suma de la potencia p-ésima de las alturas de todos los saltos de la función f no puede sobrepasar el valor $\|f\|_p$. Sean los subconjuntos A_n del conjunto de todos los saltos con

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R}; \qquad |f(x) - f(x-)|^p > \frac{1}{n} \quad \text{ó} \quad |f(x) - f(x+)|^p > \frac{1}{n} \right\}$$

para $n = 1, 2, \ldots$. Estos conjuntos son finitos a causa de la p-variación acotada de la función f. Pero los conjuntos A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ son numerables, de donde se deduce la numerabilidad del conjunto de las discontinuidades de f. **Q.e.d.**

También resulta sencillo extender a funciones en $\mathbb{R}$ el siguiente teorema:

Teorema 3.4
Sea $f \in V_p$ y $a < c < b$ (se incluye el caso $a = -\infty, b = +\infty$). Entonces se cumple la acotación

$$(pvar^p(f; a, c) + pvar^p(f; c, b))^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p \leq 2^{1-\frac{1}{p}}(pvar(f; a, c) + pvar(f; c, b)),$$

donde $pvar(f; \alpha, \beta)$ representa la p-variación de la función f en el intervalo $[\alpha, \beta]$.

Teorema 3.5
Toda función $f \in V_p$ se puede representar como diferencia de dos funciones $f(x) = V(x) - T(x)$, definidas por

$$V(x) = pvar^p(f; -\infty, x), \qquad T(x) = f(x) - V(x).$$

Además se cumple que $V(x)$ es monótona creciente y $T(x)$ es monótona decreciente en los intervalos donde $pvar(f) < 1$ y es creciente en los intervalos (a, b), para los cuales se cumple que $pvar(f) \geq 1$ en todo subintervalo de (a, b).

Demostración: Sea $x < y$. Por el teorema anterior es

$$\begin{aligned} V(y) &= pvar^p(f; -\infty, x) \geq pvar^p(f; -\infty, x) + pvar^p(f; x, y) \\ &\geq pvar^p(f; -\infty, x) = V(x), \end{aligned}$$

por lo que $V(x)$ es monótona no decreciente.

Por otra parte, $f(y) - f(x) \leq pvar(f; x, y)$, entonces

$$\begin{aligned} T(y) - T(x) &= pvar^p(f; -\infty, y) - pvar^p(f; -\infty, x) - (f(y) - f(x)) \\ &\geq pvar^p(f; x, y) - pvar(f; x, y). \end{aligned}$$

Luego, si en todo subintervalo de (a, b) es $pvar^p(f; a, b) \geq 1$, la función T es creciente en (a, b), mientras que si $pvar^p(f; a, b) < 1$ en (a, b), entonces T es decreciente en ese intervalo.

Q.e.d.

Con el objetivo de poder definir un producto en V_p, se hace necesario exigir la existencia para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todos $f, g \in V_p$ de la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) dg(\tau).$$

Si g es una función monótona en un intervalo (a, b) y se considera en $\mathbb{R}$ a la tribu boreliana y a la medida de Stieltjes correspondiente a g. Como f es acotada y tiene a lo sumo una cantidad numerable de discontinuidades, se garantiza la existencia de la integral de Lebesgue-Stieltjes

$$\int_a^b f(t-\tau)dg(\tau).$$

Luego, partiendo de la descomposición $g(x) = V(x) - T(x)$ del teorema anterior para una función $g \in V_p$, se garantiza la existencia de la integral

$$\int_a^b f(t-\tau)dg(\tau) = \int_a^b f(t-\tau)dV(\tau) - \int_a^b f(t-\tau)dT(\tau)$$

en cada intervalo (a,b) donde $pvar(g) < 1$ o $pvar(g) \geq 1$.

Por otra parte, la p-variación acotada de g implica que para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $pvar(g; -\infty, N) < \varepsilon$ y $pvar(g; N, +\infty) < \varepsilon$. Luego, existen números reales A y B tales que $pvar(g; -\infty, A) < 1$ y $pvar(g; B, +\infty) < 1$. Entonces en los correspondientes intervalos, g se descompone como diferencia de dos funciones monótonas, es decir, de variación acotada, V y T. En el caso del intervalo $(B, +\infty)$, sea $b > B$. Para la suma de Riemann-Stieltjes correspondientes a particiones de este intervalo se tiene

$$\sum_{i^1}^{n} |f(t-\xi_i)|(V(t_i) - V(t_{i-1})) \leq \sup_{\mathbb{R}} |f(t)||V(b) - V(B)|,$$

de donde se deduce (ver apostol) la existencia de la integral

$$\int_B^{+\infty} f(t-\tau)dV(\tau).$$

De modo análogo se demuestra la existencia de las integrales

$$\int_B^{+\infty} f(t-\tau)dT(\tau), \quad \int_{-\infty}^{A} f(t-\tau)dV(\tau), \quad \int_{-\infty}^{A} f(t-\tau)dT(\tau).$$

Sea ahora, E el conjunto de números reales $x \in [A, B]$ tal que existe $\varepsilon > 0$ tal que $pvar(g; a, b) \geq 1$ para todo $(a,b) \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Obviamente este conjunto es finito, pues en caso contrario g no podría ser de p-variación acotada. Sean dados $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $A = x_0$ y $B = x_{k+1}$. En los intervalos $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ la función g es de variación acotada, por ser diferencia de dos funciones crecientes, y por tanto, existen las integrales

$$\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(t-\tau)dg(\tau) \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Por otra parte, como el intervalo $[x_0, x_1 - \varepsilon]$ es compacto, cualquier cubrimiento suyo por abiertos $(t_\alpha, t_{\alpha+1})$ tales que $pvar(g; t_\alpha, t_{\alpha+1}) < 1$ contiene un subcubrimiento finito. Luego, el intervalo $[x_0, x_1 - \varepsilon]$ puede ser cubierto por un número finito de intervalos, donde la p-variación de g es menor que 1. Un razonamiento similar al desarrollado en los intervalos infinitos garantiza entonces la existencia de la integral

$$\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(t-\tau)dg(\tau),$$

y de modo análogo se demuestra la existencia de

$$\int_{x_i+\varepsilon}^{x_{i+1}-\varepsilon} f(t-\tau)dg(\tau) \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Finalmente, sumando todas estas integrales (suma finita) se obtiene la existencia de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)dg(\tau).$$

Con ello, el siguiente teorema, justifica el tratamiento del espacio V_p a partir de la teoría de las álgebras de Banach.

Teorema 3.6
El espacio V_p tiene estructura de álgebra de Banach conmutativa y unitaria con el producto

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)dg(\tau).$$

La unidad $\epsilon(t)$ es la función de Heaviside

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}.$$

Demostración: Sean $f, g, h \in V_p$. Entonces es

$$\begin{aligned} [(f * g) * h](t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t-u)dh(u) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u-\tau)dg(\tau) \right] dh(u). \end{aligned}$$

Por otra parte, es

$$\begin{aligned} [(f * h) * g](t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * h)(t-u)dg(u) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u-\tau)dh(\tau) \right] dg(u), \end{aligned}$$

y por simetría de $f(t-u-\tau)$ se cumple

$$\begin{aligned}
[(f*h)*g](t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f*h)(t-u)dg(u) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u-\tau)dh(u) \right] dg(\tau).
\end{aligned}$$

Partiendo de la relación que se establece entre la norma del producto y el producto de las normas, el teorema de Fubini garantiza la igualdad de $[(f*g)*h](t)$ y $[(f*h)*g](t)$, de donde, haciendo $f(t) = \epsilon(t)$, se deduce

$$(\epsilon * g) * h = (\epsilon * h) * g \quad \Rightarrow \quad g * h = h * g, \quad \forall g, h \in V_p,$$

siendo $\epsilon(t)$ es la función de Heaviside.

$\epsilon(t)$ es la identidad en V_p, pues para cualquier partición $\pi = \{\tau_i\}_{i=0}^{n}$ de un compacto $K \subset \mathbb{R}$ que contenga al cero es $\epsilon(\tau_i) - \epsilon(\tau_{i-1}) = 0$ si $\tau_{i-1} \geq 0$ o si $\tau_i < 0$. Luego, basta tomar particiones de la forma $\pi : -b < 0 < b$ con $b > 0$, de modo que, para el punto intermedio $\xi_1 < 0$, la suma integral correspondiente al producto $(f * \epsilon)(t)$ adquiere la forma

$$\sum_{i=1}^{2} f(t-\xi_i)[\epsilon(\tau_i) - \epsilon(\tau_{i-1})] = f(t-\xi_1) \to f(t) \quad \text{cuando} \quad b \to 0,$$

por lo que, partiendo de la existencia de la integral, se obtiene que $(f * \epsilon)(t) = f(t)$. Haciendo el cambio $u = t - \tau$ e integrando se deduce de ello que $(\epsilon * f)(t) = f(t)$.

Por otra parte se verifica inmediatamente que $\|\epsilon(t)\|_p = 1$.

La asociatividad se obtiene a partir de la conmutatividad y de la igualdad

$$(f*h)*g = (f*g)*h$$

anteriormente demostrada, pues de esta se deduce que

$$g*(f*h) = (g*f)*h.$$

Resta demostrar la relación

$$\|f*g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_p$$

entre la norma y el producto. Al respecto se tiene

$$
\begin{aligned}
\|f * g\|_p &= \sup_K \sup_\Pi \left(\sum_{i=1}^n \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t_i - \tau) - f(t_{i-1} - \tau)] dg \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_K \sup_\Pi \left(\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t_i - \tau) - f(t_{i-1} - \tau)|^p |dg|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_K \sup_\Pi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^n |f(t_i - \tau) - f(t_{i-1} - \tau)|^p |dg|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_p \sup_K \sup_\Pi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |dg|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|f\|_p \|g\|_p.
\end{aligned}
$$

Con ello queda demostrado el teorema. **Q.e.d.**

De gran importancia resulta el estudio del subespacio C_p de V_p formado por las funciones absolutamente p-continuas.

DEFINICIÓN 3.2

Sea $\delta\Pi$ el conjunto de todas las particiones de compactos K de $\mathbb{R}$ con norma menor que δ y $p > 1$ un número real. Se llama módulo de p-continuidad de $f \in V_p$ al valor

$$
\omega_p(\delta)(f) = \sup_K \sup_{\delta\Pi} \left(\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}},
$$

donde las particiones de $\delta\Pi$ son tales que $t_i - t_{i-1} < \delta$ para todo $i = 1, ..., n$.

Una función $f \in V_p$ se dice absolutamente p-continua ($f \in C_p$) si se cumple que

$$
\lim_{\delta \to 0} \omega_p(\delta)(f) = 0.
$$

Es obvio que $C_p \subset V_p$ y que toda $f \in C_p$ es continua. Sin embargo, no toda función continua es necesariamente absolutamente p-continua, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Sea definida en $\mathbb{R}$ la función continua

$$
f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{p}} \cos(\frac{\pi}{2x}) & x \in (0,1] \\ 0 & x \notin (0,1] \end{cases}, \tag{3.2}
$$

donde p es un número real cualquiera con $p \geq 1$ (ver figura 3.1).

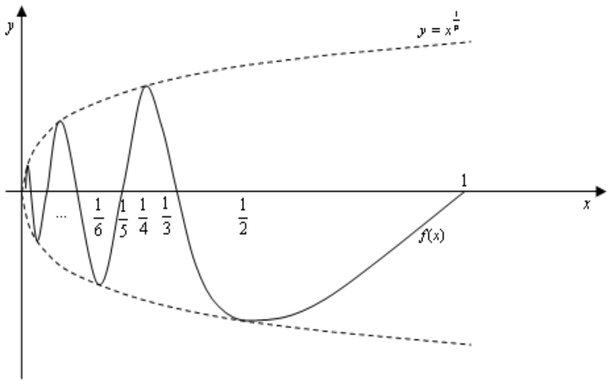

Figura 3.1:

Este ejemplo resulta interesante por presentar una función que es de q-variación acotada para todo número real $q > p$, pero no es de q-variación acotada para $q \leq p$.

Demostración:

Como f se anula fuera del intervalo $[0, 1]$, basta demostrar estas relaciones en ese intervalo. Para ello sea la partición $\pi : 0 = t_{2n+1} < t_{2n} < \ldots < t_1 = 1$ del intervalo cerrado $[0, 1]$ con $t_i = \frac{1}{i}$. Entonces para $k = 1, \ldots, n$ es

$$\begin{aligned} f(t_{2k-1}) &= 0 \\ f(t_{2k}) &= (-1)^k \left(\tfrac{1}{2k}\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

En este caso la suma

$$\left(\sum_{i=1}^{2n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^q \right)^{\frac{1}{p}}$$

corresponde a la serie armónica

$$\left(\sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{1}{2k} \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.3}$$

la cual diverge para $q \leq p$. Entonces para $q \leq p$, existe una sucesión π_n de particiones de $[0, 1]$, tal que las sumas

$$\left(\sum_{i=1}^{2n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^q \right)^{\frac{1}{p}}$$

constituyen una sucesión creciente no acotada, y con ello la función dada no es de q-variación acotada en el intervalo cerrado $[0, 1]$.

Para calcular ahora la q-variación de la función (3.2) para un número real $q > p$, sea $\pi : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ una partición cualquiera de $[0, 1]$. Agregando los puntos $t'_1, t'_2 \ldots, t'_{2m+1}$ con $t'_i = \frac{1}{i}$ para $1 \leq i \leq 2m$ y $t'_{2m+1} = 0$ de la partición π', se construye una nueva partición $\pi'' : 0 = t''_0 < t''_1 < \ldots < t''_s = 1$ con $s \leq n + 2m + 1$ de $[0, 1]$. Entonces se cumple

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{1-\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{s} |f(t''_j) - f(t''_{j-1})|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Reordenando la parte derecha de esta desigualdad es

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{1-\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{2m} \sum_{j=j_k+1}^{j_{k+1}} |f(t''_j) - f(t''_{j-1})|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

donde la suma interior se desarrolla sobre todos los subintervalos de la partición π'' que están en el intervalo $[t'_k, t'_{k+1}]$ de la partición π'. Es claro que la función dada es monótona en cada subintervalo de la partición π', por lo que es de variación acotada en todo $[t'_k, t'_{k+1}]$ $(k = 1, \ldots, 2m)$, y por tanto pertenece a $V_q[t'_k, t'_{k+1}]$ para $q > 1$. Así se obtiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{1-\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{2m} V_q^q(f; t'_k, t'_{k+1}) \right)^{\frac{1}{q}},$$

o sea,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{1-\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{2m} |f(t'_{k+1}) - f(t'_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Pero la parte derecha de esta desigualdad se corresponde en este caso a la serie armónica (3.3), que converge para $q > p$. De aquí se deduce entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

para toda partición de $[0, 1]$ y $q > p$, y con ello la función dada es de q-variación acotada en el intervalo cerrado $[0, 1]$ para todo número real $q > p$. **Q.e.d.**

Del producto definido en V_p y la expresión del módulo de p-continuidad se deduce siguiente teorema.

Teorema 3.7

C_p es un ideal de V_p.

Demostración:

Sean $f \in C_p$ y $g \in V_p$, entonces

$$\begin{aligned}
\omega_p(\delta)(f*g) &= \sup_K \sup_{\delta\Pi} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} ((f*g)(t_i-\tau) - (f*g)(t_{i-1}-\tau))dg(\tau) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_K \sup_{\delta\Pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} |(f*g)(t_i-\tau) - (f*g)(t_{i-1}-\tau)|^p |dg(\tau)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \omega_p(\delta)(f) \cdot \omega_p(\delta)(g).
\end{aligned}$$

Pero $\omega_p(\delta)(f) \to 0$ cuando $\delta \to 0$, por lo que $(f*g) \in C_p$, lo cual demuestra el teorema. **Q.e.d.**

Las siguientes observaciones establecen una importante relación entre el álgebra L_a^1 de las funciones absolutamente integrables con la unidad adjunta y el álgebra de las funciones de variación acotada (ver [12]).

Sea $g(t) \in C_1 \subset V_1 \subset V_p$, donde V_1 denota al álgebra de las funciones de variación acotada. Entonces $g(t)$ es diferenciable y su derivada es tal que

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} g'(\tau)d\tau.$$

De ello se deduce que

$$\|g\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g'(t)|dt = \|g'\|_{L_a^1},$$

pues

$$\begin{aligned}
\|g\|_1 &= \sup_K \sup_{\Pi} \left(\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| \right) \\
&= \sup_K \sup_{\Pi} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} g'(\tau)d\tau \right| \right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |g'(\tau)|d\tau = \|g'\|_{L_a^1}.
\end{aligned}$$

Además, el producto de funciones absolutamente continuas se corresponde con el producto de sus derivadas como funciones de L_a^1. Es decir, si

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t-\tau)dg_2(\tau),$$

entonces se cumple

$$g'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1'(t-\tau)g_2'(\tau)d\tau.$$

De lo anterior se deduce que si se asigna a cada $\lambda e + f(t) \in L_a^1$ la función

$$\lambda\epsilon(t) + \int_{-\infty}^{t} f(\xi)d\xi,$$

donde e es la unidad adjunta de L_a^1, se obtiene un isomorfismo isométrico del álgebra L_a^1 en el álgebra V_1, por lo que L_a^1 es una subálgebra de V_1.

3.2. Un teorema de representación

En está sección se demostrará, teniendo en cuenta el significado de las ideas desarrolladas para la evolución en el tratamiento del problema de la dualidad del espacio de las funciones de p-variación acotada, el teorema de representación para el álgebra V_p, que obtiene el autor en su tesis de licenciatura, y otros consecuentes, de no menos importancia.

Sea ahora $f(t) \in V_p$. Resulta sencillo comprobar que la integral

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} df(t)$$

existe para todo $s \in \mathbb{R}$. Esta integral es llamada transformada de Fourier-Stieltjes de la función $f(t)$. Es claro que la adición y la multiplicación por un escalar de una función de V_p corresponden con las de su transformada de Fourier-Stieltjes. La convolución de funciones en V_p, (como comúnmente se designa al producto sobre esta álgebra), corresponde también con el producto de sus transformadas

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} d\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)dg(u)\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}df(t-u)\right)dg(u)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{is(t-u)}df(t-u)\right)e^{isu}dg(u)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}df(t)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{isu}dg(u).
\end{aligned}$$

De esta manera, haciendo corresponder a cualquier función $f(t) \in V_p$ el valor de su transformada de Fourier-Stieltjes en cualquier punto fijo s_0, se obtiene un homomorfismo del álgebra V_p en el campo de los números complejos. El ideal generado por este homomorfismo se denota por M_{s_0}. Entonces

$$f(M_{s_0}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is_0t}df(t) = F(s_0).$$

Nótese que si $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ con $s_1 \neq s_2$, existe al menos una función absolutamente continua tal que $g(M_{s_1}) \neq g(M_{s_2})$.

Sea $f(t) \in V_p$, tal que $f(t) \in M_s$ para todo $s \in \mathbb{R}$, (es decir, $f(M_s) = F(s) = 0$). La función

$$g_h(t) = \begin{cases} 0 & t < -h \\ 1 + \frac{t}{h} & -h \leq t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

es absolutamente continua. Entonces por el teorema 3.7, la función

$$(f * g_h)(M_s) = \frac{1}{h} \int_0^h f(t + \tau) d\tau$$

también es absolutamente continua. De aquí que

$$(f * g_h)(M_s) = f(M_s) g_h(M_s) = 0.$$

Entonces, por el teorema de unicidad de la transformada de Fourier en L^1 se tiene que $(f * g_h)(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Pero $(f * g_h)(t) \to f(t)$ cuando $h \to 0$, por lo que se concluye que $f(t) = 0$.

De lo anterior se deduce que $f(t) \in V_p$ está unívocamente determinada por su transformada de Fourier-Stieltjes y que el radical $Rad(V_p) = \bigcap \{M;\ M \in M_{V_p}\}$ de V_p es es el conjunto $\{0\}$, o lo que es lo mismo, V_p es un álgebra semisimple.

Al ser V_p semisimple, la transformada de Gelfand es un isomorfismo de V_p en un subespacio de $C(M_{V_p})$, donde $C(M_{V_p})$ es el álgebra de todas las funciones continuas con valores complejos definidas sobre el espacio de ideales maximales de V_p. Como M_{V_p} es Hausdorff compacto, se tiene $C(M_{V_p}) = C_0(M_{V_p})$ (ver, por ejemplo, [17]), por lo que el teorema de representación de Riesz garantiza la existencia de una única medida regular $\mu \in MR(M_{V_p})$ definida sobre M_{V_p} para cada funcional lineal continuo Φ sobre $C(M_{V_p})$. El Teorema de Hahn-Banach garantiza la posibilidad de identificar a cada funcional lineal continuo Φ sobre $C(M_{V_p})$ con su restricción al correspondiente subespacio isomorfo a V_p, y por tanto el isomorfismo entre $(V_p)^*$ y $(C(M_{V_p}))^*$, considerando en este último las correspondientes restricciones. Se cumple entonces el siguiente teorema.

Teorema 3.8 ***(de representación)***
Para cada funcional lineal y continuo Φ definido sobre V_p existe una única medida regular μ tal que

$$\Phi(f) = \int_{M_{V_p}} f d\mu, \quad \forall f \in V_p$$

y se cumple

$$\|\Phi\| = \|\mu\|.$$

Este teorema garantiza la posibilidad de identificar al dual de V_p con el espacio de las medidas regulares definidas sobre M_{V_p}. La integración indicada en el teorema se efectúa sobre el espacio de ideales maximales de V_p, del cual no se tiene una caracterización.

En el siguiente apartado se brinda una exposición de algunos resultados importantes acerca de los ideales del álgebra de las funciones de p-variación acotada.

3.3. Sobre los ideales de V_p

Esta sección estará dedicado al estudio del espacio de los ideales de V_p. Como se mencionó anteriormente, la importancia de este estudio radica esencialmente en la necesidad de obtener una caracterización de M_{V_p} para la integración en el teorema de representación obtenido.

Definición 3.3
Un álgebra topológica es un espacio topológico lineal dotado de una multiplicación asociativa, tal que para toda vecindad U_α del origen existe otra vecindad U_β del origen de modo que se cumple

$$U_\beta^2 \subset U\alpha.$$

Teorema 3.9
V_p es un álgebra topológica.

Demostración:

Sea $U_\alpha \in \widehat{\Phi}$ una vecindad del origen en V_p, entonces para toda $f \in U_\alpha$ es

$$\|f\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \delta, \quad t_i \in \Pi,\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Si se selecciona U_β, tal que $\beta^2 < \delta$, entonces para todas $g_1, g_2 \in U_\beta$ se tiene que

$$\|g_1 * g_2\|_p \leq \|g_1\|_p \|g_2\|_p < \beta^2 < \delta,$$

lo cual demuestra el teorema. **Q.e.d.**

DEFINICIÓN 3.4
Se dice que un subconjunto no vacío S de un álgebra topológica A está constituido por divisores topológicos de cero si y sólo si existe una sucesión $\{z_n\} \subset A$ que cumple que $\|z_n\| = 1$ para toda n, tal que

$$\lim_n z_n f = 0,$$

para toda $f \in S$.

DEFINICIÓN 3.5
Un elemento $f \in A$, siendo A un álgebra topológica, se dice dominado por los elementos $g_1, ... g_n$ si existe una constante $c > 0$ tal que para todo $h \in A$ se cumple

$$\|fh\| \leq c \sum_{i=1}^{n} \|g_i h\|.$$

En este caso suele escribirse $f < (g_1, ..., g_n)$.
Se dice que $f \in A$ es dominado por un ideal $I \subset A$ si $f < (g_1, ..., g_n)$ para alguna n-úpla de elementos de I. En este caso se escribe $f < I$.
Se dice que un ideal I posee la propiedad de dominación si la relación $f < I$ implica que $x \in I$.

DEFINICIÓN 3.6
Sea A un álgebra topológica. Se dice que un ideal $I \subset A$ puede ser separado de un elemento $x_0 \notin I$ si existe una sucesión $\{g_n\} \subset A$, tal que $g_n f \to 0$ para todo $f \in I$ y $g_n x_0 \nrightarrow 0$.
Se dice que dos ideales I_1 e I_2 pueden ser separados si uno de ellos puede ser separado de todos los elementos del otro.
Un ideal I tiene la propiedad de separación si puede ser separado de cualquier elemento $h \notin I$.

TEOREMA 3.10 *Sea α un número real, $\alpha \leq 1$, entonces el subespacio $Lip_\alpha(\mathbb{R})$ es un ideal de $V_{\frac{1}{\alpha}}$.*

Demostración: Para todos los compactos reales $[a, b]$ se tiene la inclusión

$$Lip_\alpha[a, b] \subset V_{\frac{1}{\alpha}}[a, b];$$

la cual puede generalizarse fácilmente al caso de funciones definidas sobre todo $\mathbb{R}$.

Sea ahora $f \in Lip_\alpha(\mathbb{R})$, $g \in V_{\frac{1}{\alpha}}$, entonces, para $s, T \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |(f*g)(s) - (f*g)(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(s-\tau)dg(\tau) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)dg(\tau) \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} M|(s-\tau-(t-\tau)|^\alpha dg(\tau) \\ &\leq \left(M \int_{-\infty}^{+\infty} dg(\tau) \right) |s-t|^\alpha. \end{aligned}$$

Q.e.d.

TEOREMA 3.11
El subespacio C_{V_p} de las funciones continuas de V_p es un ideal.

Demostración: Sean $f \in C_{V_p}$ y $g \in V_p$. Sea además $t_0 \in \mathbb{R}$ un punto arbitrario de $\mathbb{R}$ tal que $|t - t_0| < \delta$ para $\delta > 0$. Entonces

$$|(f*g)(t) - (f*g)(t_0)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t-\tau) - f(t_0-\tau))dg(\tau) \right|$$

y como f es continua, existe $\epsilon > 0$ tal que para $|t-t_0| < \delta$ se tiene $|f(t) - f(t_0)| < \epsilon$. Luego, se cumple

$$|(f*g)(t) - (f*g)(t_0)| \leq \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} dg(\tau).$$

Haciendo ahora

$$\widetilde{\epsilon} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dg(\tau)}{\epsilon}$$

se demuestra la proposición. **Q.e.d.**

El ideal de las funciones absolutamente p-continuas tiene en el espacio de los ideales de V_p una estructura singular, los resultados siguientes verifican esta afirmación.

TEOREMA 3.12
C_p es un ideal formado por divisores topológicos de cero.

Demostración: Sea $\{f^n\} \subset V_p$ la sucesión

$$f^n(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Es claro que $f^n \in V_p$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $\|f^n\| = 1$. Sea ahora $g \in C_p$. Entonces

$$\begin{aligned}
(f^n * g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^n(t-\tau)dg(\tau) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)df^n(\tau) \\
&= \int_{0}^{1/n} g(t-\tau)df^n(\tau) \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{n} g(t-\xi_i)[f^n(t_i) - f^n(t_i-1)],
\end{aligned}$$

donde los t_i son puntos de una partición del intervalo de integración y $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para $i = 1, \ldots, n$.

Si se toma $\xi_i = \tau_i$, es claro que el límite anterior es $g(t) - g(t - \frac{1}{n})$ y si $n \to \infty$, como g es continua, se tiene que

$$(f^n * g)(t) \to 0,$$

lo cual demuestra la proposición. **Q.e.d.**

TEOREMA 3.13

Todos los elementos de V_p están dominados por C_p.

Demostración: Sea la función

$$g_n(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{1}{n} \\ 1 + nt & -\frac{1}{n} \le t \le 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

(se comprueba fácilmente que $g_n(t) \in C_p$ para todo n). Es claro que $(g_n * f)(t) \to f(t)$ cuando $n \to \infty$. De aquí que existe N tal que $(g_m * f)(t) = f(t)$ para todo $m > N$.

Sea ahora $f_0 \in V_p$ un elemento fijo arbitrario. Entonces

$$\|f_0 * g\|_p = \|g_{m_k} * g * f_0\|_p \qquad \text{si} \quad m_k > N,\ g \in V_p.$$

Considerando entonces para $n > N$ la n-úpla $(g_1, \ldots, g_n)$, para todo m tal que $N < m \le n$, se cumple que

$$\|f_0 * g\|_p \le \|g_m * g\|_p \|f_0\|_p.$$

Luego

$$\|f_0 * g\|_p \le \frac{\|f_0\|_p}{n-N} \sum_{m=N+1}^{n} \|g_m * g\|_p,$$

lo cual demuestra la proposición. **Q.e.d.**

Los dos siguientes teoremas se deducen de manera inmediata de resultados que aparecen en [41].

Teorema 3.14
C_{V_p} posee la propiedad de dominación y la propiedad de separación.

Demostración: Este resultado es consecuencia inmediata del teorema 4.11 de [41], a partir de seleccionar $Z_\alpha = f^\alpha$. De aquí que, por el teorema 4.12 de [41], C_{V_p} tiene también la propiedad de separación **Q.e.d.**

Teorema 3.15
Para un elemento fijo $f \in V_p$, los ideales $I = \{g \in V_p;\ g * f = 0\}$ son de la forma

$$I = \bigcap \{M \in \mathfrak{L}(V_p);\ I \subset M\},$$

donde

$$\mathfrak{L}(V_p) = M_{V_p} \bigcap \check{I}(V_p),$$

tal que $\check{I}(V_p)$ es el conjunto de los ideales de V_p formados por divisores topológicos de cero.

Demostración: Al ser V_p semisimple, este resultado es consecuencia inmediata de la proposición 4.38 de [41]. **Q.e.d.**

Teorema 3.16
Los únicos ideales maximales que no contienen a C_p son los M_s con $s \in \mathbf{R}$.

Demostración: Sea $M \neq M_s$, tal que $M \not\supseteq C_p$. Sea también Φ_M el funcional asociado a M. Como $M \not\supseteq C_p$, existe $g \in C_p$ tal que $\Phi_M(g) \neq 0$. De aquí que

$$\Phi_s(g)\Phi_M(g) = \lambda_M \Phi_s(g), \quad \text{con} \ \ \lambda_M \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad \lambda_M = \Phi_M(g).$$

Por otro lado, g es un divisor topológico de cero, por lo que $f^n * g \to 0$ cuando $n \to \infty$, (f^n se considera como en el teorema 3.12). Luego,

$$\Phi_s(g * f^n) = \Phi_s(f^n)\Phi_s(g).$$

Restando las dos últimas ecuaciones es

$$\Phi_s(g)\Phi_M(g) - \Phi_s(g * f^n) = \lambda_M \Phi_s(g) - \Phi_s(f^n)\Phi_s(g).$$

De aquí que

$$\Phi_s(\lambda_M g) = \Phi_s(g)[\Phi_s(\lambda_M \varepsilon - f^n)],$$

y pasando al límite cuando $n \to \infty$ se obtiene

$$\Phi_s(\lambda_M g) = \Phi_s(\lambda_M g) - \Phi_s(g)\Phi_s(\lim f^n).$$

Entonces es

$$\Phi_s(g)\Phi_s(\lim f^n) = 0.$$

Por otro lado

$$\lim f^n = H(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Como $\Phi_s(H(t)) \neq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$, lo cual se comprueba fácilmente, se tiene entonces que $\Phi_s(g) = 0$, de donde se deduce que si $g \in C_p$ y $g \notin M$, entonces $g \in M_s$ y por tanto, $C_p \setminus M \subset M_s$.

Se considera ahora el ideal generado por M y $C_p \setminus M$, o sea $\langle M, C_p \setminus M \rangle$, y se comprueba que no constituye toda el álgebra V_p, obteniendo así que M no es maximal.

Si $\langle M, C_p \setminus M \rangle = V_p$, entonces $\epsilon \in \langle M, C_p \setminus M \rangle$ y puede escribirse como $\epsilon = \alpha m + \beta m_p$ tal que $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $m \in M$ y $m_p \in C_p \setminus M$. De aquí que

$$\epsilon - \alpha m = \beta m_p.$$

Multiplicando esta expresión por la conocida f^n es

$$(\epsilon - \alpha m) * f^n = \beta m_p * f^n.$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$ y teniendo en cuenta que m_p es un divisor topológico de cero, se cumple que

$$(\epsilon - \alpha m) * H = 0; \qquad \lim f^n = H.$$

Luego,

$$H = \alpha m * H,$$

por lo que $\alpha m = \epsilon$. Pero como $m \in M$, entonces $\alpha m \in M$, lo cual contradice que M es un ideal maximal, quedando así demostrado el teorema. **Q.e.d.**

Este resultado ofrece una información de peso en la búsqueda de una caracterización del espacio de los ideales maximales de V_p. De él se deduce que una parte de los ideales de M_{V_p} son generados por la transformada de Fourier-Stieltjes, por lo que están totalmente caracterizados por ésta, mientras que los restantes ideales de M_{V_p} son los que contienen a C_p.

Sin embargo, no resulta ocioso señalar que este es un problema particularmente difícil, a partir de la dificultad de la cuestión análoga para el álgebra de las funciones de variación acotada, reflejada en la obra de Gelfand (*ver*[12]), donde se considera abierto el problema de la descripción general de los ideales maximales de V_1.
Esto también se muestra en el ejemplo que se describe a continuación (ver [11]):

Sea G un grupo abeliano localmente compacto, y $M(G)$ el espacio de Banach de las medidas de Baire sobre G, con la norma de la variación total.
La convolución $\mu * \nu$ de dos medidas $\mu,\ \nu \in M(G)$ está definida sobre conjuntos de Baire E por

$$(\mu * \nu)(E) = \int_G \mu(E - x) d\nu(x)$$

Con la convolución como multiplicación, $M(G)$ es un álgebra de Banach conmutativa. El álgebra $M(G)$ tiene como identidad la masa puntual del grupo. La correspondencia $f \mapsto f d\sigma$ sumerge a $L^1(G)$ isométricamente como ideal cerrado en $M(G)$.

Respecto a este ejemplo plantea Gamelin:

> *"The maximal ideal space of $M(G)$ is horrible, unless G is discrete".*

3.4. Subálgebras y Regularidad en V_p

La cuestión de hallar M_{V_p}, que ha permanecido abierta desde 2008, puede facilitarse realizando un estudio más profundo de V_p y sus subálgebras, a continuación se expondrán algunos resultados importantes del trabajo del autor en este sentido desde su tesis de licenciatura.

Note que puede obtenerse un teorema de representación para el espacio C_p, considerado como subálgebra de V_p, pues C_p es un ideal cerrado y [16], su espacio de ideales maximales es isomorfo al complemento de su envoltura, que en este caso, como los únicos ideales maximales de V_p que no contienen a C_p son los generados por la tranformada de Fourier-Stieltjes, sería el conjunto formado por los elementos cuya transformada se anula en algún $s \in \mathbb{R}$ y no están en la envoltura de C_p. De esto último se tiene, denotando por M_{C_p} al espacio de ideales maximales de C_p, que como $M_{C_p} \in M_s$ entonces C_p es semisimple, lo cual indica que la transformada de Gelfand es un isomorfimo en un subespacio denso de $C(M_{C_p})$; teniéndose entonces el siguiente teorema:

Teorema 3.17 *(**de representación**)*

Para todo funcional $\Phi \in (C_p)^*$ existe una medida regular $\mu \in MR(M_{C_p})$, tal que $\Phi(f) = \int_{M_{C_p}} f d\mu$, para todo $f \in C_p$. Además se cumple $\|\Phi\| = \|\mu\|$.

Por otra parte, definiendo las funciones

$$h(t) = \sum_{\lambda_k \leq t} h_k,$$

tales que en los puntos de salto λ_k se cumple

$$h_k = f(\lambda_k^+) - f(\lambda_k^-),$$

se observa que

$$\begin{aligned} pvar f &= \sup_K \sup_\Pi \left(\sum_{i=1}^n \left| \sum_{\lambda_k \leq t_i} h_k - \sum_{\lambda_k \leq t_{i-1}} h_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_K \sup_\Pi \left(\sum_{i=1}^n \left| \sum_{t_{i-1} \leq \lambda_k \leq t_i} \left[f(\lambda_k^+) - f(\lambda_k^-) \right] \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Pero $f(\lambda_k^+) - f(\lambda_k^-) \leq f(t_i) - f(t_{i-1})$, por lo que

$$pvar h \leq \sup_K \sup_\Pi \left(\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} = pvar f < \infty.$$

De aquí que $h \in V_p$. Note entonces que cualquier elemento $f \in V_p$ puede ser escrito como $f = h + c$, donde h es su función de salto y c es una función continua, a la que, por lo mismo, se llamará parte continua de f.
Considerando ahora el espacio H de las funciones de salto como subálgebra de V_p se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.18

Entre los ideales maximales del álgebra H y los caracteres $\chi(t)$ del grupo aditivo Γ de los números reales, existe una correspondencia biunívoca.

Demostración: Note que toda función de salto $h(t)$ puede ser escrita en la forma

$$h(t) = \sum_k h_k \varepsilon(t - \lambda_k),$$

de aqui que las funciones $\varepsilon(t - \lambda)$ generan H. Sea ahora M un ideal maximal de H y $\chi(\lambda)$ el número complejo en el cual el homomorfismo $\Phi_M : H \to \frac{H}{M}$ transforma a la función $\varepsilon(t - \lambda)$. Como $\|\Phi_M\| = 1 = \|\varepsilon(t - \lambda)\|$, se tiene entonces que

$|\Phi_M(\varepsilon(t-\lambda))| = |\chi(\lambda)| \leq 1$ y como $\chi(0) = \Phi_M(\varepsilon(t)) = 1$, puede concluirse que $|\chi(\lambda)| = 1$.

Por otro lado $\varepsilon(t-\lambda_1) * \varepsilon(t-\lambda_2) = \varepsilon(t-\lambda_1-\lambda_2)$, lo cual puede comprobarse fácilmente. De aquí que

$$\begin{aligned} \chi(\lambda_1+\lambda_2) &= \Phi_M(\varepsilon(t-\lambda_1-\lambda_2)) \\ &= \Phi_M(\varepsilon(t-\lambda_1))\Phi_M(\varepsilon(t-\lambda_2)) \\ &= \chi(\lambda_1)\chi(\lambda_2). \end{aligned}$$

De esto último se deduce que $\chi(\lambda)$ es un caracter de Γ.

Además, si dado el caracter $\chi(\lambda)$ de Γ, se le asigna a cada función $h(t) \in H$ de la forma

$$h(t) = \sum_k h_k \varepsilon(t-\lambda_k),$$

el número complejo

$$\sum_k h_k \chi(\lambda_k),$$

se tiene un homomorfismo de H en $\mathbb{C}$, y en consecuencia, un ideal maximal, quedando así demostrado el teorema. **Q.e.d.**

Es necesario aclarar que los caracteres continuos del grupo aditivo $\mathbb{R}$, pueden escribirse como $\chi(t) = e^{ist}$ para algún s fijo y considerando la topología usual. La construcción de caracteres discontinuos puede verse en (*ver*[15]), aunque todos son funciones no medibles.

Si se considera ahora la descomposición de la parte continua de $f \in V_p$ en un sumando $s(t)$, cuya p-variación se concentra en un conjunto de medida cero y otro sumando $g(t)$, tal que $c(t) - s(t) = g(t)$ es absolutamente p-continua, se tendría entonces que $f(t) = h(t)+s(t)+g(t)$. En lo adelante se llamará a $s(t)$ parte singular y a $g(t)$ parte absolutamente p-continua de f. Se tiene entonces el siguiente teorema:

Teorema 3.19
Si $f \in V_p$ se descompone en $f = h+s+g$, su función de salto, su parte singular y absolutamente p-continua, respectivamente, y además se tiene que

(i) $|F(s)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} df(t)| > k > 0; \quad \forall S \in \mathbb{R}$

(ii) $\|s(t)\| < |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist} dh(t)|$

entonces $f \in V_p$ es inversible.

Demostración: Debe probarse que para cualquier $M \in M_{V_p}$, el caracter ϕ_M asociado es no nulo en $f \in V_p$, o sea: $\phi_M(f) = \phi_M(h) + \phi_M(s) + \phi_M(g) \neq 0$.

Si $M = M_s$, la expresión anterior se satisface por la condición i). Si $M \neq M_s$ entonces $\phi_M(g) = 0$ ya que los únicos ideales maximales que no contienen a C_p son los M_s. Por otro lado, como

$$\phi_{M_s}(h) = \phi_{M_s}\left(\sum h_k \varepsilon(t - \lambda_k)\right) = \sum h_k \chi(\lambda_k) = \int e^{ist} dh(t),$$

el homomorfismo $\Pi : V_p \to V_p/M$ determina un homomorfismo $\Pi_H : H \to \mathbb{C}$, que convierte la función h en un elemento de la clausura del conjunto de valores de $\phi_{M_s}(h)$, y por la condición ii) $|\phi_M(s)| \leq \|\phi_M\| \|s\| \leq |\phi_M(h)|$. Luego, se cumple que $\phi_M(f) = \phi_M(h) + \phi_M(s) \neq 0$. **Q.e.d.**

En un trabajo de Wiener y Pitt (*ver*[38]), se construye una función de 1-variación acotada que satisface la condición i) y no tiene inverso. Se deduce de esto, como $V_1 \subset V_p$, el siguiente teorema

Teorema 3.20 *El conjunto de los ideales maximales de tipo M_s no es denso en M_{V_p}*

Demostración: Si el conjunto de los ideales de tipo M_s fuera denso en M_{V_p}, entonces, para todo $M \in M_{V_p}$, existe una sucesión de ideales $\{\phi_{M_{sn}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\phi_{M_{sn}}(f) \to \phi_M(f)$ para cualquier función $f \in V_p$ que satisfaga la condición i), si se considera f_w la función dada por Wiener y Pitt, entonces de que $\phi_{M_{sn}}(f_w) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se deduce que $\phi_M(f_w) \neq 0$ y de aquí que f_w no pertenece a ningún ideal maximal (*ver*[4]) de V_p y esto contradice que no sea inversible. **Q.e.d.**

Corolario 3.4.1 *El álgebra V_p no es regular*

Demostración: En la tesis de licenciatura del autor, se recomienda el estudio de la densidad de los ideales de tipo M_s en M_{V_p} con la topología de Gelfand; demostrando previamente que estos son densos con la topoogía de Zarisky; el teorema anterior da respuesta negativa a la cuestión recomendada, de aquí que la topología hull-kernel y la de Gelfand no coinciden, de donde se tiene que V_p no es regular. **Q.e.d.**

3.4.1. Un álgebra involutiva

En esta sección se demostrará que sobre V_p puede definirse una involución, y se expondrán algunas consecuencias de este hecho. La importancia de que el álgebra de las funciones de p-variación acotada sea involutiva radica esencialmente en que puede entonces incluirse de manera isométrica e isomorfa en un álgebra de operadores sobre un espacio hilbertiano adecuado y aplicar entonces resultados conocidos de la teoría de representación de álgebras de operadores al anillo normado en cuestión.(ver [11]), ([12]), ([13]).

TEOREMA 3.21
El álgebra V_p (como espacio vectorial real), es un álgebra involutiva. La involución se define como: $f^*(t) = f(\infty) - f(-t)$

Demostración: Deben probarse los cuatro puntos expuestos en el capítulo primero, suficientes para que una aplicación $*$, sea una involución.

(i) Para demostrar que $\|f^*\| = \|f\|$ se tiene

$$\begin{aligned} \|f^*(t)\| &= \|f(\infty) - f(-t)\| \\ &= \sup_{\Pi,K} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(\infty) - f(-t_i) - f(\infty) + f(-t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\Pi,K} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(-t_{i-1}) - f(-t_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones π de compactos de $\mathbb{R}$. Haciendo ahora $u_i = -t_i$ se obtiene

$$\|f^*(t)\| = \sup_{\Pi,K} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(u_i) - f(u_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f(t)\|$$

(ii) De manera directa se comprueba que $(f^*)^* = f$, es decir,

$$(f^*(t))^* = (f(\infty) - f(-t))^* = f(t),$$

teniendo en cuenta que $f(-\infty) = 0$.

(iii) Veamos que $(fg)^* = f^* g^*$, donde, para evitar confusiones, fg denota el producto de V_p. Se tiene

$$\begin{aligned} (fg)^* &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) dg(\tau) \right)^* \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\infty - \tau) dg(\tau) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t-\tau) dg(\tau) \\ &= f(\infty) \int_{-\infty}^{+\infty} dg(\tau) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t-\tau) dg(\tau). \end{aligned}$$

Por otra parte es

$$\begin{aligned} f^*g^* &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\infty) - f(-t+\tau)d(g(\infty) - g(-\tau)) \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} (f(\infty) - f(-t+\tau))dg(-\tau) \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(\infty)dg(-\tau) + \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t+\tau)dg(-\tau). \end{aligned}$$

Si se hace ahora $u = -\tau$, se obtiene

$$f^*g^* = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\infty)dg(u) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t-u)dg(u) = (fg)^*.$$

(iv) $(\alpha f + \beta g)^* = \alpha f^* + \beta g^*$ es evidente a partir de la definicion de f^*.

Q.e.d.

TEOREMA 3.22

En V_p no existen elementos hérmiticos pares no nulos.

Demostración:

Sea $f \in V_p$ un elemento hérmitico y par. Se cumple entonces que

$$f^*(t) = f(\infty) - f(-t) = f(t).$$

Además es

$$f(t) = f(\infty) - f(t),$$

de donde

$$f(t) = \frac{f(\infty)}{2}.$$

Pero como V_p no contiene las funciones constantes no nulas, se deduce que f no puede ser hérmitico y par. **Q.e.d.**

Teorema 3.23
Sea $f \in V_p$, impar con $f(\infty) \neq 0$, entonces el elemento

$$h = \frac{2\|f\|^2}{|f(\infty)|} - f$$

es inversible y su inverso puede escribirse en la forma

$$h^{-1} = A \sum_{n=1}^{\infty} (Af)^n,$$

donde $A = \frac{|f(\infty)|}{2\|f\|^2}$

Demostración: Como f es impar se tiene

$$f^*(t) = f(\infty) - f(-t) = f(\infty) + f(t),$$

de donde

$$\frac{f^*(t) - f(t)}{f(\infty)} = \varepsilon(t).$$

Multiplicando por $f(t)$ ambos miembros de la igualdad anterior se obtiene

$$\left(\frac{f^*(t)f(t) - f^2(t)}{f(\infty)} \right) = f(t),$$

de donde

$$\begin{aligned} \|f\| &= \left\| \frac{f^*(t)f(t) - f^2(t)}{f(\infty)} \right\| \\ &\leq \frac{1}{|f(\infty)|} (\|f^*(t)\| \|f(t)\| + \|f(t)\|^2) = \frac{2\|f\|^2}{|f(\infty)|}. \end{aligned}$$

De aquí que

$$h = \frac{2\|f\|^2}{|f(\infty)|} - f$$

es inversible y para su inverso (ver [17]) se cumple

$$h^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n}{\left(\frac{2\|f\|^2}{|f(\infty)|} \right)^{n+1}} = \frac{|f(\infty)|^n}{2\|f\|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|f(\infty)|}{2\|f\|^2} \right)^n f^n.$$

Q.e.d.

De la definición de involución se deduce directamente el siguiente teorema.

Teorema 3.24

Si $f \in V_p$ es impar y $f(\infty) = 0$, entonces f es hermítico.

Se define que $f \in V_p$ es antiautoadjunto si se cumple que $f^* = -f$. Al respecto se tiene

Teorema 3.25

Si $f \in V_p$ es antiautoadjunto, entonces $f(\infty) = 0$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
-f(t) &= f(\infty) - f(-t) \\
f(\infty) &= f(-t) - f(t), \quad \text{si} \quad t \to \infty \\
f(\infty) &= -f(\infty)
\end{aligned}
$$

Q.e.d.

Teorema 3.26

En V_p no existen elementos antiautoadjuntos impares no nulos.

Demostración: Si f es impar y antiautoadjunto, entonces se cumple

$$
\begin{aligned}
-f(t) &= f(\infty) - f(-t) \\
-f(t) &= f(\infty) + f(t) \\
f(t) &= -\frac{f(\infty)}{2},
\end{aligned}
$$

lo cual contradice que f es impar. **Q.e.d.**

3.5. Formas bilineales y p-variación acotada

En un trabajo reciente(ver [2]) L.Barbanti mostró la relación existente entre los conceptos de p-variación acotada y función regulada, definidas por medio de determinadas formas bilineales, bajo ciertas suposiciones de convexidad. Poco después Oscar Blasco(ver [3]) mejora los resultados de Barbanti, en el sentido de que prescinde de este hecho. El propósito de esta sección es introducir el tema tratado en estos artículos, ahora para las funciones de p- variación acotada y presentar, en este marco, algunos resultados del autor.

Se define para $f : [0,1] \to X$, con X un espacio de Banach, la p-variación de f, $p > 1$ como

$$pvar(f) = \sup_{\pi} \left(\sum_{i=1}^{n} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

donde Π denotará el conjunto de todas las particiones con n puntos de $[0,1]$ y $\pi \in \Pi$.

Se define además p-semivariación como

$$psemivar(f) \sup_{\pi, \|\phi\| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

donde $\phi \in X^*$.

Una función $f : [0,1] \to X$ se dice regulada si tiene a lo sumo discontinuidades de primer tipo, para todo $t \in [0,1]$.

Los conceptos de $pvar(f)$ y $psemivar(f)$ pueden generalizarse en el siguiente sentido: considérese $\beta = (B, X, Y, Z)$, donde B es una forma bilineal continua, $B : X \times Y \to Z$ y X, Y y Z espacios de Banach. Se dice entonces que la función $f : [0,1] \to X$ tiene β-variación finita si

$$(\beta)pvar(f) \sup_{\pi, \|y_i\| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^{n} \|B(f(t_i) - f(t_{i-1}), y_i)\|_Z^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \infty$$

y es llamada β-regulada si la función $f_{B,y} : [0,1] \to Z$, tal que $f_{B,y}(t) = B(f(t), y)$ es regulada para todo $y \in Y$ con $\|y\| \leq 1$.
Se tiene entonces la siguiente proposición

Teorema 3.27
Para toda $f : [0,1] \to X$ se tiene que

$$psemivar(f_{B,y}) \leq (\beta)pvar(f) \leq pvar(f),$$

para todo $B : [0,1] \to Z$ tal que $\|B\| = 1$.

Demostración: Se probará primero la desigualdad a la izquierda:

Sea $\phi \in Z^*$ tal que $\|\phi\| \leq 1$, entonces, para $\|y\| \leq 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\phi(f_{B,y}(t_i) - f_{B,y}(t_{i-1}))|^p &= \sum_{i=1}^{n} |\phi(f_{B,y}(t_i)) - \phi(f_{B,y}(t_{i-1}))|^p; \quad t_i \in \pi \in \Pi \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\phi[B(f(t_i), y) - B(f(t_{i-1}), y)]|^p \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|B(f(t_i), y) - B(f(t_{i-1}), y)\|_Z^p \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|B(f(t_i) - f(t_{i-1}), y)\|_Z^p
\end{aligned}$$

de donde se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\phi(f_{B,y}(t_i)-f_{B,y}(t_{i-1}))|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq(\|B(f(t_i)-f(t_{i-1}),y)\|_Z^p)^{\frac{1}{p}}$$

y tomando supremo sobre todas las particiones de $[0,1]$ se tiene la primera desigualdad.

Sea ahora $\pi\in\Pi$ una partición, y $y_i\in Y$ tales que $\|y_i\|\leq 1$, $B:X\times Y\to Z$, una forma bilineal continua tal que $\|B\|=1$. Se tiene entonces que

$$(\|B(f(t_i)-f(t_{i-1}),y)\|_Z^p)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\|B\|^p\|f(t_i)-f(t_{i-1})\|^p\|y_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

pues $\|B\|=\sup_{(x,y)}\frac{\|B(x,y)\|}{\|x\|\|y\|}$; como $\|B\|=\|y_i\|=1$, $\forall i=\overline{1,n}$:

$$(\|B(f(t_i)-f(t_{i-1}),y)\|_Z^p)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\|f(t_i)-f(t_{i-1})\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tomando supremo sobre todas las particiones de $[0,1]$ se tiene la segunda desigualdad.

O. Blasco, en (ver [3]), obtiene que Z es un espacio de Banach con copia de c_0 si y solo si cualquier función con 1-semivariación finita es regulada. Como $V_p[0,1]$ no contiene copia de c_0 se tiene entonces la siguiente proposición:

Teorema 3.28
Existe una función $g:[0,1]\to V_p[0,1]$ con semivariación finita, que no es regulada.

En el contexto más general de las formas bilineales Blasco demuestra un resultado análogo al mencionado para la β-veriación, del cual se obtiene entonces la proposición siguiente:

Teorema 3.29
Sea $\beta=(B,V_p,Y,V_p)$, Z e Y espacios de Banach cualesquiera y B una forma bilineal continua $B:X\times Y\to V_p[0,1]$. Entonces existe $g:[0,1]\to V_p$ con β-variación finita que no es β-regulada.

De la generalización natural para la cuarteta $\beta=(B,L(X),X,X)$, obtenida tambien en ([3]) se tiene

Teorema 3.30
Existe $g:[0,1]\to L(V_p[0,1])$ con β-variación finita que no es β regulada. Aquí $L(V_p[0,1])$ es el espacio de los operadores lineales y continuos de $V_p[0,1]$ en $V_p[0,1]$.

Finalmente, es importante notar que toda función de p-variación acotada es β-regulada. Un poco contrastante resulta entonces el siguiente ejemplo

Ejemplo:
Sea la forma bilineal $B : l^\infty \times l^\infty \to l^\infty$, tal que $B(\alpha_n, \beta_n) = \alpha_n \beta_n$. Entonces la función

$$f = 0\chi_{\{0\}} + \sum_{k=1}^{\infty} e_k \chi_{(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]}$$

es de β-variación finita, pero no es β-regulada; lo cual puede comprobar el lector sin dificultad.

Capítulo 4

ALGUNAS APLICACIONES

El presente capítulo estará dedicado a la exposición de algunas aplicaciones de la variación acotada y la p-variación acotada, $p > 1$. Se comentarán dos artículos, el primero de Yuri Krvavych,(ver [20]) y el otro de Stanley Osher, y otros (ver [31]). Es importante aclarar que exiten en la literatura muchos trabajos referidos a las aplicaciones, de una forma u otra de los conceptos mencionados; el criterio de selección seguido por el autor se basa en conjugar actualidad y evidencia de la interdisciplinareidad de las ramas de la matemática en estas breves descripciones.

4.1. Patrón de Precios, Movimiento Browniano y p-Variación Acotada

Para comprender este ejemplo es importante conocer algunas definiciones en relación con la teoría de los procesos estocásticos.

Definición 4.1

Una secuencia estacionaria $X = (X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene la propiedad de dependencia estadística a largo plazo si su función de autocorrelación satisface

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\rho(k)}{c_\rho k^{-l}} = 1,$$

donde c_ρ y $l \in (0,1)$ son constantes.

DEFINICIÓN 4.2
Un proceso estocástico centrado $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *se dice estadísticamente autosimilar con exponente de Hurst* H*, si*

$$(X_t)_{t\in[0,T]} =_d (a^{-H}X_{at})_{t\in[0,T]}.$$

Si además el proceso es de cuadrado integrable con incrementos estacionarios se cumple

$$cov(X_t, X_s) = \frac{varX_1}{2}\left(t^{2H} + S^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

DEFINICIÓN 4.3
Sea $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *una familia creciente de sub-*σ*-álgebras de* $\mathcal{F}$ *para un espacio de probabilidad* $(\Omega,\mathcal{F},P)$*. A estas familias suele llamárseles filtración cuando son decrecientes. Un proceso estocástico* (X_t) *es adaptable a* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$*, si* X_t *es* $\mathcal{F}_t$*-medible para todo* t*.*
Si (X_t) *es adaptable y* $X_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *para todo* t*, entonces* (X_t) *es una martingala si*

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s; \quad \forall s,t \in T, s \leq t,$$

y una semimartingala si

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s.$$

El modelo de precios de Black-Scholes describe la fluctuación de los precios en un mercado determinado, el precio de las acciones en este modelo está dado por

$$dS_t = \mu S - tdt + \sigma S_t dW_t; \quad S_0 > 0$$

el precio del bono es $B_t = e^{rt}$; donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma, r \in \mathbb{R}^+$ son parámetros conocidos.

La aleatoriedad del precio de la acción S se debe al movimiento browniano W.

Tradicionalmente se considera un modelo de Black-Scholes simple, sin dividendos, transacción de costos ni limitaciones del pago a corto plazo de la acción. Bajo estas condiciones el modelo tiene determinadas propiedades, por ejemplo, puede encontrarse un precio único para las opciones sobre la acción y se pueden evadir opciones utilizando la fórmula de Itô-Clark- Ocone. Pero aparecen también "pequeños" problemas.

El modelo B-S plantea que los log-retornos

$$\begin{aligned} R_{t_k} &= \log \frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}} \\ &= (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t_k - t_{k-1}) + \sigma(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \end{aligned}$$

son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas.

La estructura de dependencia de los log-retornos ha sido estudiada teniendo en cuenta el exponente de Hurst H. Para el caso no correlacionado puede tomarse el valor $H = \frac{1}{2}$, pero estudios empíricos recientes muestran que $H \approx 0,642$ (ver [39]). Para superar este punto crítico ha sido propuesto el movimiento browniano fraccionario(fBm), B_t^H, reemplazando al movimiento browniano W. Un movimiento browniano fraccionario es un proceso continuo gaussiano con función de covarianza

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t^H, B_s^H) &= \frac{1}{2}(t^{2h} + S^{2H} - |t-s|^{2H}) \\ &= H(2H-1)\int_0^t \int_0^s |t-s|^{2H-2} ds dt. \end{aligned}$$

El fBm es el único proceso gaussiano centrado con incrementos estacionarios. Si $H \in (0,1)$ son autosimilares. En la modelación financiera usualmente se utiliza $H \in (\frac{1}{2}, 1]$. Mandelbrot y Van Ness definen el fBm como una integral estocástica con respecto al movimiento browniano estándar

$$B_t^H = \int_{-\infty}^t K(t,s) dW_s,$$

donde $k(t,s)$ depende de H. Aquí si $H = \frac{1}{2}$ se tiene el movimiento browniano estandar.

Por otro lado puede definirse para un proceso (X_t)

$$s_p(X,\tau) = \sum_{i=1}^n |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^p,$$

donde τ es una partición del intervalo $[0,T]$ y la p-variación del proceso v_p, de la manera usual, como el supremo sobre todas las particiones de $[0,T]$ de la cantidad $s_p(X,\tau)$. Se llamará índice de p-variación al valor v, definido por

$$v(X,[0,T]) = \inf\{p > 0 : v_p(X,[0,T]) < \infty\}.$$

Puede comprobarse que para el fBm con $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ se tiene que $v(B_t^H) = \frac{1}{H}$. Para semimartingalas M se tiene que $v(M) \in [0,1] \cup 2$ de aquí que B_t^H no es una semimartingala para $H \neq \frac{1}{2}$, por lo que no puede usarse la teoría de Itô para definir integrals estocásticas con respecto a él. Pueden definirse entonces integrales de tipo Riemman-Stieltjes usando la p-variación y el hecho de que si $f \in V_p$ y $g \in V_q$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ entonces existe la integral $\int_0^T g(t)df(t)$. Se ha demostrado además que los arcos de un fBm B_t^H están en V_p casi seguro si y solo si $p < \frac{1}{H}$, de aquí que $\int_0^T g(t)dB_t^H$ existe si $g \in V_q$ y $q < \frac{1}{1-H}$.

La integración está basada en el cálculo de Malliavin(ver [30]).

Se define $\pounds$ como la expansión del espacio de funciones indicadoras $\chi_{[0,t]} : t \in [0,T]$ y el producto escalar $\langle \chi_{[0,t]}, \chi_{[0,s]} \rangle_{\pounds} = \mathbb{E}(B_t^H B_s^H)$.Para funciones de salto se tiene

$$< f, g >_{\pounds} = H(2H-1) \int_0^T \int_0^T f(s)g(t)|t-s|^{2H-2}.$$

La aplicación $\chi_{[0,t]} \rightarrow B_t^H$ es entonces una isometría de $\pounds$ en $\pounds_1$, donde $\pounds_1$ es el espacio lineal de B^H.

Si denotamos por $B(\phi)$ la imagen de $\phi \in \pounds$ por esta isometría y C el conjunto de todas las variables aleatorias de la forma

$$\begin{aligned} F &= f(B^H(\phi_1), \ldots B^H(\phi_n)) \\ n &\leq 1, \quad \phi_k \in \pounds, \quad k = \overline{1,n}, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

para $F \in C$ se define la derivada de Malliavin como la variable aleatoria $\pounds$-valuada

$$D_t F = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} (B^H(\phi_1), \ldots B^H(\phi_n))\phi_k(t).$$

El operador divergencia δ se define como D^*(adjunto) y su dominio es

$$Dom\delta = \{u \in \pounds : |\mathbb{E}\langle DF, u \rangle_{\pounds}|^2 \leq K\mathbb{E}(F^2)\}.$$

Sea ahora $u \in Dom\delta$, la divergencia de $\delta(u)$ es una variable aleatoria de cuadrado integrable definida por

$$\mathbb{E}(\delta(u)F) = \mathbb{E}(\langle DF, u \rangle_{\pounds}),$$

para todo F. La integral de Wick-Itô-Skorohod del proceso u es

$$\delta(u) = \int_0^t u_t \delta B_t^H.$$

Bajo ciertas condiciones de regularidad sobre u, se tiene entonces el siguiente teorema.

Teorema 4.1
Sea, para el proceso $u \in Dom(\delta)$

$$\int_0^T \int_0^T |D_s u_t||t-s|^{2H-2} ds dt < \infty,$$

entonces existe la integral $\int_0^T u_t dB_t^H$ y

$$\int_0^T u_t dB_t^H = \int_0^T u_t \delta B_t^H + H(2H-1) \int_0^T \int_0^T |D_s u_t||t-s|^{2H-2} ds dt.$$

Después de esta parte Yuri Krvavych se sumerge en cuestiones relacionadas con las ventajas del teorema anterior, en el sentido de que implica mejorías considerables en el modelo B-S clásico, entre otras cosas porque el fBm lo acerca más a la realidad, con todo lo que ello implica. El autor de esta tesis considera innnecesario exponer lo concerniente a esta parte del trabajo de Krvavych, pues se aleja de los objetivos planteados al inicio del capítulo.

Hasta aquí se ha mostrado un poco el alcance del concepto de p-variación en la obtención de un resultado teórico, (de existencia), con grandes consecuencias en la práctica y en la cual el mismo juega un papel casi determinante.

A continuación se presentará de forma muy breve el artículo de Stanley Osher mencionado al principio. Aquí tanto las herramientas matemáticas como el campo de investigaciones son completamente diferentes.

4.2. Descomposición y restauración de imágenes y modelo de textura

También en esta parte serán necesarios algunas definiciones y resultados previos.

Un espacio de Sobolev es un espacio vectorial normado de funciones, que puede verse como un subespacio de L^p. De hecho, un espacio de Sobolev es un subespacio del espacio L^p, formado por clases de funciones tales que sus derivadas hasta orden m pertenecen también a L^p.

Definición 4.4 ***(Espacio de Sobolev)***
Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, se define como

$$W^{m,p}(\Omega) = f \in L^p | D^\alpha f \in L^p(\Omega), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; \quad |\alpha| \leq m \subset L^p(\Omega),$$

donde $D^\alpha f$ es la notación multi-índice para las derivadas parciales. Debe tenerse presente que dicho espacio está formado por clases de equivalencia de funciones.
La norma en los espacios de Sobolev se define a partir de la norma en L^p

$$\|f\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha \leq m|} \|D^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \textit{para} \quad p > 1,$$

y de igual forma para $p = \infty$

$$\|f\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Teorema 4.2 ***(de descomposición de Hodge)***
Toda k-forma w sobre K puede descomponerse en tres componentes de $L^2(K)$; $w = \alpha + \beta + \gamma$, donde γ es una función armónica (es decir, $\Delta\gamma = 0$, siendo Δ el operador de Laplace).

Definición 4.5
Se llama variación total generalizada en la región abierta y acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de una función $u \in L^1(\Omega)$ al valor $\int_\Omega |\nabla u|$, donde el signo ∇ denota el vector gradiente de u.

El artículo de Osher, propone un nuevo modelo para la restauración o reconstrucción de una imagen real f, basado en la minimización de la variación total de Rudin-Osher (ver [34]), y en algunas nuevas técnicas de Y. Meyer (ver [24]), asumiendo la parte oscilatoria de la imagen como una función de $H^{-1}(\Omega)$.

Una imagen f se descompone en una parte dibujo u y una parte textura o ruido v. La componente u es modelada por una función de variación acotada en el sentido generalizado y v es una función en un espacio de Banach adecuado.

Una tarea importante en el procesamiento de imágenes es la restauración, o recuperación de la parte u. Es decir, dada una imagen $f \in L^2(\Omega)$ para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, se desea obtener u, que representaría a la imagen real, ya que f viene siempre afectada por un ruido (la parte v). Para resolver este problema inverso, una de las técnicas más populares y efectivas es la de minimización y regulación. Con este fin L. Rudin, S.

Osher and E. Fatemi (ver [35]), proponen el siguiente problema de minimización:

$$\inf_u F(u) = \int_\Omega |\nabla u| + \lambda \int_\Omega |f-u|^2 dxdy; \qquad \lambda > 0.$$

El uso del espacio de las funciones de variación acotada en este problema está dado por el hecho de su conveniencia para modelar funciones con discontinuidades sobre líneas y curvas, pudiéndose así preservar y representar los vértices y contornos en una imagen. Formalmente, el problema de optimización anterior tiene asociada la ecuación de Euler-Lagrange

$$u = f + \frac{1}{2\lambda} div\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right); \qquad \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} = 0; \quad \text{en} \quad \partial\Omega.$$

Este modelo tiene la ventaja de que preserva los vértices, pero para valores de λ pequeños se pierden detalles como la textura. Para superar esta dificultad, Y.Meyer (ver [24]) propone sustituir la norma de $L^2(\Omega)$ en el segundo sumando del planteamiento del problema por otra norma más débil, que sea adecuada para representar la textura o los patrones oscilatorios.

Definición 4.6

Sea G el espacio de Banach de todas las funciones generalizadas $f(x,y)$ expresables como

$$f(x,y) = \partial_x g_1(x,y) + \partial_y g_2(x,y) \qquad con \qquad g_1, g_2 \in L^\infty(\Omega),$$

y se considera la norma $\|f\|_*$ como el ínfimo de todas las normas de $|\overrightarrow{g}|$ en $L^\infty(\Omega)$, con $\overrightarrow{g} = (g_1, g_2)$.
El espacio G coincide entonces con $W^{-1,\infty}(\Omega)$, que es el espacio dual de $W^{1,1}(\Omega)$.

Meyer propone entonces el nuevo modelo de restauración

$$\inf_u \left\{ E(u) = \int_\Omega |\nabla u| + \lambda \|f-u\|_* \right\}. \tag{4.1}$$

Esto representa un modelo de minimización convexa que no puede ser resuelto directamente, debido a que por la forma de la $*$-norma de $f-u$, no pueden expresarse las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas. El autor del artículo que se presenta, propone un primer método para la resolución. En ese sentido, plantea el siguiente problema para aproximar el anterior

$$\inf_{u,g_1,g_2} \{G_p(u,g_1,g_2)\},$$

para

$$\begin{aligned} G_p(u,g_1,g_2)\} = \int_\Omega |\nabla u| \quad &+ \quad \int_\Omega |f-(u+div\overrightarrow{g})|^2 dxdy \\ &+ \quad \mu \left(\int_\Omega (\sqrt{g_1^2+g_2^2} dxdy)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

donde λ y μ son parámetros de afinación y $p \to \infty$. Note que en este modelo se tiene que $f - u \approx div\overrightarrow{g} \in W^{-1,p}(\Omega)$, que es el espacio dual al espacio de Sobolev $W^{1,p'}$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. El caso $p = 2$ corresponde al espacio $H^{-1}(\Omega)$.

El nuevo modelo considera $v = f - u = \Delta P$, para una única $P \in H^{-1}(\Omega)$, con $\int_\Omega P(x,y)dxdy = 0$ y $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$ en $\partial\Omega$.

4.2.1. Descripción del Modelo

Asúmase que $f - u = div\overrightarrow{g}$ con $\overrightarrow{g} \in L^\infty(\Omega)^2$. Entonces puede asegurarse la existencia de una única descomposición de Hodges $g = \nabla P + \overrightarrow{Q}$, donde P es una función real y $\overrightarrow{Q}$ es un campo libre de divergencia. De aquí se obtiene que $f - u = div\overrightarrow{g} = \Delta P$. Ahora se expresa $P = \Delta^{-1}(f-u)$ y se propone el siguiente problema de minimización convexa, que es una versión simplificada de (4.1)

$$\inf_u \left\{ E(u) = \int_\Omega |\nabla u| + \delta \int_\Omega |\nabla(\Delta^{-1}(f-u))|^2 dxdy \right\}. \tag{4.2}$$

Este problema puede ser escrito utilizando la norma en $H^{-1}(\Omega)$, que se define por

$$\|v\|_{H^{-1}}^2 = \int_\Omega |\nabla(\Delta^{-1}v)|^2 dxdy.$$

Así se tiene ahora

$$\inf_u \left\{ E(u) = \int_\Omega |\nabla u| + \delta \|f-u\|_{H^{-1}}^2 \right\}.$$

Minimizando en (4.2) se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$2\lambda\Delta^{-1}(f-u) = div\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right).$$

Aplicando el operador Δ en ambos miembros es

$$2\lambda(f-u) = -\Delta div\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right),$$

ecuación que puede resolverse si se conduce al estado de equilibrio

$$u_t = -\frac{1}{2\lambda}\Delta div\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) - (u-f); \qquad u(0,x,y) = f(x,y).$$

Las condiciones de frontera asociadas son

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial K}{\partial n} = 0,$$

donde K es la curvatura de las líneas de nivel de u, $K(x,y) = div\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$, teniéndose finalmente una ecuación de cuarto orden en derivadas parciales que se resuelve numéricamente. A continuación se expondrán , muy brevemente, algunos resultados obtenidos de dicha resolución numérica.

4.2.2. Resultados numéricos

En esta parte se mostrarán algunos resultados numéricos del artículo de Osher que evidencian totalmente la gran utilidad de las funciones de variación acotada en este campo de la descomposición de imágenes.

En la figura 4.1, se observa una imagen real, donde hay una alta presencia de texturas combinadas con las partes no texturadas. Las componentes u y v se muestran en las figuras 4.2 y 4.3. El nuevo modelo separa muy bien los detalles de textura, mostrados en v, de las regiones no texturadas, mostradas en u. Además, detalles como los ojos, están muy bien representados en el componente u del nuevo modelo. En otras palabras, el modelo funciona excelentemente con el mantenimiento de los principales contornos en la componente u, y la componente v desempeña de la misma forma la separación de las características principales de las de textura.

Las figuras 4.4,, 4.5 y 4.6 muestra el rendimiento del nuevo modelo para el problema de eliminación de ruido. Se muestra un zoom de la imagen de la muchacha, antes y después de la corrupción con un ruido blanco gaussiano de desviación estándar igual a 10, y el resultado sin ruido (en 4.6), es notable.

Por último, un resultado de descomposición en una imagen con un objeto de borde fractal (correspondiente al pentágono de Sierpinsky), utilizando el modelo. El resultado de la descomposición es notable, como se muestra en las figuras 4.7, 4.8 y 4.9, la parte dibujo está bien representada en el componente u, mientras que la parte fractal, o sea la frontera, se mantiene en la componente oscilatoria v.

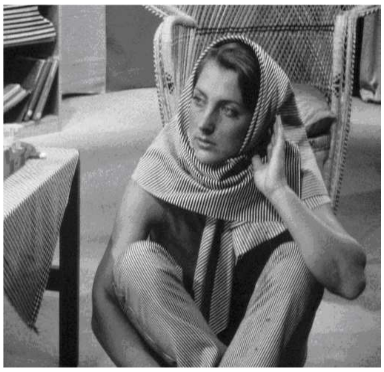

Figura 4.1:

Figura 4.2:

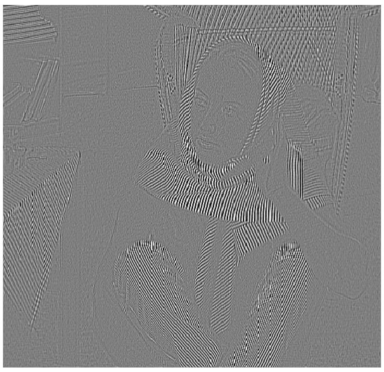

Figura 4.3:

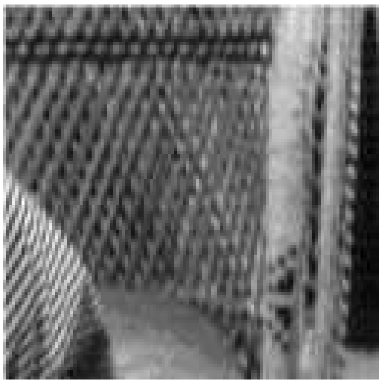

Figura 4.4:

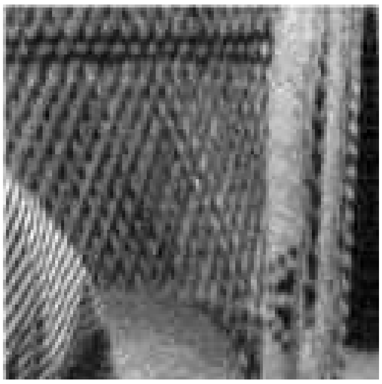

Figura 4.5:

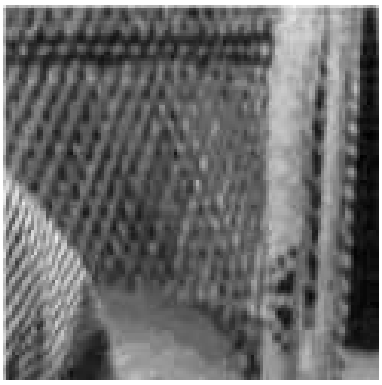

Figura 4.6:

Figura 4.7:

Figura 4.8:

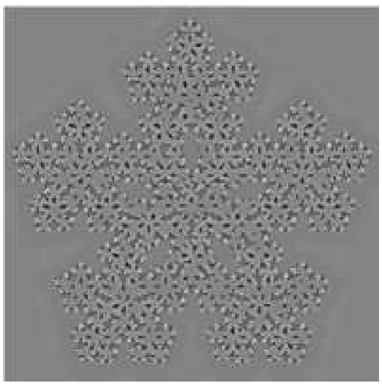

Figura 4.9:

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

En esta tesis se han expuesto resultados del autor que responden a algunas cuestiones que quedaron abiertas en su tesis de Licenciatura, como la regularidad del álgebra V_p, el estudio de algunas de sus subálgebras, la posibilidad de definir una involución y la inversibilidad de sus elementos. Además, se ha proyectado la cuestión del estudio de la p-variación acotada sobre nuevas direcciones de investigación, como son el trabajo sobre la relación con las formas bilineales y algunas características topológicas del espacio.

Se expusieron además resultados que conciernen al desarrollo de las investigaciones sobre la búsqueda de un teorema de representación para los espacios de funciones de p-variación acotada y absolutamente p-continuas. Se han incluido en esta parte los enfoques que el autor considera más influyentes en el desarrollo del problema, con el objetivo de describir de manera clara e ilustrativa la evolución en su tratamiento, teniendo en cuenta que en la literatura a su disposición no se tienen referencias relacionadas con el estudio de la dualidad de estos espacios. También se incluyen, a modo de finas pinceladas, algunas aplicaciones prácticas en las que aparecen las funciones de p-variación acotada (incluido el caso $p = 1$), con la intención de evidenciar la variedad de matices y trascendencia hacia otras disciplinas matemáticas que puede llegar a tener el estudio y tratamiento de un concepto tan sencillo y antiguo como el de variación. La selección de estas aplicaciones entre todos los trabajos, revisados por el autor, en los que de una forma u otra se utilizan las funciones de p-variación acotada, no resultó en modo alguno sencilla (ver [22]), ([23]), ([34]), ([35]).

Al cumplimiento de estos propósitos se opone el hecho de la ausencia aquí de interesantes y bellos resultados de Golubov (ver [14]) o Gelfand, Raikov, Naimark y Shilov (ver [12], [13]) que ocupan un lugar significativo en el estudio de las propiedades de las funciones de p-variación acotada y la búsqueda del espacio de ideales maximales del álgebra V_1, respectivamente. La presentación en este tesis de estas ideas seminales, hubiera atentado (por contrastante), contra la claridad del trabajo.

RECOMENDACIONES

Un álgebra no arquimedeana es un anillo normado definido sobre un cuerpo no arquimedeano (por ejemplo el de los números p-ádicos), en el cual se cumple la desigualdad triangular fuerte $\|f+g\| \leq \max \|f\|; \|g\|$. En ([9]) y ([27]), se presentan condiciones suficientes de regularidad para un álgebra no arquimedeana semisimple y una descripción de los ideales cerrados, respectivamente. El autor recomienda trabajar en este sentido sobre el álgebra V_p, pues se demuestra con facilidad que es arquimedeana, redefiniéndola en el sentido siguiente:

> La función $f : \mathbb{R} \to (C)$ se dice de p-variación acotada, $f \in V_p^d$ si es monótona no decreciente y para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x) = \frac{f(x^+)-f(x^-)}{2}$ y se tiene que $f(-\infty) = 0$.

La norma se considera igualmente como la p-variación y el álgebra que resulta, es también de Banach con la unidad adjunta.

Por otro lado nótese que el álgebra de las funciones de p-variación acotada V_p^d es isomorfa (al igual que V_p) a Ψ, la de las funciones que son representables como transformada de Fourier-Stieltjes de otra f con $\|f\|_{V_p^d} \leq \infty$. En relación con este tipo de funciones existe abundante literatura que puede ser muy sugerente al abordar el problema en cuestión, puede verse por ejemplo (ver[4]).

Considérese, por último y también de suma importancia, el trabajo con las aplicaciones de las funciones de p-variación acotada $1 \leq p < \infty$. El autor recomienda en especial el tratamiento del problema de la descomposición de imágenes, considerando ahora imágenes f con la componente u de p-variación generalizada finita, pues conjetura que con el refinamiento de la variación pueden obtenerse mejoras en los óptimos del primer problema de minimización convexa planteado en el capítulo cuarto, realizando además los cambios adecuados en el espacio correspondiente a la parte oscilatoria v.

Actualmente el autor de esta tesis trabaja en estas direcciones.

Bibliografía

[1] T. M. Apóstol: *Mathematical Analysis*, Quinta edición, Addison-Wesley, New York, (1981).

[2] L. Barbanti: *Simply regulated functions and semivariation in uniformly convex spaces*, Real Analysis Exchange, Vol.24(1), (1998/9), pp.405-410.

[3] O. Blasco, P. Gregori, J.M. Calabuig: *Finite semivariation and regulated functions by means of bilinear maps*,(2000).

[4] S. Bochner: *Lectures on Fourier Integrals*, Annals of Mathematics Studies, No.42, Princeton, New Jwrsey, Princeton University Press, (1959).

[5] A. Bolder: *Introduction to Function Algebras,* Springer Verlag, Berlín/Heidelberg/New York (1969).

[6] N. Bourbaki: *Elements of mathematics. Théories Spectral*, Addison-Wesley, New York, (1967).

[7] J. Bretagnolle: *p-variation de fonction aléatoires*,Serie de Radamacher, Séminaire de Probabilités (Strasbourg), tome 6, (1972), p.51-63,.

[8] J. Diestel: *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer Verlag, Berlín/Heidelberg/New York, (1984), 261 págs.

[9] J. Dominguez: *Una nota sobre las álgebras de Banach regulares no arquimedianas*, (1978).

[10] S.S Dragomir: *Some inequalities for functions of bounded variation with application to Landau type results*,arxiv: math-0410395v1 [math CA], 18 oct 2004.

[11] T.W. Gamelin: *Uniform Algebras*, Chelsea, 2. edición, (1984).

[12] I.M. Gelfand *Collected Papers*, Springer Verlag, Berlín, Heidelberg, New York, (1987).

[13] I.M. Gelfand, D.A Raikov, G.E Chilov: *Les Anneaux Normés Conmutatifs*, Gauthier-Villars, París, (1982).

[14] B.I Golubov: *On functions of bounded p-variation*, Math.USSR-Izvestija, vol.2(1968), No.4.

[15] G. Hamel: , *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x+y) = f(x) + f(y)$,* Math. Ann, 60, 459-462 (1905).

[16] K. Hoffman: *Fundamental of Banach Algebras*, Massachusetts Institute of Technology, USA,(1962).

[17] M.A. Jiménez Pozo: Medida, Integración y Funcionales, *Studia Mathematica,* **18,** Warszawa, (1959).

[18] S.V. Kisliakov: A Remark on the Space of functions of bounded p-Variation, *Mathematische Nachrichten,* **119,** Berlín, (1984), (preprint).

[19] A.N. Kolmogorov, S:V: Fomin: *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, Editorial MIR, Moscú, (1978).

[20] J. Krvavych: *Stock price modelling by long-memory processes: overview of the fractional Brownian approach*, Actuarial Studies Research Symposium, UNSW, Nov. (2002).

[21] E.R Love, L.C. Young: Sur une Classe de fonctionelles lineaires *Fundamenta Mathematica,* **28,** Warszawa, (1937).

[22] M. Lugiez, M. Menard, A. El-Hamidi: *Dinamic color texture modeling and color video decomposition using bounded variation and oscillatory functions*, ICISP, LNCS 5099, p. 29-37, (2008).

[23] M. Manstavičius: *p-variation of strong Markov processes*, The Annals of Probability, vol 32, No 3A, (2004).

[24] Y. Meyer: *Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution Equations*, University Lecture, vol.22, AMS (2002).

[25] R. Milian: *El Álgebra de las funciones de p-variación acotada*, Tesis de Licenciatura, Universidad de la Habana (2008).

[26] J. Molk: *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées,* Ed. Jacques Gabay, (1916).

[27] G.J Murphy: *Conmutative non-archimedean algebras*, Pacific Journal of Mahematic, vol. 78, No.2, (1978).

[28] G. Musielack, W. Orlicz: On generalized Variations (1), *Studia Mathematica,* **18,** Warszawa, (1959).

[29] M.A Naimark: *Normed Rings*, Lomonosov State University, Moscú, (1959).

[30] D. Nuluart: *The Malliavin Calculus and related topics*, Springer NY, (1988).

[31] S. Osher, A. Solé, L. Vese: *Image decomposition, Image restoration, and texture modelin using total variation minimization and the H^{-1} norm*, ICIP. (2003).

[32] Y. Puig de Dios: *Espacios de funciones de p-variación acotada fuerte y débil,* Tesis de Licenciatura, Universidad de La Habana, (2005).

[33] R.A. Roldán Inguanzo: *Räume von Folgen und Funktiones von bescränkter p-variation,* Tesis de Doctorado, Universidad Friedrich Schiller de Jena, RDA, (1989).

[34] L. Rudin S. Osher: *Total variation based image restoration with free local constraints*, Proceeedings of the IEEE ICIP, I., p.31-35, (1994).

[35] L. Rudin S. Osher L Fatemi: *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*, Physica D, vol60., p.259-268., (1992).

[36] C. Sánches Fernández, C. Valdés Castro: , *De los Bernoulli a los Bourbaki,* Ed. Nivola, España, (2005).

[37] I. Singer: , *Bases in Banach Spaces,*, Springer Verlag, Berlín, (1970).

[38] N. Wiener, H. R Pitt: , *On absolutely convergent Fourier-Stieltjes transforms,* Duke math. J. 4 420-436, (1938).

[39] W Willinger, M. Taqqu, V Teverovsky: *Stock prices and long-range dependence*, Finance and Stochastic, vol.3, p.1-13, (1999).

[40] L.C. Young: An Inequality of the Hölder Type, connected with Stieltjes Integration, *Acta Mathematica,* **67,** Uppsala, (1936).

[41] W. Zelasko: *On Ideal Theory in Banach and Topological Algebras*, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warszawa (1984).