MATRICES Y DETERMINANTES

Año escolar: 5to. año de bachillerato
Autor: José Luis Albornoz Salazar
Ocupación: Ing Civil. Docente Universitario
País de residencia: Venezuela
Correo electrónico: martilloatomico@gmail.com

El autor de este trabajo solicita su valiosa colaboración en el sentido de enviar cualquier sugerencia y/o recomendación a la siguiente dirección :

martilloatomico@gmail.com

Igualmente puede enviar cualquier ejercicio o problema que considere pueda ser incluido en el mismo.

Si en sus horas de estudio o práctica se encuentra con un problema que no pueda resolver, envíelo a la anterior dirección y se le enviará resuelto a la suya.

ÍNDICE

Matrices. 1
Algunos tipos de matrices. 1
Suma y resta (Adición) de matrices. 4
Multiplicación de matrices. 6
División de matrices 10
Ejercicios resueltos con matrices. 10
Determinante de una matriz. 13
Determinante de orden 2. 13
Determinante de orden 3 14
Matriz Adjunta. 16
Matriz Inversa. 19
Determinante de orden 4. 24

M A T R i C E S

Se denomina **matriz** *a todo conjunto de números o expresiones dispuestos en forma rectangular, formando "m" filas y "n" columnas.*

Ejemplo :

$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $B_{2x4} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ $C_{3x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Donde:

2x2 indica que la matriz "A" tiene 2 filas y 2 columnas.
2x4 indica que la matriz "B" tiene 2 filas y 4 columnas.
3x2 indica que la matriz "C" tiene 3 filas y 2 columnas.

Los números que forman la matriz se llaman **elementos de la matriz** *y los indicamos con letras minúsculas, mientras que los nombres de las matrices se indican con letras mayúsculas.*

Las matrices varían en tamaño u orden. El **tamaño u orden** *de una matriz se describe especificando el número de* **filas o renglones** *(líneas horizontales) y* **columnas** *(líneas verticales) que aparecen en la matriz. Por lo tanto, una matriz de orden "m x n" tiene "m" filas y "n" columnas (primero se indican las filas y después las columnas).*

Si "A" es una matriz de orden "m x n" entonces se denotará "a_{ij}" *para indicar el elemento que está en la i-ésima fila y j-ésima columna.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se llama **matriz** *de orden "m × n" a un conjunto rectangular de elementos a_{ij} dispuestos en m filas y en n columnas. El orden de una matriz también se denomina dimensión o tamaño, siendo m y n números naturales*

Ejemplo :

$A_{3x3} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ⟵ *primera fila* ⟵ *segunda fila* ⟵ *tercera fila*

primera columna ⟵
segunda columna ⟵
tercera columna ⟵

Donde :

$a_{11} = -1$; $a_{12} = 5$; $a_{13} = 2$
$a_{21} = 4$; $a_{22} = 3$; $a_{23} = 6$
$a_{31} = 7$; $a_{32} = -2$; $a_{33} = 0$

ALGUNOS TIPOS DE MATRICES

Hay algunas matrices que aparecen frecuentemente y que según su forma, sus elementos, reciben nombres diferentes :

MATRIZ FILA: *Aquella matriz que tiene una sola fila, siendo su orden* 1x n.

$$A_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

MATRIZ COLUMNA: *Aquella matriz que tiene una sola columna, siendo su orden* m x 1.

$$A_{3\times 1} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

MATRIZ RECTANGULAR: *Aquella matriz que tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su orden "m x n", donde m ≠ n.*

$$A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 5 & 7 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRASPUESTA: *Dada una matriz* A, *se llama traspuesta de* A *a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas. Se representa por* A^t ó A^T.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix} ; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

MATRIZ OPUESTA: *La matriz opuesta de una dada es la que resulta de sustituir cada elemento por su opuesto. La opuesta de* A *es* -A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} , \quad -A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 7 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

MATRIZ NULA: *Si todos sus elementos son cero. También se denomina matriz cero y se denota por* $0_{m\times n}$

$$0_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ CUADRADA: *Aquella matriz que tiene igual número de filas que de columnas, m = n, diciéndose que la matriz es de orden n.*

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Diagonal principal : *son los elementos* a_{11} , a_{22}, ..., a_{nn}

Diagonal principal : $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 4 & 11 \\ 1 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

Diagonal secundaria : *son los elementos* a_{ij} *con* i+j = n+1

Diagonal secundaria : $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 4 & 11 \\ 1 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

Traza de una matriz cuadrada : *es la suma de los elementos de la diagonal principal "*tr A".

MATRIZ SIMÉTRICA: *Es una matriz cuadrada que es igual a su traspuesta.*

$$A = A^t \ , \ a_{ij} = a_{ji}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 9 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

MATRIZ ANTISIMÉTRICA: *Es una matriz cuadrada que es igual a la opuesta de su traspuesta.*

$A = -A^t$, $a_{ij} = -a_{ji}$

Necesariamente $a_{ii} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} => -A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DIAGONAL: *Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal.*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

MATRIZ ESCALAR: *Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales.*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

MATRIZ IDENTIDAD: *Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales a* 1. *También se denomina matriz unidad.*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR: *Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos por encima (o por debajo) de la diagonal principal nulos.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$ T. superior

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$ T. inferior

MATRIZ ORTOGONAL: *Una matriz ortogonal es necesariamente cuadrada e invertible :* $A^{-1} = A^T$

La inversa de una matriz ortogonal es una matriz ortogonal.
El producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal.
El determinante de una matriz ortogonal vale +1 ó -1

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ NORMAL: *Una matriz es normal si conmuta con su traspuesta. Las matrices simétricas, antisimétricas u ortogonales son necesariamente normales.*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A$$

MATRIZ INVERSA: *Decimos que una matriz cuadrada* A *tiene inversa,* A^{-1}, *si se verifica que* $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ (Siendo "I" la matriz identidad.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

SUMA Y RESTA DE MATRICES
(Adición de matrices)

Para poder sumar o restar matrices, éstas deben tener el mismo número de filas y de columnas. Es decir, si una matriz es de orden 3x2 y otra de 3x3, no se pueden sumar ni restar. Esto es así ya que, tanto para la suma como para la resta, se suman o se restan los términos que ocupan el mismo lugar en las matrices.

Ejemplo :

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

Sumando A + B :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Restando B – A :

$$B - A = \begin{pmatrix} b_{11} - a_{11} & b_{12} - a_{12} \\ b_{21} - a_{21} & b_{22} - a_{22} \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 5-1 & 6-2 \\ 7-3 & 8-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo :

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Sumando A + B :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 + (-1) & 1 + 2 & 2 + 4 \\ 0 + 2 & 5 + 5 & -3 + 8 \\ 7 + 0 & 0 + 1 & 4 + (-2) \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 10 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Restando A – B :

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} & a_{33} - b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 - (-1) & 1 - 2 & 2 - 4 \\ 0 - 2 & 5 - 5 & -3 - 8 \\ 7 - 0 & 0 - 1 & 4 - (-2) \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -11 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para sumar o restar más de dos matrices se procede igual. No necesariamente para poder sumar o restar matrices, éstas tienen que ser cuadradas.

Ejemplo:

$$\text{Sean } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sumando A + B + C :

$$A + B + C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11} & a_{12} + b_{12} + c_{12} & a_{13} + b_{13} + c_{13} \\ a_{21} + b_{21} + c_{21} & a_{22} + b_{22} + c_{22} & a_{23} + b_{23} + c_{23} \end{pmatrix}$$

$$A + B + C = \begin{pmatrix} -1 + 3 + 5 & 2 + 2 + (-1) & 4 + 0 + 3 \\ 2 + 0 + 1 & 7 + (-3) + 1 & 6 + (-1) + 2 \end{pmatrix}$$

$$A + B + C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Suma y resta combinadas (A – B + C) :

$$A - B + C = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} + c_{11} & a_{12} - b_{12} + c_{12} & a_{13} - b_{13} + c_{13} \\ a_{21} - b_{21} + c_{21} & a_{22} - b_{22} + c_{22} & a_{23} - b_{23} + c_{23} \end{pmatrix}$$

$$A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN (SUMA Y RESTA) DE MATRICES

Interna: *La suma de dos matrices de orden m x n es otra matriz dimensión m x n.*

Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$

Elemento neutro: $A + 0 = A$ *. Donde O es la matriz nula de la misma dimensión que la matriz A.*

Elemento opuesto: $A + (-A) = O$ *. La matriz opuesta es aquella en que todos los elementos están cambiados de signo.*

Conmutativa: $A + B = B + A$

Nota : *Para fijar mejor lo explicado anteriormente puedes acceder gratuitamente a los videos de ADICION DE MATRICES que se encuentran en la página :*

www.lamatematicadefidel.com

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

Para multiplicar un escalar por una matriz se multiplica el escalar por todos los elementos de la matriz, obteniéndose otra matriz del mismo orden.

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda \cdot A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$3A=\begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad ; \quad (-5)\cdot A=\begin{pmatrix} -5 & 10 & -15 \\ 0 & -5 & -40 \end{pmatrix}$$

Si una matriz está dividida entre un escalar, todos los términos de la matriz quedarán divididos por ese escalar.

Ejemplo:

Sean la matriz $A=\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, y $k = 2$ un escalar. En este caso:

$$A/k=\frac{\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix} 8/2 & 16/2 \\ 3/2 & -6/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3/2 & -3 \end{pmatrix}$$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Dos matrices A y B se dicen multiplicables si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B.

El elemento c_{ij} *de la matriz producto se obtiene multiplicando cada elemento de la* ***fila i de la matriz A*** *por cada elemento de la* ***columna j de la matriz B*** *y* ***sumándolos.***

$$A_{m\,x\,n} \;\; x \;\; B_{n\,x\,p} = C_{m\,x\,p}$$

Para poder multiplicar dos matrices, la primera debe tener el mismo número de columnas que filas la segunda. La matriz resultante del producto quedará con el mismo número de filas de la primera y con el mismo número de columnas de la segunda.

Es decir, si tenemos una matriz 2 x 3 y la multiplicamos por otra de orden 3 x 5, la matriz resultante será de orden 2 x 5.

Se puede observar que el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa, ya que en el ejemplo anterior, si multiplicamos la segunda por la primera, no podríamos efectuar la operación puesto que la primera matriz no tiene el mismo número de columnas que filas la segunda.

Para aclarar lo indicado anteriormente procederemos a explicar paso a paso algunos ejemplos de multiplicación de dos matrices.

Ejemplo : *Dadas las matrices :*

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Calcular A x B (identificarla como matriz "C")

Primero verificamos que el número de columnas de la matriz "A" sea igual al número de filas de la matriz "B" . Como en este caso se cumple (2=2) se procede a efectuar la multiplicación.

*Se escogen los elementos de la **1era fila** de la matriz "A" y se multiplican (uno a uno) con los elementos de la **1era columna** de la matriz "B" y se suman.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Nos permitiremos señalar un "truco" muy utilizado para facilitar la multiplicación de matrices :

Se colocan la fila y la columna escogida una al lado de la otra y así se visualizará fácilmente la operación que debemos efectuar :

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ---> } \mathbf{(5)(1) + (-1)(0)}$$

Esta operación se coloca como elemento $\mathbf{c_{11}}$

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} \mathbf{(5)(1) + (-1)(0)} & \\ & \end{bmatrix}$$

*Se escogen los elementos de la **1era fila** de la matriz "A" y se multiplican (uno a uno) con los elementos de la **2da columna** de la matriz "B" y se suman.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Esta operación se coloca como elemento $\mathbf{c_{12}}$

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} (5)(1) + (-1)(0) & \mathbf{(5)(-4)+(-1)(-2)} \\ & \end{bmatrix}$$

*Se escogen los elementos de la **1era fila** de la matriz "A" y se multiplican (uno a uno) con los elementos de la **3era columna** de la matriz "B" y se suman.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Esta operación se coloca como elemento $\mathbf{c_{13}}$

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} (5)(1) + (-1)(0) & (5)(-4)+(-1)(-2) & \mathbf{(5)(6)+(-1)(7)} \\ & & \end{bmatrix}$$

*Se escogen los elementos de la **2da fila** de la matriz "A" y se multiplican (uno a uno) con los elementos de la **1era columna** de la matriz "B" y se suman.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Esta operación se coloca como elemento $\mathbf{c_{21}}$

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} (5)(1) + (-1)(0) & (5)(-4)+(-1)(-2) & (5)(6)+(-1)(7) \\ \mathbf{(-3)(1) + (2)(0)} & & \end{bmatrix}$$

*Se escogen los elementos de la **2da fila** de la matriz "A" y se multiplican (uno a uno) con los elementos de la **2da columna** de la matriz "B" y se suman.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Este resultado se coloca como elemento $\mathbf{c_{22}}$

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} (5)(1) + (-1)(0) & (5)(-4)+(-1)(-2) & (5)(6)+(-1)(7) \\ (-3)(1) + (2)(0) & \mathbf{(-3)(-4)+(2)(-2)} & \end{bmatrix}$$

Se escogen los elementos de la ***2da fila*** *de la matriz "A" y se multiplican (uno a uno) con los elementos de la* ***3era columna*** *de la matriz "B" y se suman.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Esta operación se coloca como elemento $\mathbf{c_{23}}$

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} (5)(1) + (-1)(0) & (5)(-4)+(-1)(-2) & (5)(6)+(-1)(7) \\ (-3)(1) + (2)(0) & (-3)(-4)+(2)(-2) & \mathbf{(-3)(6)+(2)(7)} \end{bmatrix}$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas :

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 5-0 & -20+2 & 30-7 \\ -3+0 & 12-4 & -18+14 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{Solución} = C = A \times B = \begin{bmatrix} 5 & -18 & 23 \\ -3 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

Observe que la matriz "C" producto de multiplicar "AxB" tiene el número de filas que tiene "A" (2) y el número de columnas que tiene "B" (3).

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 0 & 3\cdot 1 + 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se escogen los elementos de la ***1era fila*** *de la matriz "A" y se multiplican (uno a uno) con los elementos de la* ***1era columna*** *de la matriz "B" y se suman.*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos permitiremos señalar un "truco" muy utilizado para facilitar la multiplicación de matrices :

Se colocan la fila y la columna escogida una al lado de la otra y así se visualizará fácilmente la operación que debemos efectuar :

$$\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \quad x \quad \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \quad \text{---> } \mathbf{(2)(1) + (0)(1) + (1)(1)}$$

Esta operación se coloca como elemento c_{11} *y así sucesivamente :*

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot0+0\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot1 & 3\cdot0+0\cdot2+0\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot0 \\ 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 & 5\cdot0+1\cdot2+0\cdot1 & 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (tomado de www.lamatematicadefidel.com) :

DADAS LAS MATRICES : $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; $B = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \\ 7 & 5 & -4 \end{vmatrix}$

2 X 3 — 3 X 3

HALLAR : $A \times B$

Solución :

$$A \times B = \begin{vmatrix} 2\cdot5+1(-3)+(-3)\cdot7 & 2\cdot1+1(-2)+(-3)\cdot5 & 2\cdot2+1\cdot0+(-3)(-4) \\ (-4)\cdot5+5(-3)+6\cdot7 & (-4)\cdot1+5(-2)+6\cdot5 & (-4)2+5\cdot0+6(-4) \end{vmatrix}$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} 10-3-21 & 2-2-15 & 4+0+12 \\ -20-15+42 & -4-10+30 & -8+0-24 \end{vmatrix}$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} -14 & -15 & 16 \\ 7 & 16 & -32 \end{vmatrix} \checkmark$$

2 X 3

Ejemplo (tomado de www.lamatematicadefidel.com) :

DADAS LAS MATRICES : $A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & -7 \end{vmatrix}$; $B = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 4 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

HALLAR : $A \times B$

3 X 3 — 3 X 2

Solución :

$$A \times B = \begin{vmatrix} 5(-6)+(-2)\cdot4+4\cdot1 & 5\cdot2+(-2)(-3)+4\cdot5 \\ (-3)(-6)+1\cdot4+0\cdot1 & (-3)\cdot2+1(-3)+0\cdot5 \\ 7(-6)+6\cdot4+(-7)\cdot1 & 7\cdot2+6(-3)+(-7)\cdot5 \end{vmatrix}$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} -30-8+4 & 10+6+20 \\ 18+4+0 & -6-3+0 \\ -42+24-7 & 14-18-35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -34 & 36 \\ 22 & -9 \\ -25 & -39 \end{vmatrix}$$

Nota : *Para fijar mejor lo explicado anteriormente puedes acceder gratuitamente a los videos de MULTIPLICACION DE MATRICES que se encuentran en la página :*

www.lamatematicadefidel.com

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES

Asociativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

Elemento neutro: $A \cdot I = A$

Donde I es la matriz identidad del mismo orden que la matriz A.

No es Conmutativa: $A \cdot B \neq B \cdot A$

Distributiva del producto respecto de la suma:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

DIVISIÓN DE MATRICES

La división de matrices se define como el producto del numerador multiplicado por la matriz inversa del denominador.

Es decir, sean las matrices A y B tal que $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}^{-1}$

Para realizar esta operación es necesario que conozcamos cómo calcular una MATRIZ INVERSA; esto lo explicaremos en la página 19 de esta guía.

EJERCICIOS RESUELTOS CON MATRICES

Ejercicio 1 :

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular:

A + B; A - B; A x B; B x A; A^t.

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot0+0\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot1 & 3\cdot0+0\cdot2+0\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot0 \\ 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 & 5\cdot0+1\cdot2+0\cdot1 & 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2+0\cdot3+1\cdot5 & 1\cdot0+0\cdot0+1\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1 \\ 1\cdot2+2\cdot3+1\cdot5 & 1\cdot0+2\cdot0+1\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot0+1\cdot1 \\ 1\cdot2+1\cdot3+0\cdot5 & 1\cdot0+1\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 :

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuar las siguientes operaciones:

(A + B) ^{2}; (A - B) ^{2}; (B) ^{3}; A · B ^{t} · C.

Para calcular **(A + B)^2** *primero realizamos la suma "A + B" y dicha suma se multiplica por ella misma.* $(A + B)^2 = (A+B) \times (A+B)$

$$A+B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -14 & 42 \\ 19 & -6 & 35 \\ 34 & -15 & 73 \end{pmatrix}$$

Para calcular **(A – B)^2** *primero realizamos la resta "A – B" y dicha resta se multiplica por ella misma.* $(A - B)^2 = (A - B) \times (A - B)$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -1 \\ -16 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular **B^3** *procederemos a multiplicar "B x B" y su producto ("B^2") se debe volver a multiplicar por "B". Es decir* $B^3 = B \times B \times B$,

$$B^3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & -6 & 14 \\ 12 & -5 & 14 \\ -3 & -4 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -27 & 70 \\ 33 & -26 & 70 \\ -24 & -11 & 42 \end{pmatrix}$$

Para calcular **A x B^t x C** *primero multiplico a "A" por la traspuesta de "B" y dicho resultado lo multiplico por "C",*

$$A \cdot B^t \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ -3 & -1 & 3 \\ 20 & 17 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 23 & 16 \\ 14 & 3 & 3 \\ 30 & 52 & 47 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 :

Demostrar que: $\mathbf{A^2 - A - 2\,I = 0}$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 :

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcular:

- $-A - B + C$.
- $A + B - C$.
- $3A + C/2$.

- $$-A - B + C = -\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2-3+2 & -4+1+0 & -1+2-1 \\ -1-0+0 & 2-5-1 & -3-6+2 \\ -5-0+1 & 0-0-2 & 1-9+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & -7 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- $$A + B - C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+3-2 & 4-1-0 & 1-2+1 \\ 1+0-0 & 2+5+1 & 3+6-2 \\ 5-0-1 & 0+0+2 & -1+9-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- $$3A + C/2 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}}{2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 12 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 15 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 & 5/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6+1 & 12+0 & 3-1/2 \\ 3+0 & -6-1/2 & 9+1 \\ 15+1/2 & 0-1 & -3+5/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 12 & 5/2 \\ 3 & -13/2 & 10 \\ 31/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

El determinante de una **matriz cuadrada** *es un escalar o polinomio, que resulta de obtener todos los productos posibles de una matriz de acuerdo a una serie de restricciones, siendo denotado como* ***|A|*** *o como* ***Det(A).***

El valor numérico es conocido también como modulo de la matriz.

Nota : *El determinante de una matriz "1 x 1" es el mismo valor del único elemento de la matriz.*

Si $A = [5]$; $|A| = 5$

DETERMINANTE DE ORDEN 2

Sea ***A*** *una matriz cuadrada de orden* ***2****,*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Se llama **determinante** *de* ***A*** *al número real:*

$$Det(A) = Det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Es decir, el **determinante** *de una matriz cuadrada de orden* ***2*** *es igual al producto de los elementos de la* **diagonal principal** *menos el producto de los elementos de la* **diagonal secundaria.**

Ejemplo :

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *calcular su determinante :*

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (5)(2) = 3 - 10 = -7.$$

Ejemplo :

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ *calcular su determinante :*

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = (2)(-4) - (-3)(1) = -8 - (-3) = -8 + 3 = -5.$$

Ejemplo :

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} sen\,\beta & -\cos\beta \\ \cos\beta & sen\,\beta \end{bmatrix}$ *calcular su determinante :*

$$|A| = Det\,(A) = +(sen\,\beta).(sen\,\beta) - (\cos\beta).(-\cos\beta)$$

$$|A| = Det\,(A) = sen^2\,\beta + \cos^2\beta$$

Existe una identidad trigonométrica que nos indica que :

$$sen^2\,\beta + \cos^2\beta = 1$$

Luego podemos decir que :

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} sen\,\beta & -\cos\beta \\ \cos\beta & sen\,\beta \end{bmatrix}$ *su determinante será :*

$$|A| = Det\,(A) = 1$$

DETERMINANTE DE ORDEN 3

(Regla de Sarrus)

Dada una matriz cuadrada ***A*** *de orden* ***3****,*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Se llama **determinante** *de* ***A*** *al número real:*

$$Det(A) = Det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11}$$

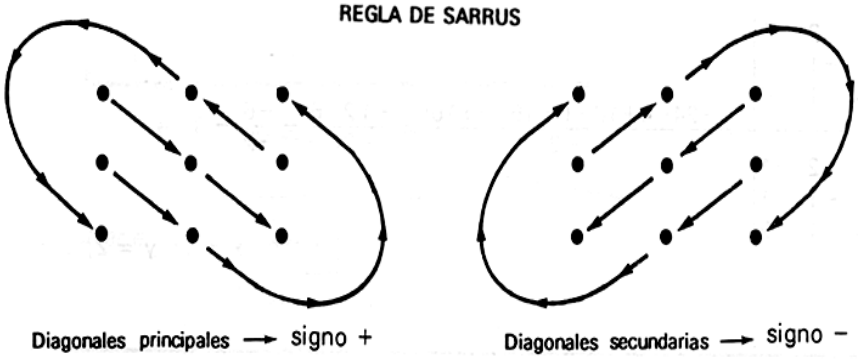
La **regla de Sarrus** *permite recordar fácilmente el desarrollo del determinante de una matriz de orden 3.*

Los **productos con signo " + ",** *están formados por los elementos de la* **diagonal principal**, *y los de las dos diagonales paralelas (por encima y por debajo), con su correspondiente vértice opuesto.*

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Los **productos con signo " – ",** *se forman con los elementos de la* **diagonal secundaria** *y los de las dos diagonales paralelas, con su correspondiente vértice opuesto.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}$$



Ejemplo :

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ *calcular su determinante :*

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & 2 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & -5 \\ -2 & 1 & \mathbf{4} \end{vmatrix} = (3)(2)(4)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & \mathbf{2} & 1 \\ 0 & 2 & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-2} & 1 & 4 \end{vmatrix} = (3)(2)(4) + (2)(-5)(-2)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (3)(2)(4) + (2)(-5)(-2) + (0)(1)(1)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (3)(2)(4) + (2)(-5)(-2) + (0)(1)(1) - (-2)(2)(1)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (3)(2)(4) + (2)(-5)(-2) + (0)(1)(1) - (-2)(2)(1) - (0)(2)(4)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (3)(2)(4) + (2)(-5)(-2) + (0)(1)(1) - (-2)(2)(1) - (0)(2)(4) - (1)(-5)(3) =$$

$$= 24 + 20 + 0 - (-4) - 0 - (-15) = 44 + 4 + 15 = 63$$

Ejemplo :

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *calcular su determinante :*

Nos permitiremos mostrarte un "atajo visual" que facilita la utilización de la Regla de Sarrus.

El mismo consiste en colocar las columnas (líneas verticales) 1 y 2 al lado derecho de la matriz y eso nos permitirá visualizar fácilmente los elementos que tienen que ser multiplicados.

Valores positivos (diagonal principal) :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (3)(-1)(2) + (2)(1)(4) + (-1)(1)(-1)$$

Valores negativos (diagonal secundaria) :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (3)(-1)(2)+(2)(1)(4)+(-1)(1)(-1) - (-1)(-1)(4) -(3)(1)(-1) - (2)(1)(2)$$

$$= -6 + 8 + 1 - 4 + 3 - 4 = -2 \qquad \text{Resp. } |A| = -2$$

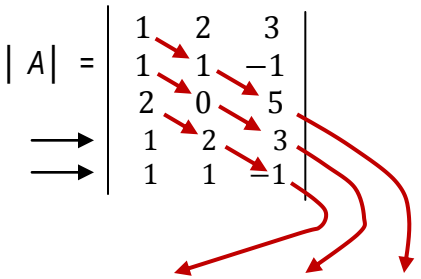
Ejemplo :

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *calcular su determinante :*

Nos permitiremos mostrarte otro "atajo visual" que facilita la utilización de la Regla de Sarrus.

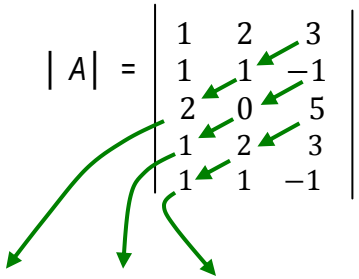
El mismo consiste en colocar las filas (líneas horizontales) 1 y 2 debajo de la matriz y eso nos permitirá visualizar fácilmente los elementos que tienen que ser multiplicados.

Valores positivos (diagonal principal) :



$$= (2)(2)(-1) + (1)(0)(3) + (1)(1)(5)$$

Valores negativos (diagonal secundaria) :



$$=(2)(2)(-1)+(1)(0)(3)+(1)(1)(5) - (3)(1)(2) - (-1)(0)(1) - (5)(2)(1)$$

$$= -4 + 0 + 5 - 6 + 0 - 10 = -15 \qquad \textbf{Resp. } |A| = -15$$

Nota : *Para fijar mejor lo explicado anteriormente puedes acceder gratuitamente a los videos de MATRICES Y DETERMINANTES que se encuentran en la página :*

www.lamatematicadefidel.com

MATRiZ ADJUNTA

La **matriz adjunta** *es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto (o cofactor). También es conocida como matriz de cofactores.*

La adjunta de A se denota como $\mathbf{A^*}$.

Se llama **adjunto** *del elemento* $\mathbf{a_{ij}}$ *al* **menor complementario** *de la matriz, anteponiendo :*

- *El signo positivo si "i + j" es par.*
- *El signo negativo si "i + j" es impar.*

Se denomina **menor complementario** *al determinante resultante después de eliminar la fila "i" y la columna "j" de la matriz inicial.*

Ejemplo :

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular el adjunto del elemento $\mathbf{a_{11}}$ *:*

Este elemento estará ubicado en :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego se eliminan la fila 1 y la columna 1:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El menor complementario será :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (0).(1) - (0).(1) = 0$$

Este adjunto tendrá signo positivo ya que "i + J" es par (1+1=2) y el determinante obtenido es positivo (0).

Ejemplo :

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular el adjunto del elemento $\mathbf{a_{12}}$ *:*

Este elemento estará ubicado en :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \textcircled{0} & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego se eliminan la fila 1 y la columna 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Este adjunto tendrá signo negativo ya que "i + J" es impar (1+2=3) y el determinante que se obtiene es positivo (3 – 0 = 3)

$$-\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

Ejemplo :

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular el adjunto del elemento $\mathbf{a_{22}}$ *:*

Este elemento estará ubicado en :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & \textcircled{0} & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego se eliminan la fila 2 y la columna 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Este adjunto tendrá signo negativo ya que el determinante es negativo (2 – 5 = – 3) y "j + i" es par (más por menos da menos).

$$+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

Para calcular la <u>matriz adjunta</u> se debe determinar el adjunto de cada uno de los elementos de la matriz inicial :

Ejemplo :

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular su adjunta :

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo :

Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Su adjunta será :

$$\mathbf{A^*} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Ejemplo :

Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular su adjunta :

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{11}}$ *será :*

$$+\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+1 = 1$$

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{12}}$ *será :*

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0-2) = -(-2) = 2$$

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{13}}$ *será :*

$$+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1-0 = 1$$

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{21}}$ *será :*

$$-\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-3) = (-1)(-3) = 3$$

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{22}}$ *será :*

$$+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0+6 = 6$$

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{23}}$ *será :*

$$-\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(2-4) = -(-2) = 2$$

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{31}}$ *será :*

$$+\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2-0 = 2$$

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{32}}$ *será :*

$$-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-2-3) = -(-5) = 5$$

El adjunto del elemento a_{33} *será :*

$$+\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+2 = 2$$

Su adjunta será :

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

MATRiZ iNVERSA

Se dice que una **matriz cuadrada** **A** *es invertible, si existe una matriz* **B** *con la propiedad de que*

$$\mathbf{A \times B = B \times A = I}$$

siendo **I** *la matriz identidad. Denominamos a la matriz* **B** *la inversa de* **A** *y la denotamos por* $\mathbf{A^{-1}}$.

Para que una matriz sea invertible es necesario que su determinante sea distinto de cero ($|A| \neq 0$*).*

Ejemplo:

Supongamos $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Puesto que AB = BA = I, A y B son invertibles, siendo cada una la inversa de la otra.

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

Para calcular la inversa de una matriz generalmente se utilizan dos métodos, el primero : utilizando la matriz adjunta y el determinante y el segundo : el método de Gauss-Jordán.

Primer método : *Se utiliza la siguiente fórmula :*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^*\right)^t$$

Donde :

- $\mathbf{A^{-1}}$ *es la Matriz Inversa.*
- $\mathbf{|A|}$ *es el Determinante de la Matriz.*
- $\mathbf{A^*}$ *es la Matriz Adjunta.*
- $\mathbf{(A^*)^t}$ *es la Matriz Traspuesta de la adjunta.*

Ejemplo :

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz inversa :

1.- *Calculamos el determinante de la matriz (Página 14),* **en el caso que el determinante sea nulo (|A| = 0) la matriz no tendrá inversa.**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

2.- *Hallamos la matriz adjunta (Página 16) :*

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3.- *Calculamos la traspuesta de la matriz adjunta (Página 2) :*

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

4.- Aplicamos la fórmula y se obtiene la matriz inversa :

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Para comprobar el resultado se debe multiplicar la matriz obtenida (Inversa) por la matriz inicial y el producto debe ser la matriz identidad.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo :

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz inversa :

1.- *Calculamos el determinante de la matriz (Página 14),* **en el caso que el determinante sea nulo ($|A| = 0$) la matriz no tendrá inversa.**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 54$$

2.- *Hallamos la matriz adjunta (Página 16) :*

$$A^* = \begin{pmatrix} 25 & -9 & 4 \\ 7 & -9 & -14 \\ -1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

3.- *Calculamos la traspuesta de la matriz adjunta (Página 2) :*

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} 25 & 7 & -1 \\ -9 & -9 & 9 \\ 4 & -14 & 2 \end{pmatrix}$$

4.- Aplicamos la fórmula y se obtiene la matriz inversa :

$$A^{-1} = \frac{1}{54}(A^*)^t = \begin{pmatrix} \frac{25}{54} & \frac{7}{54} & \frac{-1}{54} \\ \frac{-9}{54} & \frac{-9}{54} & \frac{9}{54} \\ \frac{4}{54} & \frac{-14}{54} & \frac{2}{54} \end{pmatrix}$$

Segundo método : *Método de Gauss-Jordan*

Este método consiste en colocar junto a la matriz de partida **(A)** *la matriz identidad* **(I)** *y hacer operaciones por filas, afectando esas operaciones tanto a* **A** *como a* **I**, *con el objeto de transformar la matriz* **A** *en la matriz identidad, la matriz resultante de las operaciones sobre* **I** *es la inversa de* **A** .

Las operaciones que podemos hacer sobre las filas son:

a) Sustituir una fila por ella multiplicada por una constante, por ejemplo, sustituimos la fila 2 por ella multiplicada por 3.

b) Permutar dos filas

c) Sustituir una fila por una combinación lineal de ella y otras.

Ejemplo :

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Calcular la matriz inversa utilizando el método de Gauss-Jordán.

Primero debemos recordar que para que una matriz sea invertible es necesario que su determinante sea distinto de cero ($|A| \neq 0$).

$$|A| = (3)(7) - (5)(4) = 21 - 20 = 1$$

Como la matriz tiene determinante distinto de cero se puede calcular su inversa.

Se construye una matriz ampliada colocando la matriz identidad al lado derecho de la matriz inicial :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ahora debemos hacer operaciones por filas, afectando esas operaciones tanto a **A** *como a* **I**, *con el objeto de transformar la matriz* **A** *en la matriz identidad.*

Para que el elemento $\mathbf{a_{11}}$ *contenga el nro. 1, podemos sustituir la primera fila por ella misma dividida entre 3.*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_1 = \frac{1}{3} f_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Para que el elemento $\mathbf{a_{21}}$ *contenga el nro. 0, podemos sustituir la segunda fila por el resultado de restar a la segunda fila cinco veces la primera fila.*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2 = f_2 - 5 f_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & -5/3 & 1 \end{array}\right]$$

Para que el elemento $\mathbf{a_{22}}$ *contenga el nro. 1, podemos multiplicar la segunda fila por 3.*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & -5/3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2 = 3 f_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right]$$

Para que el elemento $\mathbf{a_{12}}$ *contenga el nro. 0, podemos sustituir la primera fila por el resultado de restar a la primera fila la segunda fila multiplicada por* $\frac{4}{3}$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{f_1 = f_1 - \frac{4}{3} f_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right]$$

Una vez que hemos conseguido la matriz identidad a la izquierda de la línea el proceso termina. La matriz inversa de "A" es la matriz que se encuentra a la derecha de la línea.

Solución: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

Comprobación : *Se puede comprobar fácilmente si el resultado que hemos obtenido es el correcto. Basta multiplicar la matriz A, que nos dan en el enunciado, por la matriz que hemos obtenido, A^{-1}. El resultado debe ser la matriz identidad I.*

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Ejercicios para practicar :

Calcular la inversa de las siguientes matrices :

$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ **Solución** $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **Solución** $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ **Solución** $C^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ **Solución** $D^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/12 \\ 0 & 1/8 \end{bmatrix}$

Ejemplo :

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz inversa utilizando el método de Gauss-Jordán.

Primero debemos recordar que para que una matriz sea invertible es necesario que su determinante sea distinto de cero ($|A| \neq 0$).

Como esta matriz tiene determinante distinto de cero **($|A| = -1$)** *se puede calcular su inversa.*

Se construye una matriz ampliada colocando la matriz identidad al lado derecho de la matriz inicial :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Para que el elemento $\mathbf{a_{21}}$ *contenga el nro. 0, podemos sustituir la segunda fila por el resultado de restar la primera fila de la segunda..*

$$f_2 = f_2 - f_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Para que el elemento $\mathbf{a_{32}}$ *contenga el nro. 0, podemos sustituir la tercera fila por el resultado de sumar las filas 2 y 3.*

$$f_3 = f_2 + f_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Para que el elemento $\mathbf{a_{23}}$ *contenga el nro. 0, podemos sustituir la segunda fila por el resultado de restar la fila 3 de la fila 2.*

$$f_2 = f_2 - f_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Para que el elemento $\mathbf{a_{12}}$ *contenga el nro. 0, podemos sustituir la primera fila por el resultado de sumar las filas 1 y 2.*

$$f_1 = f_1 + f_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Para que el elemento $\mathbf{a_{22}}$ *contenga el nro. 1, simplemente podemos multiplicar la segunda fila por menos uno.*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Una vez que hemos conseguido la matriz identidad a la izquierda de la línea el proceso termina. La matriz inversa de "A" es la matriz que se encuentra a la derecha de la línea.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo :

Calcular la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 Construir una matriz del tipo M = (A | I)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2 Utilizar el método Gauss para transformar la mitad izquierda, A, en la matriz identidad, y la matriz que resulte en el lado derecho será la matriz inversa: $\mathbf{A^{-1}}$.

$$\xrightarrow{f_3-2f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3-2f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Recomendamos observar los dos videos que encontraras en la Web identificados con los siguientes links :

http://www.youtube.com/watch?v=91xUg1L7O7s

http://www.youtube.com/watch?v=pUabaQqbrug&feature=related

DETERMINANTE DE ORDEN 4

Los métodos que hemos visto hasta el momento solo pueden ser aplicados a matrices de orden 1, 2 y 3.

Existen 2 métodos que permiten calcular el determinante a cualquier tipo de matriz.

REGLA DE LAPLACE *: El determinante de una matriz cuadrada de orden "n" es igual a la suma de los productos de los elementos de una linea (fila o columna) cualquiera por sus adjuntos respectivos.*

Es decir, tomando la fila "i" se tiene :

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Ejemplo : *Calcular el determinante utilizando la Regla de Laplace :*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Recuerde que :

Se llama **adjunto** *del elemento* a_{ij} *al* **menor complementario** *de la matriz, anteponiendo :*

- *El signo positivo si "i + j" es par.*
- *El signo negativo si "i + j" es impar.*

Se denomina **menor complementario** *al determinante resultante después de eliminar la fila "i" y la columna "j" de la matriz inicial.*

En la página 16 y siguientes de esta guía se muestra como calcular los adjuntos.

Los adjuntos de los distintos elementos de una matriz 4 x 4 tienen los siguientes signos :

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Desarrollando por los adjuntos de la primera fila se tiene :

Estudiando el elemento a_{11} *:*

Como "i + j" es par (1+1=2) se antepone el signo positivo. Para visualizar la matriz reducida a la que se le va a calcular el determinante (menor complementario) se elimina la fila 1 y la columna 1 de la matriz inicial :

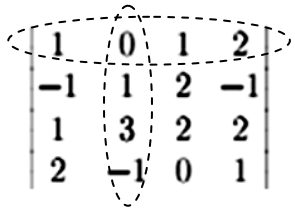
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

El primer elemento de la suma será :

$$+ 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Estudiando el elemento a_{12} *:*

Como "i + j" es impar (1+2=3) se antepone el signo negativo. Para visualizar la matriz reducida a la que se le va a calcular el determinante (menor complementario) se elimina la fila 1 y la columna 2 de la matriz inicial :

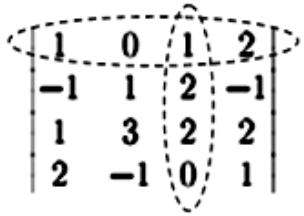


El segundo elemento de la suma será :

$$-0\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

Estudiando el elemento $\mathbf{a_{13}}$ *:*

Como "i + j" es par (1+3=4) se antepone el signo positivo. Para visualizar la matriz reducida a la que se le va a calcular el determinante (menor complementario) se elimina la fila 1 y la columna 3 de la matriz inicial :

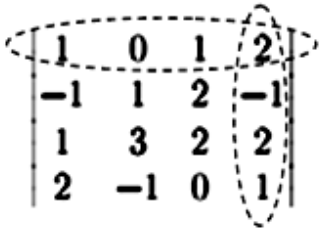


El tercer elemento de la suma será :

$$+1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

Estudiando el elemento $\mathbf{a_{14}}$ *:*

Como "i + j" es impar (1+4=5) se antepone el signo negativo. Para visualizar la matriz reducida a la que se le va a calcular el determinante (menor complementario) se elimina la fila 1 y la columna 4 de la matriz inicial :



El cuarto elemento de la suma será :

$$-2\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}$$

Se procede ahora a calcular el determinante de las matrices reducidas 3x3 de cada uno de los miembros de la suma aplicando la Regla de Sarrus (página 14).

Una vez calculados los determinantes se sustituyen en la suma :

$$(1).(-10) + 0 + (1).(5) + (-2)(-12) =$$

$$-10 + 5 + 24 = 19$$

Luego :

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 19$$

REGLA DE CHIO *: Se fundamenta en operaciones elementales de fila o de columna y un pivote que por rapidez en las operaciones matemáticas (multiplicación y sustracción) escogemos un elemento identificado con el número uno (1); si en los elementos del determinante de la matriz no se tiene un elemento identificado con este número, se busca este elemento sacando un factor común a todos los elementos de una fila o una columna o se aplican operaciones elementales de fila o de columna, tales como constituir una nueva columna por la suma algebraica de dos columnas.*

El objetivo es transformar el determinante de una matriz cuadrada de orden "n" en una de orden "n-1" y así sucesivamente hasta llegar a un determinante de tercer orden (n=3) donde su solución puede ser obtenida a través de la regla de Sarrus. Para ello se requiere conformar una fila o columna con sus elementos nulos (0), excepto un elemento identificado con el numero uno (1).

Si observamos el ejemplo anterior notaremos que el mismo resultado se puede obtener **haciendo ceros** *en la primera fila, utilizando la siguiente propiedad de los determinantes :*

> "El valor de un determinante no varía si a los elementos de una línea se les suma otra paralela multiplicada por un número".

En realidad la Regla de Chio es la aplicación de la Regla de Laplace pero en una matriz equivalente a la inicial que permita facilitar su aplicación.

Se facilita la aplicación en el sentido de que al "hacer ceros" en una línea y dejar un uno en un elemento de esa línea, los otros adjuntos se anularán al tener que multiplicarse por cero.

Luego la operación quedará reducida a multiplicar ese uno por el determinante de la matriz reducida que quede después de eliminar la fila y la columna donde se encuentre ubicado dicho uno.

En efecto, sumando a la tercera columna la primera columna multiplicada por menos uno y a la cuarta columna la primera multiplicada por menos dos resulta :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 19$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 19$$

Recuerde que :

Se llama **adjunto** *del elemento* $\mathbf{a_{ij}}$ *al* **menor complementario** *de la matriz, anteponiendo :*

- *El signo positivo si "i + j" es par.*
- *El signo negativo si "i + j" es impar.*

Se denomina **menor complementario** *al determinante resultante después de eliminar la fila "i" y la columna "j" de la matriz inicial.*

NOTA : *Recomendamos observar los videos identificados como DETERMINANTES DE CUARTO ORDEN a los que podrás acceder gratuitamente en la página :*

www.lamatematicadefidel.com

Allí encontrarás dos videos magistralmente explicados que te permitirán comprender este tema, que resulta extremadamente difícil explicar a través de una guía.