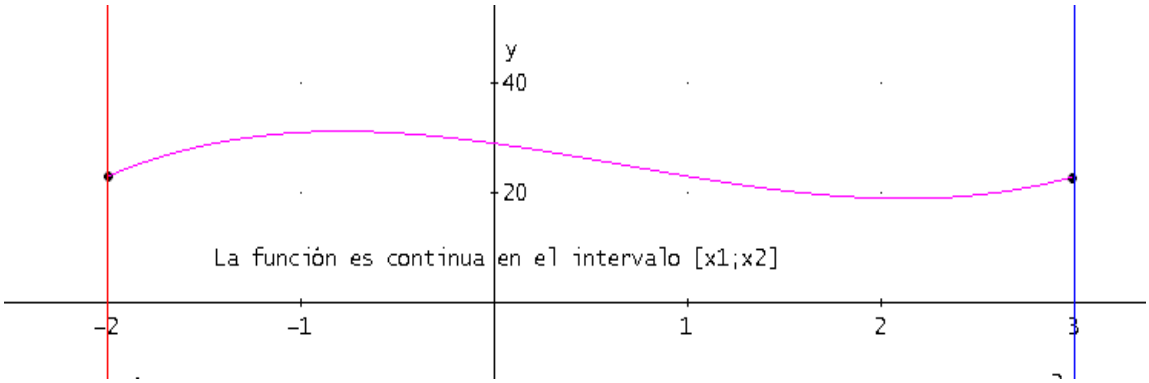
UNIDAD NºI.

LÌMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE R EN R

CAPÍTULO Nº2. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Concepto geométrico.

Geométricamente una función F es continua si su gráfica es una curva ininterrumpida para todo x perteneciente al dominio de F. La línea es continua en el intervalo:$[x_1; x_2]$



Continuidad de una función en un punto

Una función F es continua en un punto de abscisa x_0 sí y solo sí se verifican las tres condiciones siguientes:

i) $F(x_0)$ existe, es decir si $x_0 \in D_F$ entonces $F(x_0) \in R$.

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} F(x)$, existe, por tanto los límites laterales deben ser iguales, es decir: $\lim\limits_{x \to x_0^-} F(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} F(x)$

iii) $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$, Significa que $F(x_0)$ debe coincidir con $\lim\limits_{x \to x_0} F(x)$

Notas: .

1) La continuidad se analiza en cada uno de los números reales correspondientes a los extremos de los intervalos.

2) Cuando se dice que el límite existe, debe entenderse que el límite existe en forma finita, es decir, el límite es un número real.

Ejemplo Nº1

Dada la función $F(x)=\begin{cases} x^3+5 & si \quad x<-1 \\ 4 & si \quad x=-1 \\ 1-3x & si \quad x>-1 \end{cases}$,a) Hallar el dominio de F.

b) Analizar si la función es continua en x = –1.

Solución.

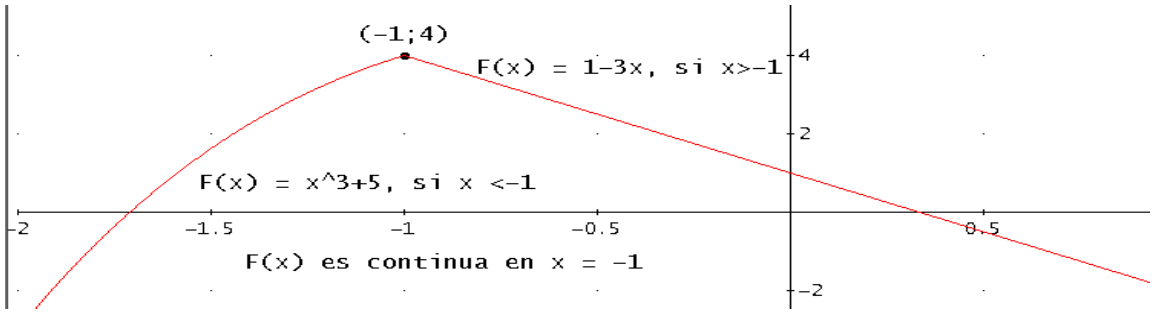
a) $D_F : x \in <-\infty;-1> \cup \{1\} \cup <-1;+\infty> = R$

b) Se analiza la continuidad en x = –1

i) F (–1) = 4; está definido,

ii) $\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} F(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left[x^3+5\right]=-1+5=4 \\ \lim\limits_{x\to -1^{+-}} F(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left[-3x\right]=1+3=4 \end{array}$;$\to$ $\lim\limits_{x\to -1^-} F(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} F(x)=4 \to \lim\limits_{x\to -1} F(x)=4$

iii) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=F(-1)=4$, se cumplen las tres condiciones de continuidad; luego la función f es continua en x = –1.



Continuidad.-Definición formal

Una función F es continua en el punto de abscisa x_0, con $x_0 \in D_F$ si para todo ε >0 existe un δ > 0 tal que $|F(x)-L|<\varepsilon$ siempre que $|x-x_0|<\delta$.

Simbólicamente:

F *es continua en* $x_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0;\ \exists\delta>0$ tal que: $|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon, s.q; x\in D_F, |x-x_0|<\delta\}$

Notas:

1. $|F(x)-L|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<F(x)-L<+\varepsilon;$ $\quad -\varepsilon+L<F(x)<\varepsilon+L$

2. $|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow -\delta<x-x_0<+\delta,$ $\quad -\delta+x_0<x<\delta+x_0$

Teoremas de continuidad de funciones en un número.

Si las funciones F y G son continuas en el número x_0 se cumplen:

a) (F+ G) (x) = F(x) + G(x), es continua en x_0

b) (F – G) (x) = F (x) – G)(x), es continua en x_0

c) (FG) (x) = [F(x)][G(x)], es continua en x_0

d) $\left(\frac{F}{G}\right)(x)=\frac{F(x)}{G(x)}$; es continua en x_0; siempre que $G(x) \neq 0$.

Teorema. Una función polinomial es continua en todos los reales

Teorema. Una función no polinomial(racional e irracional) es continua en todo número de su dominio.

Ejemplo Nº2

Sean las funciones $F(x)= x^3 – 8$ y $G(x) = x^2 – 5x + 4$.

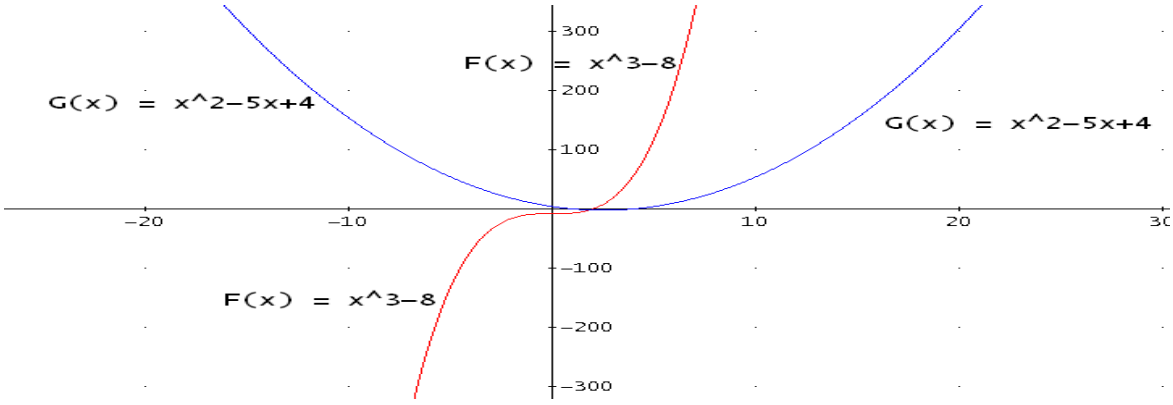
a) Diga usted si F y G son o no continuas en el número x = 4

b) Diga usted si: F + G; F – G; FG y F/G son continuas en x = 4

Solución.

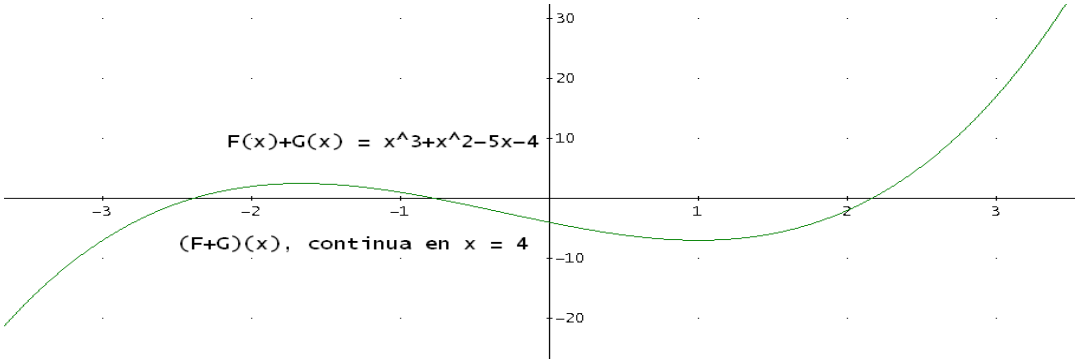
a) $F(x)= x^3 – 8$, función polinomial, es continua en R, luego es continua en x = 4

$G(x) = x^2 – 5x + 4$; función polinomial, es continua en R, luego es continua en x = 4

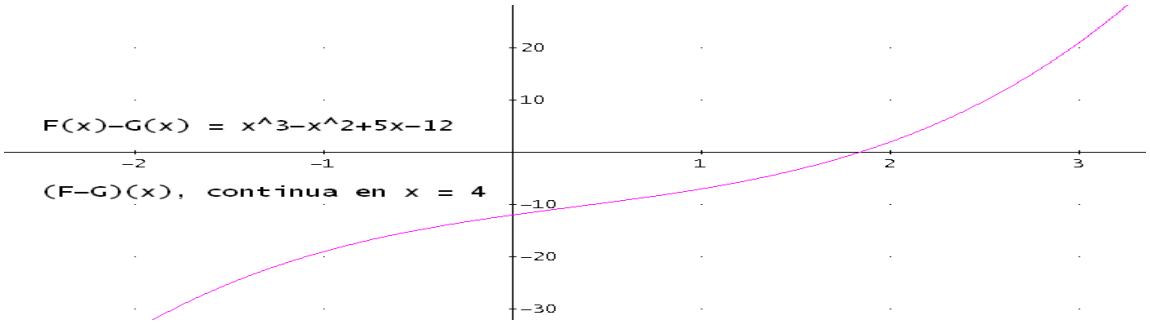


b) Las funciones F y G son polinomiales , continuas en x = 4; luego la suma, resta, multiplicación son funciones polinomiales luego continuas en x = 4

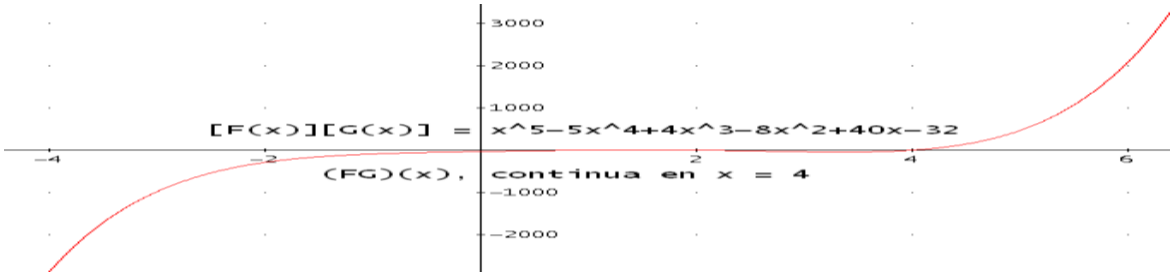
b-1)[F + G](x) = F(x) + G(x) = [x^3 – 8] + [x^2 –5x + 4] = x^3 –5x^2 + 4x – 4, función polinomial, continua en R, y continua en x = 4



b-2)[F – G](x) = F(x) – G(x) = [x^3 – 8] – [x^2 –5x + 4] = x^3 – x^2 +5x – 12, función polinomial, continua en R, y continua en x = 4



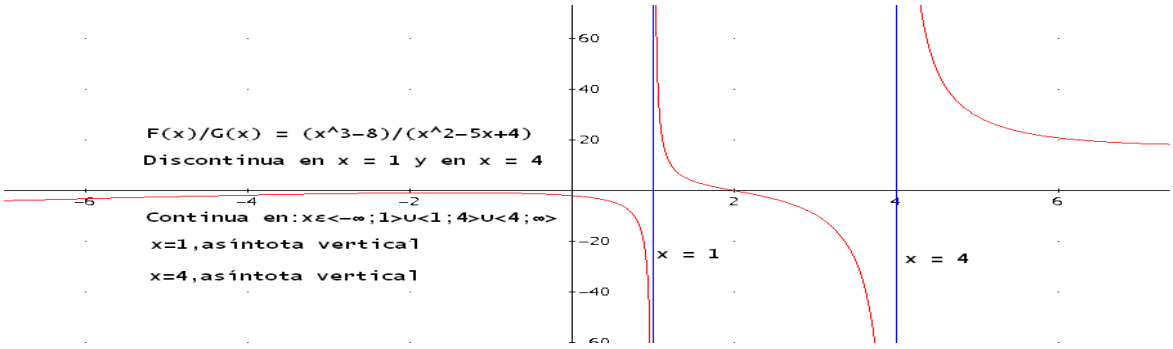
b-3)[F G](x) = [F(x)][G(x)] = [x^3 – 8] [x^2 –5x + 4] = x^5 + 2x^4 + 4x^3 – 8x^2 – 16x – 32, función polinomial, continua en R, y continua en x = 4.



b-4) $\left[\frac{F}{G}\right](x)=\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{x^3-8}{x^2-5x+4}$, función racional(cociente de dos funciones polinomiales)

La función racional es continua en su dominio.

$x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1) \neq 0, \rightarrow x \neq 1 ; x \neq 4; \rightarrow \quad x \in <-\infty ; 1> \cup <4; \infty>$



Teorema. Si n es un entero positivo y $F(x) = \sqrt[n]{x}$ entonces:

a) si n es impar, $F(x) = \sqrt[n]{x}$ es continua para todo x perteneciente a los reales

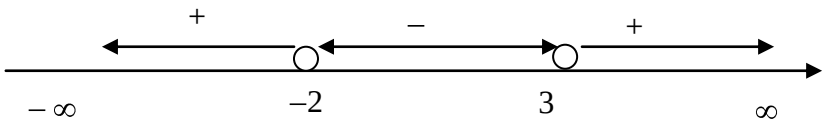
b) Si $n \geq 2$ es par, $F(x) = \sqrt[n]{x}$ es continua para todo x perteneciente a los reales no negativos.

Ejemplo Nº3

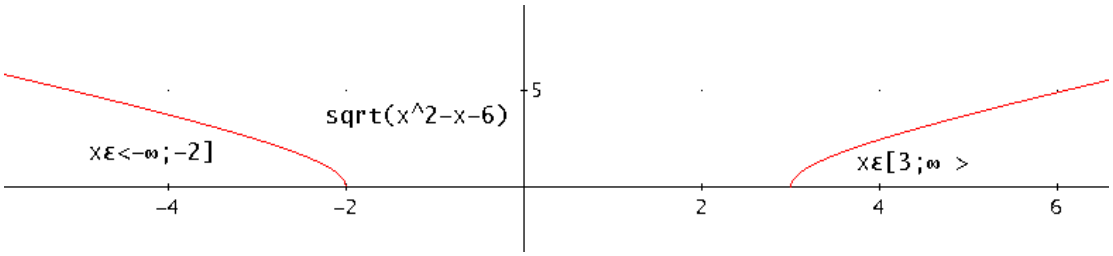
Sea la función a) $G(x)=\sqrt{x^2-x-6}$ b) $F(x)=\sqrt[5]{x-7}$, determinar todos los valores de x para los cuales las funciones son continuas.

Solución.

a) $G(x)=\sqrt{x^2-x-6}$, función irracional donde n = 2 es par, G es continua cuando la cantidad subradical es no negativa $x^2 - x - 6 \geq 0$; $(x - 3)(x + 2) \geq 0$,



La función es continua en su dominio: $x \in <-\infty; -2] \cup [3; \infty>$



b) b) $F(x)=\sqrt[5]{x-7}$, función irracional donde n = 5 es impar, F es continua en su dominio: $x \in <-\infty; \infty> = R$.

Ejemplo Nº 4

Hallar el valor de a y b para que la función. $F(x)=\begin{cases} 2x+5 & si \quad x>1 \\ 2a-b+1 & si \quad x=1 \\ ax+1 & si \quad x<1 \end{cases}$,

sea continua en x = 1

Solución.

a) Dominio $x \in <-\infty;1> \cup <1;\infty> = R$

b) posible punto de discontinuidad: x =1

i) F (1) = 2a – b + 1

ii) $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} ax+1 = a+1$
$\lim\limits_{x\to 1^{+-}} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+5 = 2+5=7$; $\to \quad \lim\limits_{x\to 1^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} F(x) \to \quad a+1=7; \to a=6$

iii) $\lim\limits_{x\to 1} F(x) = 7 = F(1)$; 7 = 2a – b + 1; 7 = 2(6) – b + 1; b = 6

Discontinuidad.

Si una o más de las condiciones de continuidad no se cumplen para x = x_0 entonces se dice que la función y = F(x_0) "es discontinua" en x = x_0.

Tipos de discontinudad.

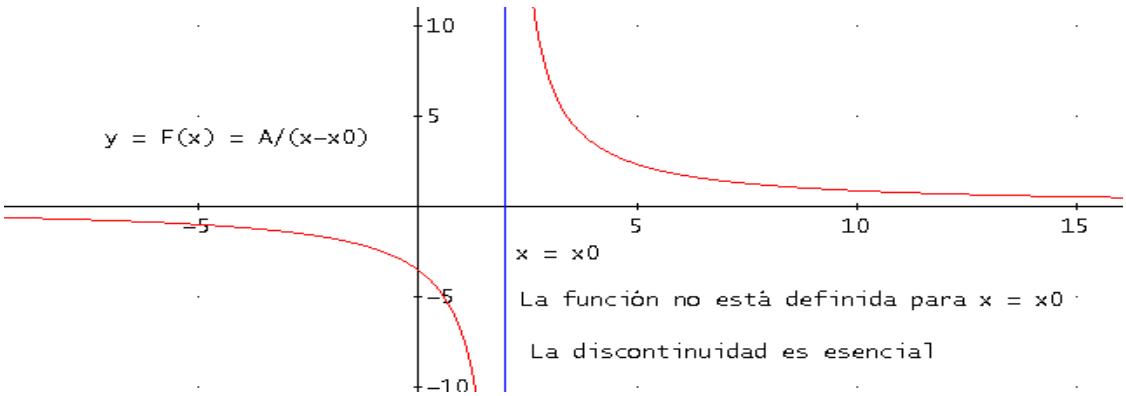
a) Esencial, y **b) Removible o evitable**

Discontinuidad esencial.

Se presenta cuando F(x_0) no existe y/o $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)$ no existe

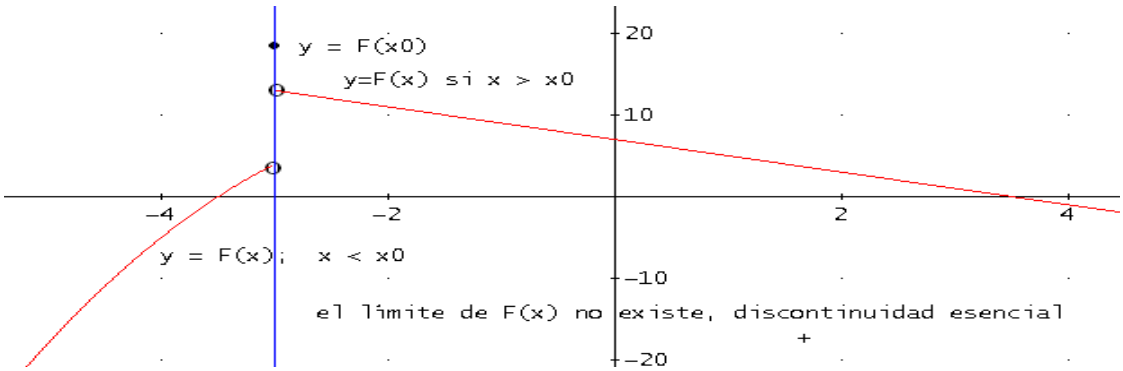
Representación geométrica de discontinuidad esencial

1) F(x_0) no está definida .La discontinudad es esencial



2) F(x_0) está definida; los limites laterales de F cuando x tiende a x_0 existen pero no son

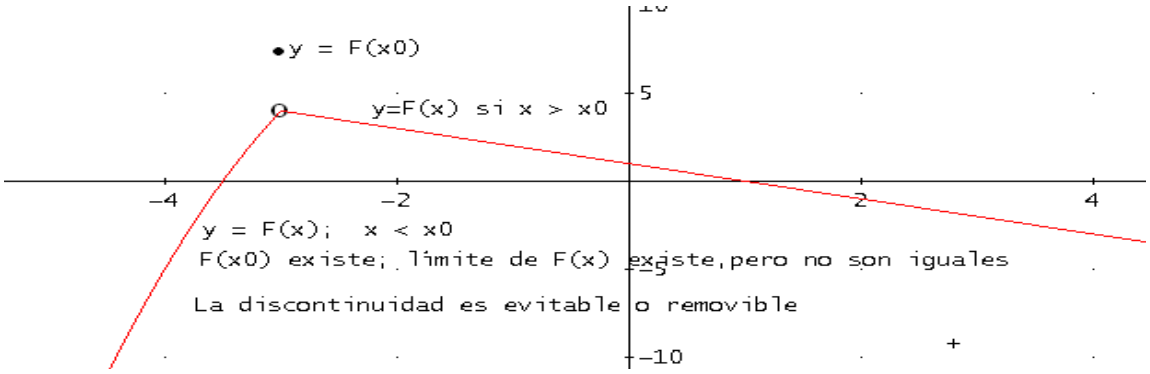
iguales, $\lim_{x \to x_0^-} F(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} F(x)$ luego el límite de F cuando x tiende a x_0 no existe; la discontinuidad es esencial.



Discontinuidad evitable o removible

Es aquella función discontinua que verifica las dos primeras condiciones de continuidad pero no la tercera,

i) $F(x_0)$ existe ;ii) $\lim_{x \to x_0} F(x)$, *existe* , pero $\lim_{x \to x_0} F(x) \neq F(x_0)$,



puede trasformarse en una función continua redefiniendo el valor de $F(x_0)$ para que sea igual a $\lim_{x \to x_0} F(x)$; es decir; $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$.

Ejemplo Nº 5

Dada la función $F(x) = \begin{cases} x+6 & si \quad x > 2 \\ 3 & si \quad x = 2 \\ 7x-6 & si \quad x < 2 \end{cases}$

a) Analizar si es continua en x = 2. b) Si es discontinua de que tipo es. c) Si es de discontinuidad evitable redefina la función para que sea continua

Solución.

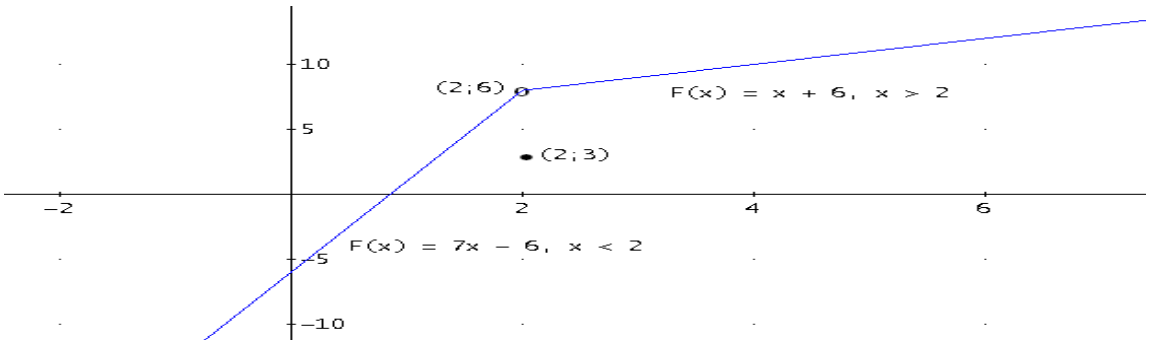
$D_F : x \in <-\infty;2> \cup \{2\} \cup <2;+\infty> = R$

a)Se analiza la continuidad en x = 2

1.)i) x = 2; existe., f (2) = 3, está definido,

ii) $\lim\limits_{x\to 2^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x-6 = 14-6 = 8$
$\lim\limits_{x\to 2^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x+6 = 2+6 = 8$;$\rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 2^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} F(x) = 8 \rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 2} F(x) = 8$

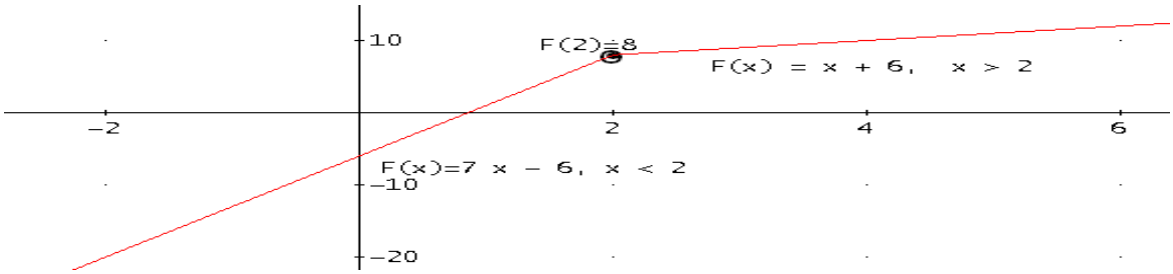
iii) $\left[\lim\limits_{x\to 2} F(x) = 8\right] \neq \left[F(2) = \lim\limits_{x\to 2} F(x) = 8\right)$, no es continua.



b) F (2) existe; $\lim\limits_{x\to 2} F(x)$ *existe* luego discontinuidad evitable o removible.

c) Para que la función F sea continua: F (2) debe ser igual a 8, luego:

$$F(x) = \begin{cases} x+6 & si \quad x > 2 \\ 8 & si \quad x = 2 \\ 7x-6 & si \quad x < 2 \end{cases}$$



Ejemplo Nº 6

Dada la función $F(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & si \quad x > -2 \\ \dfrac{5}{x+2} & si \quad x = -2 \\ 3-4x & si \quad x < -2 \end{cases}$

a) Analizar si es continua en x = –2. b) Si es discontinua de que tipo es. c) Si es de discontinuidad evitable redefina la función para que sea continua

Solución.

$D_F : x \in <-\infty;-2> \cup \{-2\} \cup <-2;+\infty> = R$

a) Se analiza la continuidad en x = –2

i.) $F(-2) = \dfrac{5}{-2+2} = \dfrac{5}{0}$; *no definido* , la función F no es continua en x = –2

b) La función F es discontinua, tipo de discontinuidad: esencial.

Ejemplo Nº 7

Dada la función $F(x) = \begin{cases} 9-2x & si \quad x>3 \\ 5 & si \quad x=3 \\ x^2-9 & si \quad x<3 \end{cases}$

a) Analizar si es continua en x =3. b) Si es discontinua de que tipo es. c) Si es de discontinuidad evitable redefina la función para que sea continua

Solución.

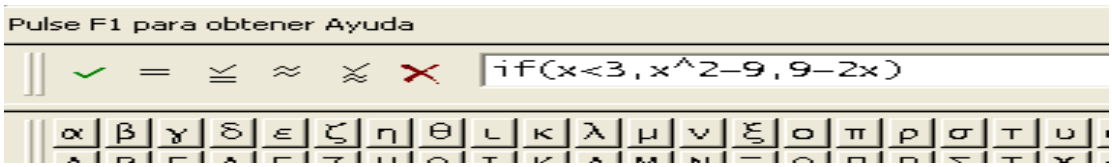
$D_F : x \in <-\infty;3> \cup \{3\} \cup <3;+\infty> = R$

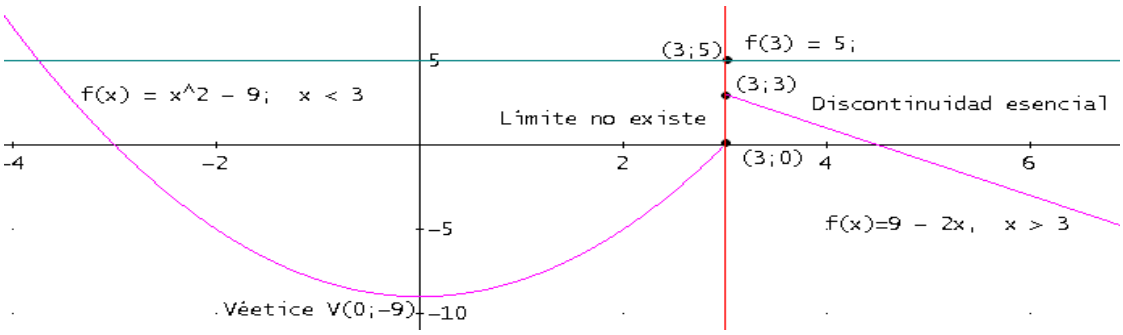
a)Se analiza la continuidad en x = 3

i.) x = 3; F(3) = 5, está definido,

$$\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 3^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \left(x^2-9\right) = 9-9=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^{+-}} F(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \left(9-2x\right) = 9-6=3 \end{matrix} ; \rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 3^-} F(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} F(x) \rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 3} F(x), no\ exite$$

La función es discontinua, **discontinuidad esencial.**





Ejercicios de Reforzamiento

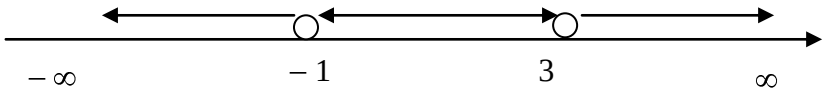
Ejemplo Nº8

Sea la función $F(x)=\dfrac{2x-5}{3+2x-x^2}$, determinar todos los valores de x para los cuales la función es continua.

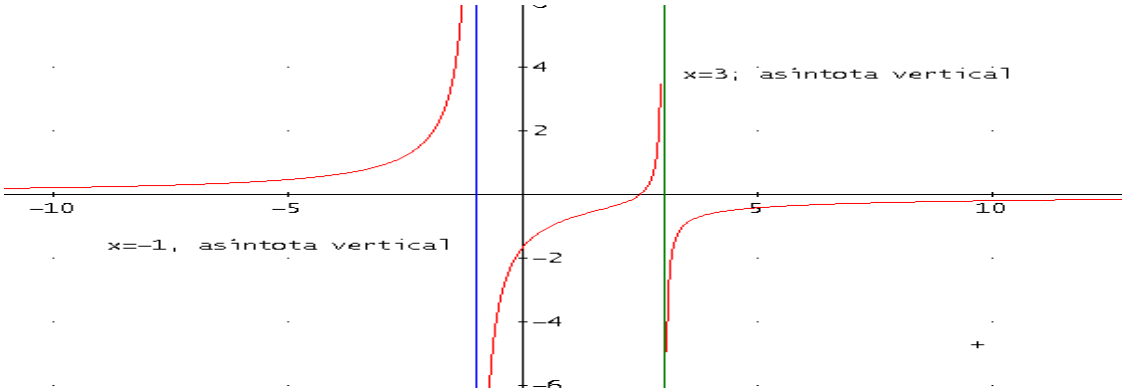
Solución.

La función racional es continua en todo número de su dominio.

El dominio de F es : $3 + 2x - x^2 \neq 0$; también $x^2 - 2x - 3 \neq 0$; $(x - 3)(x + 1) \neq 0$



La función es continua en: $x \in \langle -\infty ; -1 \rangle \cup \langle -1; 3 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$



Ejemplo Nº9

Sea la función: $y=F(x)=\begin{cases} x^2+5 & si \quad x<1 \\ 2 & si \quad x=1 \\ 9-3x & si \quad x>1 \end{cases}$ a) Hallar el dominio de F. b) Analizar si la función es continua en x = 1

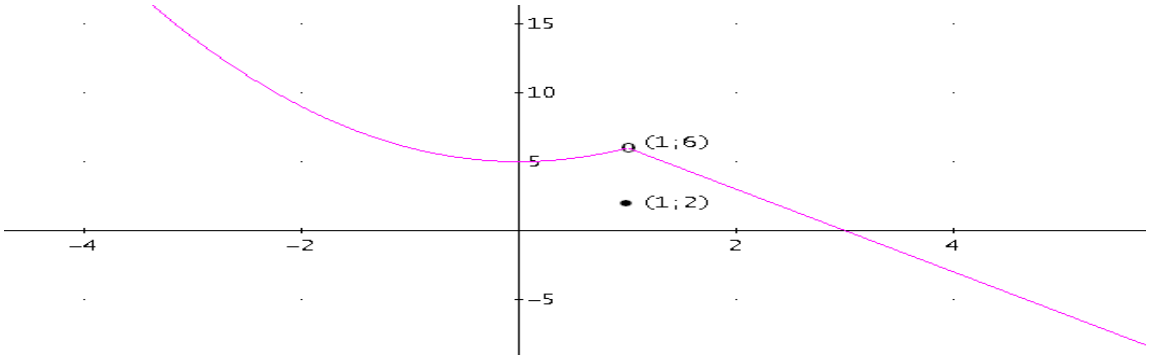
Solución.

a) Dominio de F: $x \in \langle -\infty ; 1 \rangle \cup \{1\} \cup \langle 1; \infty \rangle = R$

b) i) F(1) = 2;

ii) $\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2+5=1+5=6 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 9-3x=9-3=6 \end{array}; \rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 1^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)=6 \rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 1} F(x)=6$

iii) $\lim_{x\to 1} F(x) \neq F(1)$, la función no es continua



Ejemplo Nº10

Dada la función $F(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad x\neq 1 \\ 3 & si \quad x=1 \end{cases}$ a) ¿Cual es el dominio de F? b) Esbozar la grafica de F. c) Analizar si F es continua en x =1

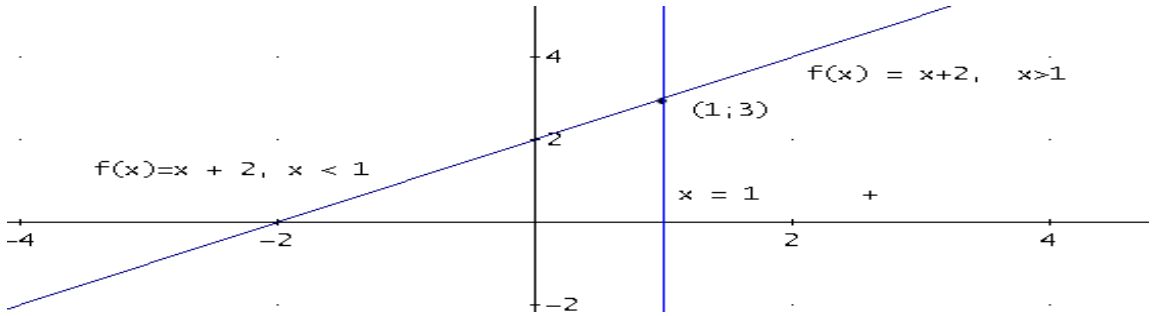
Solución.

a) Dominio de F:

x ≠ 1 ,significa: x >1 ó x <1,luego $F(x)=\begin{cases} x+2; & si \ x<1 \\ 3; & si \ x=1 \\ x+2; & si \ x>1 \end{cases}$

$D_F : x \in <-\infty;1> \cup \{1\} \cup <1;+\infty> = R$

b) Grafica de F



c) Se analiza la continuidad en x = 1

i) F (1) = 3; está definido,

ii) $\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^-} x+2 = 1+2=3$
$\lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x\to 1^+} x+2 = 1+2=3$; $\to \lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^+} F(x) = 3 \to \lim_{x\to 1} F(x) = 3$

iii) $\lim_{x\to 1} f(x) = F(1) = 3$

se cumplen las tres condiciones de continuidad; luego la función f es continua en x = 1.

Ejemplo Nº11

Hallar el valor de a y b para que la función f sea continua. $F(x)=\begin{cases} 3x-5 & si \quad x<2 \\ a & si \quad x=2 \\ 2x+b & si \quad x>2 \end{cases}$

Solución.

a) Dominio $x \in <-\infty;2> \cup \{2\} \cup <2;\infty> = R$

b) se analiza la continuidad para x = 2

1.) F (2) = a

2.) $\lim\limits_{x\to 2} F(x);\ debe\ existir$, luego

$\lim\limits_{x\to 2^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} F(x)$, es decir los límites laterales deben ser iguales.

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3x-5) = 3(2^-)-5 = 6^- - 5 = 1^- \\ \lim\limits_{x\to 2^{+-}} F(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2x+b) = 2(2^+)+b = 4^+ + b \end{array} \quad \to\ 1 = 4+b, \to\ b=-3;$$

$\lim\limits_{x\to 2} F(x) = 1$

3.) $F(2) = \lim\limits_{x\to 2} F(x), \to$ a = 1

Ejemplo Nº12

Hallar: $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\right]$, en los casos siguientes:

a)y = F(x) = C ; C es una función constante.b)y = F(x) = ax + b ; es una función lineal.

Solución.

a)F(x+h) = C;F(x**) = C;** F(x+h) – F(x) = C – C = 0**;** $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{0}{h} = 0$

$\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{0}{h}\right] = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-}{-} = 0$ **,el límite de una constante es la misma constante**

b) F(x +h) = a(x +h) + b = ax +ah +b;F(x) = ax +b, **F(x +h) – F(x) = ah**

$\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{ah}{h} = a$ **;** $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{ah}{h}\right] = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-}{-} = a$

Ejemplo Nº 13

Dada la función $F(x)=\begin{cases} \dfrac{14}{x} & si \quad x\geq 2 \\ 3x+1 & si \quad x<2 \end{cases}$ a) Analizar si es continua en x = 2. b) Si es discontinua de que tipo es. c) Si es de discontinuidad evitable redefina la función para que sea continua

Solución.

Dominio de F(x): x ∈ <–∞ ; 2 > ∪ [2; ∞ > = <–∞ ; ∞ ≥ $F(x)=\begin{cases} \dfrac{14}{x}; & si \ x>2 \\ \dfrac{14}{x}; & si \ x=2 \\ 3x+1 & si \ x<2 \end{cases}$

Se analiza la continuidad x = 2

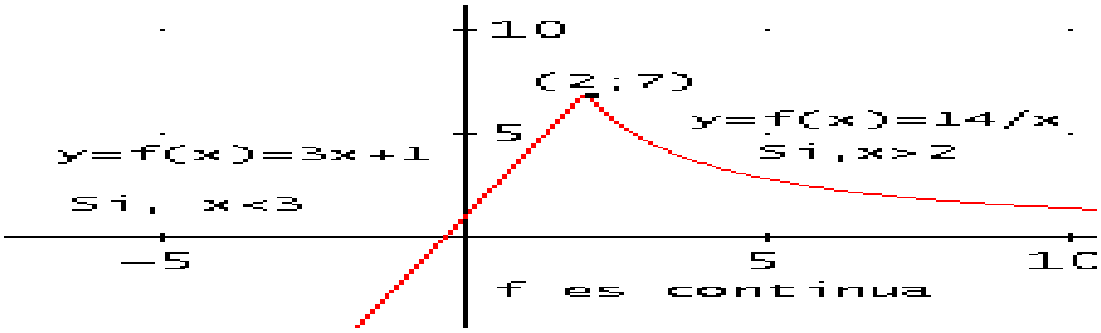
1.) x = 2; $F(2)=\dfrac{14}{2}=7$, está definido,

2.1) $Si \ \ x\rangle 2, entonces \ \ x\to 2^{+}; F(x)=\dfrac{14}{x}$; $\lim\limits_{x\to 2^{+}} F(x)=\lim\limits_{x\to 2^{+}}\left[\dfrac{14}{x}\right]=7$

2.2) $Si \ \ x<2, entonces \ \ x\to 2^{-}$;F(x) = 3x+1; $\lim\limits_{x\to 2^{-}} F(x)=\lim\limits_{x\to 2^{-}}(3x+1)=6+1=7$

$\lim\limits_{x\to -1^{-}} F(x)=\lim\limits_{x\to -1^{+}} F(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} F(x)=7$;

3.) $F(2)=7=\lim\limits_{x\to 2} F(x)$. la función es continua; en x = 2.



Ejemplo Nº 14

Dada la función**:**

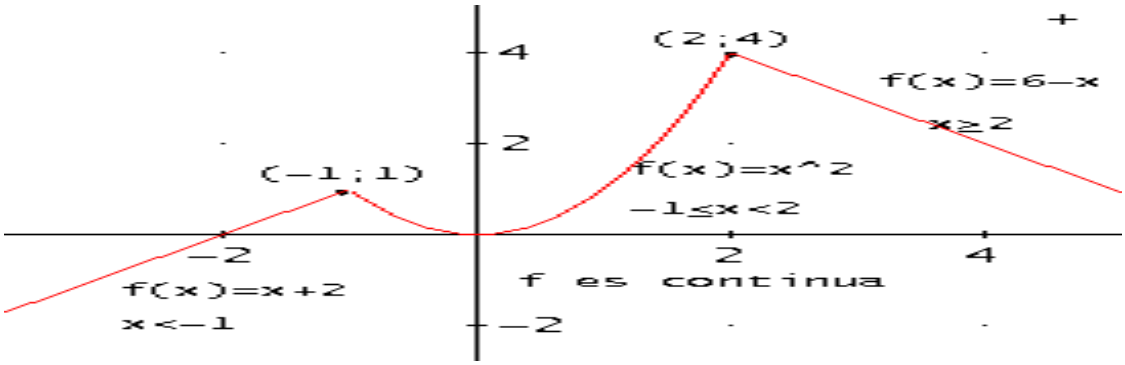
$y=F(x)=\begin{cases} x+2, & si, \ x<-1 \\ x^{2}; & si; \ -1\leq x<2 \\ 6-x, & si, x\geq 2 \end{cases}$ **;**a) Trazar la gráfica de F e indicar el dominio

b) Analizar la continuidad de la función.

Solución.

a) Dominio de F: $<-\infty;-1> \cup [-1;2> \cup [2;\infty> = R$

:



b) Se analiza la continuidad en x = –1, x = 2

Continuidad de la función en x = –1,

1) $F(-1) = (-1)^2 = 1$

2.1) $\lim_{x\to -1^-} F_1(x) = \lim_{x\to -1^-} (x+2) = -1+2 = 1;$

2.2) $\lim_{x\to -1^+} F_2(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2) = (-1)^2 = 1$

$\lim_{x\to -1^-} F_1(x) = 1 = \lim_{x\to -1^+} F_2(x) \to \lim_{x\to -1} F(x) = 1$

3) $F(-1) = 1 = \lim_{x\to -1} F(x);$ la función f es continua en x = – 1.

Continuidad de la función en x = 2,

1) $F(2) = 6 - 2 = 4$

2.1) $\lim_{x\to 2^-} F_2(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2) = (2)^2 = 4;$

2.2) $\lim_{x\to 2^+} F_3(x) = \lim_{x\to 2^+} (6-x) = 6-2 = 4$

$\lim_{x\to 2^-} F(x) = 4 = \lim_{x\to 2^+} \to \lim_{x\to 2} F(x) = 4$

3) $F(2) = 4 = \lim_{x\to 2} F(x);$ la función f es continua en x = 2

La función f es continua en todo su dominio.

Ejemplo Nº 15

Hallar a y b para que F sea continua en todo los reales.

a) $y = F(x) = \begin{cases} x^2+3, & si,\ x \le 1 \\ ax+b; & si;\ 1 < x < 5 \\ 2x+6, & si, x \ge 5 \end{cases}$; **b)** $y = F(x) = \begin{cases} 5-x^2, & si,\ x \le -2 \\ ax+b; & si;\ -2 < x < 3 \\ x+8, & si, x \ge 3 \end{cases}$

Solución.

a) $y = F(x) = \begin{cases} x^2+3, & si,\ x \le 1 \\ ax+b; & si;\ 1 < x < 5 \\ 2x+6, & si, x \ge 5 \end{cases}$; Dominio de F: x∈<–∞; 1] ∪<1; 5 > ∪[5; ∞ >= R

Continuidad en x = 1

i) F(1) = $(1)^2$ + 3 = 1 + 3 = 4

ii) $\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2+3 = 1+3 = 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} ax+b = a+b \end{array} \rightarrow a+b = 4$ (1)

Continuidad en x = 5

i) F(5) = 2(5) + 6 = 10 + 6 = 16

ii) $\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 5^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} ax+b = 5a+b \\ \lim\limits_{x\to 5^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} x+6 = 10+6 = 16 \end{array} \rightarrow 5a+b = 16$ (2)

Resolviendo el sistema: a = 3; b = 1

b) $y = F(x) = \begin{cases} 5-x^2, & si,\ x \le -2 \\ ax+b; & si;\ -2 < x < 3 \\ x+8, & si, x \ge 3 \end{cases}$;

a)Dominio de F:x∈<–∞; –2]∪<–2;3 ∪[3; ∞ > = R

Continuidad en x =–2

i) F(–2) = 5 –$(-2)^2$ = 5 – 4 = 1

ii) $\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 5-x^2 = 5-4 = 1 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} ax+b = -2a+b \end{array} \rightarrow 1 = -2a+b$ (1)

Continuidad en x = 3

i) F(3) = 3 + 8 = 11

ii) $\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} ax+b = 3a+b \\ \lim\limits_{x\to 3^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} x+8 = 3+8 = 11 \end{array} \rightarrow 3a+b = 11$ (2)

Resolviendo el sistema: a = 2; b = 5

Continuidad en un Intervalo(OPCIONAL)

1) Continuidad en un intervalo abierto:

Una función F es continua en un intervalo abierto < a; b> si y sólo si es continua en todo número de dicho intervalo. si $\forall x_0 \in$< a; b>, se verifica que.

i) $F(x_0) \in R$; ii) $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) \in R$; $iii)$ $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$

2) Continuidad a la derecha del número a.

Una función es continua a la derecha del número a $\in$[a; b > si y sólo si se verifica:

i) $F(a^+) \in R$; ii) $\lim\limits_{x \to a^+} F(x) \in R$; iii) $\lim\limits_{x \to a^+} F(x) = F(a^+)$

3) Continuidad a la izquierda del número b.

Una función es continua a la izquierda del número b $\in$ < a; b] si y sólo si se verifica:

i) $F(b^-) \in R$; ii) $\lim\limits_{x \to b^-} F(x) \in R$; iii) $\lim\limits_{x \to b^-} F(x) = F(b^-)$

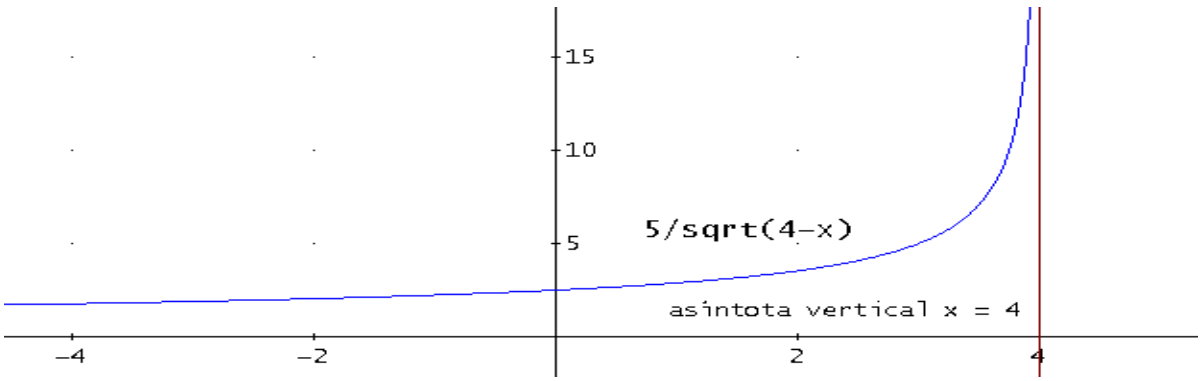
4) Continuidad en un intervalo cerrado:

Una función cuyo dominio es el intervalo cerrado [a; b] es continua en [a; b] si y sólo si es continua en el intervalo abierto < a; b > y continua a la derecha de a y a la izquierda de b.

Ejemplo Nº16

Demostrar si la función $y = F(x) = \dfrac{5}{\sqrt{4-x}}$ es continua en el intervalo [1; 4 >

Solución.



Para demostrar que la función $y = F(x) = \dfrac{5}{\sqrt{4-x}}$ es continua en el intervalo [1; 4 > debemos demostrar que es: a) continua en el intervalo abierto < 1; 4 > y b) continua a la derecha de 1.

a) Continuidad en el intervalo abierto < 1; 4 >; $\forall x_0 \in$ < 1; 4 >

$$F(x_0)=\frac{5}{\sqrt{4-x_0}}\in R;\ \lim_{x\to x_0} F(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{5}{\sqrt{4-x}}=\lim_{x\to x_0}\frac{5}{\sqrt{4-x_0}}\in R;\ \lim_{x\to x_0} F(x)=F(x_0)$$

La función F es continua en el intervalo < 1; 4 >

b) Continuidad a la derecha del número 1

i) $F(1^+)=\frac{5}{\sqrt{4-1^+}}=\frac{5}{\sqrt{3^-}}\in R$; ii) $\lim_{x\to 1^+} F(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{5}{\sqrt{4-x}}=\frac{5}{\sqrt{4-1^+}}=\frac{5}{\sqrt{3^-}}\in R,$

iii) $\lim_{x\to 1^+} F(x)=F(1^+)$, la función F es continua a la derecha de 1.

Por tanto la función F es continua en [1; 4 >

Notas

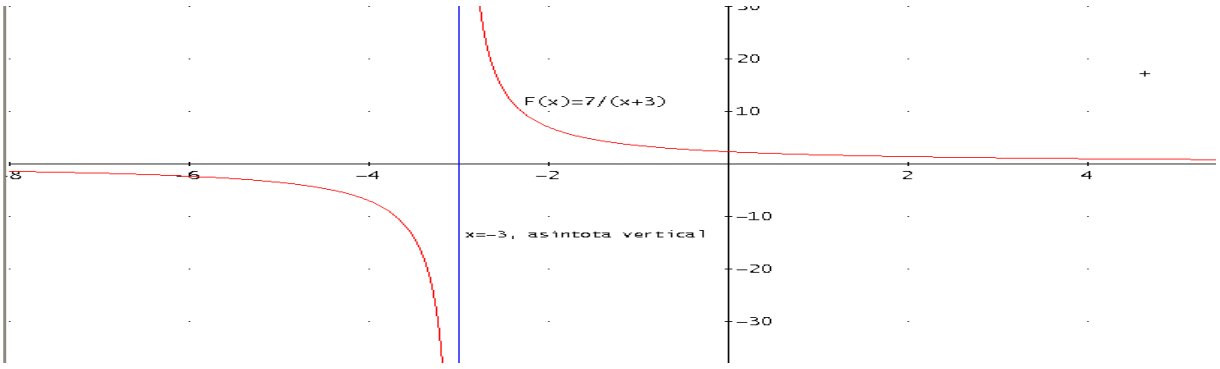
1) La función irracional $y=F(x)=\frac{5}{\sqrt{4-x}}$ es continua en su dominio, pero por encontrarse en el denominador;, 4 – x > 0 $\rightarrow$ x < 4 $\rightarrow$ x $\in$<–∞ : 4 >

2) [1; 4 > $\in$<–∞ : 4 >, por tanto F es continua en [1; 4 >

Ejemplo Nº17

Demostrar si la función $y=F(x)=\frac{7}{x+3}$ es continua en el intervalo < – 3; 8]

Solución.



Para demostrar que la función $y=F(x)=\frac{7}{x+3}$ es continua en el intervalo < – 3; 8] debemos demostrar que es: a) continua en el intervalo abierto < – 3; 8 > y b) continua a la izquierda de 8.

a) Continuidad en el intervalo abierto < – 3; 8 > ; $\forall x_0 \in$ < – 3; 8 >

$$F(x_0)=\frac{7}{x_0+3}\in R;\ \lim_{x\to x_0} F(x)=\frac{7}{x_0+3}\in R;\ \lim_{x\to x_0} F(x)=F(x_0)$$

La función F es continua en el intervalo < – 3; 8 >

b) Continuidad a la izquierda de 8

i) $F(8^-)=\frac{7}{8^-+3}=\frac{7}{11^-}\in R$;ii) $\lim_{x\to 8^-} F(x)=\lim_{x\to 8^-}\frac{7}{8^-+3}=\frac{7}{11^-}\in R$, iii) $\lim_{x\to 8^-} F(x)=F(8^-)$,

la función F es continua a la izquierda de 8

Por tanto la función F es continua en < – 3; 8]

Notas

1) La función racional $y=F(x)=\frac{7}{x+3}$ es continua en su dominio, pero por encontrarse en el denominador; 4 – x > 0 → x < 4 → x ∈<–∞ : 4 >

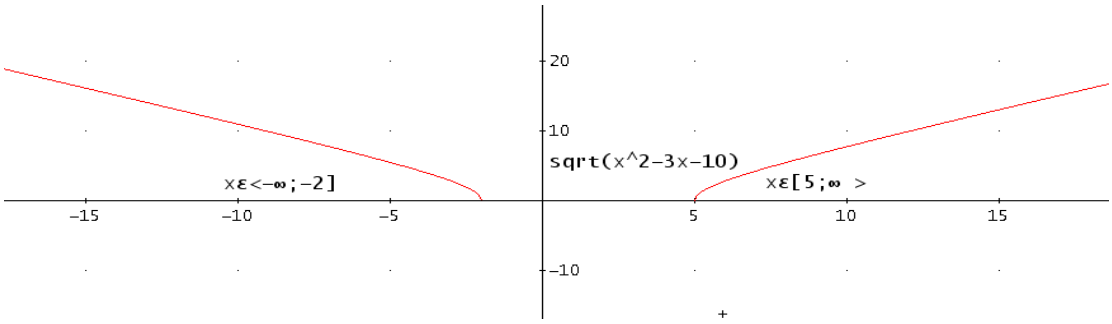
2) [1; 4 > ∈<–∞ : 4 >, por tanto F es continua en [1; 4 >

Ejemplo Nº18

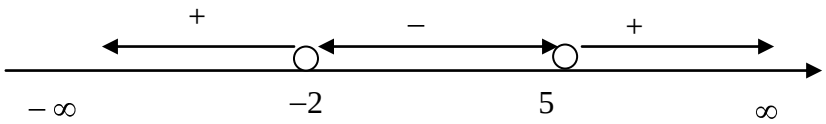
Demostrar que la función $y=F(x)=\sqrt{x^2-3x-10}$ es continua en el intervalo [6; 11]

Solución.

Dominio de F:



$x^2 - 3x - 10 \geq 0$, → (x + 2)(x – 5) ≥ 0,→ puntos críticos x = – 2; x = 5



Dominio x ∈ <–∞;–2] ∪ [5 ;∞ >

Para demostrar que $y = F(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 10}$ es continua en el intervalo cerrado [6; 11] debemos demostrar que es: a) continua en el intervalo abierto < 6; 11 >; y b) continua a la derecha de x = 6 y continua a la izquierda de x = 11.

a) Continuidad en el intervalo abierto < 6; 11 >; $\forall x_0 \in$ < 6; 11 >

$$F(x_0) = \sqrt{x_0^2 - 3x_0 - 10} \in R;\ \lim_{x \to x_0} F(x) = \sqrt{x_0^2 - 3x_0 - 10} \in R;\ \lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$$

La función F es continua en el intervalo abierto <6; 11 >

b) continuidad a la derecha de x = 6 y continuidad a la izquierda de x = 11.

b-1) Continuidad a la derecha de x = 6 b-2)Continuidad a la izquierda de x = 11

x > 6 o x $\to$ 6^+ x < 11 o x $\to$ 11^-

i) $F(6^+) = \sqrt{36 - 18 - 10} = \sqrt{8}$ i) $F(11^-) = \sqrt{121 - 33 - 10} = \sqrt{78}$

ii) $\lim_{x \to 6^+} F(x) = \sqrt{36 - 18 - 10} = \sqrt{8}$ ii) $\lim_{x \to 11^-} F(x) = \sqrt{121 - 33 - 10} = \sqrt{78}$

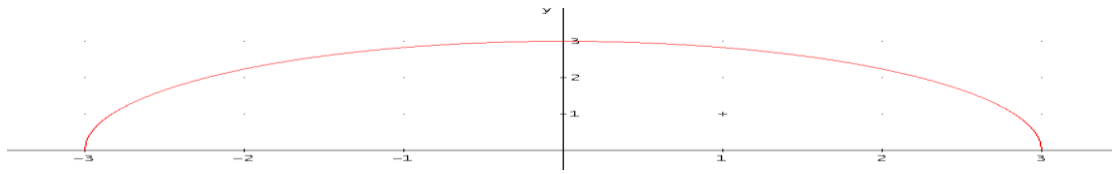
iii) $\lim_{x \to 6^+} F(x) = F(6^+)$ iii) $\lim_{x \to 11^-} F(x) = F(11^-)$

La función es continua a la derecha de x = 6 y a la izquierda de x = 11, por tanto es continua el intervalo cerrado [6; 11].

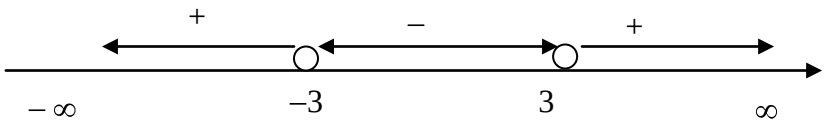
Ejemplo Nº19

Demostrar que la función $y = F(x) = \sqrt{9 - x^2}$ es continua en el intervalo cerrado [– 3; 3]

Solución.



9 – $x^2 \geq 0$, $\to$ $x^2 - 9 \leq 0$, $\to$ (x + 3) (x – 3) $\leq$ 0



Dominio: x $\in$ [– 3; 3]

Para demostrar que $y = F(x) = \sqrt{9 - x^2}$ es continua en el intervalo cerrado [– 3; 3] debemos demostrar que es: a) continua en el intervalo abierto <– 3; 3 >; y b) continua a la derecha de x = – 3 y continua a la izquierda de x = 3.

a) Continuidad en el intervalo abierto <– 3; 3 >;; $\forall x_0 \in$ <– 3; 3 >;

$$F(x_0) = \sqrt{x_0^2 - 3x_0 - 10} \in R;\ \lim_{x \to x_0} F(x) = \sqrt{x_0^2 - 3x_0 - 10} \in R;\ \lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$$

La función F es continua en el intervalo abierto < –3; 3 >

b) continuidad a la derecha de x = –3 y continuidad a la izquierda de x = 3.

b-1)Continuidad a la derecha de x = – 3

i) $F(-3^+) = \sqrt{9 - 9^-} = \sqrt{0^+} = 0$

ii) $\lim_{x \to -3^+} F(x) = \sqrt{9 - 9^-} = \sqrt{0^+} = 0$

iii) $\lim_{x \to -3^+} F(x) = F(3^+)$

b-2)Continuidad a la izquierda de x = 3

i) $F(3^-) = \sqrt{9 - 9^-} = \sqrt{0^+} = 0$

ii) $\lim_{x \to 3^-} F(x) = \sqrt{9 - 9^-} = \sqrt{0^+} = 0$

iii) $\lim_{x \to 3^-} F(x) = F(3^-)$

La función es continua a la derecha de x = – 3 y a la izquierda de x = – 3 , por tanto es continua el intervalo cerrado [– 3; 3]

AUTOEVALUACIÓN Nº1

Dada la función F(x) a) Analizar si es continua en x = x_0 .b) Si es discontinua de que tipo es.

c) Si es de discontinuidad evitable redefina la función para que sea continua .d) Graficar

1.) $F(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x \neq 2 \\ 5 & si\ x = 2 \end{cases}$ 2.) $F(x) = \begin{cases} 7-4x & si\ x \neq 1 \\ 6 & si\ x = 1 \end{cases}$;3.) $F(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x < -1 \\ 2 & si\ x = -1 \\ 5x+3 & si\ x > -1 \end{cases}$

4.) $F(x) = \begin{cases} 4x-3 & si\ x < 2 \\ \dfrac{x-1}{x-2} & si\ x = 2 \\ 7-x & si\ x > 2 \end{cases}$; 5.) $F(x) = \begin{cases} 2x+7 & si\ x < -5 \\ -3 & si\ x = -5 \\ x+2 & si\ x > -5 \end{cases}$ 6.) $F(x) = \begin{cases} x^2+6 & si\ x < 1 \\ 7 & si\ x = 1 \\ 3x+4 & si\ x > 1 \end{cases}$

7.) $F(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x < 1 \\ 7 & si\ x = 1 \\ 3x+4 & si\ x > 1 \end{cases}$, 8.) $F(x) = \begin{cases} 5x-3 & si\ x > 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & si\ x = 1, \\ x+1 & si\ x < 1 \end{cases}$ 9.) $F(x) = \begin{cases} x+5 & si\ x > 4 \\ \dfrac{9}{x-3} & si\ x = 4 \\ 2x+1 & si\ x < 4 \end{cases}$

10.) $F(x)=\begin{cases} 3x-7 & si\ \ x>-2 \\ \dfrac{13}{x+1} & si\ \ x=-2 \\ 2x+5 & si\ \ x<-2 \end{cases}$; 11.) $F(x)=\begin{cases} 5x-3 & si\ \ x>2 \\ \dfrac{7}{x-1} & si\ \ x=2 \\ x^2+3 & si\ \ x<2 \end{cases}$; 12.) $F(x)=\begin{cases} x+4 & si\ \ x>3 \\ \dfrac{9}{x-2} & si\ \ x=3 \\ 2x+1 & si\ \ x<3 \end{cases}$

Determinar los valores de a y/o b para que la función sea continua.

13) $F(x)=\begin{cases} ax+5 & si\ \ x>2 \\ x-3 & si\ \ x\le 2 \end{cases}$ en x = 2

14) $F(x)=\begin{cases} 3x+a & si\ \ x>-2 \\ b+4 & si\ \ x=-2 \\ 2x-5 & si\ \ x<-2 \end{cases}$; en x = –2

15) $F(x)=\begin{cases} ax+7 & si\ \ x>3 \\ 5b+4 & si\ \ x=3 \\ 5x+4 & si\ \ x<3 \end{cases}$, en x = 3

16) $F(x)=\begin{cases} 2x^2-5 & si\ \ x>1 \\ 2b-11 & si\ \ x=1 \\ ax+7 & si\ \ x<1 \end{cases}$, en x = 1

17) $F(x)=\begin{cases} ax-1 & si\ \ x>2 \\ \dfrac{5}{bx-1} & si\ \ x=2 \\ x+3 & si\ \ x<2 \end{cases}$, en x = 2

18) $F(x)=\begin{cases} 2x+5 & si\ \ x>1 \\ \dfrac{21}{bx+2} & si\ \ x=1 \\ ax+2 & si\ \ x<1 \end{cases}$, en x = 1

19) $F(x)=\begin{cases} ax-11 & si\ \ x>7 \\ \sqrt{x+b} & si\ \ x=7 \\ x-4 & si\ \ x<7 \end{cases}$, en x = 7

20) $F(x)=\begin{cases} 4x+7 & si\ \ x\ge 1 \\ ax+3 & si\ \ x<1 \end{cases}$, en x = 1

21) $F(x)=\begin{cases} x+9 & si\ \ x>4 \\ b-3 & si\ \ x=4 \\ ax-7 & si\ \ x<4 \end{cases}$, en x = 4

22) $F(x)=\begin{cases} ax+6 & si\ \ x>3 \\ 3b-5 & si\ \ x=3 \\ 5x+3 & si\ \ x<3 \end{cases}$, en x = 3

23) $F(x)=\begin{cases} 2x^2+3 & si\ \ x>1 \\ 2b-9 & si\ \ x=1 \\ ax-2 & si\ \ x<1 \end{cases}$, en x = 1

24) $F(x)=\begin{cases} ax+1 & si\ \ x>2 \\ \dfrac{5}{bx+4} & si\ \ x=2 \\ 2x+3 & si\ \ x<2 \end{cases}$, en x = 2

25) $F(x)=\begin{cases} 3x+1 & si\ \ x>-1 \\ \dfrac{2}{bx-2} & si\ \ x=-1 \\ ax+7 & si\ \ x<-1 \end{cases}$, en x = 1

27.) $F(x)=\begin{cases} ax-19 & si\ \ x>-4 \\ \sqrt{x+b} & si\ \ x=-4 \\ x+5 & si\ \ x<-4 \end{cases}$, en x =–4

27) $F(x)=\begin{cases} ax-2 & si\ \ x>-2 \\ 2b+7 & si\ \ x=-2 \\ 2x+5 & si\ \ x<-2 \end{cases}$, en x = –2

28) $F(x)=\begin{cases} 2x^2+5 & si\ \ x>3 \\ 3b+7 & si\ \ x=3 \\ ax-3 & si\ \ x<3 \end{cases}$, en x =3

Dada la función y = F(x);a) trazar la gráfica; b) analizar la continuidad de F en R

29) $y=F(x)=\begin{cases} 3x+7, & si,\ x<-2 \\ x^2; & si;\ -2\le x<1 \\ 2x-1, & si, x\ge 1 \end{cases}$;

30) $y=F(x)=\begin{cases} x+3, & si,\ x<-1 \\ x^2+1; & si;\ -1\le x<2 \\ 7-x & si, x\ge 2 \end{cases}$

31) $y = F(x) = \begin{cases} -1{,}5x - 4{,}5 & si,\ x < -1 \\ -x^2 - 2 & si;\ -1 \le x < 2 \\ x - 8 & si, x \ge 2 \end{cases}$ **;** 32**)** $y = F(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si,\ x \le 2 \\ 4x - 3 & si;\ 2 < x < 5 \\ 3x + 2 & si, x \ge 5 \end{cases}$

Hallar a y b para que la función y =F(x) sea continua en todos los reales.

33) $F(x) = \begin{cases} 2x - 1 & si\ \ x \le 1 \\ ax + b & si\ \ 1 < x < 3 \\ 5 - 3x & si\ \ x \ge 3 \end{cases}$, en R 34) $F(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & si\ \ x \le 2 \\ ax + 3b & si\ \ 2 < x < 4 \\ 3x + 1 & si\ \ x \ge 4 \end{cases}$, en R

35) $F(x) = \begin{cases} 5 - 7x & si\ \ x \le -1 \\ ax + b & si\ \ -1 < x < 4 \\ 4 - 2x^2 & si\ \ x \ge 4 \end{cases}$, en R 36) $F(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & si\ \ x \le -3 \\ ax^2 + b & si\ \ -3 < x < 5 \\ 3x + 1 & si\ \ x \ge 5 \end{cases}$, en R

Demostrar si la función $y = F(x)$ **es continua en los intervalos indicados.**

37) $y = F(x) = \dfrac{13}{\sqrt{9 - x}}$ es continua en el intervalo:

a) < – 1; 8 >; b)[1; 9>; c) <–2; 7]; d)[–4; 5]

38) $y = F(x) = -\dfrac{5}{x - 7}$ es continua en el intervalo:

a) < –4; 7 >; b)[2; 9>; c) <7; 12]; d)[8; 13]

39) $y = F(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$ es continua en el intervalo:

a) < – 9; 5 >; b)[3; 7>; c) <2; 5]; d)[–3; 1]

40) $y = F(x) = \sqrt{-x^2 + 7x - 6}$ es continua en el intervalo:

a) < – 5;1> ; b)[1; 6 >; c) <2; 8]; d)[1; 6]

41) $y = F(x) = \sqrt{25 - x^2}$ es continua en el intervalo:

a) < –5; 3 >; b)[1; 5>; c) <6; 9]; d)[2; 4]

42) $y = F(x) = \sqrt{x^2 - 49}$ es continua en el intervalo:

a) < –11; –8 >; b)[–7; 6>; c) <7; 10]; d)[8; 11]