Capítulo 6

Funciones Reales de Variable Real

M.Sc. Alcides Astorga M., Lic. Julio Rodríguez S.

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
...
Revista digital Matemática, educación e internet (www.cidse.itcr.ac.cr)

Créditos

Primera edición impresa:	Rosario Álvarez, 1984.
Edición LaTeX:	Marieth Villalobos, Alejandra Araya, Jessica Chacón, María Elena Abarca, Lisseth Angulo. y Walter Mora.
Colaboradores:	Cristhian Paéz, Alex Borbón, Juan José Fallas, Jeffrey Chavarría
Edición y composición final:	Walter Mora.
Gráficos:	Walter Mora, Marieth Villalobos.
Comentarios y correcciones:	escribir a wmora2@yahoo.com.mx

Contenido

6.1 Producto Cartesiano

■ Definición 1

Sean A y B conjuntos tales que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Se llama producto cartesiano de A y B, denotado por $A \times B$, al conjunto, $\{(a, b)$ tal que $a \in A, b \in B\}$.

O sea: $A \times B = \{(a, b) \text{ tal que } a \in A, b \in B\}$

■ Ejemplo 1

Sean $A = \{1, 2\}$ $B = \{1, 2, 3\}$.

Entonces $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$.

Ejercicios 1

Sean $A = \{-1, 0\}$ y $B = \{0, 1\}$. Determine $B \times A$

Sean $X = \left\{\sqrt{2}, \dfrac{-1}{3}\right\}$, $Y = \{7\}$. Determine $X \times Y$

Definición 2

Sean A y B conjuntos tales que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Los elementos de $A \times B$ se llaman pares ordenados, por que si: $a \in A,\ b \in B$ y $a \neq b$ entonces $(a, b) \neq (b, a)$.

Así con respecto al primer ejemplo, observe que: $(1, 2) \neq (2, 1)$

6.2 Sistema de Coordenadas Rectangulares

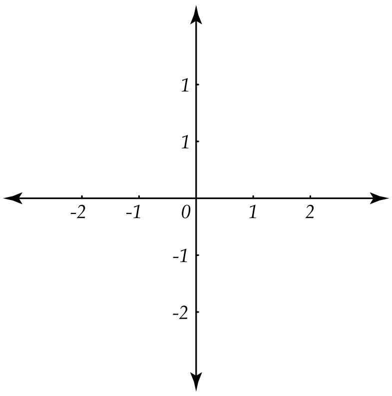
En un capítulo anterior vimos que podemos representar los números reales como puntos de una recta. Ahora estamos interesados en obtener una representación para $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, esto de acuerdo a la definición 1, al conjunto:

$$\{(x, y) \text{ tal que } x,\ y \in \mathbb{R}\}$$

Lo que buscamos "es establecer una correspondencia entre el conjunto de todos los pares ordenados de números reales $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y el conjunto de todos los puntos de un plano."

Una forma de establecer esta correspondencia es por medio de un sistema de coordenadas rectangulares que se puede construir de la siguiente forma:

Se dibujan dos rectas numéricas perpendiculares entre sí, que se intersecan en el punto cero de cada una, como se muestra en la siguiente figura.

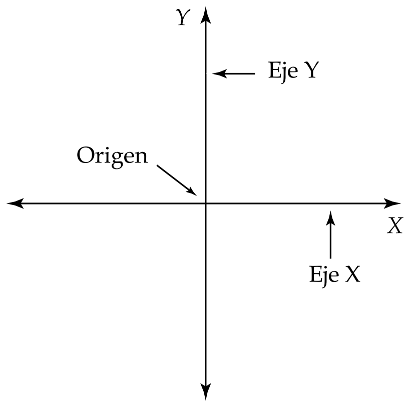


Nota: El nombre de sistema de coordenadas rectangulares se debe a que las rectas numéricas se intersecan determinando un ángulo recto (ángulo de 90^o).

Las dos rectas numéricas de la figura anterior recibe el nombre de ejes coordenados.

Los ejes coordenados son, generalmente (en este curso siempre), un eje horizontal (que llamamos eje X) y un eje vertical (que llamaremos eje Y).

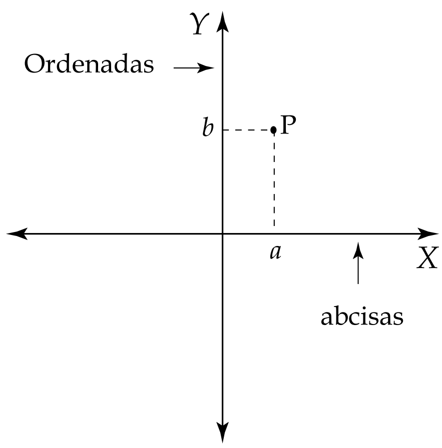
El punto cero donde se intersecan el eje X y el eje Y se llama origen.



El plano en que se usa un sistema de coordenadas se llama plano coordenado o plano real. Así a cada punto P del plano se le puede asignar un par ordenado de números reales, como sigue:

Se traza desde P un segmento perpendicular al eje X, que le interseque en el punto a. (Ver figura 3).

Se traza desde P un segmento perpendicular al eje Y en el punto b.



El número a recibe el nombre de **abscisa**

El número b recibe el nombre de **ordenada**

Al punto P le podemos asignar el par ordenado (a, b). (Note que primero se escribe la abscisa (a) y luego la ordenada (b))

Diremos que P tiene coordenadas a y b.

En forma similar, a un par ordenado de números reales se le puede asignar un punto del plano coordenado.

De todo lo anterior tenemos:

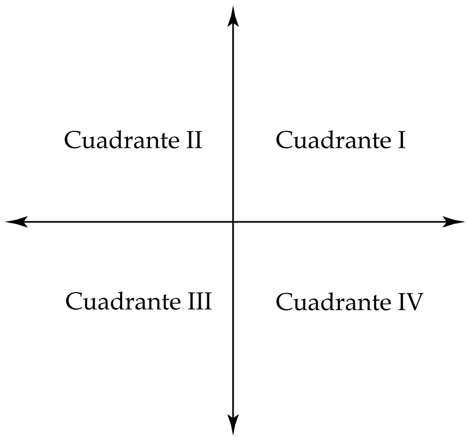
A cada punto P del plano coordenado se le asocia exactamente un par ordenado de números reales (a, b) y a cada par ordenado de números reales se asocia exactamente un punto del plano.

Ejercicios 2

Represente en un sistema de coordenadas rectangulares los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

1. $\{(-1,3),(3,-1),(-5,-4),(2,3),(0,0)\}$
2. $\left\{\left(\frac{1}{2},0\right),\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{-7}{5},1\right),\left(\frac{-3}{4},\frac{-4}{3}\right)\right\}$
3. $\left\{\left(\frac{5}{4},-1\right),\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{-5}{4}\right),\left(1,\frac{-7}{6}\right)\right\}$

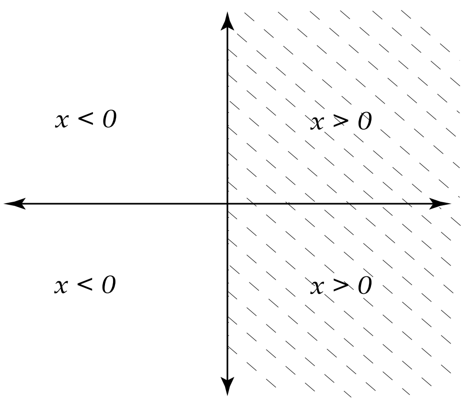
Las cuatro regiones en las que los ejes de un sistema coordenado rectangular divide al plano se llaman cuadrantes. Los cuadrantes se numeran I, II, III y IV, de la siguiente manera:

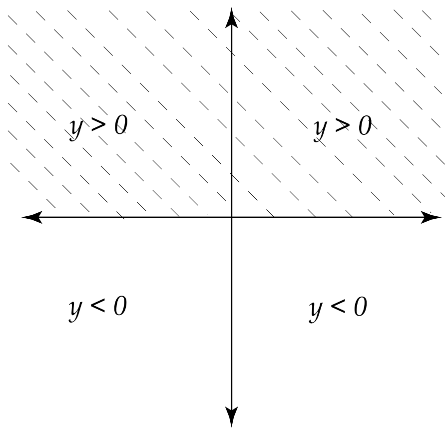


También se le llama primero, segundo, tercero y cuarto cuadrante.

6.2.1 Signo de las coordenadas de un punto, según el cuadrante donde esté

Sea P un punto de coordenadas (x,y) entonces tenemos que:





6.3 Funciones

Definición 3

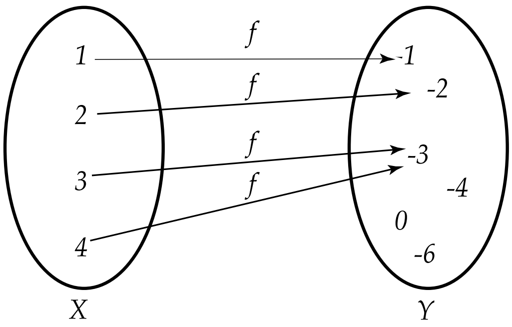
Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Una función $\underline{f \text{ de } A \text{ en } B}$ es una ley, regla o correspondencia que a cada elemento de A, le hace corresponder $\underline{\text{un y sólo un elemento de } B}$.

Definición 4

Sean A y B dos conjuntos no vacíos y f de A en B una función. Sea $a \in A$. El elemento que f le hace corresponder a a en B, se llama $\underline{\text{imagen de } a}$ y se denota por $f(a)$ $(f(a)$: se lee "efe de a") y a recibe el nombre de preimagen de $f(a)$.

Ejemplo 2

Sea:



Tal y como está definida esta correspondencia f es función de x en y.

Complete:

a) Al 1 se le asigna el -1, o sea $f(1) = -1$. La imagen de 1 es: _____

b) Al 2 se le asigna el -2, o sea $f(2) = -2$. La preimagen de -2 es: _____

c) Al 3 se le asigna el -3, o sea _____ = _____. La imagen de 3 es: _____

d) Al 4 se le asigna el -4, o sea _____ = _____. La preimagen de -4 es: _____

Notación:

Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $a \in A$

Si f es una función de A en B y $f(a)$ es la imagen de a, esto se indica de la siguiente forma

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B, \\ a &\longrightarrow f(a) \end{aligned}$$

Definición 5

Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f : A \longrightarrow B$ función.

Entonces:

1. A recibe el nombre de dominio de la función
2. B recibe el nombre de codominio de la función

Ejercicios 3

Complete:

1. Con respecto al ejemplo 2:
   a) El dominio de la función es ________________

   b) El codominio de la función es ________________

2. Considere la función $f :]-5, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces:
   a) El dominio de la f es ________________

   b) El codominio de la f es ________________

Definición 6

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \longrightarrow B$ función.

a) Se llama <u>rango</u> o <u>ámbito</u> de f al conjunto A_f, definido por la igualdad: $A_f = \{f(x) \text{ tal que } x \in A\}$

   O sea A_f es el conjunto de las imágenes.

b) Se llama <u>gráfico de f</u> al conjunto G_f, definido por la igualdad $G_f = \{(x, f(x)) \text{ tal que } x \in A\}$

Una función se puede definir por medio de diagramas de Venn. También puede definirse dando su dominio, codominio y una regla que indica en que forma se asocia cada miembro del dominio, con uno del codominio. La regla es a menudo (aunque no siempre) una frase numérica abierta.

Ejemplo 3

Sea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-6, -5, -4, -2, 0, 1, 2, 4, 6\}$ y $f : A \longrightarrow B, \quad f(x) = 2x$

Determine

a) El ámbito o rango de f.

b) El gráfico de f.

c) Represente el gráfico de f en un sistema de coordenadas rectangulares.

Solución

a) Para determinar A_f, construyamos la siguiente tabla de valores considerando que $f(x) = 2x$

$$\begin{array}{rcccl} f(-2) & = & 2(-2) & = & -4 \\ f(-1) & = & 2(-1) & = & -2 \\ f(0) & = & 2(0) & = & 0 \\ f(1) & = & 2(1) & = & 2 \\ f(2) & = & 2(2) & = & 4 \end{array}$$

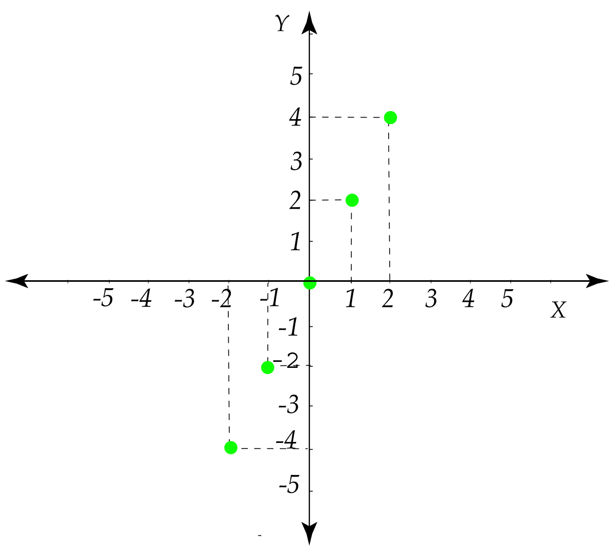
x	$2x$
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4

Por lo que $A_f = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$

b) Por definición $G_f = \{(x, 2x)$ tal que $x \in A\}$ por lo que:

$G_f = \{(-2, -4), (-1, -2), (0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$

c) Representación de G_f



Nota: Generalmente en vez de escribir "Represente el gráfico de f en un sistema de coordenadas rectangulares", escribiremos "Realice el trazo de f "

Ejercicios 4

Para cada una de las siguientes funciones

1. Determine:

a) A_f

b) G_f

2. Realice el trazo de f

a) Sea $A = \{-\sqrt{3}, -2, \sqrt{2}, -1\}$, $\quad B = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ y $f : A \longrightarrow B, \quad f(x) = x^2$

b) Sean $A = \left\{\dfrac{-3}{2}, -1, \dfrac{-1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}\right\}$, $\quad B =]-7,7[$ y $f : A \longrightarrow B, \quad f(x) = -4x$

■ Definición 7

Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f : A \longrightarrow B$, función. Sea $\alpha \in A$, se dice que α es un cero de f, si se cumple que: $f(\alpha) = 0$

■ Ejemplo 4

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x - 1$

a) Determine los ceros de f.

b) Realice el trazo de f.

Solución

a) Ceros de f:

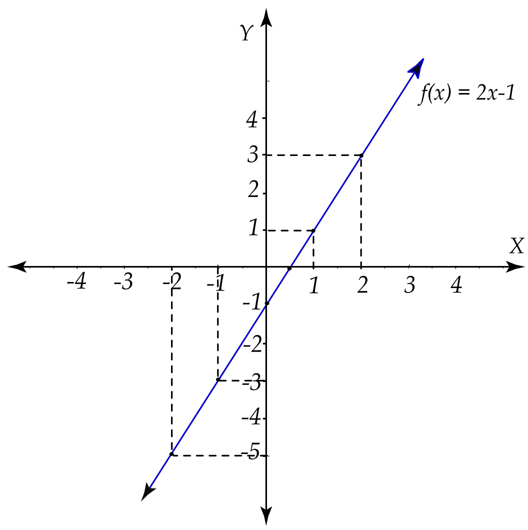
$$\begin{array}{rcrcl} f(x) = 0 & \Longleftrightarrow & 2x-1 & = & 0 \\ & & 2x & = & 1 \\ & & x & = & \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Por lo que $\dfrac{1}{2}$ es un cero de f.

b) Trazo de f:

Observe que en este caso el dominio de f es $\mathbb{R}$, así es que x se le puede asignar cualquier número real, pero para construir la tabla de valores escogemos valores para x " apropiados ".

x	-2	$\frac{-3}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	...
$2x-1$	-5	-4	-3	-1	0	1	3	...



Observe que en el gráfico anterior se obtiene:

1. La intersección entre la gráfica de f y el eje X es $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

2. La intersección entre la gráfica de f y el eje Y es $(0, -1)$

En general:

Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f : A \longrightarrow B$ función.

a) Intersección entre la gráfica de f y el eje X

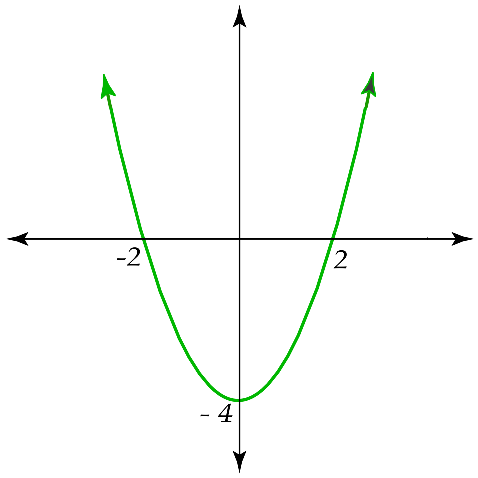
   Sea $\alpha \in A$ tal que $f(\alpha) = 0$, es decir α es un cero de f, entonces la gráfica de f interseca el eje X en el punto $(\alpha, 0)$

b) Intersección entre la gráfica de f y el eje Y

   Sea $\beta \in B$ tal que $f(0) = \beta$, es decir β es la imagen de cero, entonces la gráfica de f interseca el eje Y en el punto $(0, \beta)$

Ejemplo 5

Complete, de acuerdo a las gráficas que se presentan:

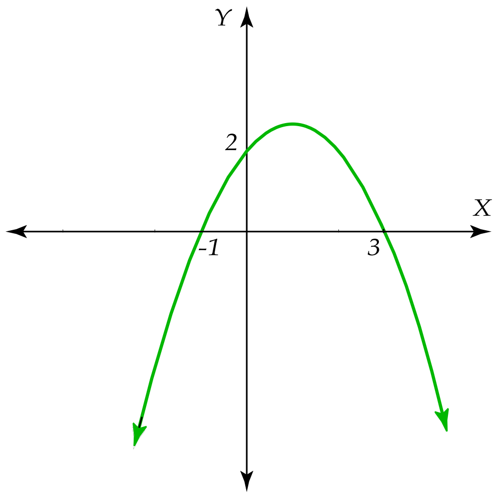


$f(x) = y$

a) f interseca al eje X en: __________

b) f interseca al eje Y en: __________

c) $f(x) = 0$ cuando x vale: __________



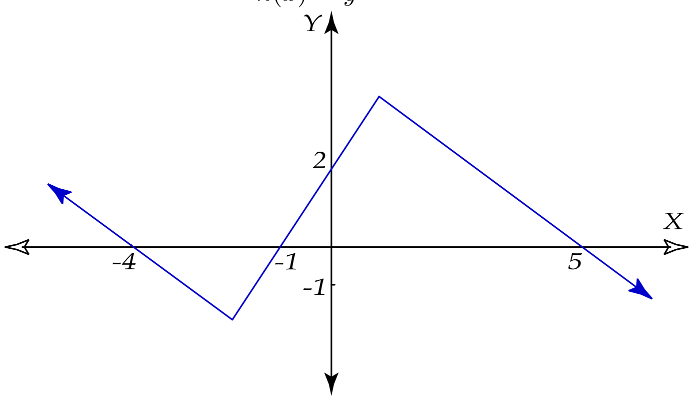
$g(x) = y$

a) g interseca al eje X en: __________

b) g interseca al eje Y en: __________

c) $g(x) = 0$ cuando x vale: __________

$h(x) = y$



a) h interseca al eje X en: __________

b) h interseca al eje Y en: __________

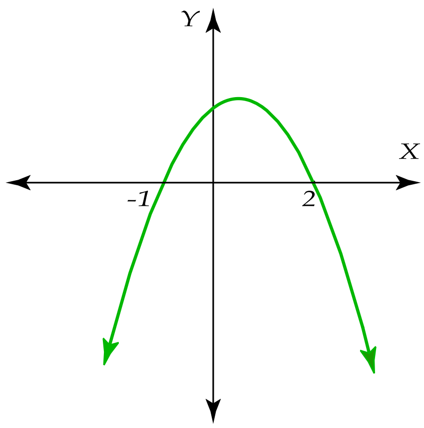
c) $h(x) = 0$ cuando x vale: __________

Recuerde que si f es una función, el número real $f(x)$ se representa en el eje Y, por esto a menudo escribimos $f(x) = y$

Así para ver cuando una función es positiva (o negativa) basta ver para que valores de x, $f(x) > 0$ (o $f(x) < 0$).

Ejemplo 6

Considere la gráfica de una función f, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



Determine, en notación de intervalos, los conjuntos

a) $A = \{x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0\}$

Solución

a) Como $f(x) = y$, basta ver cuando $y > 0$.

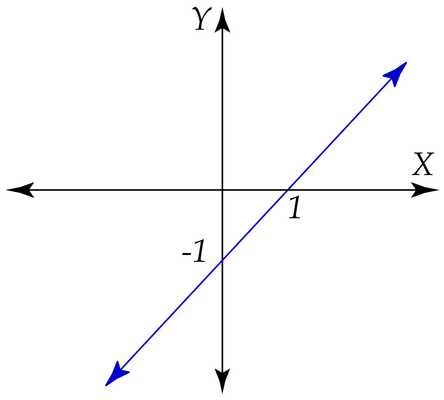
Por lo que $A =]-1, 2[$

b) Similarmente basta ver cuando $y < 0$.

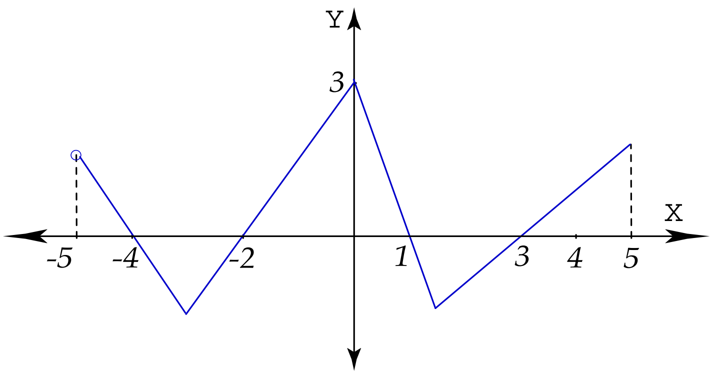
Por lo que $B =]-\infty, -1[\ \bigcup\ ]2, +\infty[$

Ejercicios 5

1. Para cada una de las siguientes funciones:



$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



$f : \;]-5, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$

Determine:

a) Intervalos donde f es positiva

b) Intervalos donde f es negativa

c) Puntos de intersección con el eje X

d) Puntos de intersección con el eje Y

2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x$. Realice el trazo de f

   Nota: Esta función recibe el nombre de función identidad.

3. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3$. Realice el trazo de g

4. Sea $c \in \mathbb{R}$, sea $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = c$. Realice el trazo de h

   Nota: Las funciones g y h anteriores reciben el nombre de funciones constantes.

5. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \in [-5,0[\\ -x+2 & \text{si } x \in [0,5[\end{cases}$$

Realice el trazo de f

6. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \in [-3,-2[\\ -2 & \text{si } x \in [-2,-1[\\ -1 & \text{si } x \in [-1,0[\\ 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1,2[\\ 3 & \text{si } x \in [2,3[\end{cases}$$

Realice el trazo de f

7. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x \in]-5,-1] \\ -2 & \text{si } x \in]-1,1] \\ x-3 & \text{si } x \in [1,5] \end{cases}$$

Realice el trazo de f

8. Sean f, g, h funciones con dominio $\mathbb{R}$, tales que:

$$f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+1}$$

$$g(x) = 3x+1$$

$$f(x) = \sqrt[3]{-2x+5}$$

Determine:

La intersección de la gráfica de f, de g y de h con los ejes coordenados.

Algunas veces cuando una función está definida por una frase numérica abierta, nos interesa determinar los valores de la variable para los cuales la frase numérica abierta representa un número real, es decir nos interesa saber el dominio de la variable.

■ Definición 8

Sea $f(x) = y$, donde y es una frase numérica abierta que involucra la variable x. Entonces diremos que el **dominio de la variable** x es el <u>dominio máximo de f</u> y lo denotamos D_f

Nota: Recuerde que:

1. Si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}$ entonces $b \neq 0$

2. Si $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$, con n par entonces $a \geq 0$

Ejemplo 7

1. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Como $x - 1 \neq 0$ entonces $x \neq 1$

   Por lo que el dominio de f es $\mathbb{R} - \{1\}$, o sea $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2. Sea $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-25}$, aquí tiene que cumplirse que $x^2 - 25 \neq 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &= 0 \\ (x-5)(x+5) &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} x - 5 &= 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 5 \\ x + 5 &= 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -5 \end{aligned} \right.$$

   Por lo que $D_f = \mathbb{R} - \{5, -5\}$

Ejemplo 8

Sea $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{(x+1)(x-2)}}$, aquí tiene que cumplirse que $\dfrac{x-1}{(x+1)(x-2)} \geq 0$

Raíces: $x - 1 = 0 \implies x = 1$

Restricciones: $x = -1,\ x = 2$

	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x-1}{(x+1)(x-2)}$		$-$		$+$		$-$		$+$	

Por lo que $D_f =]-1, 1] \cup]2, +\infty[$

Ejemplo 9

Sea $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$, aquí tiene que cumplirse que $x + 2 \geq 0$ y $x - 1 \neq 0$

a) $x + 2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -2 \Longleftrightarrow x \in [-2, +\infty[$

b) $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Por lo que $D_f = [-2, +\infty[- \{1\}$

Ejercicios 6

Determine el dominio máximo para las funciones definidas por:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x+2}{x}}$

b) $g(x) = \sqrt{x+3} + \dfrac{1}{x-5}$

c) $h(x) = \sqrt{\dfrac{3}{x+6} - 1}$

d) $j(x) = \sqrt{x^3 - 25x}$

e) $k(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2}{-x+1}}$

f) $l(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}}$

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \longrightarrow B$, función

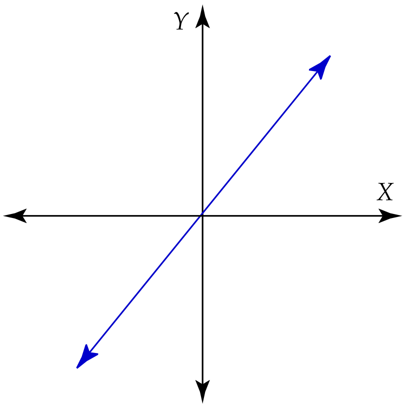
1. f se dice que es inyectiva: si todo elemento en B (codominio) tiene a lo más una preimagen en A (dominio).

   Es decir: Si $f(a) = f(b)$ entonces $a = b$

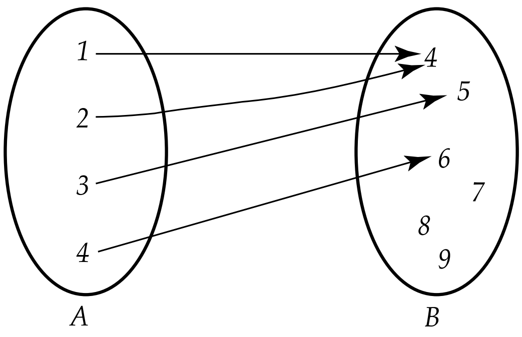
2. f se dice que es sobreyectiva: si todo elemento en B (codominio) tiene alguna preimagen en A (dominio).

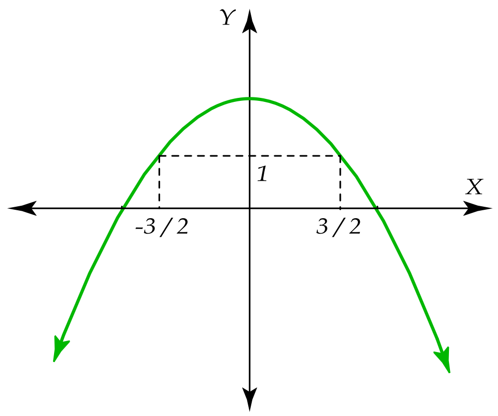
3. f se dice que es biyectiva: si es inyectiva y sobreyectiva.

a) Ejemplos de funciones inyectivas

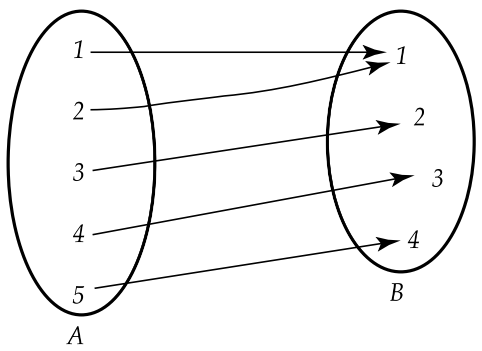


b) Ejemplos de funciones no inyectivas

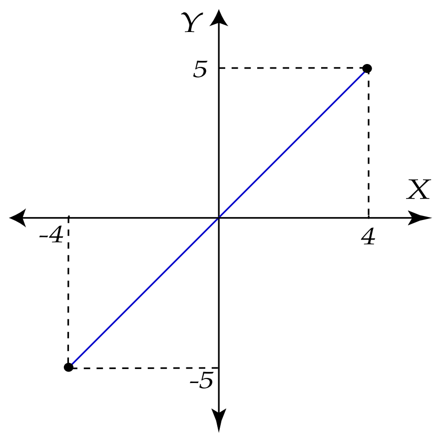




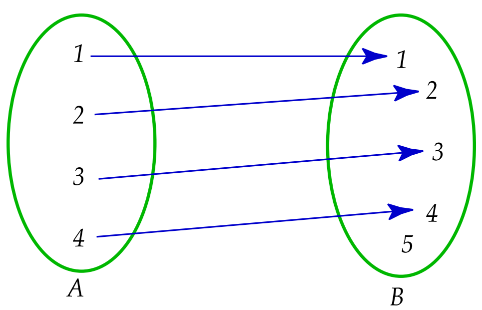
c) Ejemplos de funciones sobreyectivas



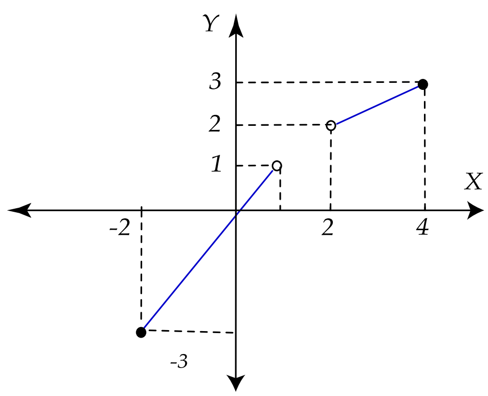
$f : [-4, 4] \longrightarrow [-5, 5]$



d) Ejemplos de funciones no sobreyectivas



$f : [-2, 1[\cup]2, 4] \longrightarrow [-3, 3]$



6.4 Algebra de Funciones

Nos abocaremos ahora a obtener “nuevas” funciones a partir de funciones dadas, esto lo haremos haciendo uso de operaciones algebraicas.

Las funciones que obtendremos serán la suma, la diferencia, el producto, el cociente o la composición de funciones dadas.

Definición 9

Sean f y g funciones cuyos dominios son D_f y D_g respectivamente; entonces definimos las funciones $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g}$ llamadas suma, diferencia, producto y cociente, respectivamente, de la manera siguiente:

1. $(f+g)(x) = f(x)+g(x);$ para cada $x \in D_f \cap D_g$

2. $(f-g)(x) = f(x)-g(x);$ para cada $x \in D_f \cap D_g$

3. $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x);$ para cada $x \in D_f \cap D_g$

4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)};$ con $g(x) \neq 0$ y $x \in D_f \cap D_g$

Notemos que el dominio de las funciones $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g}$ es el mismo, a saber $D_f \cap D_g$

Nota: Cuando no se especifique el dominio de una función se entenderá que éste es el máximo dominio real de la función.

Ejemplo 10

Si f y g son funciones definidas respectivamente por: $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = x+2$, entonces

1. $(f+g)(3) = f(3)+g(3) = 2+5 = 7$

2. $(f-g)(3) = f(3)-g(3) = 2-5 = -3$

3. $(f\cdot g)(3) = f(3)\cdot g(3) = 2\cdot 5 = 10$

4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(3) = \dfrac{f(3)}{f(3)} = \dfrac{2}{5}$

Observemos que $(f+g)(-3),\ (f-g)(-3),\ (f\cdot g)(-3),\ \left(\dfrac{f}{g}\right)(-3)$ no están definidas pues $-3 \notin D_f \cap D_g$

Ejemplo 11

Sean f y g funciones definidas respectivamente por: $f(x) = 5x^2 - 2x + 5, \quad g(x) = 3x + 2$

Determinar $(f+g)(x),\ (f-g)(x),\ (f\cdot g)(x),\ \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$. Además indicar sus dominios respectivos.

Solución

Como $D_f = \mathbb{R};\ \ D_g = \mathbb{R}$ entonces el dominio máximo para las funciones $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,$ es $D_f \bigcap D_g = \mathbb{R}$

a)
$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= 5x^2 - 2x + 5 + 3x + 2\\ &= 5x^2 + x + 7, \qquad \text{o sea } (f+g)(x) = 5x^2 + x + 7\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= 5x^2 - 2x + 5 - (3x + 2)\\ &= 5x^2 - 2x + 5 - 3x - 2\\ &= 5x^2 - 5x + 3, \qquad \text{o sea } (f-g)(x) = 5x^2 - 5x + 3\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x)\\ &= (5x^2 - 2x + 5)(3x + 2)\\ &= 15x^3 - 6x^2 + 15x + 10x^2 - 4x + 10\\ &= 15x^3 + 4x^2 + 11x + 10 \qquad \text{o sea } (f\cdot g)(x) = 15x^3 + 4x^2 + 11x + 10\end{aligned}$$

d) Como $g(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{-2}{3}$, entonces el dominio de la función $\dfrac{f}{g}$ es $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{-2}{3}\right\}$ y además:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x^2 - 2x + 5}{3x + 2}$$

O sea: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 5}{3x + 2}$

Ejemplo 12

Considere las funciones f y g definidas por:

$f(x) = x - \sqrt{3};$ para $x \in\ ]-2, 5[$

$g(x) = x + \sqrt{3};$ para $x \in [-5, 2]$

Determine $(f \cdot g)(x)$ y su dominio respectivo.

Solución

$(f \cdot g)(x) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = x^2 - 3,$ o sea $(f \cdot g)(x) = x^2 - 3$

El dominio de esta función es:

$$]-2,5[\, \cap \, [-5,2] =]-2,2]$$

Ejemplo 13

Considere las funciones f y g definidas por:

$f(x) = 6x - 9$; para $x \in [0,5[$

$g(x) = 2x - 3$; para $x \in]1,7]$

Determine $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ y su dominio respectivo.

Solución

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{6x-9}{2x-3} = \dfrac{3(2x-3)}{2x-3} = 3$

O sea $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = 3$, Además

como $g(x) = 0$ si $x = \dfrac{3}{2}$, entonces x no puede tomar el valor de $\dfrac{3}{2}$, además como:

$[0,5[\, \cap \,]1,7] =]1,5[$ entonces el dominio de $\dfrac{f}{g}$ es $]1,5[- \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

Ejercicios 7

1. Sean $f(x) = x + 3$ para $x \in [-5,1]$ y $g(x) = 6 + 2x$ para $x \in]-6,0[$

   Determine: $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$, e indicar el dominio de la función respectiva.

2. Sean $h(x) = \sqrt{2-x}$, $m(x) = \sqrt{2x+6}$. Determine $(h \cdot m)(x)$ y su dominio respectivo.

3. Sean $r(x) = x^2 - 4$, $s(x) = x + 2$. Determine $\left(\dfrac{r}{s}\right)(x)$ y su dominio respectivo.

Definición 10

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función, sea $\alpha \in \mathbb{R}$, α constante, llamaremos producto de α y f y lo designamos $\alpha \cdot f$ a la función definida por: $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ para cada $x \in A$

Ejemplo 14

Si $f(x) = 2x - 1$ y $\alpha = 3$ entonces

$(\alpha f)(x) = (3f)(x) = 3f(x) = 3(2x-1) = 6x - 3$, o sea $(3f)(x) = 6x - 3$

Ejercicios 8

Sea $f(x) = 3 - x$; calcule: $(2f)(x)$; $(-5f)(x)$; $(3f)(1)$

6.5 Composición de funciones

Consideremos la función f definida por: $f(x) = 2x + 3$ y calculamos:

a) $f(1)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(-2)$; $f(0)$

b) $f(2+h)$, $f(a+h)$; $f(a-h)$; $f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

Solución

a) $f(1) = 2\cdot(1) + 3 = 2 + 3 = 5$; o sea $f(1) = 5$

$$\begin{array}{rclcll}
f(-1) & = & 2\cdot(-1)+3 & = & -2+3, & \text{o sea} \quad f(-1) = 1 \\
f(2) & = & 2\cdot(2)+3 & = & 7, & \text{o sea} \quad f(2) = 7 \\
f(-2) & = & 2\cdot(-2)+3 & = & -1, & \text{o sea} \quad f(-2) = -1 \\
f(0) & = & 2\cdot(0)+3 & = & 3, & \text{o sea} \quad f(0) = 3
\end{array}$$

b) Notemos que para calcular $f(1)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(-2)$ *y* $f(0)$, lo que hemos hecho es sustituir x en la expresión: $f(x) = 2x + 3$, por $1, -1, 2, -2$ y 0 respectivamente.

De la misma forma, para calcular $f(2+h)$; $f(a+h)$; $f(a-h), f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ lo que haremos es sustituir x en la expresión $f(x) = 2x + 3$, por $2+h$, $a+h$, $a-h$, $\dfrac{1}{x+1}$ respectivamente de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rclclrcl}
f(2+h) & = & 2\cdot(2+h)+3 & = & 2h+7 & \text{o sea,} \quad f(2+h) & = & 2h+7 \\
f(a+h) & = & 2\cdot(a+h)+3 & = & 2a+2h+3 & \text{o sea,} \quad f(a+h) & = & 2a+2h+3 \\
f(a-h) & = & 2\cdot(a-h)+3 & = & 2a-2h+3 & \text{o sea,} \quad f(a-h) & = & 2a-2h+3 \\
f\left(\dfrac{1}{x+1}\right) & = & 2\cdot\left(\dfrac{1}{x+1}\right)+3 & = & \dfrac{3x+5}{x+1} & \text{o sea,} \quad f\left(\dfrac{1}{x+1}\right) & = & \dfrac{3x+5}{x+1}
\end{array}$$

Ejercicios 9

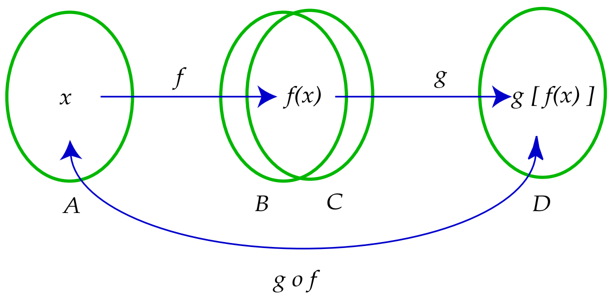
Considere la función f definida por: $f(x) = 3x^2 - 5$

Calcule: $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(2)$, $f(3+h)$, $f(2-h)$, $f(a+b)$, $f(a-b)$, $f(\sqrt{a})$, $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

Definición 11

Sean $f : A \longrightarrow C$ y $g : B \rightarrow D$ funciones, tales que $f(A) \cap B \neq \emptyset$, entonces se llama función compuesta de g y f y la denotamos "$g\,o\,f$" a la función definida por $(g\ o\ f)(x) = g[f(x)]$, para cada $x \in A$, tal que $f(x) \in B$.

Gráficamente podemos representar la función compuesta de g y f de la manera siguiente



Observación

1. De la definición anterior se deduce que el dominio de la función $g\ o\ f$ es dado por:

   $D_{gof} = \{x \in D_f \ \text{ tal que } \ f(x) \in D_g\}$

2. Nosotros no nos preocupamos por determinar el dominio de la función compuesta, sino únicamente nos interesa establecer el criterio que define la función.

3. En la mayoría de los casos (salvo en ocasiones especiales) gof es diferente de fog

Ejemplo 15

Considere las funciones f y g definidas por:

$f(x) = 2x^2 \quad g(x) = 4x + 1$. Determine:

a) El criterio para la función fog

b) El criterio para la función gof

Solución

$$\begin{aligned} a.)\ (gof)(x) &= g[f(x)] \\ &= g[2x^2] \\ &= 4[2x^2]+1 \\ &= 8x^2+1 \end{aligned}$$

Es decir: $(gof)(x) = 8x^2 + 1$

$$\begin{aligned} b.\ (fog)(x) &= f[g(x)] \\ &= f[4x+1] \\ &= 2[4x+1]^2 \\ &= 2[16x^2+8x+1] \\ &= 32x^2+16x+2 \end{aligned}$$

Es decir: $(fog)(x) = 32x^2 + 16x + 2$

Ejemplo 16

Considere las funciones f y g definidas por: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 5x - 4$. Determine:

a) El criterio para la función fog

b) El criterio para la función gof

Solución

$$\begin{aligned} a)\ \ (fog)(x) &= f[g(x)] \\ &= f[5x-4] \\ &= \sqrt{5x-4} \end{aligned}$$

Es decir: $(fog)(x) = \sqrt{5x-4}$

$$\begin{aligned} b)\ \ (gof)(x) &= g[f(x)] \\ &= g[\sqrt{x}] \\ &= 5\sqrt{x}-4 \end{aligned}$$

Es decir: $(gof)(x) = 5\sqrt{x} - 4$

Ejemplo 17

Considere la función f definida por $f(x) = 3x + 2$. Determine el criterio para la función fof.

Solución

$$\begin{aligned}(fof)(x) &= f[f(x)]\\ &= f[3x+2]\\ &= 3[3x+2]+2\\ &= 9x+6+2\\ &= 9x+8\end{aligned}$$

Es decir: $(fof)(x) = 9x + 8$

Ejercicios 10

1. Para cada uno de los pares de funciones f y g determine el criterio correspondiente a las funciones fog y gof:

   a) $f(x) = 2x^2 + 6$, $g(x) = 7x + 2$

   b) $f(x) = x^2 - x - 1$, $g(x) = x - 1$

   c) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{2x-3}$

   d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

   e) $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = 3x + 4$

   f) $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

2. Sean $f(x) = 3x - 7$ y $g(x) = 2x + k$. Determine k de modo que $(fog)(x) = (gof)(x)$

6.6 Funciones Inversas

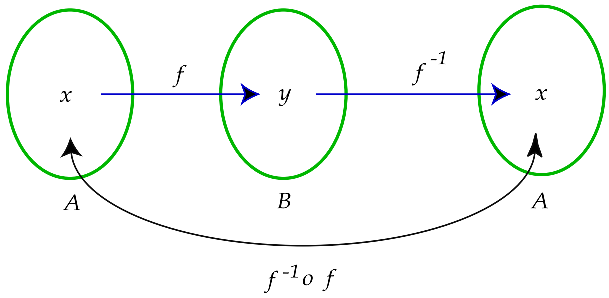
Sea $f : A \longrightarrow B$ una función biyectiva. Según la definición de función biyectiva tenemos que $f(A) = B$ y que cada elemento "y" de B es imagen de uno y sólo un elemento "x" de A, entonces es posible definir una función $f^{-1} : B \longrightarrow A$, que llamaremos inversa de f, de la manera siguiente.

■ **Definición 12**

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función biyectiva entonces la función inversa f^{-1} de f es una función biyectiva tal que:

$f^{-1} : B \longrightarrow A$ y $f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y$ (*)

Gráficamente podemos representar estas funciones de la manera siguiente:



De la representación anterior se puede notar que: $(f^{-1}\ o\ f)(x) = x$ y que $(f\ o\ f^{-1})(x) = x$

Ejemplo 18

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, biyectiva $\quad f(x) = 2x - 1$

a) Determine el criterio para la función f^{-1}

b) Verifique que $(f\ o\ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1}\ o\ f)(x) = x$

c) Represente en un mismo sistema de coordenadas rectangulares los gráficos de f, f^{-1}, g donde $g(x) = x$

Solución

a) Como $f(x) = 2x - 1$ y $f(x) = y$ entonces podemos escribir $y = 2x - 1$. Como en la definición (*) $x = f^{-1}(y)$, el criterio para la función f^{-1} se obtiene despejando x en términos de y, de la siguiente manera:

$$y = 2x - 1 \implies y + 1 = 2x \implies \frac{y+1}{2} = x \implies f_y^{-1} = \frac{y+1}{2}$$

Como las letras particulares que se usan para expresar el criterio de una función, no son importantes, se acostumbra a expresar el criterio en términos de la variable x, así en vez de escribir:

$f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{2}$, escribimos $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$

b)

$$\begin{aligned}(fof^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x))\\ &= f\left(\frac{x+1}{2}\right)\\ &= 2\left(\frac{x+1}{2}\right)-1\\ &= x+1-1\\ &= x\end{aligned}$$

Así $(fof^{-1})(x) = x$

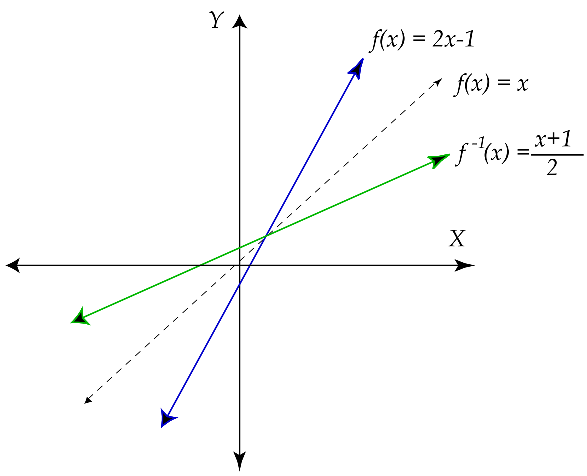
$$\begin{aligned}(f^{-1}of)(x) &= f^{-1}(f(x))\\ &= f^{-1}(2x-1)\\ &= \frac{2x-1+1}{2}\\ &= \frac{2x}{2}\\ &= x\end{aligned}$$

Así $(f^{-1}of)(x) = x$

c) Para representar los gráficos correspondientes a f y f^{-1} construimos las siguientes tablas de valores:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3

x	-5	-3	-1	1	3
$f^{-1}(x)$	-2	-1	0	1	2



Ejemplo 19

Sea $f : [-3, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ biyectiva, $f(x) = \sqrt{x+3}$

a) Determine el dominio y ámbito de f^{-1}

b) Determine el criterio para la función f^{-1} (en adelante $f^{-1}(x)$)

c) Verifique que $(fof^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1}of)(x) = x$

d) Represente en un mismo sistema de coordenadas rectángulares los gráficos de f, f^{-1} y g donde $g(x) = x$

Solución

a) El dominio de f^{-1} es $[0, +\infty[$

El ámbito de f^{-1} es $[-3, +\infty[$

b) Como $y = \sqrt{x+3} \implies y^2 = x + 3$, $y^2 - 3 = x$, como $x = f^{-1}(y)$ tenemos $f^{-1}(y) = y^2 - 3$ y por lo tanto podemos decir que $f^{-1}(x) = x^2 - 3$

Observe que al despejar x obtenemos que $f^{-1}(y) = y^2 - 3$ sin embargo, por convenio en la notación, escribimos $f^{-1}(x) = x^2 - 3$

c) .

$$\begin{aligned}
(fof^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) \\
&= f(x^2 - 3) \\
&= \sqrt{x^2 - 3 + 3} \\
&= \sqrt{x^2} \\
&= |x| \text{ y como } x \geq 0 \\
&= x
\end{aligned}$$

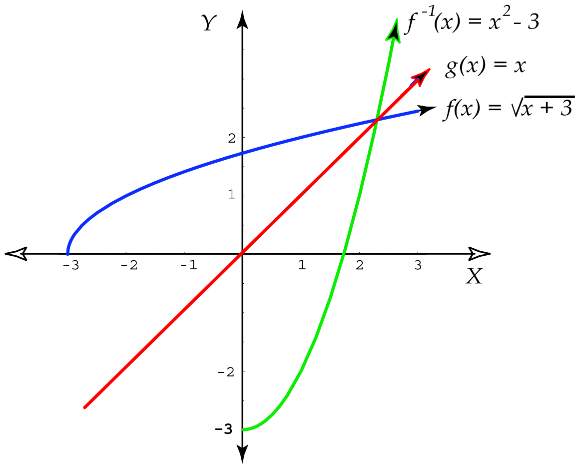
$$\begin{aligned}
(f^{-1}of)(x) &= f^{-1}(f(x)) \\
&= f^{-1}(\sqrt{x+3}) \\
&= (\sqrt{x+3})^2 - 3 \\
&= x + 3 - 3 \\
&= x
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $(fof^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1}of)(x) = x$

d) Para representar los gráficos correspondientes a f y f^{-1} construiremos las siguientes tablas de valores:

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2

x	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
$f^{-1}(x)$	-3	-2	-1	0	1



Ejercicios 11

A continuación se presentan funciones biyectivas f, para cada una de ellas usted debe:

a) Determinar el dominio y ámbito de la función inversa f^{-1}.

b) Determinar el criterio para la función f^{-1}.

c) Verificar que $(fof^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1}of)(x) = x$.

d) Representar en un mismo sistema de coordenadas rectangulares los gráficos de f y f^{-1} y g donde $g(x) = x$

1.1 $f : [0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[, \quad f(x) = 1 + 3x^3$ 4.4 $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[, \quad f(x) = \sqrt{x}$

2.2 $f :]-\infty, 2[\longrightarrow [0, +\infty[, \quad f(x) = \sqrt{2 - x}$ 5.5 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$

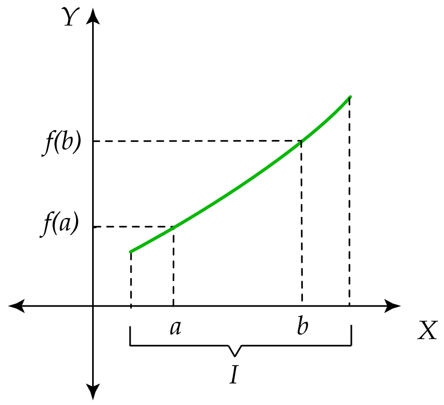
3.3 $f : [1, +\infty[\longrightarrow [-1, +\infty[, \quad f(x) = x^3 - 2$ 6.6 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x - 3$

6.7 Funciones Crecientes y Funciones Decrecientes

■ Definición 13

(Función creciente). Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, función.

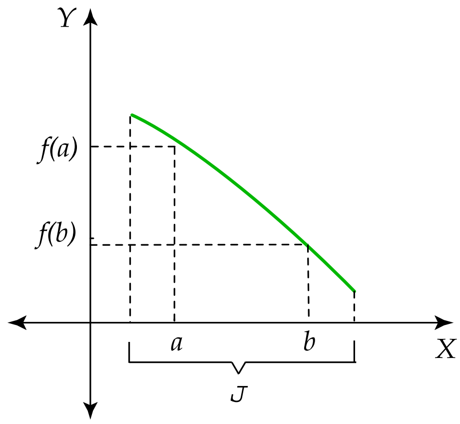
Sea $I \subseteq A$, se dice que f es una función creciente en I, si para cualquier par de números a y b en I, tales que $a < b$ se cumple que $f(a) \leq f(b)$, como se muestra en la siguiente figura.



■ **Definición 14**

(Función decreciente). Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, función.

Sea $J \subseteq A$, se dice que f es una función decreciente en J, si para cualquier par de números a y b en J, tales que $a < b$ se cumple que $f(a) \geq f(b)$.



Con respecto al trazo de la gráfica de una función las definiciones anteriores se pueden expresar de la manera siguiente.

Una función f es creciente si cuando "x" crece (x varía de izquierda a derecha), el valor correspondiente a "y" crece ("asciende").

Una función f es decreciente si cuando "x" crece (x varía de izquierda a derecha), el valor correspondiente a "y" decrece ("desciende").

Ejercicios 12

Para cada uno de los siguientes trazos de funciones determine:

a) Intervalos donde la función es creciente.

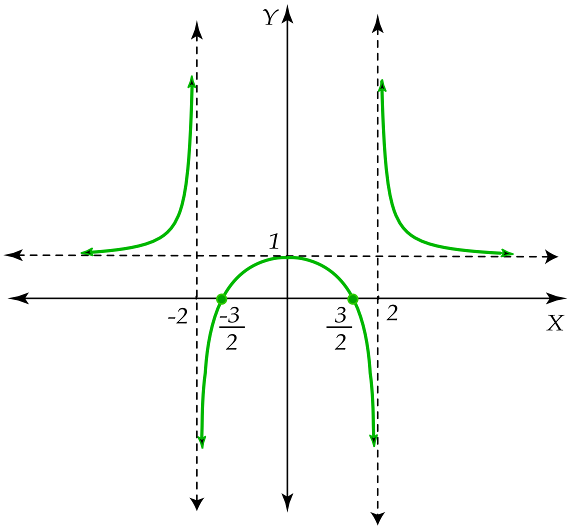
b) Intervalos donde la función es decreciente.

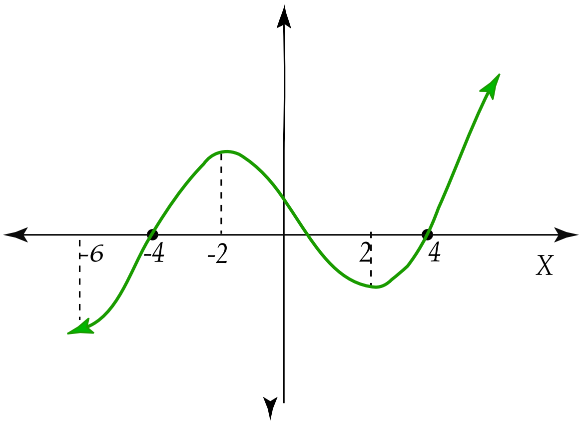
c) $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) > 0\}$

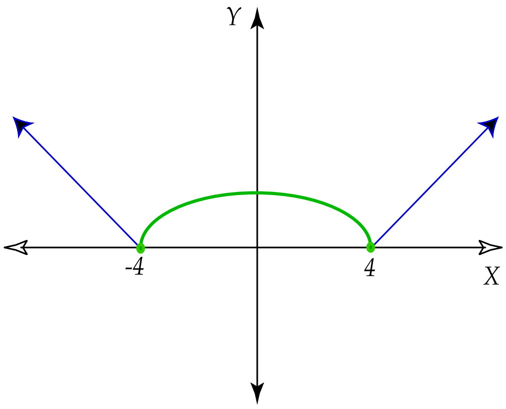
d) $B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) < 0\}$

e) $C = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = 0\}$

f) Intersección con los ejes coordenados







Definición 15

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ donde $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ son constantes reales, $a_n \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, f se llama función polinomial de grado n

Ejercicios 13

La función definida por:

1. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 9x + 3$, es una función polinomial de grado __________
2. $g(x) = 2x^5 - 4x^2 + 3$, es una función polinomial de grado __________
3. $h(x) = \dfrac{3}{2}\,x + 1$, es una función polinomial de grado __________
4. $m(x) = -2$, es una función polinomial de grado __________
5. $s(x) = 5$, es una función polinomial de grado __________

Definición 16

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) = 0$, f recibe el nombre de función polinomial cero y no se le asigna grado.

6.7.1 Ceros de una función polinomial

Definición 17

Sea f una función polinomial definida por $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. α recibe el nombre de cero de f si $f(\alpha) = 0$, o sea $a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0 = 0$

Ejercicios 14

1. -2 es un cero de la función f definida por $f(x) = 4 - x^2$ pues ________
2. 3 es un cero de la función f definida por $f(x) = x^2 - x - 6$ pues ________

Nota: Aceptaremos y usaremos sin demostrar la siguiente proposición:

Proposición 1

Una función polinomial de grado n tiene a lo sumo n ceros reales.

Ejercicios 15

1. La función f definida por $f(x) = x^2 - x - 6$ tiene a lo sumo _____ ceros reales.
2. La función f definida por $f(x) = x^4 - 4x^2 - 4$ tiene a lo sumo _____ ceros reales.

Nota: Observemos que si f es una función polinomial definida por $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, la expresión $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ es un polinomio, de aquí en adelante hablaremos de polinomio al referirnos a la expresión que define una función polinomial.

6.7.2 Operaciones con polinomios

Como los polinomios definen un tipo particular de funciones, a saber, las funciones polinomiales; dados dos polinomios, podemos efectuar las operaciones definidas para las funciones

Ejemplo 20

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ tales que: $P(x) = x^2 - 5x + 1$, $Q(x) = x - 3$. Determine:

1. $(P + Q)(x)$

2. $(P - Q)(x)$

3. $(P \cdot Q)(x)$

4. $(PoQ)(x)$

Solución

$$1) \quad \begin{aligned} (P+Q)(x) &= P(x) + Q(x) \\ &= (x^2 - 5x + 1) + (x - 3) \\ &= x^2 - 5x + 1 + x - 3 \\ &= x^2 - 4x - 2 \end{aligned}$$

o sea $(P + Q)(x) = x^2 - 4x - 2$

$$2) \quad \begin{aligned} (P-Q)(x) &= P(x) - Q(x) \\ &= (x^2 - 5x + 1) - (x - 3) \\ &= x^2 - 5x + 1 - x + 3 \\ &= x^2 - 6x + 4 \end{aligned}$$

o sea $(P + Q)(x) = x^2 - 6x + 4$

$$3) \quad \begin{aligned} (P \cdot Q)(x) &= P(x) \cdot Q(x) \\ &= (x^2 - 5x + 1) \cdot (x - 3) \\ &= x^3 - 3x^2 - 5x^2 + 15x + x - 3 \\ &= x^3 - 8x^2 + 16x - 3 \end{aligned}$$

o sea $(P+Q)(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 3$

$$
\begin{aligned}
4) \quad (PoQ)(x) &= P(Q(x)) \\
&= P(x-3) \\
&= (x-3)^2 - 5(x-3) + 1 \\
&= x^2 - 6x + 9 - 5x + 15 + 1 \\
&= x^2 - 11x + 25
\end{aligned}
$$

o sea $(PoQ)(x) = x^2 - 11x + 25$

Ejercicios 16

Para cada uno de los siguientes pares de polinomios $A(x)$ y $B(x)$, Determine: $(A+B)(x); (A-B)(x); (A \cdot B)(x)$ *y* $(AoB)(x)$

a) $A(x) = 2x - 1, \qquad B(x) = 2x^3 - x + 1$

b) $A(x) = x + 1, \qquad B(x) = 64x^3 - 1$

c) $A(x) = -5x + 1, \qquad B(x) = x^2 + 3$

d) $A(x) = 7\ , \qquad B(x) = 35x^3 + 47x^2 + 13x + 1$

6.8 División de Polinomios

Podemos observar que al efectuar la suma, la resta, el producto o la composición de dos polinomios se obtiene otro polinomio. Por el contrario no todo cociente de polinomios, es un polinomio, en efecto:

Sean $P(x) = x+1$ y $Q(x) = x$, tenemos que $\left(\dfrac{P}{Q}\right)(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x} = 1 + x^{-1}$, o sea $\left(\dfrac{P}{Q}\right)(x) = 1 + x^{-1}$, el cual no es un polinomio.

No obstante en cuanto a la división de polinomios podemos establecer la siguiente proposición.

Proposición 2

Algoritmo de la división:

Dados dos polinomios $A(x)$ y $B(x)$, con $B(x) \neq 0$, existen únicos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que:

$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \qquad (*)$

donde el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $B(x)$ o bien $R(x) = 0$, $A(x)$ se llama dividendo, $B(x)$ divisor, $Q(x)$ cociente y $R(x)$ residuo o resto.

Dado que $B(x) \neq 0$, de la igualdad (*) se obtiene que:

$\dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$; ¡Verifíquelo!

6.8.1 Procedimientos para efectuar la división de $A(x)$ por $B(x)$

Los pasos que se deben seguir son:

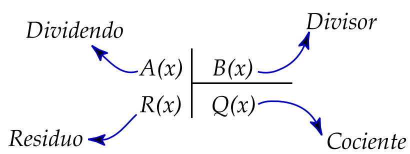
a) Ordenar los polinomios $A(x)$ y $B(x)$, en forma descendente de acuerdo con el exponente de la variable.

b) Se divide el primer sumando del dividendo (el de mayor exponente) por el primer sumando del divisor(el de mayor exponente), el resultado es un sumando del cociente.

c) Se multiplica el sumando del cociente obtenido en el paso anterior por el divisor y el resultado se resta del dividendo, obteniendo un residuo "parcial".

d) Si el residuo obtenido en el paso anterior es cero o de grado menor que el grado del divisor ahí terminó el procedimiento, en caso contrario se repiten los pasos (a), (b) y (c) pero tomando como dividendo el residuo obtenido en el paso anterior.

Nota: Al efectuar la división de $A(x)$ por $B(x)$ se obtiene un cociente $Q(x)$ y un residuo $R(x)$ los cuales se colocan como se muestra en el diagrama siguiente:



y $\quad A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \qquad$ o $\qquad \dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$

Nota: El paso (c) del procedimiento usado para dividir polinomios se puede realizar de la siguiente manera.

i) Se multiplica el sumando del cociente obtenido en (b) por el divisor, y cada sumando de este resultado se multiplica por (-1).

ii) Se suma el dividendo con el polinomio obtenido en (i)

Ejemplo 21

Sean $A(x) = x^3 - 5x^2 + x - 1$ y $B(x) = x - 1$. Efectué la división de $A(x)$ por $B(x)$

Solución

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & x^3 & - & 5x^2 & + & x & - & 1 & & x-1 \\ \cline{10-10}
- & x^3 & + & x^2 & & & & & & \\ \cline{2-4}
 & & & & & & & & & x^2-4x-3 \\
 & & - & 4x^2 & + & x & - & 1 & & \\
 & & & 4x^2 & - & 4x & & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & - & 3x & - & 1 & & \\
 & & & & & 3x & - & 3 & & \\ \cline{6-8}
 & & & & & & - & 4 & & \\
\end{array}
$$

Aquí el cociente es $x^2 - 4x - 3$ y el residuo es -4.

Además:

$x^3 - 5x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2 - 4x - 3) - 4$ o también

$$\frac{x^3 - 5x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 - 4x - 3 + \frac{-4}{x - 1}$$

Ejemplo 22

Efectuar la división de $A(x)$ por $B(x)$, donde $A(x) = 2 - x^5$; $\quad B(x) = x^2 + x$

Solución

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr|l}
- & x^5 & + & 0x^4 & + & 0x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & + & 2 & x^2+x \\ \cline{13-13}
 & x^5 & + & x^4 & & & & & & & & & \\ \cline{2-4}
 & & & & & & & & & & & & -x^3+x^2-x+1 \\
 & & & x^4 & + & 0x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & + & 2 & \\
 & & - & x^4 & - & x^3 & & & & & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & - & x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & + & 2 & \\
 & & & & & x^3 & + & x^2 & & & & & \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & x^2 & + & 0x & + & 2 & \\
 & & & & & & - & x^2 & - & x & & & \\ \cline{8-12}
 & & & & & & & & - & x & + & 2 & \\
\end{array}
$$

Aquí el cociente es $-x^3 + x^2 - x + 1$ y el residuo es $-x + 2$.

Además:

$-x^5 + 2 = (x^2 + x)(-x^3 + x^2 - x + 1) + -x + 2$ o también

$$\frac{-x^5 + 2}{x^2 + x} = -x^3 + x^2 - x + 1 + \frac{-x + 2}{x^2 + x}$$

Ejercicios 17

Para cada par de polinomios $A(x)$ y $B(x)$, determine el cociente $Q(x)$ y el residuo $R(x)$ que se obtiene al dividir $A(x)$ por $B(x)$ y exprese: $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ de la forma $Q(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$

a) $A(x) = 6x^5 - 5x^4 - 7x^2 + 3,$ $B(x) = 3x^3 - 4x^2 - x + 1$

b) $A(x) = 2x^7 - 5x^5 + 8x^3 - 3x,$ $B(x) = 2x^3 - x$

c) $A(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4,$ $B(x) = x - 2$

d) $A(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9,$ $B(x) = x - 3$

e) $A(x) = -6x^3 + 2x^4 - 3x + 3x^2 + 1,$ $B(x) = -3x + x^2 + 1$

6.9 La Función Lineal

Definición 18

Sea f una función tal que, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

f se llama función lineal si $f(x) = mx + b$, com m y b constantes reales.

Ejemplo 23

1. La función f definida por $f(x) = 5x + 3$, es una función lineal, con $m = 5$ y $b = 3$.

2. La función f definida por $f(x) = -\sqrt{2}x + 5$, es una función lineal, con $m = -\sqrt{2}$ y $b = 5$.

3. La función f definida por $f(x) = -3x$, es una función lineal, con $m = -3$ y $b = 0$.

4. La función f definida por $f(x) = k$, con k constante real es una función lineal, con $m = 0$ y $b = k$.

Notación

Como la imagen de x por la función f usualmente se denota por y, es decir $y = f(x)$, es frecuente escribir $y = mx + b$ en lugar de $f(x) = mx + b$.

6.9.1 Gráfico de una función lineal

Definición 19

Sea f una función lineal tal que $f(x) = mx + b$.

El gráfico de f es el conjunto G_f definido por $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \text{ tal que } \ y = mx + b\}$

Definición 20

Se llama recta al gráfico de una función lineal.

<u>**Convenio**</u>

Si l es una recta definida por $l = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \text{ tal que } \ y = mx + b\}$ con m y b constantes reales.

Diremos que l es la recta cuya ecuación es $y = mx + b$.

Definición 21

Sean m y b constantes reales y sea l la recta cuya ecuación es $y = mx + b$. Diremos que el número m es la pendiente de la recta l.

Ejemplo 24

1. La pendiente de la recta cuya ecuación es $y = -2x + 5$ es _______

2. La pendiente de la recta cuya ecuación es $y = \sqrt{7}x - 7$ es _______

3. La pendiente de la recta cuya ecuación es $y = \dfrac{x}{2} + \sqrt{2}$ es _______

Proposición 3

Dados dos puntos en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ existe una y sólo una recta que los contiene.

Así, si conocemos dos puntos A y B en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tal que $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, podemos hallar la ecuación de la recta que los contiene, de la siguiente manera:

1. La pendiente m de la recta está dada por la igualdad:

   $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_2 \neq x_1$

   <u>**Justificación**</u>

   Sea l la recta cuya ecuación es $y = mx + b$, y que contiene a (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Como $(x_2, y_2) \in L$ se cumple que $y_2 = mx_2 + b(*)$, como $(x_1, y_1) \in l$ se cumple que $y_1 = mx_1 + b(**)$. Multiplicando a ambos miembros de la ecuación (**) por -1 y sumando término a término con la ecuación (*) tenemos:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & y_2 & = & & mx_2 & + & \text{b} \\
 & - & y_1 & = & - & mx_1 & - & \text{b} \\
\hline
y_2 & - & y_1 & = & & mx_2 & - & mx_1
\end{array}
$$

como: $\quad y_2 - y_1 = mx_2 - mx_1$

$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$

$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$

2. Conociendo m lo sustituimos en la ecuación $y = mx + b$, y sustituimos x e y por las coordenadas de A o de B en dicha ecuación y podemos despejar b, obteniendo su valor.

3. Conociendo m y b podemos escribir la ecuación de la recta $y = mx + b$

Ejemplo 25

Hallar la ecuación de la recta que contiene a los puntos $(3, -2)$ y $(5, -6)$

Solución

Buscamos una ecuación de la forma $y = mx + b$, (*) ¿Por qué?

Para ello debemos calcular el valor de m y el valor de b.

El valor de m está dado por: $m = \dfrac{-6 - (-2)}{5 - 3} = \dfrac{-4}{2} = -2$, es decir $m = -2$

Sustituyendo el valor de m en (*) tenemos $y = -2x + b$

Sustituyendo x e y por las coordenadas de $(3, -2)$ tenemos

$$
\begin{aligned}
-2 &= -2 \cdot 3 + b \\
-2 &= -6 + b \\
-2 + 6 &= b \\
4 &= b
\end{aligned}
$$

Y por lo tanto la ecuación de la recta que contiene a los puntos $(3, -2)$ y $(5, -6)$ es $y = -2x + 4$

Ejemplo 26

Calcular la ecuación de la recta que contiene al punto $(5, 2)$ y tiene una pendiente igual a -2

Solución

Buscamos una ecuación de la forma $y = mx + b$ (*) ¿Por qué?

En este caso el valor de la pendiente es conocido, y sustituyendo en (*) tenemos que:

$y = -2x + b \quad$ (**)

Como esta recta contiene al punto $(5,2)$, entonces las coordenadas de este punto satisfacen la ecuación (**) es decir:

$$\begin{aligned} 2 &= -2\cdot 5+b \\ 2 &= -10+b \\ 12 &= b \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la recta cuya pendiente es -2 y contiene al $(5,2)$ es $y=-2x+12$

Proposición 4

Sean A, B, C constantes reales con $B \neq 0$, entonces toda ecuación de la forma $Ax+By+C=0$ es equivalente a otra de la forma $y=mx+b$.

En efecto:

Si $Ax+By+C=0$ entonces $By=-Ax-C$ y como $B\neq 0$ entonces:

$y=\dfrac{-Ax-C}{B}$ y por lo tanto

$y=\dfrac{-Ax}{B}+\dfrac{-C}{B}$

Ahora, tomamos $m=\dfrac{-A}{B}$ y $b=\dfrac{-C}{B}$ tenemos $y=mx+b$

Debido a la proposición anterior, es que en algunos casos hablamos de rectas determinadas por una ecuación de la forma $Ax+By+C=0$, con A, B, C constantes reales y $B\neq 0$

■ Ejemplo 27

¿Cuál es la pendiente de la recta cuya ecuación es $3x-y+1=0$?

Solución

Debemos encontrar una ecuación de la forma $y=mx+b$, que sea equivalente a $3x-y+1=0$

$3x-y+1=0 \implies y=3x+1$. Por lo tanto la pendiente de la recta cuya ecuación es $3x-y+1=0$ es 3.

■ Definición 22

Sean l_1 y l_2 dos rectas cuyas ecuaciones son respectivamente:
$y=m_1x+b_1$ e $y=m_2x+b_2$, entonces decimos que:

a) l_1 es paralela a l_2 $(l_1 \parallel L_2)$ si y sólo sí $m_1=m_2$

b) l_2 es perpendicular a L_2 $(l_1 \perp l_2)$ si y sólo sí $m_1\cdot m_2=-1$

■ Ejemplo 28

Las rectas l_1 y l_2 cuyas ecuaciones respectivas son $y = -3x + 7$ y $y = \dfrac{1}{3}x + 12$ son perpendiculares pues el producto de sus pendientes es -1

Ejemplo 29

Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $(2, 3)$ y es paralela a la recta cuya ecuación es $2x+y-1 = 0$

Solución

Buscamos una ecuación de la forma $y = mx + b$ (*) donde m es igual a la pendiente de la recta cuya ecuación es $2x + y - 1 = 0$

¿ Por qué?

Como $2x + y - 1 = 0$ entonces $y = -2x + 1$ de donde tenemos que $m = -2$

Sustituyendo m por -2 en (*), tenemos $y = -2x + b$; como esta recta contiene al punto $(2, 3)$ entonces:

$3 = -2 \cdot 2 + b \implies 3 = -4 + b \implies 7 = b$

Por lo tanto la ecuación de la recta que contiene al punto $(2, 3)$, y que es paralela a la recta cuya ecuación es $2x + y - 1 = 0$ es $y = -2x + 7$

Ejemplo 30

Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $(2, 3)$ y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $2x + y - 1 = 0$

Solución

Buscamos una ecuación de la forma $y = mx + b$. (*)

Como la pendiente de la recta cuya ecuación es $2x + y - 1 = 0$ es -2 (ver ejemplo anterior) entonces debe darse que $-2 \cdot m = -1$ ¿Por qué?

$-2 \cdot m = -1 \implies m = \dfrac{1}{2}$

Sustituyendo m por $\dfrac{1}{2}$ en (*) tenemos $y = \dfrac{1}{2}x + b$; como esta recta contiene al punto $(2, 3)$ entonces:

$3 = \dfrac{1}{2} \cdot 2 + b \implies 3 = 1 + b \implies 2 = b$

Por lo tanto la ecuación que buscamos es $y = \dfrac{1}{2}x + 2$

6.10 Trazo de la gráfica de una recta

Dado que una recta queda determinada si se conocen dos de sus puntos, entonces para trazar su gráfica basta con conocer dos de sus puntos. Para este efecto dos puntos convenientes son la intersección de la recta con los ejes coordenados, los cuales los determinamos de la manera siguiente.

Consideremos la recta l cuya ecuación es $y = mx + b$

a) Su intersección con el eje X es el punto $(x_0, 0)$, donde x_0 es la solución de la ecuación $0 = mx + b$ ¿Por qué?

b) Su intersección con el eje Y es el punto $(0, b)$ ¿Por qué?

■ **Ejemplo 31**

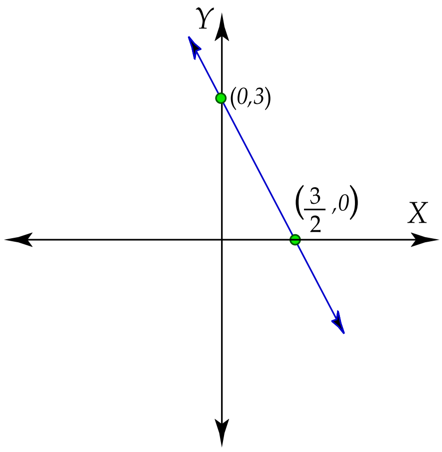
Trazar la gráfica de la recta cuya ecuación es $y = -2x + 3$

Solución

a) Como $0 = -2x + 3 \implies -3 = -2x \implies \dfrac{3}{2} = x$, entonces el punto de intersección de la recta con el eje X es $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$

b) El punto de intersección de la recta con el eje Y es $(0, 3)$

c) Ubicamos los puntos $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ y $(0, 3)$ en un sistema de coordenadas rectangulares, así podemos trazar la recta que contiene a estos puntos como se muestra en la figura siguiente:



6.11 Puntos de intersección entre dos rectas

Dadas las rectas l_1 y l_2 de ecuaciones respectivas $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$; si l_1 y l_2 no son paralelas $(m_1 \neq m_2)$, entonces l_1 y l_2 se intersecan en un punto, el cual se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & m_1x + b_1 \\ y & = & m_2x + b_2 \end{array} \right. \qquad \text{¿Por qué?}$$

Ejemplo 32

Hallar el punto de intersección entre las rectas l_1 y l_2 cuyas ecuaciones respectivas son:

$2x - y - 1 = 0$ y $x - y + 7 = 0$

Solución

Debemos resolver el sistema $\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y - 1 & = & 0 \\ x - y + 7 & = & 0 \end{array}\right.$

A la primera ecuación le restamos, miembro a miembro, la segunda ecuación

$$\begin{array}{rcl} 2x - y - 1 & = & 0 \\ x - y + 7 & = & 0 \end{array} \iff \begin{array}{rcl} 2x - y - 1 & = & 0 \\ -(x - y + 7) & = & 0 \\ \hline x - 8 & = & 0 \end{array} \implies x = 8$$

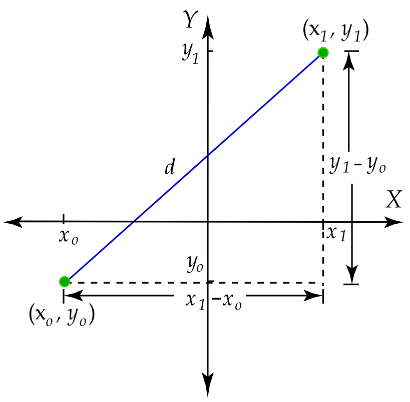
Sustituyendo $x = 8$ en $x - y + 7 = 0$ obtenemos:

$8 - y + 7 = 0 \implies -y + 15 = 0 \implies -y = -15 \implies y = 15$

Por lo tanto la intersección entre l_1 y l_2 es el punto $(8, 15)$

6.12 Distancia entre dos puntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Sean $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1)$ dos puntos en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, vamos a calcular la distancia d entre P_0 y P_1, es decir la longitud del segmento que estos determinan.



Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$d^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$, de donde tenemos que $d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

Ejemplo 33

Calcule la distancia entre los puntos $(3,4)$ y $(2,1)$

Solución

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(1-4)^2+(2-3)^2} \\ d &= \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} \\ d &= \sqrt{9+1} \\ d &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

Así, la distancia entre los puntos $(3,4)$ y $(2,1)$ es $\sqrt{10}$

Ejercicios 18

1. Dada la recta l cuya ecuación es $2x+3y-5=0$. Encontrar una ecuación de la recta perpendicular a l que contenga al punto $(-1,3)$.

2. Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $(1,4)$ y es paralela a la recta cuya ecuación es $2x-5y+7=0$

3. Hallar la ecuación de la recta que contiene a los puntos $(1,1)$ y $(-2,2)$.

4. Muestre que la ecuación de la recta que interseca a los ejes coordenados en los puntos $(a,0)$ y $(0,b)$ puede escribirse en la forma: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

5. Hallar la ecuación del conjunto de puntos equidistantes de los puntos $(3,-1)$ y $(-3,3)$

6. Determinar la ecuación de la recta paralela a la recta cuya ecuación es $x+\dfrac{y}{2}-\dfrac{5}{2}=0$ y que contiene al punto de intersección entre las rectas $3x-y+6=0$ y $x-5=-2y$

7. Demostrar que el triángulo cuyos vértices son los puntos $(-1,4)$, $(0,1)$ y $(2,5)$ es isósceles.

8. Verifique que el triángulo cuyos vértices son $(2,2)$, $(5,7)$ y $(10,4)$ es rectángulo.

9. Determine el punto de la recta $y-2x-2=0$, que equidista de $(-2,5)$ y $(-1,0)$

10. Determine el área del triángulo determinado por la recta cuya ecuación es $7x-14y+21=0$ y los ejes coordenados.

11. Si x denota el número de unidades diarias que se producen de un cierto artículo, $C(x)$ denota el costo total. Para la elaboración de este artículo pueden usarse dos procedimientos.

    El primero tiene un costo fijo de 100 colones, más 6 colones por cada unidad producida.

    El segundo tiene un costo fijo de 300 colones, más 4 colones por cada unidad producida.

a) Halle $C(x)$ para ambos procedimientos

b) Encuentre el número de unidades que es necesario producir para que ambos procesos tengan el mismo costo total.

c) Que procedimiento es más barato, si se desea producir más de 100 unidades diarias

6.13 Función cuadrática

Definición 23

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, f recibe el nombre de **función polinomial de segundo grado o función cuadrática** si $\forall\, x,\ x \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$f(x) = ax^2 + bx + c,$ con $a,\ b$ y c constantes reales, $a \neq 0$

Ejemplo 34

Son funciones cuadráticas las definidas por:

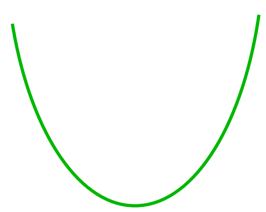
1. $f(x) = 4x^2 + 5x + 8$
2. $f(x) = 3x^2 + 5$
3. $f(x) = x^2 - x - \dfrac{2}{5}$
4. $f(x) = 4x^2 + 2x$

Definición 24

Concavidad hacia arriba:

Sea $A \subseteq \mathbb{R},\ I \subseteq A$

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R},$ se dice que f es <u>cóncava hacia arriba en I</u>, si su trazo en I tiene la siguiente forma:

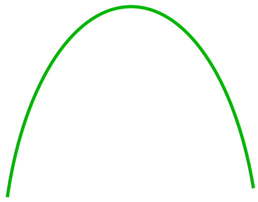


Definición 25

Concavidad hacia abajo:

Sea $A \subseteq \mathbb{R},\ J \subseteq A$

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R},$ se dice que f es <u>cóncava hacia abajo en J</u>, si su trazo en J tiene la siguiente forma:



■ **Ejemplo 35**

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$

a) Complete la siguiente tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2							

b) Realice el trazo de f

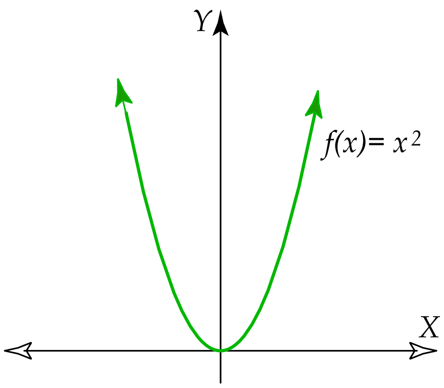
c) ¿Qué tipo de concavidad presenta esta función?

Solución

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9

b) Trazo de f



c) Esta función es cóncava hacia arriba.

Ejercicios 19

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 + 3x + 2$

a) Complete la siguiente tabla de valores:

x	-4	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1
x^2+3x+2						

b) Realice el trazo de f

c) ¿Qué tipo de concavidad presenta esta función?

Ejercicios 20

Sea $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x)=-x^2-1$

a) Complete la siguiente tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2-1$							

b) Realice el trazo de f

c) ¿Qué tipo de concavidad presenta esta función?

Proposición 5

Sea $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(x)=ax^2+bx+c$, con a, b y c constantes reales y $a \neq 0$, entonces:

1. Si $a>0$, f es cóncava hacia arriba.
2. Si $a<0$, f es cóncava hacia abajo (convexa).

■ **Ejemplo 36**

a) La función f definida por $f(x)=-2x^2+5x-3$ es convexa.

b) La función h definida por $h(x)=\sqrt{5}x^2+x-1$ es cóncava hacia arriba.

■ **Definición 26**

La gráfica de una función cuadrática recibe el nombre de parábola.

Observe el trazo de la función definida en el ejemplo anterior, note que $f(x)$ toma un valor mínimo, a saber 0.

El punto de la parábola donde $f(x)$ toma su valor mínimo (en este caso), recibe el nombre de vértice de la parábola, en este caso es el punto $(0,0)$.

Con respecto al ejemplo $a)$

El valor mínimo para $f(x)$ es ____________ por lo que el vértice de la parábola es:____________

Con respecto al ejemplo $b)$

Observe el trazo de la función, note que $h(x)$ toma un valor máximo y es: ____________

El punto de la parábola donde $h(x)$ toma su valor máximo (en este caso), recibe el nombre de vértice de la parábola, en este caso el punto es:____________

■ Definición 27

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, una función cuadrática. El punto de la parábola donde $f(x)$ alcanza su máximo o su mínimo valor se llama vértice de la parábola.

Proposición 6

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c constantes reales y $a \neq 0$. Entonces el vértice V, de la parábola está dado por:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a} \right) \right)$$

■ Ejemplo 37

Determine el vértice de la parábola correspondiente a la función f, definida por $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$.

Solución

En este caso el vértice V es $\left(\frac{3}{4}, f\left(\frac{3}{4} \right) \right)$, como:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{4} \right) &= 2 \cdot \left[\frac{9}{16} \right] - 3 \cdot \left[\frac{3}{4} \right] - 2 \\ &= \frac{9}{8} - \frac{9}{4} - 2 \\ &= \frac{-25}{8} \end{aligned}$$

o sea $f\left(\frac{3}{4} \right) = \frac{-25}{8}$ y por lo tanto el vértice es: $\left(\frac{3}{4}, \frac{-25}{8} \right)$

Ejemplo 38

Determine el vértice de la parábola correspondiente a la función f, definida por $f(x) = x^2 + 3$.

Solución

En este caso el vértice V es $\left(\frac{0}{2}, f\left(\frac{0}{2}\right)\right)$

Como $f(0) = 3$, entonces el vértice es $(0, 3)$

Ejercicios 21

Determine el vértice de la parábola correspondiente a la función f definida por:

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
2. $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$
3. $f(x) = 2x^2 - 1$
4. $f(x) = x^2 + x + 1$

6.14 Intersección con el eje Y

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c constantes reales y $a \neq 0$. Sabemos que f interseca al eje Y cuando $x = 0$. Pero:

$f(0) = x \cdot (0)^2 + b \cdot 0 + c$, de donde $f(0) = c$. Por lo que f interseca el eje Y en $(0, c)$

6.15 Estudio de la función cuadrática

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c, constantes reales y $a \neq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2+bx+c \\
&= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] \quad \text{completando cuadrados tenemos} \\
&= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right] \\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right] \qquad (*)
\end{aligned}$$

■ Definición 28

El número b^2-4ac obtenido en (*) recibe el nombre de discriminante de f y se denota por el símbolo Δ, que se lee "delta" o sea:

$$\Delta = b^2-4ac$$

Casos que se pueden presentar, según el valor de b^2-4ac

1. $b^2-4ac<0$
   Si $b^2-4ac<0$ entonces $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}<0$ ¿Por qué?

   por lo que $-\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)>0$ de aquí que $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)>0$, pues $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2>0$

   i. Si $a>0$; $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]>0 \implies f(x)>0$

   ii. Si $a<0$; $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]<0 \implies f(x)<0$

   Observe que si el discriminante es menor que cero, siempre se obtiene que $f(x)\neq 0$, y por lo tanto el gráfico de f no interseca al eje X.

2. $b^2-4ac=0$

   Entonces por (*) tenemos que:

   $$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{0}{4a^2}\right)\right]$$

   $$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \quad (**)$$

   De aquí se obtiene que $f(x)=0$ si y sólo sí:

$a = 0$ ó $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$, pero $a \neq 0$

por lo que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \implies x + \dfrac{b}{2a} = 0 \implies x = \dfrac{-b}{2a}$

Además como $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 > 0$ siempre entonces:

i. Si $a > 0$ se cumple que $f(x) \geq 0$; ver (**)

ii. Si $a < 0$ se cumple que $f(x) \leq 0$; ver (**)

Lo anterior se puede resumir así:

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c, son constantes reales y $a \neq 0$, si $b^2 - 4ac = 0$, entonces f tiene dos ceros reales, ambos iguales a $\dfrac{-b}{2a}$ y la gráfica de f interseca al eje X en $\left(\dfrac{-b}{2a}, 0\right)$

3. $b^2 - 4ac > 0$

Por (*) sabemos que:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] \quad \text{como } b^2 - 4ac > 0 \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right] \quad \text{por diferencia de cuadrados} \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right] \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right] \\
&= a\left[x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \cdot \left[x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \quad (***)
\end{aligned}$$

i. Por (***), $f(x) = 0$ si y sólo sí

$$a\left[x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \cdot \left[x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] = 0, \text{ como } a \neq 0$$

$$\implies \quad x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \quad \text{ó} \quad x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

O sea: $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ó $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Lo anterior se puede resumir así:

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, tal que $f(x)=ax^2+bx+c$ donde a, b y c, son constantes reales y $a\neq 0$, si $b^2-4ac>0$, entonces f tiene dos ceros reales, que vienen dados por las fórmulas:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ó} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

donde $\Delta=b^2-4ac$

Nota: Si $b^2-4ac=0$, las fórmulas anteriores se pueden aplicar

En este curso estamos interesados en estudiar algunas propiedades de la función cuadrática (y en particular de la parábola), es por esto que deseamos resumir toda la información obtenida hasta aquí, para poder tener las herramientas necesarias que nos ayuden en la representación gráfica de la parábola.

Resumen 1

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, tal que $f(x)=ax^2+bx+c$ donde a, b y c, son constantes reales y $a\neq 0$.

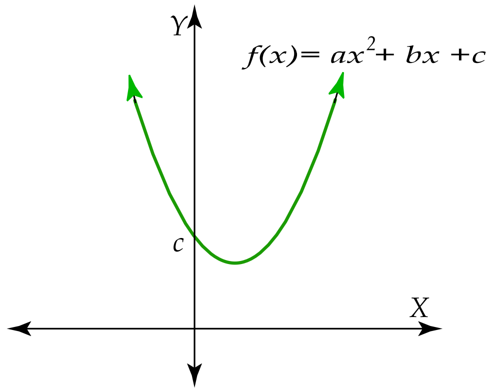
Entonces se cumple uno y sólo uno de los siguientes casos:

1) $b^2-4ac<0$ y $a>0$	2) $b^2-4ac<0$ y $a<0$
3) $b^2-4ac=0$ y $a>0$	4) $b^2-4ac=0$ y $a<0$
5) $b^2-4ac>0$ y $a>0$	6) $b^2-4ac>0$ y $a<0$

Con respecto a los casos anteriores obtenemos la siguiente información:

caso 1 $\quad b^2-4ac<0\ \ y\ \ a>0$

1. f NO interseca el eje X o sea f no tiene ceros reales $(\Delta<0)$
2. f es cóncava hacia arriba $(a>0)$
3. $f(x)>0$, ¡siempre! $\forall\, x\in\mathbb{R}$
4. Trazo de f: supongamos $\dfrac{-b}{2a}>0$



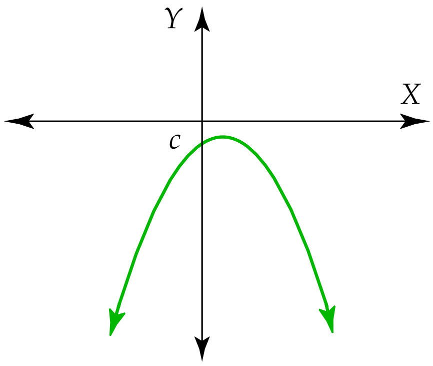
caso 2 $\quad b^2 - 4ac < 0 \;\; y \;\; a < 0$

1. f NO interseca el eje X o sea f no tiene ceros reales $(\Delta < 0)$

2. f es cóncava hacia abajo $(a < 0)$

3. $f(x) < 0$, ¡siempre! $\forall\, x \in \mathbb{R}$

4. Trazo de f: supongamos $\dfrac{-b}{2a} > 0$



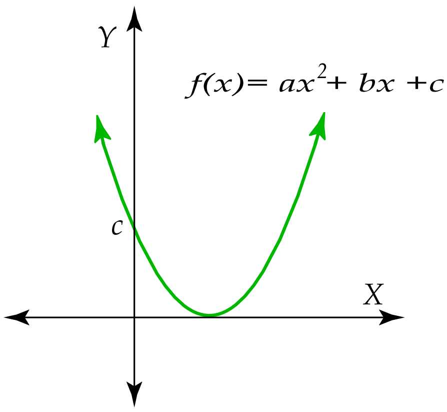
caso 3 $\quad b^2 - 4ac = 0 \;\; y \;\; a > 0$

1. f tiene dos ceros reales iguales, que vienen dados por $\dfrac{-b}{2a}$ $\quad (\Delta = 0)$

2. f interseca el eje X en un punto, a saber $\left(\dfrac{-b}{2a}, 0\right)$

3. f es cóncava hacia arriba $(a > 0)$

4. Trazo de f: supongamos $\dfrac{-b}{2a} > 0$



5. $f(x) > 0$, si $x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$

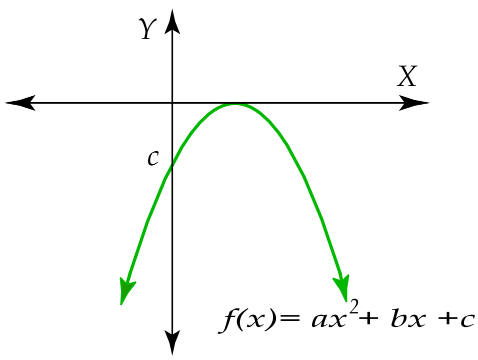
caso 4 $\quad b^2 - 4ac = 0 \;\; y \;\; a < 0$

1. f tiene dos ceros reales iguales, que vienen dados por $\dfrac{-b}{2a}$ $\quad (\Delta = 0)$

2. f interseca el eje X en un punto, a saber $\left(\dfrac{-b}{2a}, 0\right)$

3. f es cóncava hacia abajo $(a < 0)$

4. Trazo de f: supongamos $\dfrac{-b}{2a} > 0$



5. $f(x) < 0$, si $x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$

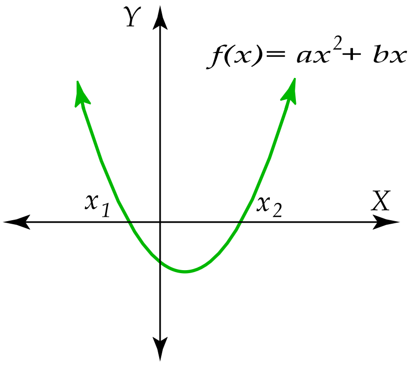
caso 5 $\quad b^2 - 4ac > 0 \;\; y \;\; a > 0$

1. f tiene dos ceros reales, x_1 y x_2 donde $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

2. f interseca el eje X en dos puntos, a saber $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, donde x_1, x_2 están dadas en 1.

3. f es cóncava hacia arriba $(a > 0)$

4. Trazo de f: supongamos $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$



5. $f(x) < 0$, si $x \in]x_1, x_2[$

6. $f(x) > 0$, si $x \in\ ]-\infty, x_1[\ \cup\ ]x_2, \infty[$

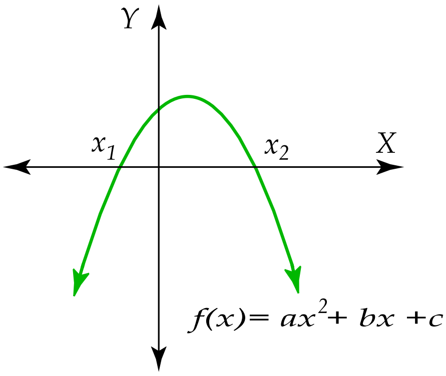
caso 6 $b^2 - 4ac > 0$ y $a < 0$

1. f tiene dos ceros reales $(\Delta > 0)$, x_1 y x_2 donde $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

2. f interseca el eje X en dos puntos, a saber $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, donde x_1, x_2 están dadas en 1.

3. f es cóncava hacia abajo $(a < 0)$

4. Trazo de f: supongamos $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$



5. $f(x) > 0$, si $x \in]x_1, x_2[$

6. $f(x) < 0$, si $x \in\ ]-\infty, x_1[\ \cup\ ]x_2, \infty[$

Para realizar el trazo de una función cuadrática la información anterior es muy importante.

Ejemplo 39

Realice el trazo de la función f definida por $f(x) = -2x^2 + 7x - 3$.

Solución

De acuerdo con la notación $f(x) = ax^2 + bx + c$, en este caso $a = -2$, $b = 7$ y $c = -3$

1. Determinemos el discriminante de f:

   Sabemos que $\Delta = b^2 - 4ac \implies \Delta = 49 - 4(-2)(-3)$, o sea $\Delta = 25$

2. Determinemos el vértice de la parábola $\left(\dfrac{-b}{2a}, f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$

   $$\frac{-b}{2a} = \frac{-7}{2(-2)} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$$

   $$f\left(\frac{7}{4}\right) = -2\left[\frac{7}{4}\right]^2 + 7\left[\frac{7}{4}\right] - 3 = -2\left[\frac{49}{16}\right] + \frac{49}{4} - 3$$

   $$\frac{-98}{16} + \frac{49}{4} - 3 = \frac{-98 + 196 - 48}{16} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}$$

   Por lo que el vértice es: $\left(\dfrac{7}{4}, \dfrac{25}{8}\right)$ (*)

3. Intersecciones con los ejes coordenados.

a) Intersección de la parábola con el eje X.
como $\Delta > 0$, f tiene dos ceros reales diferentes.

$$x_1 = \frac{-7-\sqrt{25}}{2\cdot(-2)} = \frac{-7-5}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3, \text{ por lo tanto } x_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{-7+\sqrt{25}}{2\cdot(-2)} = \frac{-7+5}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}, \text{ por lo tanto } x_2 = \frac{1}{2}$$

Por lo anterior la parábola interseca al eje X en $(3,0)$ y $\left(\frac{1}{2},0\right)$ (**)

b) Intersección de la parábola con el eje Y

Dado que la intersección de la parábola con el eje Y es el punto $(0,c)$, en este caso es $(0,-3)$

4. Concavidad

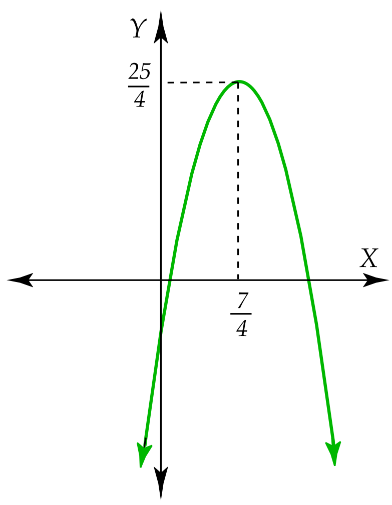
En este caso como $a=-2$, o sea $a<0$, entonces f es cóncava hacia abajo. (****)

5. Con la información obtenida en (*), (**) y (***) construimos la siguiente tabla de valores

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$	3
$-x^2-7x-3$	-3	0	$\frac{25}{4}$	0

6. Trazo de f

Por la tabla anterior y (****) el trazo correspondiente a f es:



Ejemplo 40

Realice el trazo de la función f definida por $f(x) = x^2 + 3$

Solución

De acuerdo con la notación $f(x) = ax^2 + bx + c$, en este caso $a = 1$, $b = 0$ y $c = 3$

1. Determinemos el discriminante de f:

   Sabemos que $\Delta = b^2 - 4ac \implies \Delta = 0 - 4(1)(3) = -12$, o sea $\Delta = -12$

2. Determinemos el vértice de la parábola $\left(\dfrac{-b}{2a}, f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$

   $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-0}{2(1)} = 0$

   Además $f(0) = 3$. Por lo que el vértice es: $(0, 3)$ (*)

3. Intersecciones con los ejes coordenados.

   a) Intersección de la parábola con el eje X.

      Como $\Delta < 0$, f no tiene ceros reales y por lo tanto no interseca al eje X.

   b) Intersección de la parábola con el eje Y

      Dado que la intersección de la parábola con el eje Y es el punto $(0, c)$, en este caso es $(0, 3)$ (**)

4. Concavidad

   Como $a = 1$, o sea $a > 0$, entonces f es cóncava hacia arriba. (***)

5. Con la información obtenida anteriormente, conocemos únicamente un punto de la parábola, a saber $(0, 3)$

   Dado que es conveniente conocer otros puntos de la parábola para realizar su trazo, calcularemos la imagen por f de 1 y -1, de la manera siguiente:

   a) $f(1) = 1^2 + 3 = 4$, o sea $f(1) = 4$

   b) $f(-1) = (-1)^2 + 3 = 4$, o sea $f(-1) = 4$

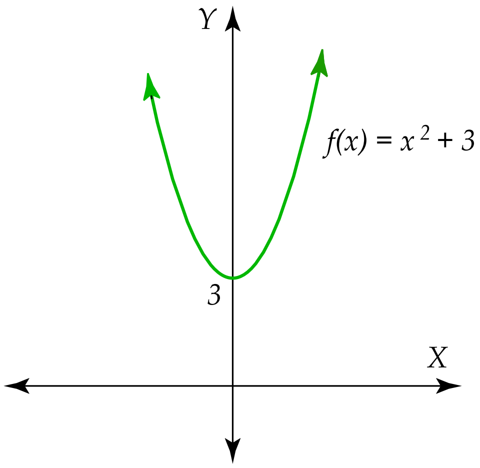
   Así $(1, 4)$ y $(-1, 4)$ pertenecen a la parábola y construimos la siguiente tabla de valores:

x	0	-1	1
$x^3 + 3$	3	4	4

NOTA: Los números 1 y -1, se escogieron apropiadamente.

6. Trazo de f

   Por la tabla anterior y (***) el trazo correspondiente a f es:



OJO PONER QUE HAY QUE HACER

Ejercicios 22

1. $f(x) = -x^2 + 1$
2. $f(x) = -4x^2 + x$
3. $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$
4. $f(x) = x^2 + x + 6$
5. $f(x) = x^2 + x - 6$
6. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

6.16 Intersección entre gráficas de funciones

■ **Definición 29**

Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}; A \subset \mathbb{R}$

$h : B \longrightarrow \mathbb{R}; B \subset \mathbb{R}$

Sean G_f y G_h los gráficos respectivos de f y g, entonces la intersección de G_f y G_h son los puntos (x_0, y_0), donde:

1. x_0 es una solución de la ecuación $f(x) = h(x)$ y $f(x_0) = y_0 = h(x_0)$

2. $x_0 \in A \cap B$

Ejemplo 41

Sean f y g funciones definidas respectivamente por $f(x) = x^2 + 5x + 4$; $g(x) = 2x + 4$

a) Determine los puntos de intersección entre lAs gráficAs de f y g

b) Represente en un sistema de coordenadas la situación

Solución

a) para encontrar los puntos de intersección entre las gráficas de f y g debemos resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ es decir:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 4 &= 2x + 4 \\ x^2 + 3x &= 0 \\ x(x+3) &= 0 \\ x = 0 \quad &\text{o} \quad x = -3 \end{aligned}$$

Si $x = 0$ entonces $g(0) = 4$ y $f(0) = 4$

Si $x = -3$ entonces $g(-3) = -2$ y $f(-3) = -2$

entonces los puntos de intersección entre las gráficas de f y g son $(0, 4)$ y $(-3, -2)$

b) Para hacer el trazo de f haremos el estudio de la parábola.

Como $f(x) = x^2 + 5x + 4$; en este caso se tiene que $a = 1$, $b = 5$ y $c = 4$

i) **Concavidad**

La parábola es cóncava hacia arriba. ¿Por qué?

ii) **Intersecciones de la parábola en los ejes coordenados**

a. La intersección con el eje Y es el punto $(0, 4)$ ¿Por qué?

b. Para obtener la intersección de la parábola con el eje X, debemos resolver la ecuación $x^2+5x+4=0$

$\triangle = b^2 - 4ac$; en este caso $\triangle = 25 - 4(1)(4) = 9$, es decir $\triangle = 9$, entonces existen dos ceros reales diferentes a saber:

$$x_1=\frac{-5+\sqrt{9}}{2} \qquad x_2=\frac{-5-\sqrt{9}}{2}$$

$$x_1=\frac{-5+3}{2} \qquad x_2=\frac{-5-3}{2}$$

$$x_1=-1 \qquad x_2=-4$$

Por lo tanto los puntos de intersección de la parábola con el eje X son $(-1,0)$ y $(-4,0)$

iii) **Vértice**

El vértice de la parábola es $\dfrac{-b}{2a}$ y $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$ pero $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5}{2}$ y

como $f\left(\dfrac{-5}{2}\right) = \left(\dfrac{-5}{2}\right)^2 + 5\left(\dfrac{-5}{2}\right) + 4$

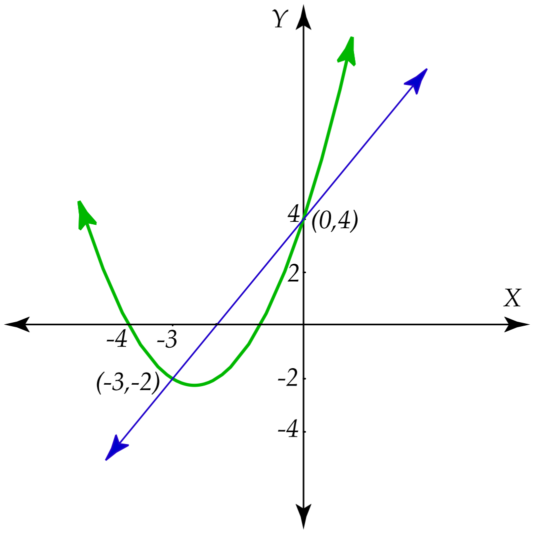
$$f\left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 4$$

$$f\left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{-9}{4}$$

Entonces el vértice de la parábola es $\left(\dfrac{-5}{2}, \dfrac{-9}{4}\right)$

Con la información obtenida en (i),(ii) y (iii) trazamos la parábola.

Con la información obtenida en (a) (puntos de intersección entre las gráficas de f y g), trazamos la gráfica de g.



Ejercicios 23

Determine (si existen) los puntos de intersección entre las gráficas de los siguientes pares de funciones, en cada caso haga un dibujo de la situación.

1. $f(x) = x^2 + 4x + 1; \quad g(x) = x^2 + 1$

2. $f(x) = 4x^2 - 8x - 5; \quad g(x) = 5x - 6$

3. $f(x) = -2x^2 - 1; \quad g(x) = -x - 7$

4. $f(x) = x^2 - 1; \quad g(x) = -x^2 + 1$

6.17 Problemas que se resuelven usando la ecuación de segundo grado

Muchos problemas, especialmente los que se refieren a conceptos físicos como áreas, volúmenes, aceleración, etc. Requieren que se use, para resolverlos, las ecuaciones de segundo grado.

Definición 30

Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática, es una ecuación equivalente a una de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con a,b y c constantes reales y $a \neq 0$

Ejemplos de ecuaciones cuadráticas

a) $x^2 - 5x = -6$

b) $x^2 = 25$

c) $3x^2 + 4x = 0$

d) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

e) $2x^2 - 3x + 6 = 0$

f) $x^2 + x + 1 = 0$

Consideremos la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ y sea f una función polinomial de segundo grado tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces determinar las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, es equivalente a encontrar los ceros de f, por lo tanto para resolver las ecuaciones de segundo grado podemos aplicar las fórnulas del discriminante.

Ejemplo 42

Resuelva $x^2 - 5x = -6$

Solución

$$x^2 - 5x = -6 \text{ entonces}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\triangle = 25 - 4(1)(6) = 25 - 24$$

$$\triangle = 1 \text{ por lo tanto existen dos soluciones}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} \qquad x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + 1}{2} \qquad x_2 = \frac{5 - 1}{2}$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2$$

Por lo tanto el conjunto solución de la ecuación $x^2 - 5x = -6$ es $\{2, 3\}$

Ejemplo 43

Resuelva $x^2 + x + 1 = 0$

Solución

En este caso $\triangle = 1 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3$, es decir $\triangle = -3$

Por lo tanto el conjunto solución de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ es vacío.

Ejemplo 44

Resuelva $-4x^2 + 4x - 1 = 0$

Solución

En este caso $\triangle = 16 - 4(-4)(-1) = 16 - 16 = 0$, o sea $\triangle = 0$, por lo tanto existen dos soluciones reales ambas iguales a: $\dfrac{-4}{-8} = \dfrac{1}{2}$

Así el conjunto solución de $-4x^2 + 4x - 1 = 0$ es $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Ejercicios 24

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones

a) $6x^2 + 5x - 4 = 0$

b) $24x^2 + 26x + 5 = 0$

c) $5 - 9x - 2x^2 = 0$

d) $x^2 - 4x + 4 = 0$

e) $2x^2 - 6x + 7 = 0$

f) $x^2 + 3x + 9 = 0$

6.17.1 Resolución de problemas

Cuando el planteo de un problemas da origen a una ecuación de segundo grado, al resolver esta ecuación se obtienen dos valores para la incógnita.

En estos casos se aceptan como solución del problema los valores de la incógnita que satisfacen las condiciones del problema y se rechazan las que no las cumplen.

Ejemplo 45

Resuelva el siguiente problema

El largo de un terreno rectangular es el doble que su ancho. Si el largo se aumenta en $40m$ y el ancho en $6m$, el área se aumenta al doble. Hallar las dimensiones del terreno.

Solución

Sea x al ancho del terreno, entonces $2x$ es el largo.

El área del terreno es $2x \cdot x = 2x^2$

Ahora aumentando el largo en $40m$, obtenemos $2x + 40$ y aumentando el ancho en $6m$, obtenemos $x + 6$, y el área será $(2x + 40)(x + 6) = 2x^2 + 52x + 240$

Pero, según las condiciones del problema, el área es el doble del área anterior, es decir:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 52x + 240 &= 4x^2, \text{ por lo tanto} \\ -2x^2 + 52x + 240 &= 0 \\ -2(x^2 - 26x - 120) &= 0 \text{ entonces} \\ x^2 - 26x - 120 &= 0 \end{aligned}$$

en este caso

$$\begin{aligned} \triangle &= (-26)^2 - 4(1)(-120) \\ \triangle &= 676 + 480 \\ \triangle &= 1156 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$x_1 = \frac{26 + \sqrt{1156}}{2} \qquad x_2 = \frac{26 - \sqrt{1156}}{2}$$

$$x_1 = \frac{26 + 34}{2} \qquad x_2 = \frac{26 - 34}{2}$$

$$x_1 = 30 \qquad x_2 = -4$$

$x_2 = -4$ no puede ser solución del problema

Por lo tanto el ancho del terreno es $30m$, y como el largo es el doble del ancho, entonces el largo es de $60m$.

Respuesta: El ancho del terreno es de $30m$ y el largo es de $60m$

Ejercicios 25

Resuelva cada uno de los siguientes problemas:

a) Dos alfareros llevan en conjunto 200 vasijas de arcilla para la venta. El primero vende ₡ 0.50 menos por unidad que el segundo y se recauda ₡ 240. El segundo recauda ₡ 60 menos que el primero. ¿Cuántas vasijas vendió cada uno y a qué precio?

b) Los asistentes a una fiesta tienen que pagar en total ₡ 390. Pero se decide que dos de ellos no paguen la cuota, por lo cual los demás aceptan pagar cada uno ₡ 4 más de lo que les correspondía pagar. ¿Cuántas personas asistieron a la fiesta?

c) Una oficina cuadrada contiene 25 escritorios y además un pasillo de $3m$ de ancho a lo largo de uno de sus lados. Si el espacio destinado a cada escritorio es $5,2m^2$, calcule la medida del lado de la oficina.

Existe otro tipo de problemas en los cuales se aplica el concepto de vértice para resolverlos, consideremos el ejemplo siguiente

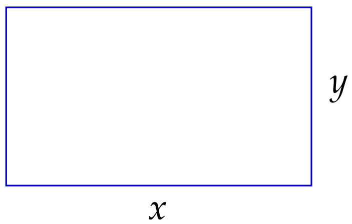
Ejemplo 46

Se quiere cercar un terreno de forma rectangular, para sembrar hortalizas. Si con el material que se dispone se puede cercar una longitud de $32m$. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno para que su área sea máxima?.

Solución

Sean x e y las dimensiones del terreno. Entonces debe cumplirse que:

$$2x + 2y = 32 \qquad (*)$$



Además el área del terreno, se puede expresar en términos de x e y (A(x,y)) de la manera siguiente:

$$A(x, y) = x \cdot y \quad (**)$$

Ahora si despejamos de (*) una de las incógnitas, digamos y, obtenemos que:

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 32 \\ 2(x + y) &= 32 \\ x + y &= 16 \\ y &= 16 - x \end{aligned}$$

Sustituyendo y por $16 - x$ en (**) tenemos el área únicamente en términos de x, así

$$\begin{aligned} A(x) &= x(16-x) \\ A(x) &= 16x - x^2 \\ A(x) &= -x^2 + 16x \end{aligned}$$

Como esta es una función de segundo grado, cóncava hacia abajo, alcanza su máximo en el vértice de la parábola.

El vértice de esta parábola es:

$$\left(\frac{-16}{-2}, f\left(\frac{-16}{-2}\right)\right) = (8, f(8)) = (8, 64)$$

El valor correspondiente a x en este caso es 8.

Sustituyendo x por 8 en (*) tenemos que

$$2 \cdot 8 + 2y = 32 \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 16 + 2y &= 32 \\ 2y &= 16 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

Respuesta: El largo del rectángulo debe medir $8m$ y su ancho $8m$, es decir se trata de un cuadrado.

Nota: Observe que el área máxima del terreno es $64m^2$.

Ejercicios 26

Resuelva cada uno de los siguientes problemas:

1. El momento de flexión de una viga de longitud L en metros y soportando una carga de W kilogramos por metro (kg/m) uniformemente distribuida cuando se fija en su extremo, está dado para un punto localizado a x metros del extremo fijado por: $M = \dfrac{W}{8}(4x^2 - 5Lx + L^2)$

   a) Encuentre la distancia x para el máximo momento de flexión.

   b) Si la viga tiene una longitud L de $18m$ y soporta $150kg/m$, encuentre el valor de x para el cual el momento de flexión es cero.

2. En un cine con capacidad para 800 personas se sabe que si se cobra a ₡ 12 la entrada asisten 800 personas y que por cada ₡ 2 de aumento en el costo la entrada disminuye en 80 el número de espectadores.

   a) Escriba el criterio para la función R, donde $R(x)$ denota la recaudación total de las entradas y x denota el número de incrementos de ₡ 2 en el costo de cada entrada.

b) Calcule $g(0),\ g(1),\ g(3),\ g(4)$ y $g(10)$

c) Cuál es el precio de la entrada que dará la máxima ganancia y cuál es la recaudación.

3. Un granjero tiene un terreno limitado en uno de sus lados por un muro de piedra. Si cuenta con $120m$ de material, para cercar una parcela rectangular utilizando el muro como uno de sus lados. ¿Qué dimensiones debe tener la parcela para cercar la mayor área?.

4. En una fábrica y es el costo de producción de x miles de artículos. Si este costo satisface la relación $\dfrac{y}{x} = \dfrac{x-y}{2}$, determine cuántos miles de artículos deben producirse para que el costo sea mínimo.