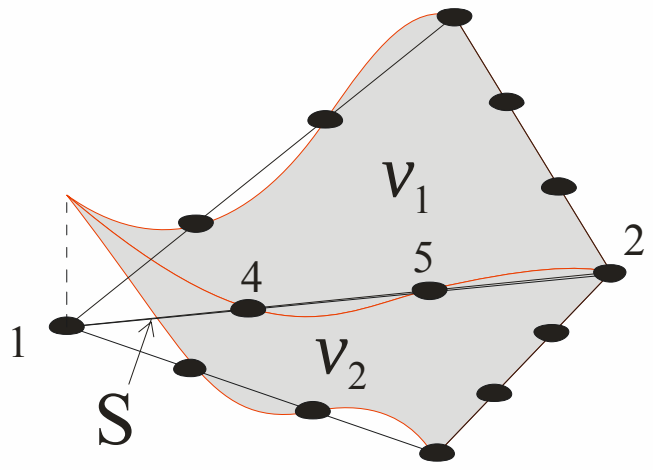


Introducción al Método de los Elementos Finitos

Parte 4

Estimación de error en problemas elípticos

Alberto Cardona, Víctor Fachinotti
Cimec-Intec (UNL/Conicet), Santa Fe, Argentina

Estimación de error en problemas elípticos

- Para un típico problema elíptico de la forma

$$\text{Hallar } u \in \mathrm{V} \quad / \quad \mathrm{a}(u,v)=\mathrm{L}(v) \quad \forall v \in \mathrm{V}$$

donde se verifica

1. a(.,.) es una forma bilineal simétrica, continua y V-elíptica.
2. L(.) es una forma lineal continua

resulta

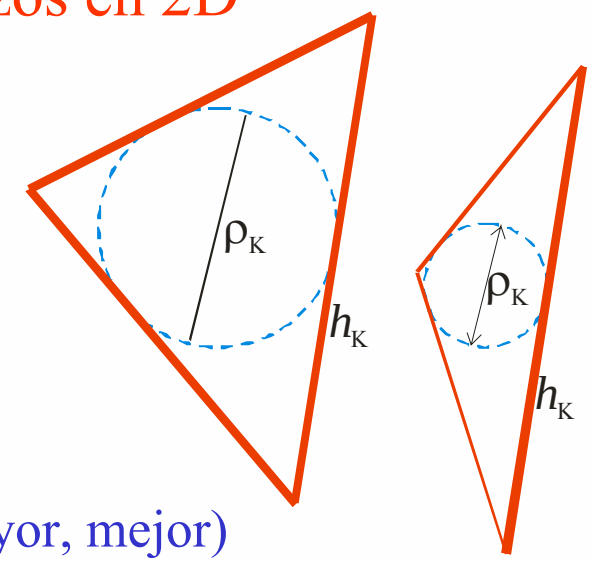
$$\|u-u_h\|_{\mathrm{V}} \leq \frac{\gamma}{\alpha}\|u-v\|_{\mathrm{V}} \quad \forall\, v \in \mathrm{V}$$

- Si elegimos $v=\pi_h u \in \mathrm{V}$ como un interpolante de u y estimamos el error de interpolación $\|u-\pi_h u\|_{\mathrm{V}}$, obtendremos una estimación del error $\|u-u_h\|_{\mathrm{V}}$ del MEF.

- Elegimos $\pi_h u$ tal que sus gdl coincidan con los de u en V_h, así el problema de determinar $\|u-\pi_h u\|_{\mathrm{V}}$ se reduce a determinar $u-\pi_h u$ individualmente sobre cada elemento finito $\mathrm{K} \in \mathrm{T}_h$.

Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D

- Sea $V=H^1(\Omega)$, $V_h=\left\{v\in V:\ v|_K \in P^1(K), \forall K\in T_h\right\}$



- Para c/triángulo $K\in T_h$, definimos

  h_K: diámetro de K = lado más largo de K

  ρ_K: diámetro del círculo inscripto en K

  ρ_K/h_K da una idea de la calidad del elemento (cuanto mayor, mejor)

- Designemos $\mathbf{T}_h$ a una familia de mallas $\{T_h\}$ indexadas por el parámetro $h=\max\limits_{K\in T_h} h_K$

- Asumimos $\exists$ una constante $\beta\in\mathbb{R}^+$, independiente de h, tal que

$$\frac{\rho_K}{h_K}\geq\beta \quad \forall\ K\in\mathbf{T}_h$$

Esta condición implica que los triángulos $K\in\mathbf{T}_h$ no pueden ser arbitr. finos.
La constante β es una medida del ángulo más pequeño para cualquier $K\in\mathbf{T}_h$.

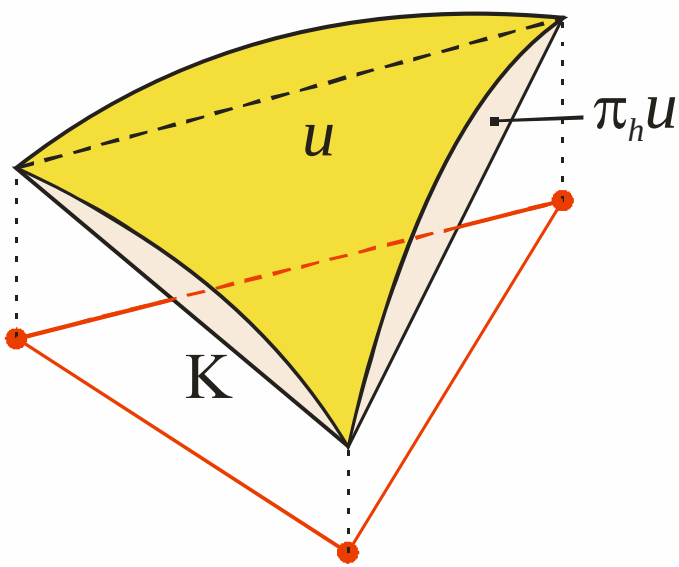
Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

- Sean N_i, $i=1,2,\ldots,M$, los nodos de T_h. Dado $u \in C^0\left(\bar{\Omega}\right)$, definimos el interpolante $\pi_h u \in V_h$ por

$$\pi_h v(\boldsymbol{x}^i) = v(\boldsymbol{x}^i) \quad i = 1, 2, \ldots, M$$

i.e, $\pi_h u$ es la función lineal a trozos que coincide con u en los nodos $\boldsymbol{x}^i$ de T_h.

- Empecemos por estimar el error $u - \pi_h u$ en cada triángulo K.



Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

- **<u>Teorema</u>** Sea $K \in T_h$ un triángulo de vértices $\boldsymbol{x}^i$, $i=1,2,3$. Dado $v \in C^0(K)$, sea el interpolante $\pi v \in P_1(K)$ definido por $\pi v(\boldsymbol{x}_i) = v(\boldsymbol{x}_i),\ i = 1,2,3.$

  Luego:

  1. $\|v - \pi v\|_{L_\infty(K)} \le 2h_K^2 \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L_\infty(K)}$
  2. $\max_{|\alpha|=1} \|D^\alpha (v - \pi v)\|_{L_\infty(K)} \le 6 \dfrac{h_K^2}{\rho_K} \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L_\infty(K)}$

  donde $\quad D^\alpha v = \dfrac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2.$

  $$\|v\|_{L_\infty(K)} = \max_{\boldsymbol{x} \in K} |v(\boldsymbol{x})|$$

<u>Nota:</u> la magnitud de los errores de interpolación en la función y sus derivadas primeras dependen del valor de las derivadas segundas, que es una medida de la curvatura de la superficie descripta por la función.

Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

Dem

- Como $\pi v \in \mathrm{P}_1(\mathrm{K})$, usando las funciones de base λ_i podemos escribir

$$\pi v(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\boldsymbol{x}) \pi v(\boldsymbol{x}^i) \equiv \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}^i)$$

- Usando una expansión de Taylor, en el punto $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta}$ tenemos

$$v(\boldsymbol{y}) = v(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial v}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\left(y_j - x_j\right) + R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

$$R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\left(\boldsymbol{x} + \xi \boldsymbol{\Delta}\right) \cdot \left(y_i - x_i\right) \cdot \left(y_j - x_j\right) \qquad 0 < \xi < 1$$

- Tomando $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^i$:

$$v(\boldsymbol{x}^i) = v(\boldsymbol{x}) + \underbrace{\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial v}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\left(x_j^i - x_j\right)}_{p_i(\boldsymbol{x})} + \underbrace{R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^i)}_{R_i(\boldsymbol{x})}$$

- Como $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i\| \le h_{\mathrm{K}}$ $\forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{K}$, $i = 1,2,3$, el resto $R_i(\boldsymbol{x})$ resulta acotado por

$$\left|R_i(\boldsymbol{x})\right| \le 2 h_{\mathrm{K}}^2 \max_{|\alpha|=2} \left\|\mathrm{D}^\alpha v\right\|_{\mathrm{L}_\infty(\mathrm{K})} \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathrm{K},\ i = 1,2,3$$

Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

- Luego:

$$\pi v(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}^i) = v(\boldsymbol{x}) \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\boldsymbol{x}) p_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\boldsymbol{x}) R_i(\boldsymbol{x})$$

- Veremos luego que: $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{3} \lambda_i p_i = 0.$

$$\Rightarrow \pi v(\boldsymbol{x}) = v(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\boldsymbol{x}) R_i(\boldsymbol{x})$$

- En consecuencia:

$$\left| v(\boldsymbol{x}) - \pi v(\boldsymbol{x}) \right| \le \left| \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\boldsymbol{x}) R_i(\boldsymbol{x}) \right| \le \sum_{i=1}^{3} \left| \lambda_i(\boldsymbol{x}) \right| \left| R_i(\boldsymbol{x}) \right| \le \max_i \left| R_i(\boldsymbol{x}) \right| \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \left| \lambda_i(\boldsymbol{x}) \right|}_{1}$$

$$\le 2 h_{\mathrm{K}}^2 \max_{|\alpha|=2} \left\| \mathrm{D}^\alpha v \right\|_{\mathrm{L}_\infty(\mathrm{K})} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{K}$$

(QED 1)

Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

•Se calcula la derivada de πv:

$$\frac{\partial \pi v}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}^i) = v(\boldsymbol{x}) \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) p_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) R_i(\boldsymbol{x})$$

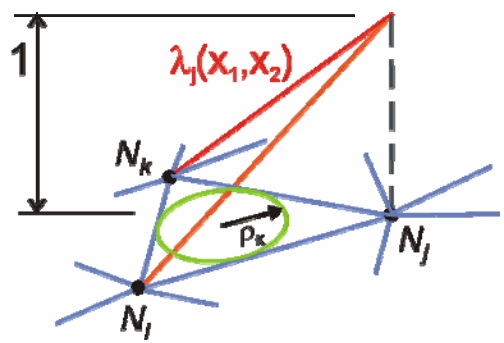
•Veremos luego que también: $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} p_i = \frac{\partial v}{\partial x_j}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \pi v}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} R_i$$

•En consecuencia:

$$\left| \frac{\partial v}{\partial x_j} - \frac{\partial \pi v}{\partial x_j} \right| = \left| \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} R_i(\boldsymbol{x}) \right| \le \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\max_{\boldsymbol{x} \in \mathrm{K}} \left| \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} \right|}_{\le 1/\rho_K} \left| R_i(\boldsymbol{x}) \right| \le \frac{1}{\rho_{\mathrm{K}}} \sum_{i=1}^{3} \left| R_i(\boldsymbol{x}) \right|$$

$$\le 6 \frac{h_{\mathrm{K}}^2}{\rho_{\mathrm{K}}} \max_{|\alpha|=2} \left\| \mathrm{D}^\alpha v \right\|_{\mathrm{L}_\infty(\mathrm{K})} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{K}$$



(QED 2)

Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

Lema Para $j = 1,2$ $\boldsymbol{x} \in K$ tenemos:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1}_{A}, \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i p_i = 0}_{B}, \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} = 0}_{C}, \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} p_i = \frac{\partial v}{\partial x_j}}_{D}$$

Dem

• Notar $\pi v = v$ si $v \in P_1(K)$. Luego, eligiendo $v = 1$ en :

$$\pi v(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{3} v(\boldsymbol{x}_i)\lambda_i(\boldsymbol{x}) \quad \Rightarrow \quad 1 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\boldsymbol{x})$$

(QED A)

•Derivando la anterior :

$$0 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$$

(QED C)

Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

- Recordamos :

$$\pi v = v\sum_{i=1}^{3}\lambda_i + \sum_{i=1}^{3}\lambda_i p_i + \sum_{i=1}^{3}\lambda_i R_i \qquad\qquad p_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial v}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\left(x_j^i - x_j\right)$$

Luego:

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i p_i = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i(\boldsymbol{x})\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial v}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})\left(x_k^i - x_k\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}\lambda_i\frac{\partial v}{\partial x_k}x_k^i - \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}\lambda_i\frac{\partial v}{\partial x_k}x_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial v}{\partial x_k}\underbrace{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i x_k^i}_{x_k} - \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial v}{\partial x_k}x_k\underbrace{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i}_{1} = 0$$

(QED B)

Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

- De manera similar :

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} p_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial v}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) \left(x_k^i - x_k \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} x_k^i - \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} x_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial v}{\partial x_k} \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} x_k^i}_{\delta_{jk}} - \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial v}{\partial x_k} x_k \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}}_{0} = \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

(QED D)

Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

- El teorema visto da estimaciones en norma $L_\infty(K)$. Ello no nos sirve para lograr estimaciones de $\|u-\pi_h u\|_{H^1(\Omega)}$.

Notación:

$$|v|_{H^r(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=r} \int_\Omega |D^\alpha v|^2 \, d\boldsymbol{x} \right)^{1/2}$$

- No es norma, porque puede ser $|v|_{H^r(\Omega)} = 0,$ con $v \neq 0$ (ej: $v=1,\ r \geq 1$)
- $|v|_{H^r(\Omega)}$ mide la norma $L_2(\Omega)$ de las derivadas parciales de v de orden igual a r. Luego, decimos que $|v|_{H^r(\Omega)}$ es una *seminorma*.

Teorema: Sea $K \in T_h$ un triángulo de vértices $\boldsymbol{x}^i$, $i=1,2,3$. Dado $v \in C^0(K)$, sea el interpolante $\pi v \in P_1(K)$ definido por $\pi v(\boldsymbol{x}_i) = v(\boldsymbol{x}_i),\ i=1,2,3$. Luego, $\exists\, C$ cte

$$\|v-\pi v\|_{L_2(K)} \leq C h_K^2 |v|_{H^2(K)}, \qquad |v-\pi v|_{H_1(K)} \leq C \frac{h_K^2}{\rho_K} |v|_{H^2(K)}$$

Este teorema es similar al anterior, pero demostración más difícil (no la haremos).

Interpolación con funciones lineales a trozos en 2D (cont)

Usando el teorema, podemos calcular

$$\|u-\pi_h u\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{K\in T_h} \|u-\pi_h u\|^2_{L_2(K)} \le \sum_{K\in T_h} C^2 h_K^4 |u|^2_{H^2(K)} \le C^2 h^4 \sum_{K\in T_h} |u|^2_{H^2(K)} = C^2 h^4 |u|^2_{H^2(\Omega)}$$

Además, usando la propiedad de la triangulación $h_K / \rho_K \le 1/\beta$

$$|u-\pi_h u|^2_{H^1(\Omega)} \le \sum_{K\in T_h} C^2 \frac{h_K^4}{\rho_K^2} |u|^2_{H^2(K)} \le \sum_{K\in T_h} C^2 \frac{h_K^2}{\beta^2} |u|^2_{H^2(K)} \le \frac{C^2 h^2}{\beta^2} |u|^2_{H^2(\Omega)}$$

Luego, introduciendo β en la cte:

$$\boxed{\|u-\pi_h u\|_{H^1(\Omega)} \le \frac{Ch}{\beta} |u|_{H^2(\Omega)} = Ch |u|_{H^2(\Omega)}}$$

$$\boxed{\|u-\pi_h u\|_{L_2(\Omega)} \le Ch^2 |u|_{H^2(\Omega)}}$$

Interpolación con polinomios de mayor grado

- Trabajando con polinomios de grado $r \geq 1$ se tiene

$$\|u - \pi_h u\|_{L_2(\Omega)} \leq C h^{r+1} |u|_{H^{r+1}(\Omega)} \qquad |u - \pi_h u|_{H^1(\Omega)} \leq C h^{r} |u|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

- Si $V_h \subset H^2(\Omega)$ podremos asegurar también

$$|u - \pi_h u|_{H^2(\Omega)} \leq C h^{r-1} |u|_{H^{r+1}(\Omega)}$$

<u>Notar:</u>

1. La potencia de *h* cae con el orden de derivación del error
2. La cte *C* es independiente de *u* y de *h*

- Si *u* no tiene la regularidad requerida, la potencia de *h* cae:

$$\|u - \pi_h u\|_{L_2(\Omega)} \leq C h^{s} |u|_{H^{s}(\Omega)} \qquad |u - \pi_h u|_{H^1(\Omega)} \leq C h^{s-1} |u|_{H^{s}(\Omega)}$$

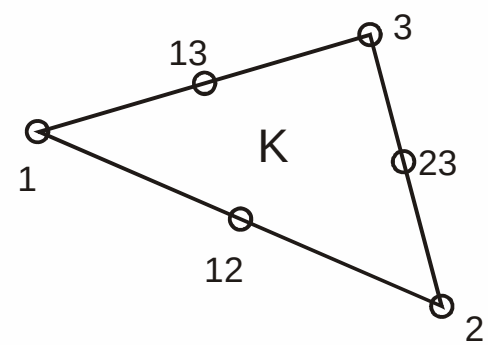
con $1 \leq s \leq r+1$

Interpolación con polinomios de mayor grado

1. **<u>Ejemplo</u>** Sean

$$\{T_h\} \text{ familia de mallas } T_h = \{K\} \text{ de } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \,/ \quad \beta h \le \rho$$

$$V_h = \left\{ v \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) \,:\, v\big|_K \in P_2\left(K\right), \quad \forall K \in T_h \right\}$$



Para el elemento mostrado, definimos

$$\pi_h v = v \quad \text{en los nodos y puntos medios de } T_h$$

En este caso se verifica:

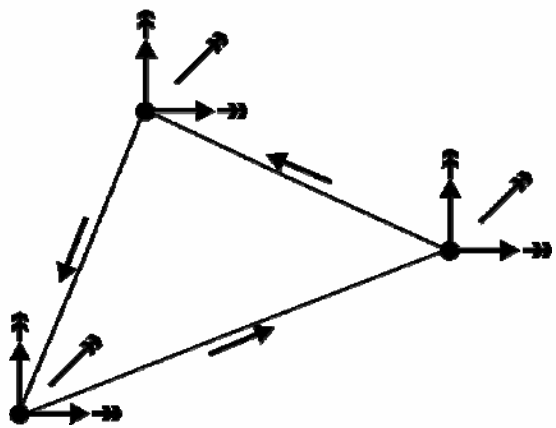
$$\left\| v - \pi_h v \right\|_{L_2(\Omega)} \le C h^3 \left| v \right|_{H^3(\Omega)} \qquad \left| v - \pi_h v \right|_{H^1(\Omega)} \le C h^2 \left| v \right|_{H^3(\Omega)}$$

Interpolación con polinomios de mayor grado

2. <u>Ejemplo</u> Sean

$$\{T_h\} \text{ familia de mallas } T_h = \{K\} \text{ de } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \,/ \quad \beta h \le \rho$$

$$V_h = \left\{ v \in C^1\left(\overline{\Omega}\right) \,:\, v\big|_K \in P_5\left(K\right), \quad \forall K \in T_h \right\}$$



Para el elemento mostrado, definimos

$$D^\alpha \pi_h v = D^\alpha v \quad \text{en los nodos vértices de } T_h, \quad |\alpha| \le 2$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} \pi_h v = \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} \quad \text{en los puntos medios de lados de } T_h$$

En este caso se verifica:

$$\left\| v - \pi_h v \right\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \le C h^6 \left| v \right|_{H^6(\Omega)}$$

$$\left| v - \pi_h v \right|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \le C h^5 \left| v \right|_{H^6(\Omega)}$$

$$\left| v - \pi_h v \right|_{\mathrm{H}^2(\Omega)} \le C h^4 \left| v \right|_{H^6(\Omega)}$$

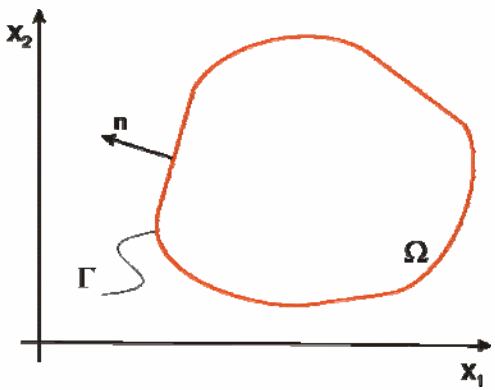
Estimaciones de error en MEF para problemas elípticos

Recordamos:

$$\|u-u_h\|_V \le C\|u-v\|_V \qquad \forall v \in V_h \qquad \Rightarrow \qquad \|u-u_h\|_V \le C\|u-\pi_h u\|_V$$

Usamos luego las estimaciones de error de interpolación para el error del MEF.

3. <u>Ejemplo</u> Sea el problema



$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

En este caso, $V = H_0^1(\Omega)$ y elegimos

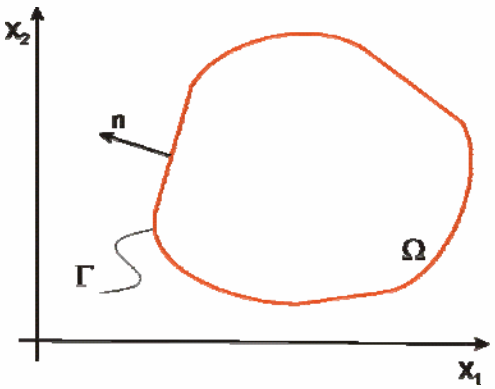
$$V_h = \left\{ v \in V \ : \ v|_K \in P_r(K), \quad \forall K \in T_h \right\}$$

Usando la estimación de error de interpolación, logramos

$$\boxed{\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \le Ch^r |u|_{H^{r+1}(\Omega)}}$$

Estimaciones de error en MEF para problemas elípticos

4. **<u>Ejemplo</u>** Sea el problema biarmónico



$$\begin{cases} \Delta\Delta u = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

En este caso, $V = H_0^2(\Omega)$ y si elegimos

$$V_h = \left\{ v \in V \ : \ v\big|_K \in P_5(K), \quad \forall K \in T_h \right\}$$

y usamos la estimación de error de interpolación, logramos

$$\boxed{\left\| u - u_h \right\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)} \leq C h^4 \left| u \right|_{H^6(\Omega)}}$$

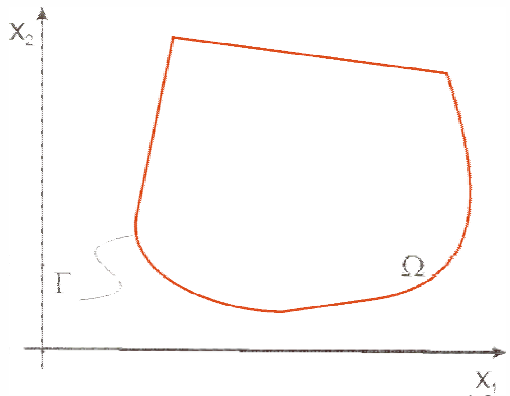
Sobre la regularidad de la solución exacta

- Vimos que la regularidad de la solución exacta u influye sobre la estimación de error $\|u-u_h\|_V$. Veremos ahora que la regularidad de u depende de la regularidad de los datos

Sea el problema de Poisson
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

1. Si Γ es suave, para $s = 0, 1, \ldots$ existe C indep de f tal que
$$\|u\|_{H^{s+2}(\Omega)} \le C\|f\|_{H^s(\Omega)}$$
o sea
$$f \in H^s(\Omega) \quad \Rightarrow \quad u \in H^{s+2}(\Omega) \qquad \text{("ganamos 2 derivadas")}$$

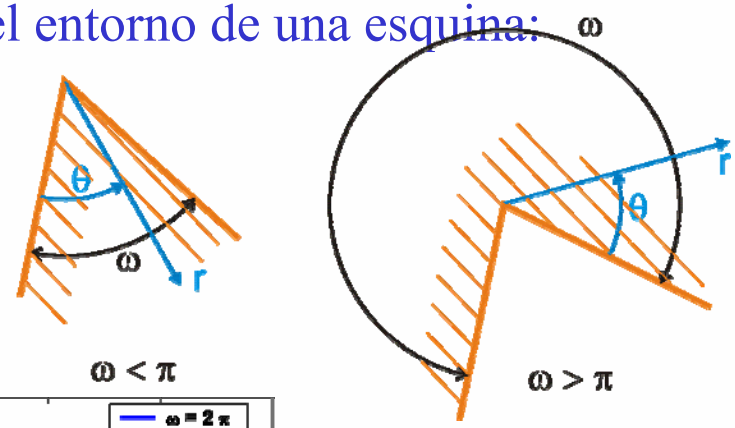
2. Si Γ tiene esquinas, u o sus derivadas tienen singularidades en la esquina aún con f muy suave.



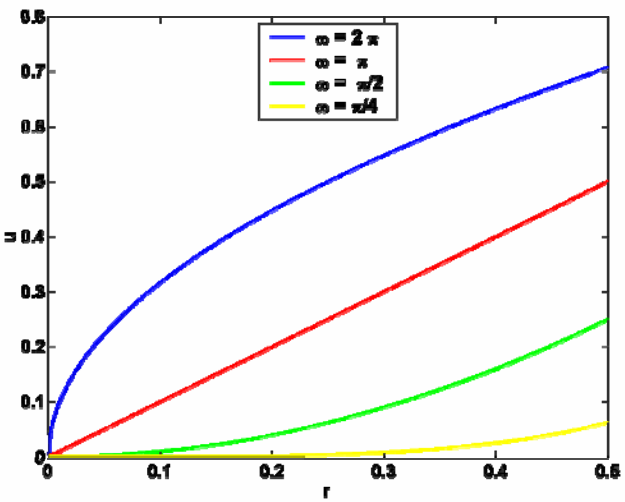
Sobre la regularidad de la solución exacta (cont)

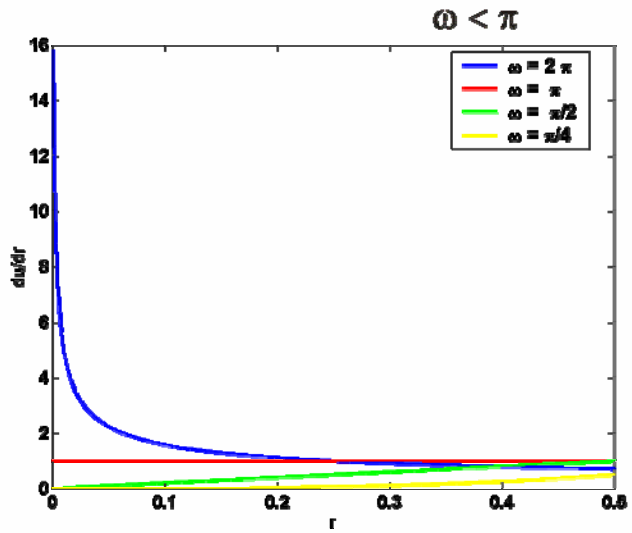
La solución u con f suave tiene la siguiente forma en el entorno de una esquina:

$$u(r,\theta) = r^{\pi/\omega}\alpha(\theta) + \beta(r,\theta)$$



con α, β funciones suaves.





1. Claramente, si $\omega > \pi \quad \Rightarrow \quad u \notin H^2(\Omega)$
2. Se puede mostrar que si Ω poligonal convexo $(\omega < \pi)$, $\quad \Rightarrow \quad u \in H^2(\Omega)$

Sobre la regularidad de la solución exacta (cont)

- Sea el problema biarmónico $\begin{cases} \Delta\Delta u = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$
- Si Γ es suave, resulta $\|u\|_{H^{s+4}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^s(\Omega)} \qquad s = 0,1,2,\ldots$ (4.28b)
- Si Γ no es suave y
  - $\omega<\pi \Rightarrow$ (4.28b) vale con $s=0$
  - $\omega>\pi \Rightarrow u \notin H^4(\Omega)$

Métodos adaptivos

1. Si la solución exacta tiene por ej. una singularidad en una esquina, es natural refinar la malla cerca de esa esquina para mejorar la precisión.
2. Dado el estimador de error $\left|u-u_h\right|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \le \left|u-\pi_h u\right|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \le C\sqrt{\sum_{\mathrm{K}\in\mathrm{T}_h}\left(h_{\mathrm{K}}\left|u\right|_{\mathrm{H}^2(\mathrm{K})}\right)^2}$ podríamos contrarrestar el tamaño de $\left|u\right|_{\mathrm{H}^2(\mathrm{K})}$ con el de h_{K}, tomando h_{K} pequeño allí donde $\left|u\right|_{\mathrm{H}^2(\mathrm{K})}$ sea grande.
3. Si u tiene la forma $u(r,\theta)=r^{\pi/\omega}\alpha(\theta)+\beta(r,\theta)$, con $0<\gamma=\dfrac{\pi}{\omega}<1$, una manera posible de refinar sería definiendo

$$h_{\mathrm{K}} = Chd_{\mathrm{K}}^{1-\gamma} \quad \left| \begin{array}{ll} d_{\mathrm{K}} : & \text{distancia del elemento K a la esquina} \\ h : & \text{tamaño de la malla lejos de la esquina} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \left|u-u_h\right|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \le Ch$$

- **<u>Nota</u>**: el número de elementos así refinados es de igual orden $O(h^{-2})$ que para una malla de h uniforme. Luego, el refinamiento no aumenta significativamente el número de incógnitas, pero sí la precisión.

Métodos adaptivos (cont.)

En gral, se desconoce a priori la naturaleza de la solución exacta, por lo que no está claro cómo refinar la malla.

- **<u>Métodos adaptivos:</u>** métodos de refinamiento automático de la malla, que obtienen información sobre de la suavidad de la solución de resultados sobre una sucesión de mallas de refinamiento progresivo.

1. Dada una tolerancia $\delta>0$, deseamos obtener por MEF una solución que satisfaga

$$\left|u-u_h\right|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \lesssim \delta \qquad (4.33)$$

2. Dado el estimador de error por $\left|u-u_h\right|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\sqrt{\sum_{\mathrm{K}\in\mathrm{T}_h}\left(h_{\mathrm{K}}\left|u\right|_{\mathrm{H}^2(\mathrm{K})}\right)^2}$

la condición 4.33 se satisfará si elegimos una malla $\mathrm{T}_h=\{\mathrm{K}\}$ tal que

$$\sum_{\mathrm{K}\in\mathrm{T}_h}\left(h_{\mathrm{K}}\left|u\right|_{\mathrm{H}^2(\mathrm{K})}\right)^2 \sim \left(\frac{\delta}{C}\right)^2 \qquad (4.34)$$

Métodos adaptivos (cont.)

3. La malla que satisfaga 4.34 se determina usando el siguiente procedimiento:
   I. Se parte de una malla $\overline{\mathrm{T}}_h = \{\overline{\mathrm{K}}\}$ de $\overline{\mathrm{N}}$ elementos y se calcula la correspondiente $\overline{u}_h$ por MEF, con la que se calcula la aproximación $|\overline{u}|_{\mathrm{H}^2(\overline{\mathrm{K}})}$ a $|u|_{\mathrm{H}^2(\overline{\mathrm{K}})}$.
   II. Se construye una nueva malla $\mathrm{T}_h=\{\mathrm{K}\}$ dividiendo en 4 triángulos iguales cada $\overline{\mathrm{K}} \in \overline{\mathrm{T}}_h$, y se calcula la solución u_h por MEF, con la que se calcula una aproximación a $|u|_{\mathrm{H}^2(\overline{\mathrm{K}})}$.
   III. Se repite el paso II hasta que

$$\sum_{\mathrm{K}\in\mathrm{T}_h} \left(h_{\mathrm{K}} \, |u|_{\mathrm{H}^2(\mathrm{K})} \right)^2 \leq \left(\frac{\delta}{C} \right)^2$$

Métodos adaptivos (cont.)

1. Podemos partir de otros estimadores de error, por ej.

$$\left\|\nabla u - \nabla u_h\right\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C \max_{K} \left[h_K \max_{|\alpha|=2} \left\|D^\alpha u\right\|_{L_\infty(K)} \right]$$

2. Se busca una malla $T_h=\{K\}$ tal que

$$C h_K \max_{|\alpha|=2} \left\|D^\alpha u\right\|_{L_\infty(K)} \sim \delta \quad \forall K \in T_h$$

3. Se comienza con una malla gruesa, con la que se calcula una aprox. a $\left\|D^\alpha u\right\|_{L_\infty(K)}$.
   Se refina la malla subdividiendo los triángulos K que <u>no</u> satisfagan

$$C h_K \max_{|\alpha|=2} \left\|D^\alpha u\right\|_{L_\infty(K)} \leq \delta$$

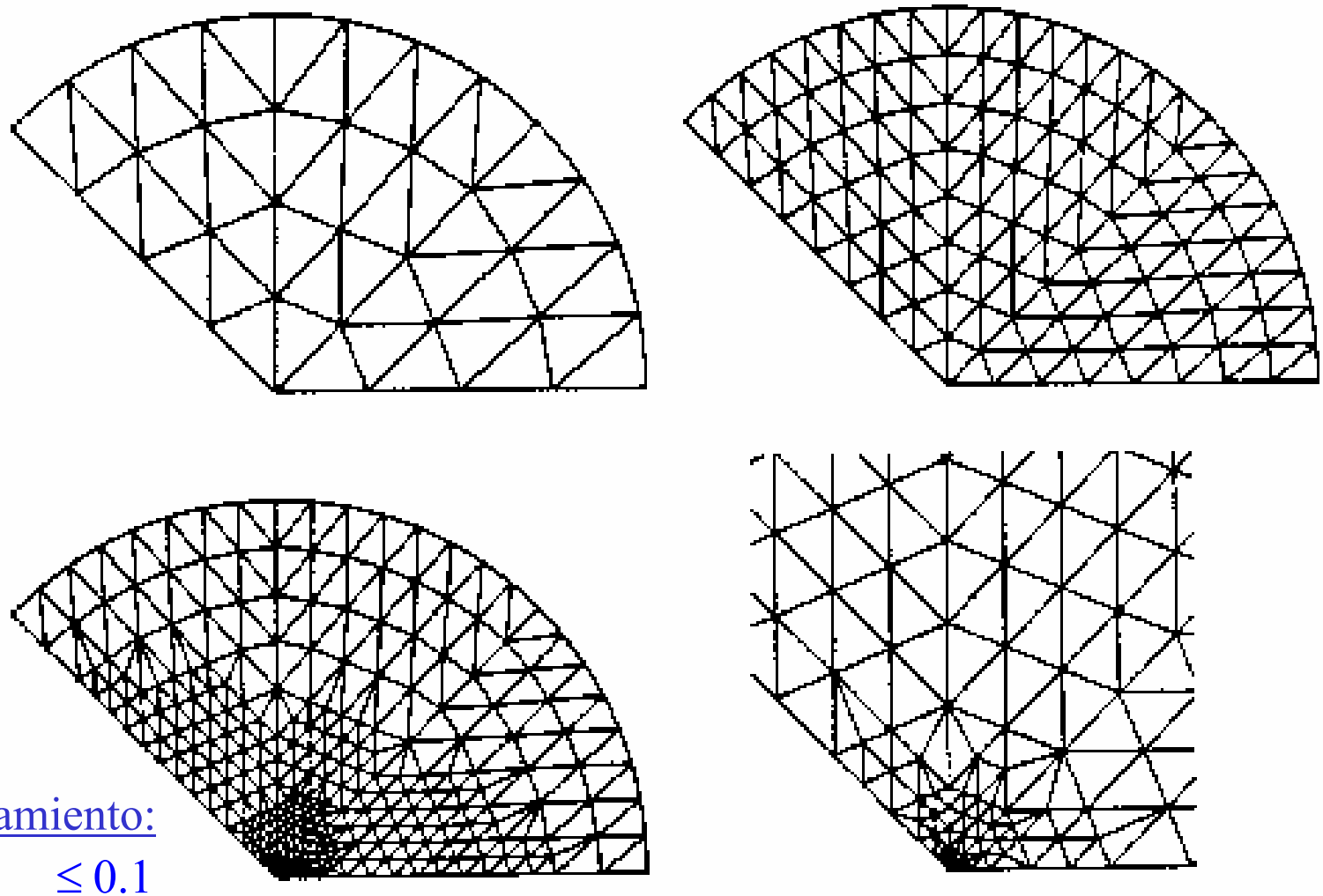
4. Se termina el proceso cuando todos los triángulos satisfacen la condición anterior.

Refinamiento adaptivo

Problema:

$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega$

$u = u_0 \quad \text{sobre } \Gamma$



Criterio de refinamiento:

$$h_K \max_{|\alpha|=2} \left\| D^\alpha u \right\|_{L_\infty(K)} \leq 0.1$$

Estimación de error en norma L_2

- Aplicando MEF con $V_h = \left\{ v : v \in H_0^1(\Omega) \text{ y } v|_K \in P_1(K), \forall K \in T_h \right\}$ a

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{array}\right\} \quad \text{Ecuación de Poisson}$$

en Ω poligonal, el estimador de error resulta

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \le Ch|u|_{H^2(\Omega)} \quad \Rightarrow \quad \|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \le Ch|u|_{H^2(\Omega)}$$

- Además, hemos visto que $\|u - \pi_h u\|_{L_2(\Omega)} \le Ch^2 |u|_{H^2(\Omega)}$

- Teorema 4.3: si Ω es un dominio poligonal convexo, y u_h es la solución de la ec. de Poisson usando EF lineales por trozos, entonces hay una constante C independiente de u y h tal que

$$\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \le Ch^2 |u|_{H^2(\Omega)}$$

Estimación de error en norma L_2 (cont.)

- Demo.: $\mathrm{a}(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in \mathrm{V}_h \subset \mathrm{V}$

  $\mathrm{a}(u_h,v) = (f,v) \quad \forall v \in \mathrm{V}_h \subset \mathrm{V}$

  $e = u - u_h \Rightarrow \mathrm{a}(e,v) = 0 \quad \forall v \in \mathrm{V}_h \subset \mathrm{V}$

- Sea φ la solución del problema "dual" $\begin{cases} \Delta\varphi = e & \text{en } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases} \Rightarrow \|\varphi\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)} \le Ch\|e\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}$

$$\|e\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} = (e,e) = -(e,\Delta\varphi) = \mathrm{a}(e,\varphi) = \mathrm{a}(e,\varphi) - \underbrace{\mathrm{a}(e,\pi_h\varphi)}_{=0}$$

$$= \mathrm{a}(e,\varphi - \pi_h\varphi) \le \|e\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \|\varphi - \pi_h\varphi\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$$

$$\le Ch\|e\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} |\varphi|_{\mathrm{H}^2(\Omega)} \le Ch\|e\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)} \le Ch\|e\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \|e\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}$$

$$\le Ch^2 \|e\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} |u|_{\mathrm{H}^2(\Omega)}$$

(QED

Estimación de error en norma L_2 (cont.)

- La cond.de estabilidad establece que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \lambda / \alpha$$

- λ una cte. tal que

$$|(f,v)| \leq \lambda \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

- El menor valor posible de λ es entonces

$$\lambda = \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{|(f,v)|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}$$

- Así definido, λ es en cierta una medida de f.
- Definimos entonces la nueva norma

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \lambda = \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{|(f,v)|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}$$ norma en el espacio $H^{-1}(\Omega)$ dual de $H_0^1(\Omega)$

- Luego, la condición de estabilidad puede escribirse

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$$