INDICE

RESUMEN

Al inicio de cada capítulo, se presentan, de manera sencilla, los conceptos básicos más comunes relacionados con el tema que se desarrolla, de tal forma que el lector haga una remembranza de los tópicos que debe conocer y tenga una motivación inmediata. Ello facilitará que las aplicaciones sean más expeditas y amenas, porque verá con satisfacción que obtiene resultados tan exactos como los que tendría con los métodos analíticos, cuando sea posible hacerlos de esa forma.

Referente a las técnicas para resolver problemas, representados por ecuaciones algebraicas y trascendentes, se describen siete métodos entre los que destacan, por su sencillez: Bisección, Regla Falsa, Monte Carlo, Newton-Raphson (llamado también Newton-Sencillo), Newton Modificado y Secante.

Entre los métodos que resuelven sistemas de ecuaciones lineales, se muestra la bondad y conveniencia de los métodos: Eliminación completa de Gauss- Jordan, Matriz inversa, Jacobi y Gauss Seidel.

Las técnicas de interpolación y ajuste de curvas presentadas, manejan los casos lineales y no lineales. En la interpolación se explica con claridad la aplicación de las fórmulas de Gregory – Newton y la fórmula de Lagrange, en el ajuste de curvas, se describe con detalle el método de *mínimos cuadrados*, por ser de aplicación sencilla y resultados satisfactorios, si el estudiante visualiza el polinomio de ajuste más apropiado.

En la integración numérica se incluyen, por una parte: La Regla Trapecial, la Regla de Simpson y, por la otra: La Cuadratura de Gauss y el polémico método de Romberg.

Para resolver ecuaciones diferenciales, se encontrarán métodos de aplicación sencilla, pero de resultados muy aproximados como: Euler, Euler mejorado y Heun; sin embargo, también se muestran otros de mayor grado de dificultad, pero de resultados mejorados, como los métodos de Runge-Kutta en sus diferentes modalidades.

En las aplicaciones, se plantean problemas tipo, por áreas del conocimiento en el campo de ingeniería. Los ejemplos presentados fueron resueltos con ayuda de una computadora digital, ya que, se justifica ampliamente que, con el advenimiento de las computadoras, los métodos numéricos adquieren una fuerza, casi insuperable.

EL AUTOR

Capítulo **1**

INTRODUCCIÓN Y ALCANCE DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

1.1 Introducción

Empezaremos este capítulo, discutiendo en forma breve el propósito y el poder de los métodos numéricos; así como sus limitaciones y posteriormente presentaremos una justificación para el estudio detallado de los mismos. En cada capítulo, primeramente se presentas los elementos teóricos básicos, con un lenguaje fácil de digerir y al final de cada exposición teórica, como un repaso de la teoría se resuelven varios ejercicios, con la finalidad de que los estudiantes les permitan, posteriormente, adaptarlos a sus necesidades propias, en sus aplicaciones profesionales o de investigación.

1.2 ¿ Qué son los métodos numéricos?

Los métodos numéricos son una clase de técnicas para resolver una gran variedad de problemas matemáticos. Estos problemas pueden, naturalmente, tener su origen como modelos matemáticos o situaciones físicas. Este tipo de métodos son extraordinarios puesto que solamente son empleadas operaciones aritméticas y lógicas; de esta manera los cálculos pueden hacerse directamente o usando una computadora digital.
Aunque en el sentido estricto del término, cualquier cosa, desde los dedos hasta un ábaco, pueden ser considerados como una computadora digital, sin embargo, aquí usaremos este término para referirnos a *computadoras electrónicas*, las cuales han sido usas razonablemente y en forma difusa, desde a mediados de 1950. Actualmente los métodos numéricos preceden a las computadoras electrónicas por muchos años y, en realidad, muchos de los métodos usados generalmente datan, en forma virtual, desde el inicio de las matemáticas modernas; mas sin embargo, el uso de estos métodos fue relativamente limitado hasta el advenimiento de la calculadora mecánica de escritorio y posteriormente dramáticamente incrementada.

En un sentido real, los métodos numéricos vinieron a revolucionar las técnicas de solución, de varios problemas complejos, con la introducción de la computadora electrónica.
La combinación de métodos numéricos y las computadoras digitales han creado una herramienta de inmenso poder en el análisis numérico. Por ejemplo, los métodos numéricos son capaces de manejar la *no linearidad, la geometría compleja y sistemas grandes de ecuaciones simultáneas* que son necesarios para la simulación perfecta de muchas situaciones físicas reales. Las matemáticas clásicas, junto con las matemáticas aplicadas más ingeniosas no pueden competir con muchos de estos problemas en el nivel requerido por la tecnología de hoy en día. Como resultado, los métodos numéricos han desplazado el análisis con las matemáticas clásicas en muchas aplicaciones industriales y de investigación; sin que ello signifique que las instituciones deban dejar de incluir, en la formación de los estudiantes, esta temática.

1.3. Métodos anteriores a la aparición de la computadora

Antes del uso de la computadora digital, había tres métodos diferentes que los ingenieros aplicaban a la solución de los problemas, a saber:

1. *Soluciones exactas*. Con frecuencia, estas soluciones resultaban útiles y proporcionaban una comprensión excelente del comportamiento de algunos sistemas. Sin embargo, las soluciones analíticas pueden encontrarse sólo para una clase limitada de problemas. Estos incluyen aquellos que pueden aproximarse mediante modelos lineales y también a aquellos que tienen una geometría simple y pocas dimensiones. En consecuencia, las soluciones exactas (analíticas) tienen valor práctico limitado, porque la mayor parte de los problemas reales no son lineales, e implican formas y procesos complejos.
2. *Soluciones gráficas*. Estas soluciones tomaban la forma de grafos o nomogramas. Aunque las técnicas gráficas a menudo pueden emplearse para resolver problemas complejos, los resultados no son muy precisos. Es más, las soluciones gráficas (sin ayuda de una computadora) son tediosas en extremo y difíciles, de implementar. Finalmente, las técnicas gráficas están limitadas a aquellos problemas que puedan describirse usando tres dimensiones o menos.
3. *Cálculos manuales y reglas de cálculo*. Aunque en teoría estas aproximaciones deberían ser perfectamente adecuadas para resolver problemas complicados, en las prácticas, se presentan algunas dificultades. Los cálculos manuales son lentos y tediosos; además no existen resultados consistentes debido a que surgen equivocaciones cuando se efectúan las operaciones de esa forma.

1.4.- Los métodos numéricos y la práctica de la ingeniería

Desde finales de la década de 1940, la multiplicación y disponibilidad de las computadoras digitales han llevado a cabo una verdadera explosión en cuanto al uso y desarrollo de los métodos numéricos. Al principio, este crecimiento estaba algo limitado por el costo de acceso a computadoras grandes, por lo que, muchos ingenieros continuaban usando simples planteamientos analíticos en una buena parte de su trabajo. No es necesario mencionar que la reciente evolución de computadoras personales de bajo costo, ha dado a mucha gente un fácil acceso a poderosas capacidades de cómputo.
Además, existe un buen número de razones por las cuales se deben estudiar los métodos numéricos, en ciencias e ingeniería:

1. Los métodos numéricos son herramientas extremadamente poderosas para la solución de problemas reales. Son capaces de manejar sistemas de ecuaciones lineales grandes, la no linealidad y geometrías complicadas (como ya se dijo antes), que son comunes en la práctica de la ingeniería aplicada y que, a menudo, son imposibles de resolver analíticamente. Por lo tanto, amplían la habilidad de quien los estudia para resolver problemas.
2. En el transcurso de su carrera, es posible que el lector tenga la ocasión de usar software disponible comercialmente que contenga métodos numéricos. El uso inteligente de estos programas depende del conocimiento de la teoría básica en la que se basan los métodos que se discutirán en este trabajo; por lo que es necesario que el estudiante los vea (los métodos numéricos), como una respuesta a sus inquietudes.
3. Hay muchos problemas, en las aplicaciones reales, que no pueden plantearse al emplear programas “hechos”. Si se está versado en los métodos numéricos y se es un adepto a la programación de computadoras, entonces se tiene la capacidad de diseñar programas propios para resolver los problemas, sin tener que comprar un software costoso.
4. Los métodos numéricos son un vehículo eficiente para aprender a servirse de las computadoras personales. Es bien sabido que una manera efectiva de aprender a programar las computadoras es al escribir los programas. Como los métodos numéricos en su mayor parte están elaborados para implementarse en computadoras, resultan ideales para ese propósito. Aún más, están especialmente adaptados para ilustrar la potencia así como las limitaciones de las computadoras. Cuando el lector implemente con buen resultado los métodos numéricos en una computadora personal y los aplique para resolver problemas de otro modo resultan intratables, entonces tendrá una demostración tangible de cómo pueden ayudarle las computadoras para su desarrollo profesional. Al mismo tiempo, aprenderá a reconocer y controlar los errores de aproximación que son inesperables de los cálculos numéricos a gran escala.
5. Los métodos numéricos son un medio para reforzar su comprensión de las matemáticas. Porque una función de los métodos numéricos es la de reducir las matemáticas superiores a operaciones aritméticas básicas, ya que profundizan

en los sistemas que de otro modo resultan oscuros. Esta alternativa aumenta su capacidad de comprensión y entendimiento en la materia.

1.5 ¿ Hay límites para la capacidad de los métodos numéricos?

Naturalmente que la respuesta a esta pregunta es un enfático “si”. Está a la vista de muchos investigadores, científicos e ingenieros quienes deberían conocer mejor, que si un problema no puede ser resuelto de ningún otro modo, debido a que, todos y cada uno tiene que estar *frente a una computadora*. Este estado de cosas (eventos) es indudablemente debido al enorme poder de los métodos numéricos los cuales hemos discutido en la sección anterior. Sin embargo, desafortunadamente es cierto que hay muchos problemas que son aún imposibles (en algunos casos deberíamos usar la palabra “ impráctica”) de resolver usando métodos numéricos. Para algunos de esos problemas no exactos, el modelo matemático completo aún no ha sido encontrado, obviamente es imposible considerar una solución numérica. Otros problemas son simplemente tan enormes que su solución está más allá de los límites prácticos en términos de la tecnología actual, de las computadoras. Por ejemplo, ha sido estimado que para obtener un detalle de la solución para problemas de flujo turbulento, en función del tiempo, que incluya los efectos de los remolinos más pequeños, requeriríamos del orden de 30 años. Esta estimación ha sido basada en la tecnología de 1968 y es probablemente más o tal vez un poco menor con la tecnología actual. Desde luego la pregunta completa de practicabilidad, frecuentemente depende de qué tanto se dispone para pagar la obtención de una respuesta. Algunos problemas son tan importantes que la industria o el gobierno está dispuesto a pagar muchos millones de dólares para obtener la capacidad computacional necesaria y ayudar a hacer práctica la solución de los problemas que previamente habían sido considerados con solución impráctica. En muchos casos, aunque los límites están constantemente reduciéndose, ahí permanecen muchos problemas, los cuales están en la investigación con la tecnología actual o en la formulación del modelo matemático o en términos de la capacidad computacional que hoy se tiene.

1.6 ¿ Por qué estudiar métodos numérico?

Podría parecer extraña la pregunta; sin embargo, para los conocedores del poder de los métodos numéricos, que saben de su extenso uso en cada faceta de la ciencia, la tecnología y el gobierno; la pregunta es injustificada, ya que, en el estudio de la ciencia y la tecnología tienen una justificación inmediata, por lo que,

mas bien se recomienda su uso en la licenciatura y postgrado, debido a que estos últimos tendrían pocas aportaciones si no hacen aplicaciones de éstos y de nada le servirían los equipos más modernos de cálculo.
En muchos casos, el trabajo hecho por los métodos numéricos es altamente valorado, sin embargo, en el uso de programas y subprogramas inevitablemente se encontrarán dificultades. Estas dificultades pueden depender de muchas causas, incluyendo las siguientes:

a) Una situación física compleja no puede ser *exactamente* simulada por un modelo matemático (esto es un punto extremadamente crucial, pero está fuera del alcance de la presente discusión).
b) El método numérico no libera completamente todas las situaciones.
c) El método numérico no está completamente libre de error.
d) El método numérico no es óptimo para todas las situaciones.

Las dificultades con los métodos numéricos pueden resultar en un programa pre-empaquetado o un subprograma de librería produciendo resultados erróneos o no tener los resultados esperados. En adición, el usuario registra subprogramas de librería para ejecutar o hacer ciertas tareas para encontrar una variedad de subprogramas y números que generalmente son aplicados, pero el material descriptivo rara vez dará algún indicador de la eficiencia del subprograma o su conveniencia para resolver el problema en específico.
El usuario con cualquiera de esos problemas, pero que no tiene el conocimiento de métodos numéricos, debería buscar la información necesaria (quizá un analista numérico), si de verdad es un asesor evaluado. Sin embargo, en esta situación podría ser difícil que el usuario planteara las preguntas adecuadamente y, en consecuencia la respuesta podría no ser la más adecuada, puesto que la experiencia de los dos podría quizá sea bastante diferente.
Podemos ver de esta manera que, existe una fuerte justificación para que el científico o el ingeniero adquieran conocimientos de los métodos numéricos. Este conocimiento capacita al usuario de un computador, a seleccionar, modificar y programar un método para una tarea específico, así como en la selección de programas y subprogramas pregrabados de la librería y hacer posible, para el usuario, la comunicación con un especialista eficiente y de modo inteligente buscar ayuda para un problema particularmente difícil. Finalmente deberían ser reorganizado, el gran volumen de los que han sido llamados “ métodos desarrollados” (cuyo objetivo es escribir programas para simular problemas físicos complejos) hecho por ingenieros y científicos y no por analistas numéricos. Obviamente, las técnicas numéricas más eficientes deberían ser empleadas exactamente en tal trabajo y el conocimiento completo de métodos numéricos es esencial para ingenieros y científicos en tales proyectos.
A continuación se discuten, brevemente, algunos tópicos relevantes de las herramientas de cálculo mencionadas: las computadoras electrónicas.

1.7 Lenguajes de computadora.

La mayoría de los lectores de este libro, tendrá en mente alguna idea en *programación*, en un lenguaje de “alto nivel” para computadora, tal como FORTRAN, ALGOL o BASIC. Esos lenguajes de programación permiten al usuario escribir programas en una forma en la que incluye fórmulas algebraicas y proposiciones lógicas en inglés, para instrucciones de entrada y salida. Tales lenguaje de alto nivel son virtualmente independientes de la máquina en la cual correrá el programa. Mediante el uso de un programa de computadora llamado *compilador*, el programa de alto nivel puede ser convertido al código fundamental de la máquina con lo que el programa será actualmente ejecutado.

Para la mayoría de las cosas es usado el lenguaje algebraico para propósito científico es FORTRAN IV. Con algunas excepciones el ALGOL raras veces es usado para cálculos científicos, pero es extremadamente usado como un lenguaje internacional para describir algoritmos. El BASIC es un lenguaje popular para uso de sistemas de tiempo compartido y usualmente es usado para tareas programadas relativamente simples. Otros lenguajes de alto nivel para uso científico son APL (también usa, razonablemente el tiempo compartido y conveniente tanto para tareas de muy simples hasta sofisticadas), MAD (con las mismas limitantes que el ALGOL) y PL-1 (un lenguaje actualmente poderoso de interés principal para cálculos científicos).

La aparición de cada nuevo lenguaje de programación es bien recibida por un buen promedio de usuarios. Estos lenguajes imponen nuevas reglas que tienen que ser aprendidas y posiblemente confundidas con otros lenguajes. Sin embargo, cualquier perdona razonablemente flexible encontrará pocas dificultades en adaptarse a un nuevo lenguaje si es necesario. Lo más importante es la economía, los programas de computadora largos son muy caros y la conversión de esos programas a otro lenguaje puede ser la mejor tarea, pero involucrará muchos meses de trabajo. Esta es una de las razones principales por las que FORTRAN IV es el lenguaje estándar en aplicaciones de la ciencia y únicamente debe desplazarse hacia el futuro.

Capítulo 2

APROXIMACIONES Y ERRORES

2.1- Introducción

Las técnicas numéricas conducen a aproximaciones en sus resultados, ya que, éstas se usan como se dijo antes, como una alternativa de solución cuando el problema por resolver no tiene un modelo matemático de solución o aún teniéndolo la respuesta esperada no es encontrada con los métodos tradicionales. Por consiguiente, los *errores* forman parte intrínseca de los métodos numéricos, debido a que éstos son sólo una aproximación de la solución a un problema. En la práctica profesional, lo errores pueden resultar costosos y en algunas ocasiones catastróficos, debido a que por un error se puede perder hasta la vida si una estructura o un dispositivo llega a fallar. Las fuentes de errores pueden ser *instrumentales*, por imperfecciones o desajustes del equipo usado en la toma de medidas; *personales* que se producen por la falta de habilidad del observador para leer, con exactitud, los instrumentos y de *cálculo*.
En el presente capítulo se cubren varios aspectos que identifican, cuantifican y minimizan los errores. Dos de los errores más comunes son los de *redondeo* y de *truncamiento*. Los primeros se deben a que la computadora o el equipo de cálculo usado, sólo pueden representar cantidades con un número finito de dígitos. Los errores por truncamiento, representan la diferencia entre una formulación matemática exacta de un problema y la aproximación dada por un método numérico. Desde luego que no dejan de discutirse, aunque de manera somera, los *errores por equivocación*, que son debidos a una mala formulación de modelos, así como los *errores por incertidumbre* de la obtención de datos.

2.2 Cifras significativas

El concepto de *cifras significativas* se ha desarrollado para designar el grado de confiabilidad de un valor numérico. El número de cifras significativas es el número

de dígitos, más un dígito estimado que se pueda usar en los instrumentos no digitales.
Los *ceros* no siempre son cifras significativas, ya que, pueden usarse sólo para ubicar el punto decimal, así que, los siguientes números tienen cuatro cifras significativas.

0.000 018 45
0.000 184 5
0.001 845

Cuando se incluyen ceros en números muy grandes, no se ve claro cuantos de ellos son significativos, si es que los hay. Por ejemplo, el número 45300 puede tener tres, cuatro o cinco dígitos significativos, dependiendo si los ceros se conocen con exactitud. La incertidumbre se puede desechar usando la notación científica; por lo que, 4.53×10^4, 4.530×10^4 y 4.5300×10^4 muestran que el número en cuestión, tiene tres, cuatro y cinco cifras significativas.
Las implicaciones que se tienen en el estudio de los métodos numéricos son:
1.- Debe especificarse claramente la tolerancia en los cálculos, por ejemplo, se puede decidir que la aproximación sea aceptable siempre y cuando sea correcta hasta cuatro cifras significativas, o sea que, debe existir seguridad que las primeras cuatro cifras son correctas.
2.- Aunque ciertas cantidades (π, e, $\sqrt{2}$), representan números específicos, no se pueden expresar exactamente con un número finito de dígitos. Por ejemplo, el número π es igual a 3.141 592 653 589 793 238 462 643... hasta el infinito. De aquí que estos números siempre contendrán el error por redondeo, puesto que los dígitos desplegados en una computadora (o en una calculadora de bolsillo) siempre es una cantidad finita comprendida entre siete y catorce cifras significativas, como se describe a continuación.

Sistema	**Cifras significativas**
Calculadora programable	7-10
Microcomputadora	7-10
Minicomputadora	7-10
Computadoras	7-14

2.3 Definiciones de error

Los *errores numéricos* se generan con el uso de aproximaciones para representar las operaciones y cantidades matemáticas. Éstos incluyen *errores de truncamiento*,

que resultan de presentar aproximadamente un procedimiento matemático exacto, así como a los *errores de redondeo*, que se originan al representar en forma aproximada números exactos. Por consiguiente, la relación entre un resultado exacto (Xv) y el aproximado (Xa) está dada por:

$$Xv = Xa + error \qquad (2\text{-}1)$$

De lo anterior se sigue que el error (ε_v) se puede calcular con,

$$\varepsilon_v = Xv - Xa \qquad (2\text{-}2)$$

que generalmente, es de más interés el valor absoluto de dicho error; ya que lo que realmente se quiere medir es la cercanía del valor aproximado (Xa) al valor exacto.
En general, en situaciones reales, es difícil conocer el valor verdadero a priori; por lo que, casi siempre se hablará de *error relativo* y *error relativo porcentual*, que se obtienen con las relaciones,

$$Er = \left|\frac{Ev}{Vv}\right| \text{, en forma absoluta} \qquad (2\text{-}3)$$

$$Er = \left|\frac{Ev}{Vv}\right| \text{*100, en porcentaje.}$$

En la aplicación de los métodos numéricos, se encontrará que usan esquemas iterativos para aproximar resultados. En tales casos, el error se calcula de la siguiente manera:

$$\varepsilon_v = \left(\frac{Xa_{i+1} - Xa_i}{Xa_{i+1}}\right) x100 \qquad (2\text{-}4)$$

donde Xa_{i+1}, es la aproximación actual
Xa_i, corresponde a la aproximación previa.

Note usted que la ecuación (2-4) puede conducir a valores positivos ó negativos, si la aproximación previa o el valor aproximado es mayor que la aproximación actual o que Vv. Entonces, el valor del error (o del error relativo) es negativo y, positivo en caso contrario. A menudo, cuando se realizan cálculos, puede no importar mucho el signo del error, si no más bien su valor absoluto, para compararlo con una tolerancia prefijada ε_t, la cuál depende de la exactitud requerida en los resultados. Cuando es así, los cálculos se repiten hasta que el valor absoluto del error sea igual ó menor que dicha tolerancia.

$$|\varepsilon_v| \leq \varepsilon_t \qquad (2\text{-}5)$$

debido a que cuando se cumple la relación anterior, se considera que el resultado obtenido está dentro de un nivel aceptable fijado previamente.

2.3.1 Errores de redondeo

En la sección (2-2) se mencionó que, los errores de redondeo se deben a que las computadoras, sólo guardan un número finito de cifras significativas durante un cálculo. Las computadoras realizan esta función de maneras diferentes; por ejemplo, si sólo guardan siete (7) cifras significativas y los cálculos involucran al número π, la computadora sólo almacena y usa 3.141592, omitiendo las cifras restantes y, por consiguiente, genera un error de redondeo de:

$$\varepsilon_v = 0.000\ 000\ 650$$

Siendo ésta, una de las varias formas que utiliza una computadora para redondear números. Esta técnica de retener sólo las primeras siete cifras se le llama *truncamiento* en el ambiente de computación; de preferencia se le llamará de *corte* para distinguirlos de los errores de truncamiento que se analizarán en la siguiente sección. Un corte ignora las cifras restantes, de la representación decimal completa; por ejemplo, para el caso anterior, el octavo dígito significativo es 6. Por lo tanto, π se representa de manera más exacta como 3.141 593, mientras que con el corte fue 3.141 592. De esta forma el error, por redondeo sería:

$$\varepsilon_v = 0.000\ 000\ 350$$

Desde luego que las computadoras, se pueden desarrollar para redondear números de acuerdo con las reglas de redondeo, como la que se acaba de aplicar, aunque esto agrega costo computacional.

2.3.2 Reglas de redondeo

Las siguientes reglas pueden aplicarse al redondear números, cuando se realizan cálculos a mano.

Primera: En el redondeo, se conservan las cifras significativas y el resto se descarta. El último dígito que se conserva se aumenta en uno, si el primer dígito descartado es mayor de “5”; de otra manera se deja igual, pero si el primer dígito descartado es “5” ó “5” seguido de ceros, entonces el último dígito retenido se incrementa en uno, sólo si es par.

Segunda: En la suma y la resta, el redondeo se lleva a cabo de forma tal que, el último dígito retenido en la respuesta corresponda al último dígito más significativo de los números que están sumando o restando. Nótese que un dígito en la columna de las centésimas es más significativo que uno de la columna de las milésimas.

Tercera: Para la multiplicación y para la división, el redondeo es tal que, la cantidad de cifras significativas del resultado es igual al número más pequeño de cifras significativas que contiene la cantidad en la operación.

Cuarta: Para combinaciones de las operaciones aritméticas, existen dos casos generales. Se puede sumar o restar el resultado de las multiplicaciones o de las divisiones.

$$\left(\begin{array}{c}\text{Multiplicación}\\ \text{Ó}\\ \text{División}\end{array}\right) \begin{array}{c}+\\ \\ -\end{array} \left(\begin{array}{c}\text{Multiplicación}\\ \text{Ó}\\ \text{División}\end{array}\right)$$

o también se pueden multiplicar o dividir los resultados de las sumas y las restas, es decir,

$$\left(\begin{array}{c}\text{Suma}\\ \text{Ó}\\ \text{Resta}\end{array}\right) \begin{array}{c}\text{X}\\ /\end{array} \left(\begin{array}{c}\text{Suma}\\ \text{Ó}\\ \text{Resta}\end{array}\right)$$

en ambos casos, se ejecutan las operaciones entre paréntesis y el resultado se redondea, antes de proceder con otra operación, en vez de redondear únicamente el resultado final.

Ejemplo 2.1 Ilustración de las reglas de redondeo.

a) Errores de redondeo. Redondear los números dados, al número de cifras significativas indicadas.

Número Inicial	Cifras significa-tivas	Número redondeado
5.6723	3	5.67
10.406	4	10.41
7.3500	2	7.4
7.4500	2	7.4
88.216500	5	88.216
1.25001	2	1.3

b) Sumas y restas.

b.1.- Evalúese 2.2 –1.768, redondeando a una cifra significativa

2.2 – 1.768 = 0.432 que redondeado es --→ 0.4

b.2.- Evalúese $4.68x10^{-7} + 8.3x10^{-4} – 228x10^{-6}$. Conviene expresar los números con un mismo exponente, así que,

$0.00468x10^{-4} + 8.3x10^{-4} .2.28x10^{-4} = 6.02468x10^{-4}$

De esta manera, se puede ver claramente que el 3 (del 8.3) es el último dígito significativo retenido, por lo que, la respuesta se redondea de la siguiente manera.

$6.02468x10^{-4}$ para a $\rightarrow 6.0x10^{-4}$

c) Multiplicación y división

c.1.- Evaluar 0.0642 x 4.8

0.0642x4.8=0.30816 →0.31

c.2.- Ahora evalúe 945/0.3185

954 /0.3185 = 2 967-032 967....→2 967

d) Combinaciones.

d.1.- Calcular [15.2(2.8 $x10^{-4}$)] + [(8.456$x10^{-4}$) –0.177]

Primero efectúense la multiplicación y la división que están dentro de los corchetes:

[4.256 $x10^{-3}$] + [-176.1544... $x10^{-3}$]

Ahora, antes de sumar, se redondean las cantidades encerradas:

[4.3$x10^{-3}$] + [-176.15$x10^{-3}$] = -171.85$x10^{-3}$ →-171.8$x10^{-3}$

d.2.- Evalúese

$$\frac{6.740x10^{-5} - 8.7x10^{-7}}{2.672x10^{3} + 5.8}$$

Igualando los exponentes, se tiene:

$$\frac{674x10^{-7} - 8.7x10^{-7}}{2.672x10^{3} + 0.0058x10^{3}}$$

redondeando queda.

$$\frac{665x10^{-7}}{2.678x10^{3}} = 2.483196...x10^{-8}$$

2.3.3 Errores de truncamiento

Son aquellos que se presentan al aproximar funciones analíticas por medio de algunos términos de una serie infinita; esto se hace frecuentemente en los métodos numéricos cuando es difícil realizar operaciones con alguna función complicada y se toman en su lugar los primeros términos de una serie que aproxima la función, truncando los demás. También se presenta cuando se utilizan números irracionales, tales como: $\sqrt{2}$, **e**, π, etc., ya que para trabajar con ellos se toma un número determinado de cifras significativas y se truncan las demás.

Ejemplo 2.2 El número **e**, base de los logaritmos neperianos, con cinco cifras decimales, es igual a 2.71828; calcular el error absoluto y el error relativo en el que se incurre en cada caso, al tomar hasta el primero, segundo, tercero y cuarto términos de la serie

$$e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Solución.

a) Tomando hasta el primer término

$$e = \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} = 1$$

En consecuencia, el error absoluto es, $\varepsilon_v = |2.71828 - 1| = 1.71828$ y el error relativo ε_r, resulta,

$$\varepsilon_r = \left|\frac{2.71828 - 1}{2.71828}\right| = 0.63212 = 63.212\%$$

b) Si se toma hasta el segundo término de la serie, se tendrá

$$e = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 2$$

De aquí se concluye que, ε_v = 0.71828 y ε_r = 0.26424 = 26.424%

c) Ahora, tomando hasta el tercer término

$$e = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2.5$$

Este resultado conduce a, ε_v = 0.21828 y ε_r = 0.0803 = 8.03%

d) Tomando hasta el cuarto término, se tiene

$$e = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2.6667$$

con lo que, se llega a, ε_v = 0.05161 y ε_r = 0.01899 = 1.9 %

2.4 Limitaciones en la exactitud de los datos experimentales.

El científico debe trabajar con datos dignos de confianza. En esta sección describimos algunas de las razones por las cuales los datos pueden resultar defectuosos.

2.4.1. Error humano

Este puede deberse al descuido, donde quizás simplemente es una mala lectura en una escala. Las lecturas repetidas de la misma cantidad a menudo revelan este tipo de error.

El error en una técnica es muy difícil de detectar, pues se comete en todas las medidas tomadas en la misma forma. Una falla común en este tipo de error es el *paralaje*. Este ocurre, por ejemplo, cuando se está leyendo la indicación de una aguja, en una escala (v.gr., en un cronómetro). La figura 2.1-a, muestra tal aguja vista desde arriba. La figura 2.1-b, es una vista de planta. Claramente se nota que la lectura Rc, de la escala, es correcta y, para obtener este resultado el ojo del observador debe estar colocado directamente arriba de la aguja, en el punto Ec. En cualquier otra posición, digamos Ew, se tomará una lectura de escala Rw, incorrecta. Con experiencia y cuidado uno se vuelve más apto para evitar errores como estos. El diseño de los instrumentos puede también ayudar en este aspecto. Para evitar el paralaje, por ejemplo, muchos cuadrantes incorporan un espejo a lo largo de toda la escala- colocando el ojo en tal forma que la aguja y su reflexión queden superpuestas, de esta manera el ojo queda directamente arriba de la guja; es decir, la lectura tomada será como la Rc (la correcta). Para reducir aún más el error, en la lectura, algunos instrumentos actuales dan la lectura en forma digital.

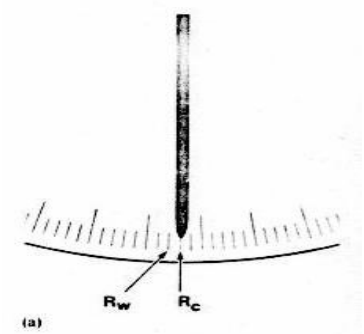


Fig. 2.1-a

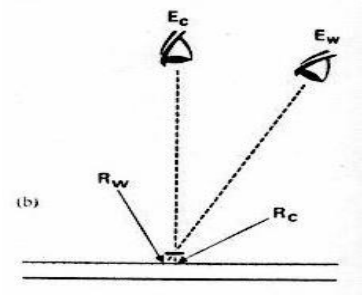


Fig. 2.1-b

2.4.2. Limitaciones instrumentales

Los instrumentos tienen sus propias limitaciones inherentes. Algunas son obvias, como el caso de las reglas de madera, donde uno puede ver a simple vista que las divisiones no están igualmente espaciadas. Sin embargo, piezas más sofisticadas de equipo, pueden estar sujetas a varias fuentes de error. Tomen, por ejemplo. Un microscopio. Aunque los microscopios, fueron diseñados primeramente para observar objetos pequeños, algunas veces es necesario medir el tamaño del objeto. La exactitud de tales medidas depende de un número de factores-la rigidez de la columna que sostiene los lentes, la rigidez con la cual el espécimen se fija en la platina y la exactitud con la cual las divisiones han sido gravadas en la escala. Las platinas de algunos microscopios se mueven rotando un tornillo calibrado; cada vuelta completa corresponde a un cierto movimiento de la platina (figura 2.2). La exactitud de la medida hecha, en tales instrumentos, depende de la uniformidad de la rosca del tornillo. A menudo también sucede, que cuando la platina se ha movido alguna distancia en una dirección, ésta no responde inmediatamente cuando el tornillo se mueve en sentido contrario. Esto se llama retroceso. Por consiguiente, se darán lecturas diferentes, dependiendo de la dirección en la cual el microscopio se acerca a determinada posición. Desde luego que esta dificultad se puede evitar simplemente aproximándose a la posición de la medida, siempre en un mismo sentido.

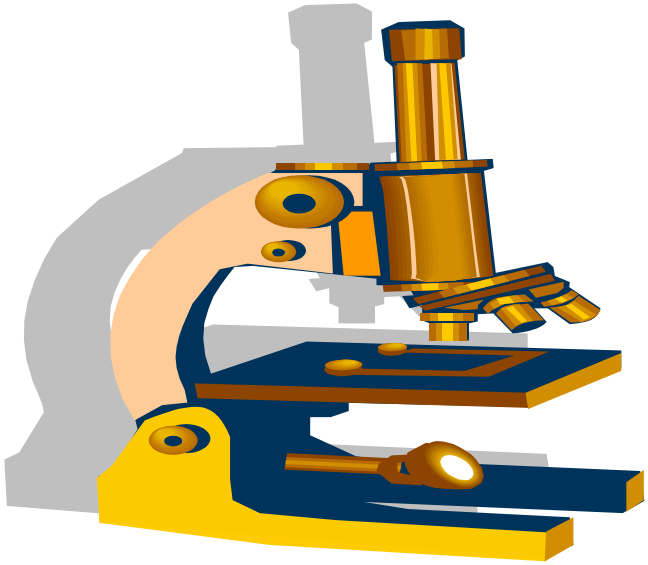


Fig. 2.2 Microscopio de laboratorio

Problemas propuestos

2.1 La expansión en serie de Maclaurin para el cos(x) es:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots$$

Iniciando con el primer término cos(x) =1; agréguense los términos uno a uno para estimar cos(π/3). Después de agregar cada término, calcúlense los errores porcentuales relativos, exactos y aproximados..

2.2 Repetir los cálculos del problema anterior, pero ahora usando la serie de Maclaurin para el seno(x):

$$seno(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$$

y estime el seno(π/2).

2.3. Úsense los términos en serie de Taylor de *cero* a *tercer orden* para estimar f(3), para

$$f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$$

usando como punto base x = 2. Calcule el error relativo porcentual correcto para cada aproximación.

Capítulo **3**

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES

3.1 Introducción

Un problema muy común en el campo de ciencias e ingeniería, es la solución de una situación física que pueda ser representada por una ecuación del tipo (3-1). Por consiguiente, en este capítulo se expondrán algunos métodos para encontrar la solución a esas ecuaciones.
Antes de hacer la presentación de los métodos numéricos de solución, es importante tener claridad del concepto de *raíz ó solución* de una ecuación. Pues bien, encontrar una solución ó una raíz real de una ecuación, es hallar el valor de la variable independiente x, que anule el valor de la función f(x), que se exprese en términos de la variable citada. En otras palabras, si la función se desarrolla en el plano cartesiano **xy**, la solución real de esa función es el valor de **x** que corresponda a la intercepción del eje de las abscisas con la curva definida por la función f(x), como se muestra en Fig. 3.1. Si la curva no corta al eje **x**, entonces, la ecuación no tiene una solución real, pero puede tener raíces imaginarias, que no serán tratadas en este libro. En particular, si la ecuación a resolver es un polinomio, entonces, debemos considerar, en estricto, la definición: Sea $f(x) \in \mathbf{C}[x]$, con gr f(x) = $n \geq 1$ y

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

y se dice que $c \in \mathbf{C}$ es raíz de f(x), si f(c) = 0; es decir, si

$$a_n c^n + \ldots + a_1 c + a_0 = 0$$

también es interesante, para la solución de polinomios, tener presente el *teorema fundamental del álgebra*, cuyo enunciado es "**si $f(x) \in \mathbf{C}[x]$, con gr $f(x) = n \geq 1$, entonces, f(x) tiene al menos una raíz compleja (real o imaginaria)**; además del

siguiente corolario: **si f(x) ∈ C[x], con gr f(x) = n ≥1, entonces, f(x) tiene *n* raíces** (no necesariamente diferentes)".
Por otra parte, actualmente las calculadoras de bolsillo resuelven los polinomios, encontrando los ceros de esas funciones, sin embargo, los métodos que se presentan tienen la ventaja de resolver cualquier función f(x) sin importar del tipo que sea, siempre y cuando tenga raíces reales.

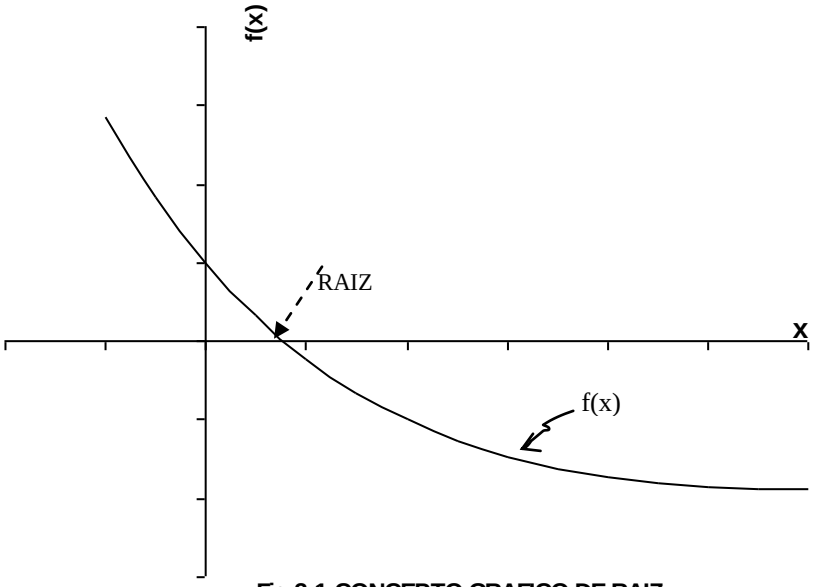


Fig.3.1 CONCEPTO GRAFICO DE RAIZ

De acuerdo a las definiciones dadas, para encontrar una solución real, las ecuaciones, sin importar que representen un polinomio u otra cualquiera, deben ser representadas en la forma

$$f(x) = 0 \qquad (3\text{-}1)$$

Algunos ejemplos de las ecuaciones que se resolverán en este capítulo, son:

$f(x) = x^2 - 6x + 5$	$f(x) = x^2 \lvert sen(x) \rvert - 4$
$f(x) = e^{\frac{-x}{4}}(2 - x) - 1$	$f(y) = y + \frac{2}{gy^2} - 1.50$
$f(R) = e^{-0.005R}\cos(0.05\sqrt{2000 - 0.01R^2}) - 0.01$	$f(x) = 0.5x - senx$

3.2 Características de los métodos numéricos

Los métodos que se presentan reciben el nombre genérico de *aproximaciones sucesivas*, los cuales desarrollan su convergencia mediante la aplicación de una *fórmula de recurrencia*. Se les da este nombre porque a partir de una primer aproximación, se obtiene otra aproximación mejor, en general, más cercana a la solución. Desde luego que, aunque reciben tal nombre, cuando el método converge, la solución es tan satisfactoria como la solución exacta, siendo la única limitación la exactitud proporcionada por el número de dígitos empleados en el cálculo, o sea que, depende del error por redondeo o por truncamiento que se admita. A continuación se describen los métodos: Aproximaciones sucesivas, Bisección, Monte Carlo, Falsa Posición, Newton-Raphson, Newton Modificado y Secante. Estos métodos son aplicables tanto a ecuaciones algebraicas y trascendentes como a ecuaciones no lineales; es decir, se podrán solucionar, ecuaciones como las listadas en la página anterior. Sin embargo, si la ecuación a resolver, no tiene respuesta en los reales, el mejor método fallará, ya que los métodos que se presentan están estructurados para encontrar las raíces reales de una ecuación.
A modo de sugerencia se señala que, en las aplicaciones a problemas reales, una buena dosis de experiencia será un apoyo de decisión importante, ya que, las soluciones resuelven, algebraicamente una ecuación, pero no toman en cuenta las situaciones reales del problema.

3.3 Método de aproximaciones sucesivas

Este método consiste en proponer un valor inicial – aproximado a la solución - y, a partir de él obtener un valor mejorado de la raíz que es sometido a una prueba de convergencia, es decir, de aproximación y, si dicha prueba es superada, entonces, el valor obtenido es la respuesta buscada; en caso de que no se cumpla la condición de convergencia, con el nuevo valor se repite el proceso, tantas veces como sea necesario. Para derivar una ecuación recursiva que permita realizar este proceso, se plantea la siguiente estrategia.
La ecuación (3-1) no cambia si se suma, miembro a miembro, el término “x”, quedando,

$$| \, x = f(x) + x \qquad (3\text{-}2)$$

si el miembro derecho es otra función que se define como g(x), entonces ecuación (3-2) se transforma en,

$$x = g(x) \qquad (3\text{-}3)$$

Es notorio que cualquier ecuación de la forma (3-1) puede expresarse como ecuación (3-3).
Como se ha dicho con anterioridad, si **x** = $\mathbf{x_r}$ es una raíz, entonces se cumplirá que $f(x_r) = 0$ y, ecuación (3-3) queda como,

$$x_r = g(x_r) \qquad (3\text{-}4)$$

Este método consiste en sustituir un valor inicial de la variable independiente x_0, aproximado a la raíz, en el segundo miembro de ecuación (3-3). Si este valor propuesto es la raíz, resultará que se cumple (3-4), o sea que,

$$x_0 = g(x_0)$$

En las aplicaciones es difícil que lo anterior ocurra en $x = x_0$, ya que, el valor inicial propuesto es solo, en el mejor de los casos, un valor cercano a la raíz, por tanto resultará que esto no siempre se cumple la primer vez, por lo que, puede escribirse,

$$x_0 \neq g(x_0)$$

o más propiamente,

$$x_1 = g(x_0)$$

donde x_1 será la nueva aproximación de la raíz. Si ahora se sustituye x_1 en el segundo miembro de (3-3), se obtendrá un valor más cercano a la raíz. Como esta es la segunda sustitución que se hace, puede escribirse,

$$x_2 = g(x_1)$$

tomando en cuenta que se repite el proceso, pero ahora con x_2, para obtener x_3, luego con x_3 para generar x_4 y, así sucesivamente, hasta sustituir x_n para obtener x_{n+1}; entonces el proceso descrito, se puede generalizar con la ecuación,

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad (3\text{-}5)$$

La ecuación (3-5) es la *ecuación recursiva* del método numérico de aproximaciones sucesivas. El diagrama de flujo de este proceso iterativo, se muestra en figura D3.1.

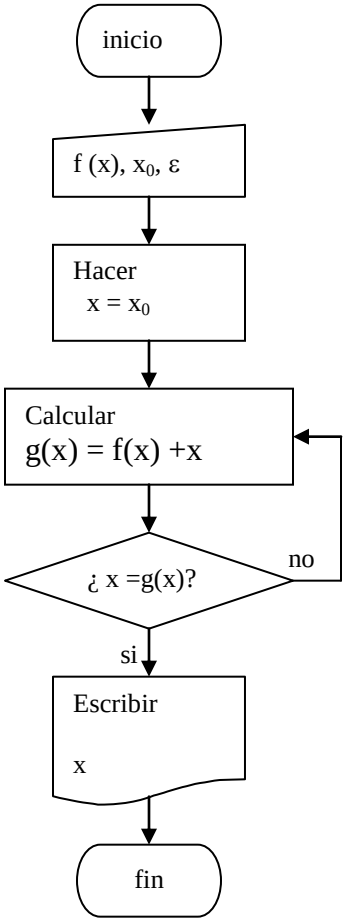


Fig. D3.1 Diagrama de flujo del método de aproximaciones sucesivas

Un criterio sano de convergencia es que la diferencia, en valor absoluto, entre dos valores consecutivos, proporcionados por este proceso, será cada vez más pequeña, es decir, x_{n+1} será cada vez más cercano a x_n, sin embargo, puede medirse dicha convergencia con ecuación (2-4), cuando se haya prefijado el error tolerable.
Finalmente, el estudiante debe saber que este método no siempre converge, por lo que, no será un error de cálculo el hecho de que encuentre, en algunos casos, esta situación; tampoco se tiene la certeza de que el problema no tenga solución real. Cuando esto ocurra, se recomienda el uso de otro método numérico y hacer un bosquejo del problema que se esté resolviendo; por lo que este método se presenta como un elemento de conocimiento, para el estudioso.

3.4 Método de Bisección o de Bolzano

Para el desarrollo y aplicación del método de bisección, el cuál se basa en el *teorema de cambio de signo* que se enuncia al final de esta sección, se requiere del apoyo de dos valores de la variable independiente **x**, que en el plano coordenado ***xy*** corresponderá al eje de las abscisas. Estos valores son proporcionados por el usuario y se designan con la letra ***a*** el menor de ellos y con ***b*** el mayor; tales que, f(a) y f(b) tengan signos diferentes, sin importar cuál de ambos sea positivo, aunque la figura 3.2 se ha dibujado de tal forma que f(a) es positiva y f(b) negativa, pero también puede encontrarse, en las aplicaciones, que f(a) sea negativa y f(b) positiva. Cualquiera que sea el caso, si la función es derivable y continua en el intervalo [a-b] seleccionado, entonces en ese segmento existe al menos, una raíz real.
Una vez cumplido lo anterior, el método consiste en valuar la función f(x) en el punto medio del intervalo seleccionado [a-b], el cuál está dado por x = (b-a)/2. Si f(x) no es nula ó menor que el error tolerable, entonces se compara el signo de ésta con el signo de f(a); cuando son iguales (observe que en la figura 3.2 f(a) es positiva , por tratarse de una función decreciente), el actual valor de **a** es sustituido por el valor numérico de **x**, con lo que el intervalo se reduce a [x-b]. Por el contrario, si la función f(x) tiene signo diferente a f(a); lo que implica que tiene el mismo signo que f(b), entonces, se cambia **b** = x, en consecuencia, el intervalo se reduce a [a-x]. Cualquiera que haya sido el cambio, se repite el proceso a partir del nuevo intervalo, es decir, se calcula nuevamente f(x), en el punto medio del nuevo intervalo, como se dijo, tantas veces como sea necesario hasta que la función f(x) sea *cero o casi nula*, lo que dependerá del error que se admita, para detener el proceso. En figura D3.2 se muestra la rutina de este método.
El método descrito tiene la ventaja de que siempre converge, es decir, si se cumplió la condición de arranque - esto es, si los valores numéricos de f(a) y f(b) tuvieron signos diferentes, sin importar en que orden - en el intervalo [a-b] es encontrada, al menos, una raíz real. En contrariedad a lo anterior, debe decirse que la

convergencia de este método es muy lenta, ya que la solución se obtiene después de realizar 12 ó más iteraciones, cuando la ecuación muestra cierto grado de dificultad y se requiere una aproximación, en la respuesta, de cuando menos tres decimales exactos.
La exactitud de una respuesta depende de la aplicación real del problema; por ejemplo, si la solución representa la superficie de un terreno y la unidad de medida es el metro, con sólo un decimal exacto se tendría una excelente aproximación; sin embargo, si el problema a resolver representa, en la situación real, la medida del diámetro de un pistón de un automotor, entonces, seguramente, si el metro es la unidad de medida, una aproximación al milímetro será requerida, es decir, aquí se exigirían, al menos, tres decimales exactos; por el contrario, si en la solución se está involucrado el lanzamiento de una nave espacial a un planeta entonces, la solución tiene que ser exacta, esto es con una tolerancia del tipo $\varepsilon = 1x10^{-20}$, por ejemplo.

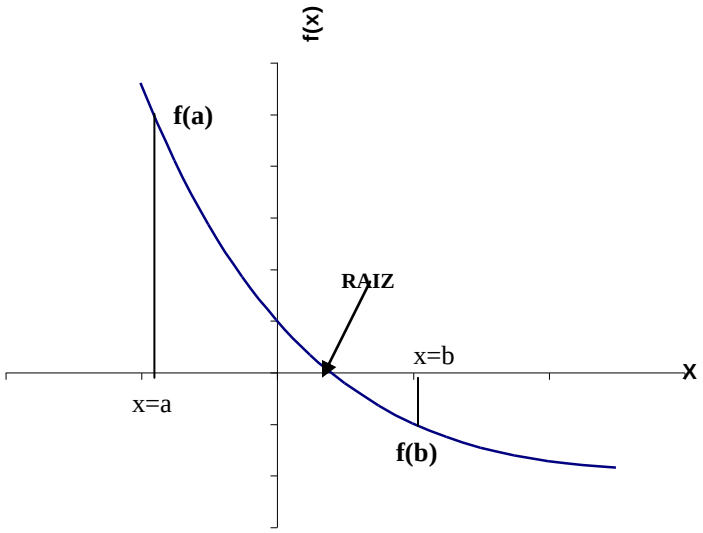


Fig. 3.2 METODO DE BISECCION

Teorema de cambio de signo.- Sea f(x) $\in$ **R**[x] y sean a, b $\in$ **R** tales que a < b. Si el signo de f(a) ≠ f(b), entonces existe *r* $\in$]a, b[tal que f(*r*) = 0. Es decir, si a < b y los números f(a) y f(b) tienen signos diferentes, entonces f(x) tiene al menos una raíz real entre a y b, como se observa en figura 3.2.

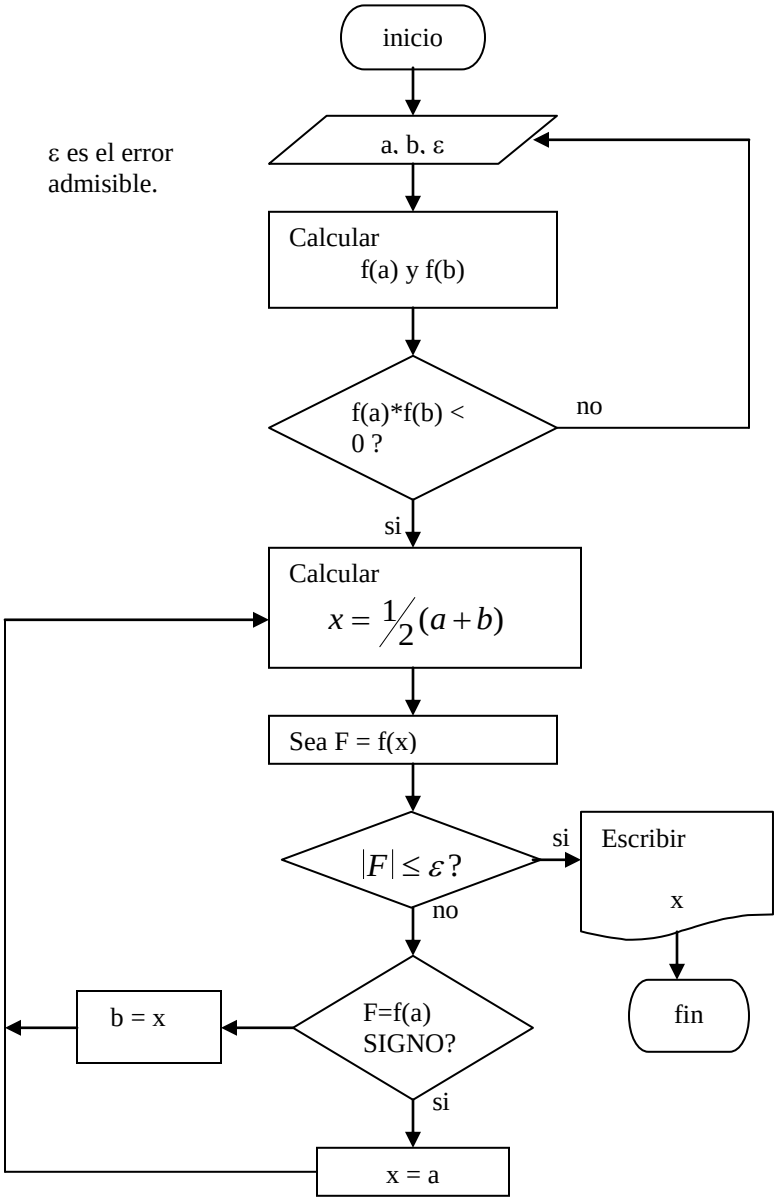


Fig. D.3.2 Diagrama de flujo del método de Bisección

3.5 Método de Falsa Posición (Regula falsi)

Este método tiene características similares al método de bisección, es decir, es convergente y útil cuando *no* se tiene idea del valor de la solución, siempre y cuando f(a)f(b) < 0; esto es, *arranca* a partir de dos puntos de apoyo, como el método de bisección. Puede afirmarse y demostrarse que tiene la misma lógica de arranque, proceso y detención que el método numérico descrito arriba, sólo cambia en la forma de estimar el valor de **x**. Ahora este valor, no es el punto medio del intervalo [a-b], sino que puede demostrarse, como se verá más adelante, que se obtiene con,

$$x = a - \left[\frac{(b-a)\,f(a)}{f(b) - f(a)} \right] \qquad (3\text{-}6)$$

Teorema que sustenta este método [10]. Sea f(x) un polinomio de coeficientes reales, con gr f(x) ≥ 2, y sean a y b números reales con a < b, tales que:

1. f(a) f(b) < 0.
2. f”(x) no tiene raíces en [a, b].

Si β_1 es el extremo del intervalo [a, b], tal que $f(\beta_1)f''(\beta_1) < 0$ [es decir, β_1 = a si f(a)f”(a) < 0 ó β_1 = b si f(b)f”(b) < 0] y α_1 es el extremo del intervalo [a, b] tal que $f(\alpha_1)f''(\alpha_1) > 0$ [es decir, α_1 = a si f(a)f”(a) > 0 ó α_1 = b si f(b)f”(b) > 0], entonces la sucesión { β_n }, donde β_1 es como ya se dijo, y

$$\beta_{n+1} = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f(\beta_n) - f(\alpha_1)}\left(\beta_n - \alpha_1\right)$$

para n = 1, 2, 3, ..., converge a la única raíz ζ de f(x) en [a, b].

El procedimiento de cálculo, de este método, es como se plantea en la rutina data en figura D3.3, cuya síntesis se resume en los siguientes pasos:

1. Dados a y b, se calculan f(a) y f(b), verificando desde este momento que estos números tengan signos diferentes, tal y como lo establece el teorema dado arriba. Es elemental que si los números propuestos no hacen que se cumpla la condición f(a)f(b)< 0, entonces, debe proponerse otra pareja de

valores para a y b ó cambiar solamente uno de ellos, hasta que se obtenga cumplida la condición de arranque.

2. Si se desea, se hace la prueba de convergencia planteada por el teorema y se verifica si la segunda derivada no tiene raíz en el intervalo propuesto (opcional).
3. Se traza una recta que una los puntos de coordenadas [a, f(a)] y [b, f(b)], como se muestra en Fig. 3.3. El punto donde esta recta corta al eje “x”, se obtiene por triángulos semejantes llegando a la ecuación (3-6) que es similar a la del teorema presentado. El método supone que “x” es la raíz, pero para un intervalo [a-b] inicial seguramente, esto es falso, ya que la raíz (ζ) es el punto donde la curva f(x) corta al eje **x**.
4. Se calcula f(x) para verificar que si se hace nula, con el valor de **x** obtenido por ecuación (3-6), es decir, se prueba que si este valor es la raíz ζ.
5. Si con este valor no se resuelve la ecuación, se sigue la rutina del método de bisección, es decir, si f(x) tiene el mismo signo que f(a), entonces, se cambia **a** por **x** (a = x) y f(a) por f(x), pero si f(x) tiene signo diferente a f(a), entonces, se cambia **b** por **x** (b = x) y f(b) por f(b) por f(x) y se vuelve a calcular **x** con ecuación (3-6).
6. Se hace la prueba de convergencia para la función ó para dos valores consecutivo de x, deteniendo el proceso, si ésta es cumplida.
7. En caso de que no sea detenido el procedimiento en paso 6, se repiten los pasos 3 – 6, tantas veces sea necesario.

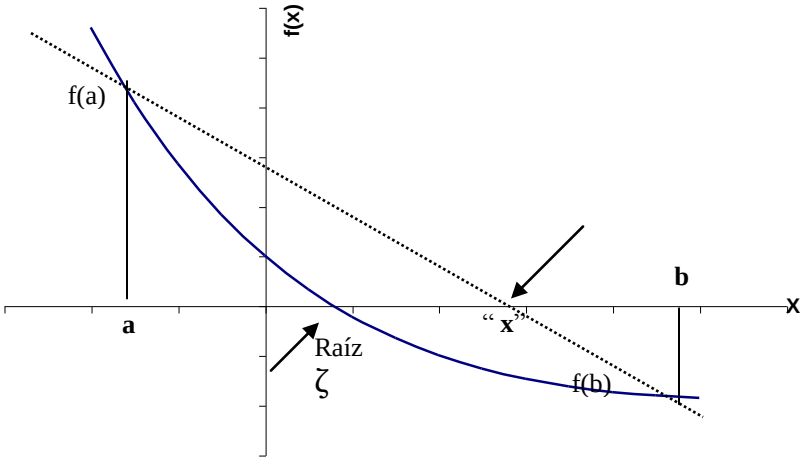


Fig. 3.3 METODO DE FALSA POSICION

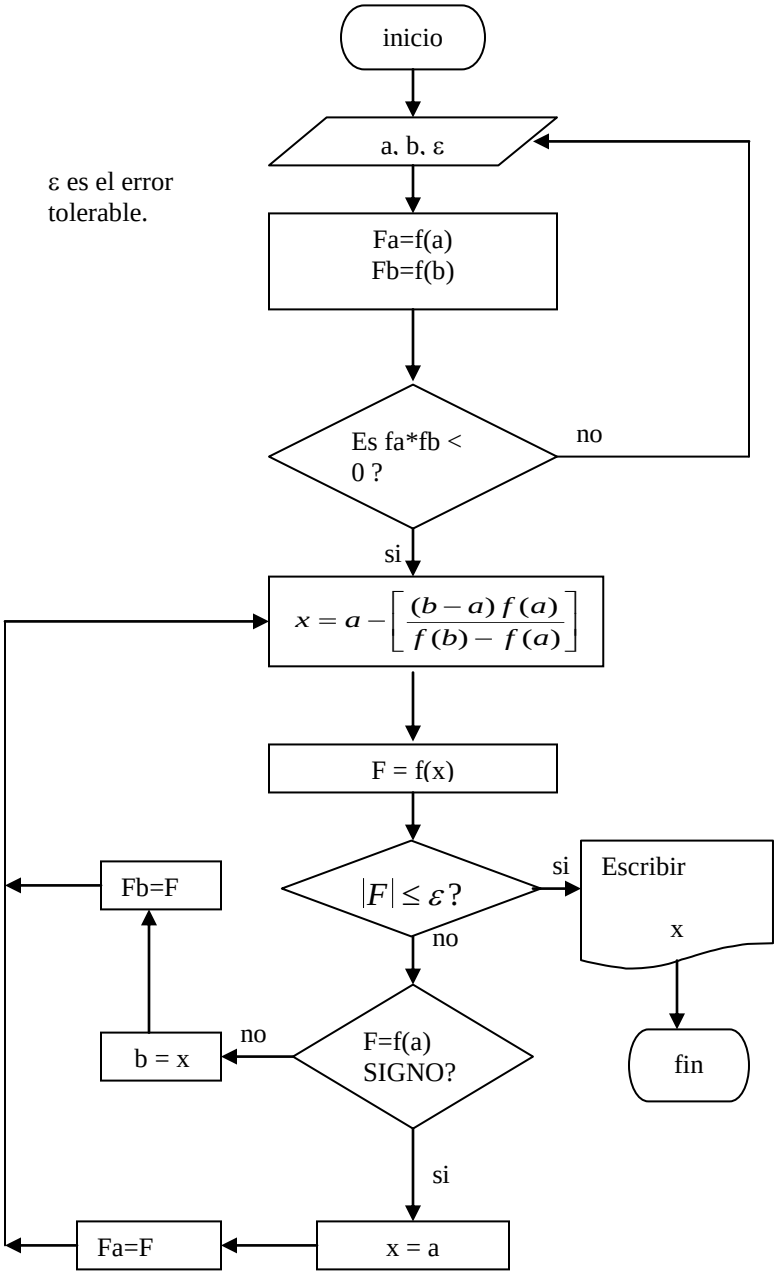


Fig. D.3.3 Diagrama de flujo: método FALSA POSICION

3.6.- Método de Monte Carlo

Otra variante de los dos métodos anteriores es el método de Monte Carlo. Este método parte de los mismos principios que el método de bisección; es decir, se requiere de dos puntos de apoyo, uno **a** y el otro **b**, de tal manera que f(a) y f(b) tengan signos distintos, para que cumplan la condición de arranque (Fig. 3.2). El proceso de este método es como se describe a continuación:

1. Dados **a** y **b**, se escoge un número aleatorio, x_{al}, con distribución de probabilidad uniforme, que se encuentre entre *cero* y 0.99 (estos números pueden tomarse de Apéndice C).
2. Se calcula **x** con la fórmula,

$$x = a + x_{al}(b - a) \qquad (3\text{-}7)$$

3. Al igual que en los dos métodos anteriores, se calcula f(x) para comparar su valor con *cero* o la tolerancia ε. Si es diferente de él o no cumple con la tolerancia, en el error, prefijada, entonces, se hace el cambio adecuado – tal y como se realizó en el método de bisección - y se repite el proceso a partir del paso 2, hasta que se encuentre la solución.

El diagrama de flujo es similar al dado en Fig. D3.1, sólo debe cambiarse el bloque que indica el cálculo de **x**, el cual se sustituye por ecuación (3-7).

3.7.- Método de Newton – Raphson

Considere un punto x_0, el cual no es una solución de la función f(x), pero es razonablemente cercano a una raíz. Expandiendo f(x) en una serie de Taylor alrededor de x_0, queda.

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \qquad (3\text{-}8)$$

Si f(x) = 0, entonces, **x** es una raíz y el lado derecho de ecuación (3-8) constituye una ecuación para obtener esa *raíz*. Desafortunadamente, la ecuación (3-8) es un polinomio de *grado infinito*. Sin embargo, un valor aproximado de la raíz **x** puede

ser obtenido, tomando solamente los dos primeros términos de la serie anterior, quedando,

$$0 = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$

de donde, al resolver para **x**, se tiene,

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_{0)}} \qquad (3\text{-}9)$$

Ahora **x** representa una mejor aproximación de la raíz y puede reemplazarse por x_0 en ecuación (3-9), para proporcionar una raíz más exacta, en la siguiente iteración. La expresión general de este método puede, por consiguiente, escribirse como,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (3\text{-}10)$$

donde el subíndice *n* denota valores obtenidos en la *n-ésima* iteración y ***n*+1** indica valores encontrados en la iteración (n+1). Este proceso iterativo convergerá a la raíz para la mayoría de las funciones y, sino converge, será por su extremada rapidez.
La ecuación recursiva (3-10), también se puede obtener resolviendo el triángulo rectángulo $x_0x_1f(x_0)$ - de figura 3.4 - observando que la tangente a la curva puede, por definición, puede escribirse como,

$$tg(\alpha) = \frac{f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0) \text{ ó } \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

de donde, al despejar x_1, se obtiene ecuación (3-10), como se nota en la parte derecha.
El diagrama de flujo de este método, se muestra en Fig. D3.4.
El proceso es terminado cuando la magnitud de cambio, calculado en el valor de la raíz, *h*, es más pequeño que alguna cantidad ε predeterminada. Esto no garantiza una exactitud de ε en la raíz. Aunque análisis más sofisticados de convergencia son posibles, una regla útil y práctica es, seleccionar ε como una décima parte del error

permisible en la raíz. Sin embargo, debe tenerse presente que no existe error en caso de que el método diverja o no se encuentre una raíz en un número razonable de iteraciones. Se recomienda incluir un programa de computadora, de este diagrama de flujo.

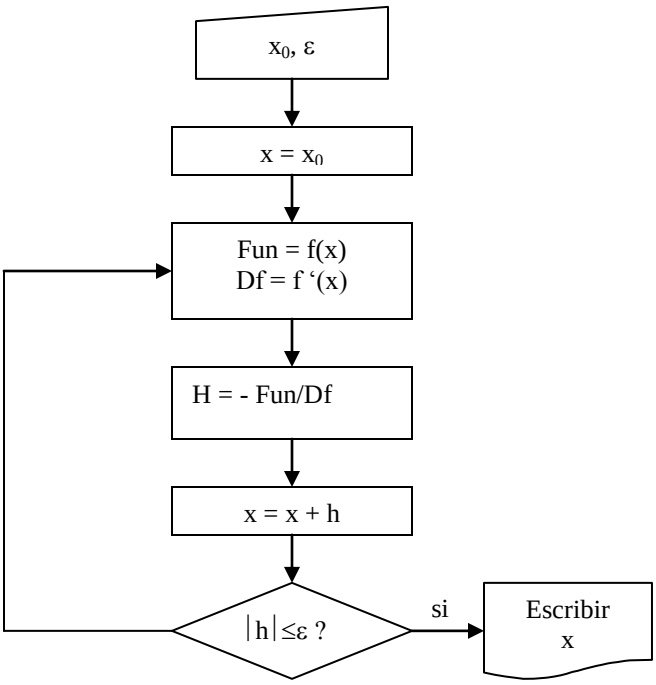


Fig. D3.4 Diagrama de flujo del método de Newton

No obstante su rápida convergencia, el método de Newton tiene algunas dificultades con ciertos tipos de funciones. Estas dificultades pueden superarse y hacer un uso más inteligente de este poderoso método, considerando una interpretación gráfica del proceso. La Fig. 3.4 muestra la primer iteración para una función típica. La siguiente suposición para la raíz x_1, es la intersección con el eje **x** de una línea recta tangente a la función en el punto de coordenadas (x_0, $f(x_0)$) El valor de x_1 es más cercano a la raíz que el valor supuesto inicialmente x_0 y, es claro que iteraciones sucesivas convergerán rápidamente a la raíz.
Ahora considere la siguiente función simple oscilatoria (Fig. 3.5). La primer suposición x_0, es razonablemente cercana a la raíz A. Sin embargo, la línea tangente corta al eje de las abscisas en x_1, la cual es cercana a la raíz B. La siguiente iteración produce x_2, y es claro que el método de Newton, en un valor inicial no cercano a una raíz, puede resultar convergente para una raíz distante. No

hay una forma simple para evitar este tipo de comportamiento con ciertas funciones. Sin embargo, un bosquejo superficial o tabulación de la función discutida anteriormente, por lo general será suficiente para permitir la primer suposición en la cual el método eventualmente dará las raíces deseadas, es decir, x_0 deberá proponerse lo más cercano posible a la raíz deseada. En cualquier caso, esos puntos asegurarán que el programador está conciente de cualquiera de las raíces, para las cuales el método puede haber fallado.

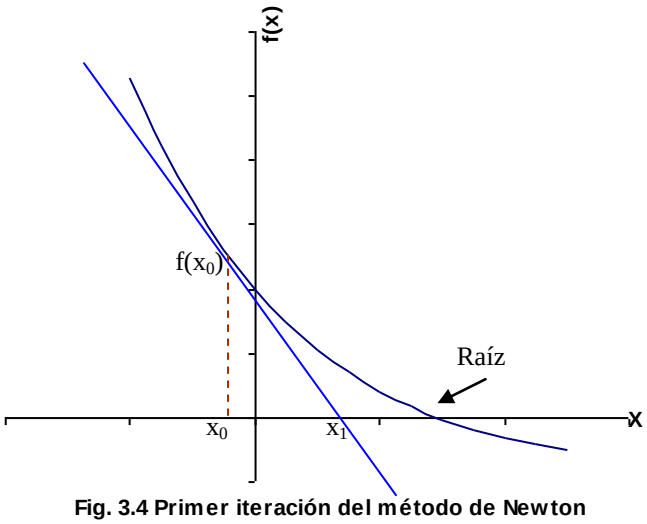


Fig. 3.4 Primer iteración del método de Newton

El método de Newton también tiene una tendencia a caer en un máximo o en un mínimo de una función y, entonces, la tangente de pendiente cero se dirige fuera de la región de interés, ya que es paralela al eje x. El *algoritmo* puede también ocasionalmente oscilar hacia atrás o hacia delante, entre dos regiones que contienen raíces para un número bastante grande de iteraciones, encontrando después una u otra raíz. Estas dificultades pueden ser evitadas fácilmente con algún conocimiento previo del comportamiento de la función. Desde luego, si la función no oscila, como la descrita en figura 3.5, entonces, el método de Newton, encontrará una raíz sin mayor dificultad, siguiendo la rutina dada en el algoritmo D3.4.

Deberá ser notado que alguna dificultad será encontrada en el intento de usar el método de Newton para encontrar raíces múltiples. Para funciones uniformes, esas raíces múltiples corresponden a puntos donde la función se vuelve tangente al eje **x** y entonces puede o no cortar a dicho eje. Este comportamiento quiere decir que, como f(x) se aproxima a cero y, por tanto, f ‘(x) también. Mientras que el método de Newton es normalmente convergente para tales raíces, el radio de convergencia es lento y, en la práctica, puede hacer el cálculo de raíces múltiples difíciles. El

método de *Newton Modificado*, el cual es muy solicitado para raíces múltiples, será discutido en la sección siguiente.

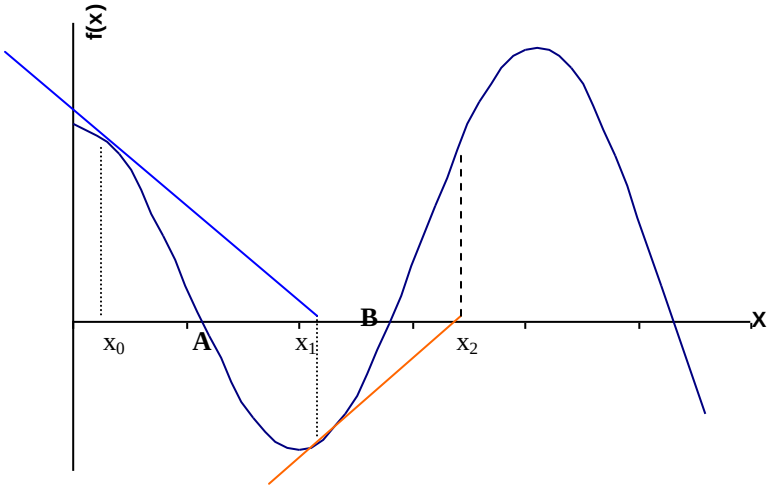


Fig. 3.5 Función oscilatoria

3.8-Método de Newton – Modificado

La dificultad del método de Newton Raphson en el comportamiento de una función con raíces múltiples obliga a considerar una modificación del método discutido por Ralston. Como primero se desean encontrar las raíces de una función f(x). Definimos una función nueva U(x), dada por,

$$U(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (3\text{-}11)$$

se observa que la función U(x) tiene las mismas raíces que f(x), entonces U(x) se vuelve cero en cualquier punto que f(x) es cero.
Suponiendo ahora que f(x) tiene una raíz múltiple en x = c de multicidad r. [Esto podría ocurrir, por ejemplo, si f(x) contiene un factor (x-c)]. Entonces, podría fácilmente demostrarse que U(x) tiene una raíz en x = c de multicidad r, o una raíz simple. Puesto que el método de Newton Raphson es efectivo para raíces simples,

podemos aplicar el método de Newton para resolver U(x) en lugar de f(x). De esta manera, la *ecuación recursiva* de este método queda,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{U(x_n)}{U'(x_n)} \qquad (3\text{-}12)$$

derivando la función auxiliar U(x), dada por (3-11),queda,

$$U'(x) = 1 - \frac{f(x_n).f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} \qquad (3\text{-}13)$$

El algoritmo de este método es idéntico al mostrado en Fig.D3.4, sólo se sustituye el bloque de f(x) por U(x) y f ‘(x) por U ‘(x) o en todo caso se debe extender un poco el diagrama de flujo, ya que, se requiere el cálculo de la segunda derivada de f(x). Sin embargo, el algoritmo conserva el mismo rango de convergencia que el método referido, siendo indiferente de la multicidad de la raíz.

3.9-Método de la secante

El método de la secante es, esencialmente una modificación del método convencional de Newton con la derivada reemplazada por una expresión diferente. Esto es ventajoso, si la función a resolver es difícil de derivar y, desde luego que es también conveniente para programar, en el sentido de que solamente es necesario suplir un subprograma de función en el método, en lugar de subprogramas para ambas, función y derivada. Reemplazando la derivada en ecuación (3- 9), por el concepto elemental de tangente – recuerde, tangente es igual a la primer derivada- resulta,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\left[f(x_n) - f(x_{n-1})\right]/D_n} \qquad (3\text{-}14)$$

donde $D_n = x_n - x_{n-1}$.

Para usar este método, $f(x_{n-1})$ y $f(x_n)$ deben ser conocidas. El primero es el valor de la función dos iteraciones anteriores a la presente. Puesto que no hay tal valor, serán disponibles para la primer iteración, dos valores iniciales supuestos, cercanos entre ellos, que denominaremos x_0 y x_{00}, para los cuales se han calculado los valores numéricos de las funciones, como se muestra en figura 3.6, que deberán ser proporcionados al algoritmo (Fig.D3.5).
Para la mayoría de las funciones, el método de la secante no convergerá tan rápido como el método convencional de Newton, pero su ventaja es un tanto más importante por la velocidad decreciente de la convergencia. Si la primer derivada de f(x) consume mucho tiempo para su evaluación, este método puede requerir menos tiempo de cómputo que el método de Newton. La primer iteración de este método se muestra en figura 3.6, donde se ha iniciado con los valores x_{00} y x_0, el cuál aproxima la raíz a x_1, como el cruce de la recta secante con el eje x. En la siguiente iteración se elimina x_{00} y $f(x_{00})$, entrando x_1 con $f(x_1)$, para hacer pareja con el punto $[x_0, f(x_0)]$, que definirán la nueva tangente. Esta recta cortará al eje x en x_2, la cual es la segunda aproximación a la raíz. Si este valor no es la solución, se elimina el punto $[x_0, f(x_0)]$, quedando ahora, los puntos $[x_1, f(x_1)]$ y $[x_2, f(x_2)]$, por donde se trazará la nueva tangente que, obviamente, permitirá encontrar x_3, etc.

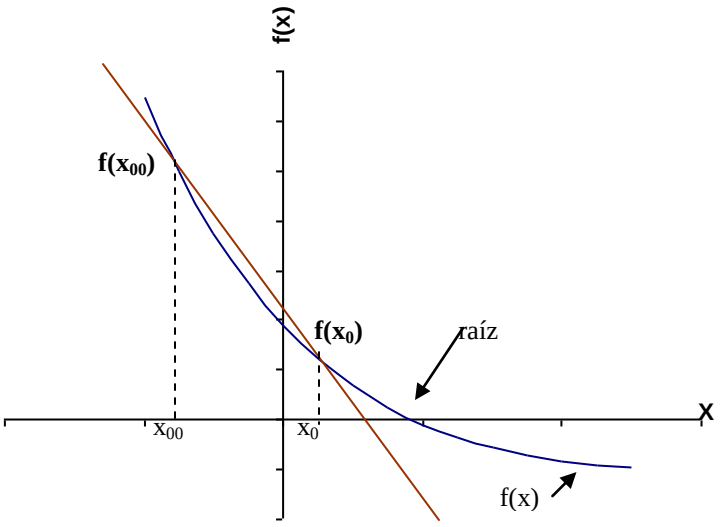


Fig. 3.6 Método de la SECANTE

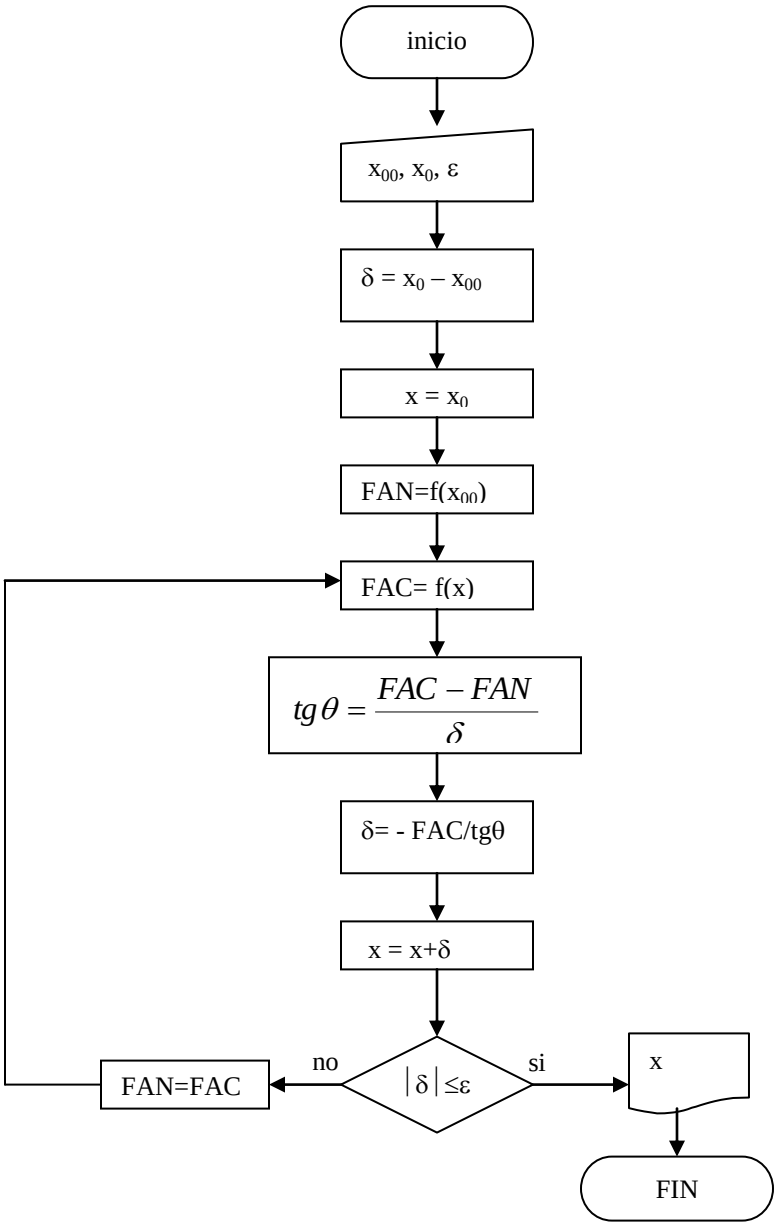


Fig. D3.5. Diagrama de flujo para el método de la Secante

Problemas resueltos

Prob. 3.1 Obtener una raíz, por el método de *aproximaciones sucesivas*, de la ecuación,

$$f(x) = e^{-x} - x \qquad \text{(Fig. E3.1)}$$

Solución. Sumando **x**, miembro a miembro, la ecuación toma la forma (3-5); es decir,

$$x_{n+1} = e^{-x_n}$$

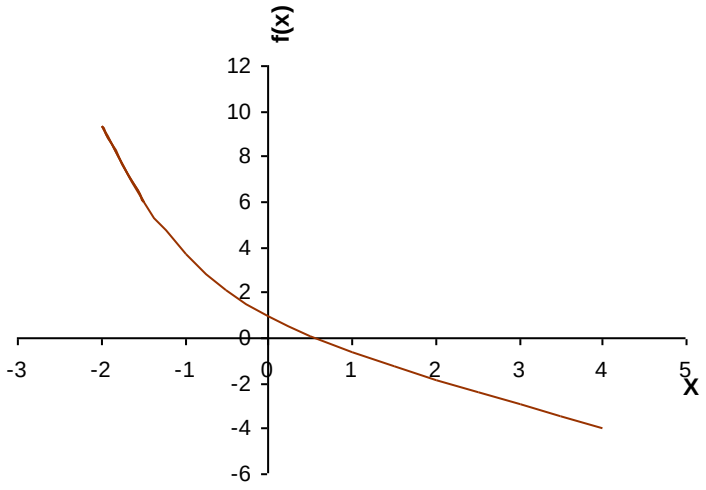


Fig. E3.1Gráfica del ejemplo 3.1

proponiendo un valor inicial de $x_0 = 0$, el valor de $x_1 = e^{-0} = 1$. Como este valor calculado es diferente al valor supuesto, entonces, x_1 no es una raíz y, se repite el proceso, ahora con x_1 para obtener $x_2 = e^{-1} = 0.3679$; repitiendo con x_2, se obtiene, para x_3, $= e^{-0.3679} = 0.6922$; ahora con x_3 se obtiene $x_4 = e^{-0.6922} = 0.5005$ y, así, sucesivamente, llegando a los siguientes resultados:

$x_5 = e^{-0.5005} = 0.6062$
$x_6 = e^{-0.6062} = 0.5454$

$x_7 = e^{-0.5454} = 0.5796$
$x_8 = e^{-0.5796} = 0.5601$
$x_9 = e^{-0.5601} = 0.5711$

y así, sucesivamente, convergiendo con x = 0.5671.

Prob. 3.2 Por el mismo método, obtener una raíz de la ecuación;

$$f(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}x + 1 \qquad \text{(Fig. E3.2)}$$

Solución. La forma recursiva es, en este caso,

$$x_{n+1} = \cos(x_n) + \frac{1}{2}x_n + 1$$

iniciando con $x_0 = 0$, se obtiene $x_{0+1} = x_1 = \cos(0) + \frac{1}{2}(0) + 1 = 2$

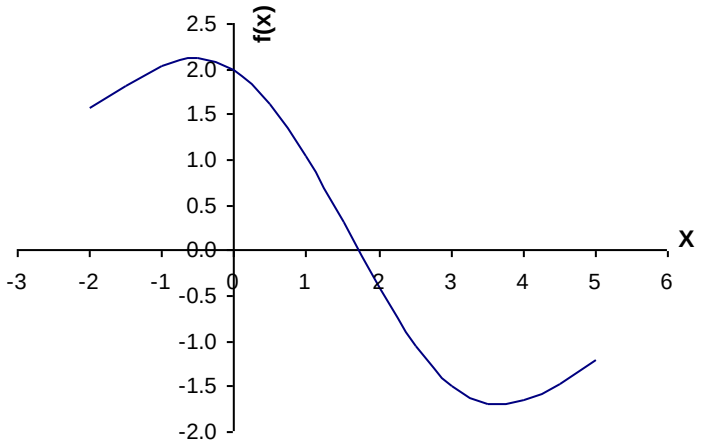


Fig. E3.2. Gráfica del ejemplo 3.2

repitiendo con este valor, $x_{1+1} = x_2 = \cos(2) + \frac{1}{2}(2) + 1 = 1.584$

el siguiente valor que se obtiene es, $x_{2+1} = x_3 = \cos(1.584) + \frac{1}{2}(1.584) + 1 = 1.7788$
continuando de esta forma, se llega finalmente a la raíz, x =1.714.

Prob. 3.3 Encontrar, por el método de bisección, una raíz de la siguiente ecuación, presente el resultado con tres decimales exactos.

$f(x) = x^3 - 1.412x^2 + 0.098$ (Fig. E3.3)

Solución. Se proponen los valores: a = 0 y b = 1; obteniendo:

$f(a) = f(0) = (0)^3 - 1.412(0)^2 + 0.098 = 0.098$ y
$f(b) = f(1) = (1)^3 - 1.412(1)^2 + 0.098 = -0.314$.

Puesto que los valores, de las funciones, obtenidos tienen signos diferentes, se cumple la condición de arranque, es decir, entre a = 0 y b = 1, existe una raíz real. Según el diagrama de flujo dado en Fig. D3.2, se calcula x = ½(a + b) = ½(0 + 1) = 0.50, con lo cual se obtiene $f(x) = f(0.5) = (0.5)^3 - 1.412(0.5)^2 + 0.098 = -0.4830$. De acuerdo a este resultado, f(x) está muy lejano de *cero*, pero como tiene el mismo signo que f(b), se cambia **b** por el valor de **x** y se repite el proceso a partir del cálculo de x, en este caso queda: x = ½(0 + 0.5) = 0.25 y f(x) = f(0.25) = $(0.25)^3 - 1.412(0.25)^2 + 0.098 = 0.02538$. En esta ocasión se cambia **a** por **x,** debido a que f(x) tiene el mismo signo que f(a), etc.
Un resumen de los resultados obtenidos se muestra en la siguiente tabla.

a	b	f(a)	f(b)	x	f(x)	cambia
0.00000	1.00000	0.09800	-0.31400	0.50000	-0.1300000	b
0.00000	0.50000			0.25000	0.0253750	a
0.25000	0.50000			0.37500	-0.0478281	b
0.25000	0.37500			0.31250	-0.0093730	b
0.25000	0.31250			0.28125	0.0085559	a
0.28125	0.31250			0.29688	-0.0002813	b
0.28125	0.29688			0.28906	0.0041706	a
0.28906	0.29688			0.29297	0.0019528	a
0.29297	0.29688			0.29492	0.0008378	a
0.29492	0.29688			0.29590	0.0002787	a
0.29590	0.29688			0.29639	-0.0000011	b

de acuerdo a estos resultados, una raíz aproximada, es x = 0.29634

De acuerdo a la figura del problema resuelto, esta ecuación tiene tres (3) raíces reales; una negativa y dos positivas. La raíz negativa puede obtenerse con a = -1.5 y b = 0; la otra raíz positiva, se podrá obtener si a = 1.0 y b = 1.50.

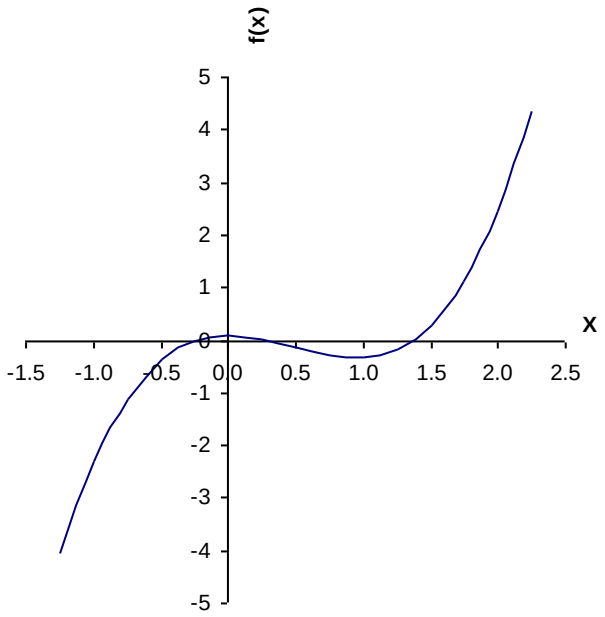


Fig. E3.3 Gráfica del ejemplo 3.3

Prob. 3.4 Resolver, por el método de bisección, la ecuación:

$$f(R) = e^{-0.005R}\cos(0.05\sqrt{2000 - 0.01R^2}) - 0.01 \qquad \text{(Fig. E3.4)}$$

Solución. Se propone a = 0.0 y b = 400; por consiguiente,

f(a) = f(0) = $e^{-0.005(0)}\cos(0.05\sqrt{2000 - 0.01(0)^2}) - 0.01$ = -0.6273 y

f(b) = f(400) = $e^{-0.005(400)}\cos(0.05\sqrt{2000 - 0.01(400)^2}) - 0.01$ = 0.0631.

Estos resultados muestran que se cumple la condición de arranque, es decir, entre x = 0 y x = 400 existe una raíz real.

El punto medio es x = 200 y con este valor se tiene que f(x) = f(200) = -0.1631, por lo que el cambio debe ser para a = x = 200, debido a que f(a) fue negativo y **b** no cambia en la presente iteración. Un resumen de estos resultados es,

a	b	f(a)	f(b)	x	f(x)	cambia
0.0000	400.0000	-0.62727	0.06312	200.00000	-0.1630919	a
200.0000	400.0000			300.00000	-0.0295026	a
300.0000	400.0000			350.00000	0.0209149	b
300.0000	350.0000			325.00000	-0.0031546	a
325.0000	350.0000			337.50000	0.0091500	b
325.0000	337.5000			331.25000	0.0030669	b
325.0000	331.2500			328.12500	-0.0000263	a
328.1250	331.2500			329.68750	0.0015247	b
328.1250	329.6875			328.90625	0.0007503	b
328.1250	328.9063			328.51563	0.0003623	b
328.1250	328.5156			328.32031	0.0001680	b
328.1250	328.3203			328.22266	0.0000709	b
328.1250	328.2227			328.17383	0.0000223	b
328.1250	328.1738			328.14941	-0.0000020	a

Una raíz aproximada es R = 328.14941 radianes.

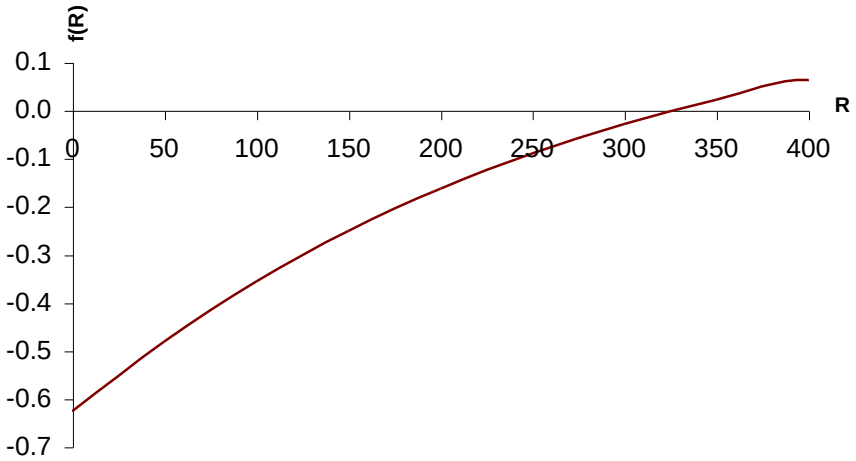


Fig. E3.4 Gráfica del ejemplo 3.4

Prob. 3.5 El movimiento de una estructura se define, para una oscilación amortiguada, mediante la ecuación:

$$y = 10e^{-kt}\cos(wt) \qquad \text{(Fig. E3.5)}$$

donde k =0.50 y w = 2. Obtenga una raíz mediante el método de Falsa Posición.

Solución. De acuerdo a la gráfica, la primer raíz positiva puede encontrarse con los siguientes valores: a = 0 y b = 1.5; con los que se obtiene, f(a)= $10e^{-0.5(0)}\cos(2(0)) = 10.00$ y f(b) = $10e^{-0.5(1.5)}\cos(2(1.5)) = -4.6764$; es decir, se cumple la condición de arranque, ya que, el producto de f(a)*f(b) es menor que cero, es decir, se cumple la condición de que tienen signos diferentes.

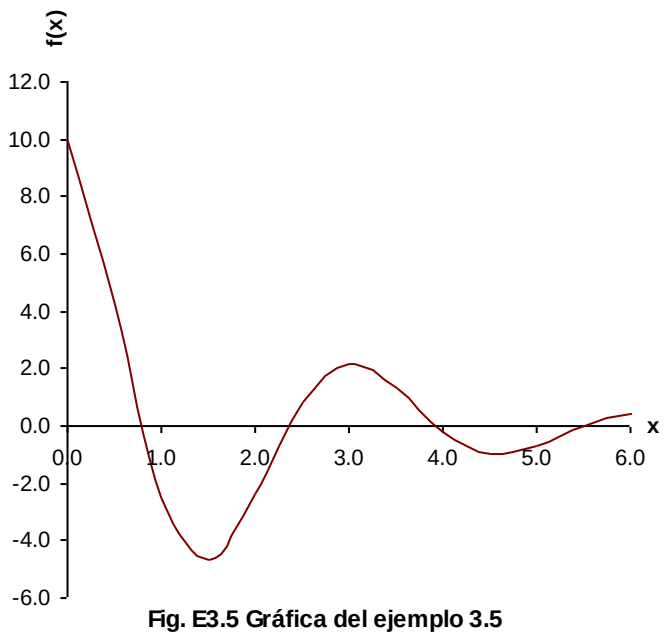


Fig. E3.5 Gráfica del ejemplo 3.5

El valor de t, según ecuación (3-7) es,

$$t = a - \left[\frac{(b-a)*f(a)}{f(b)-f(a)}\right] = 0 - \left[\frac{(1.5-0)*(10)}{-4.6764-10}\right] = 1.0220$$

f(t)= $10e^{-0.5(1.022)}\cos(2(1.022)) = -2.7344$

por ser de signo negativo, cambia **b –** recuerde que f(b) fue negativa – y el valor de **a**, no cambia para la siguiente iteración. Para estos valores, los de a y b, el punto medio es t = 0.8023, con lo cual se obtuvo f(t) = - 0.2300. Observe que nuevamente cambia b = 0.8023, etc. Los resultados a que se llegó se muestran en la tabla siguiente:

a	b	f(a)	f(b)	x	f(x)	cambia
0.0000	1.5000	10.0000	-4.6764	1.02205	-2.73443	b
0.0000	1.0220	10.0000	-2.7344	0.80259	-0.23011	b
0.0000	0.8026	10.0000	-0.2301	0.78454	0.01166	a
0.7845	0.8026	0.0117	-0.2301	0.78541	-0.00010	b
0.7845	0.7854	0.0117	-0.0001	0.78540	0.00000	

De acuerdo a los datos anteriores, una raíz es t = 0.7854 segundos.

Prob. 3.6 Encuentre una raíz positiva de la ecuación $f(x) = 0.5x - sen(x)$, Fig. E3.6. Use el método de Falsa Posición, con a = 1.5 y b = 2.5, para probar la condición inicial.

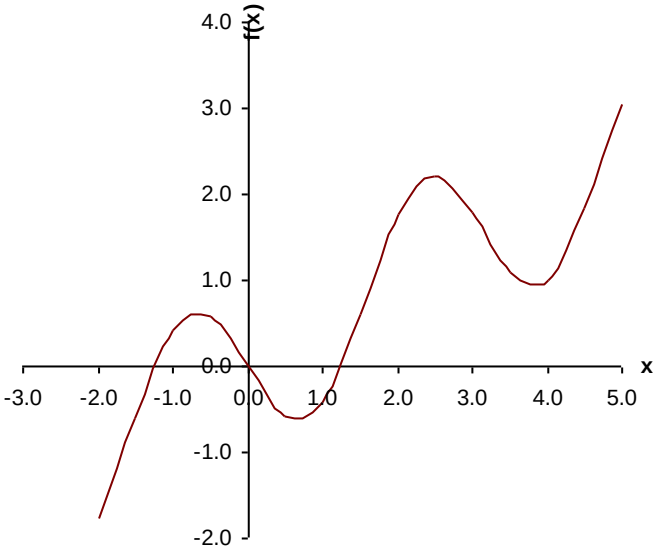


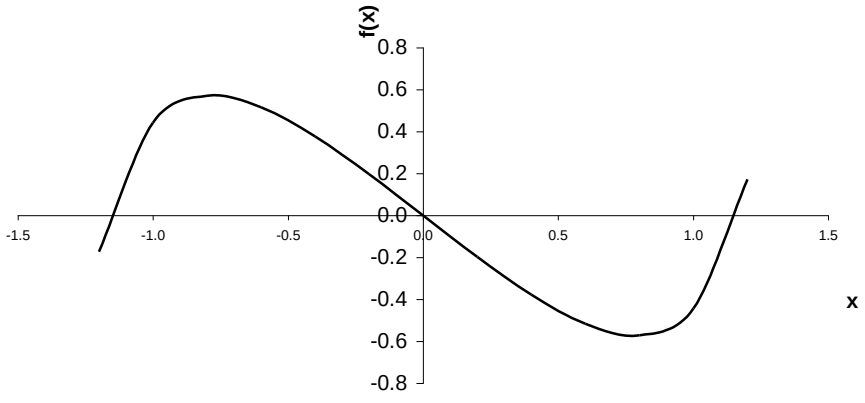
Fig. E3.6 Gráfica del ejemplo 3.6

Solución. Para a = 1.5, f(a) = $0.5(1.5) - sen(1.5)$ = -0.2475 y con b = 2.5, f(b) = 0.6515. Por ser, estos valores de signos contrarios, se cumplió la condición de arranque y se obtuvo, de ecuación (3-7), x = 1.7753 radianes, por consiguiente, f(x) = $0.5(1.7753) - sen(1.7753)$ = - 0.0915. De acuerdo a este resultado, el valor actual de **a** debe cambiar por el valor de x, así que a = 1.7753 radianes y b = 1.50 radianes. Continuando de esta forma, se llegó a los siguientes resultados:

a	b	f(a)	f(b)	x	f(x)	cambia
1.5000	2.5000	-0.2475	0.6515	1.7753	-0.09152	a
1.7753	2.5000	-0.0915	0.6515	1.8646	-0.02489	a
1.8646	2.5000	-0.0249	0.6515	1.8879	-0.00617	a
1.8879	2.5000	-0.0062	0.6515	1.8937	-0.00149	a
1.8937	2.5000	-0.0015	0.6515	1.8951	-0.00036	a
1.8951	2.5000	-0.0004	0.6515	1.8954	-0.00009	a
1.8954	2.5000	-0.0001	0.6515	1.8955	-0.00002	a
1.8955	2.5000	0.0000	0.6515	1.8955	0.00000	

Una raíz es x =1.8955 radianes.

Prob. 3.7 Encuentre *una raíz positiva* de f(x) = tan(x) –2x,por el método de Monte Carlo (Fig. E3.7). Use x_{al} = 0.5361 y el resultado debe tener tres decimales exactos.



Gráfica del problema 3.7

Solución. Para garantizar tres decimales exactos, la tolerancia debe ser ε =0.0001. Si a = 1 y b = 1.5, se tiene:

f(a)=f(1) = tan(1)-2(1) = -0.4426 y
f(b) = f(1.5)= tan(1.5) –2(1.5) = 11.1014

Se observa que los valores propuestos son adecuados, es decir, entre ellos se encuentra una raíz; por lo que se llegó a los siguientes resultados:

a	b	f(a)	f(b)	x	f(x)	cambia
1.0000	1.5000	-0.4426	11.1014	1.2681	0.6655	b
1.0000	1.2681	-0.4426	0.6655	1.1437	-0.0901	a
1.1437	1.2681	-0.0901	0.6655	1.2104	0.2325	b
1.1437	1.2104	-0.0901	0.2325	1.1794	0.0645	b
1.1437	1.1794	-0.0901	0.0645	1.1629	-0.0119	a
1.1629	1.1794	-0.0119	0.0645	1.1717	0.0280	b
1.1629	1.1717	-0.0119	0.0280	1.1676	0.0092	b
1.1629	1.1676	-0.0119	0.0092	1.1654	-0.0006	a
1.1654	1.1676	-0.0006	0.0092	1.1666	0.0046	b
1.1654	1.1666	-0.0006	0.0046	1.1661	0.0022	b
1.1654	1.1661	-0.0006	0.0022	1.1658	0.0009	b
1.1654	1.1658	-0.0006	0.0009	1.1656	0.0002	b

En este caso, una raíz es x = 1.1656

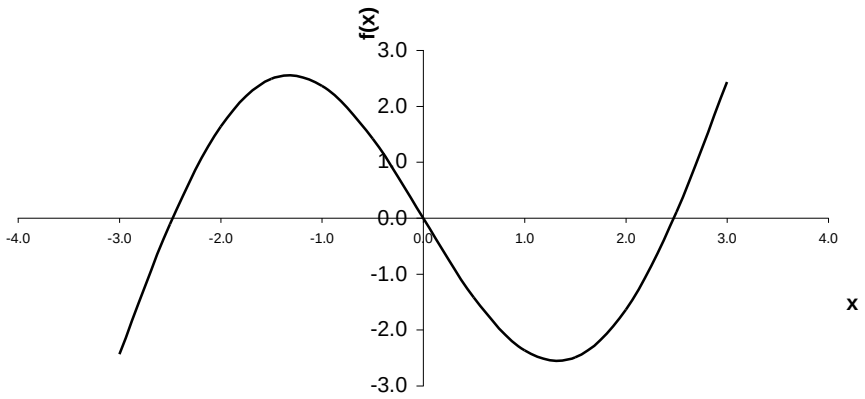
Prob. 3.8 Encontrar una raíz de la ecuación f(x) = x – 4sen(x), por el método de Monte Carlo (Fig. E3.8).

Solución. Se probó con a = 1 y b =2; con los que se obtuvo f(a) = 1-4seno(1)=-2.366 y f(b) = -1.6372. Al no cumplirse la condición de arranque, se propusieron otros valores, siendo a = 2 y b =3. Se obtuvo, f(a) =-1.6372 y f(b) = f(3) = 2.43552. Con estos valores iniciales se cumple la condición de que las funciones tienen signos distintos, por lo que, en el segmento [2,3] se debe encontrar una raíz. Usando x_{al} = 0.2850 y siguiendo el mismo proceso que el ejemplo anterior, se llegó a los siguientes resultados:

a	b	f(a)	f(b)	x	f(x)	cambia
1.0000	2.0000	-2.3659	-1.6372			
2.0000	3.0000	-1.6372	2.4355	2.2850	-0.7375	a
2.2850	3.0000	-0.7375	2.4355	2.4888	0.0591	b
2.2850	2.4888	-0.7375	0.0591	2.3431	-0.5222	a

2.3431	2.4888	-0.5222	0.0591	2.3846	-0.3624	a
2.3846	2.4888	-0.3624	0.0591	2.4143	-0.2451	a
2.4143	2.4888	-0.2451	0.0591	2.4355	-0.1599	a
2.4355	2.4888	-0.1599	0.0591	2.4507	-0.0982	a
2.4507	2.4888	-0.0982	0.0591	2.4615	-0.0538	a
2.4615	2.4888	-0.0538	0.0591	2.4693	-0.0218	a
2.4693	2.4888	-0.0218	0.0591	2.4749	0.0012	b

Una raíz aproximada es x = 2.475 radianes.



Gráfica del problema 3.8

Prob. 3.9 Resolver la ecuación $f(x) = e^x - 10x^2 + 2$, usando el método de Newton y sus resultados preséntelos con cuatro decimales.

Solución. Por observación de ecuación (3-10), es requerida la primer derivada de la función. En este caso es f '(x) = e^x –20x. Iniciando con un valor de x_0 = 0.0, se calculó la función y derivada, respectivamente, obteniendo:

$$f(x_0) = e^{x_0} - 10x_0^2 + 2 = e^0 - 10(0)^2 + 2 = 3.00$$

f '(x_0) = e^0 –20(0)= 1.00

$$h_N = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{3}{1} = -3.00$$

y de ecuación (3-10), se concluye que el valor aproximado de *x*, es

$$x_{0+1} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 = 0.00 - 3.00 = -3.00$$

como el valor absoluto de h_N (3.00), es muy grande, entonces x = -3.00 no es una raíz y se repite el proceso, pero ahora con x_1 = -3.00

$$f(x_1) = e^{x_1} - 10x_1^2 + 2 = e^{-3} - 10(-3)^2 + 2 = -87.9502$$

f '(x_1) = e^{-3} –20(-3)= 60.0498

$$h_N = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -\frac{-87.9502}{60.0498} = 1.4646$$

$$x_{1+1} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_2 = -3 + 1.4646 = -1.5354$$

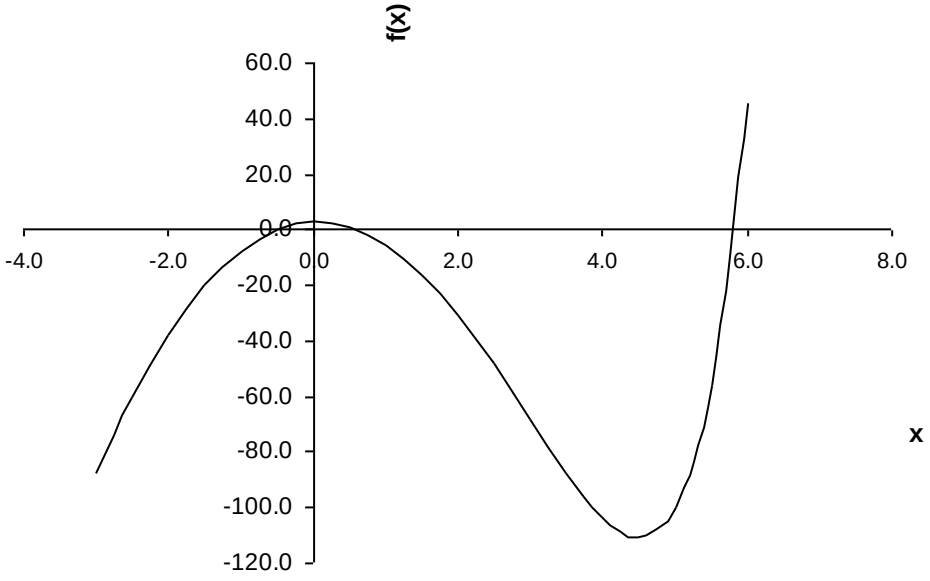
repitiendo el proceso reiteradamente, se llegó a,

x	f(x)	f´(x)	h
0.0000	3.0000	1.0000	-3.0000
-3.0000	-87.9502	60.0498	1.4646
-1.5354	-21.3585	30.9229	0.6907
-0.8447	-4.7051	17.3233	0.2716
-0.5731	-0.7203	12.0252	0.0599
-0.5132	-0.0348	10.8620	0.0032
-0.5100	-0.0001	10.7998	0.0000
-0.5100	0.0000	10.7996	0.0000
-0.5100	**←--- raíz**		

Con otros valores se obtuvieron otras dos raíces, esto es:

x	f(x)	f´(x)	h
1.0000	-5.2817	-17.2817	-0.3056
0.6944	-0.8191	-11.8851	-0.0689
0.6255	-0.0429	-10.6400	-0.0040
0.6214	-0.0001	-10.5670	0.0000
0.6214	0.0000	-10.5667	0.0000
0.6214	< ----raíz		

x	f(x)	f´(x)	h
6.0000	45.4288	283.4288	-0.1603
5.8397	4.6591	226.8878	-0.0205
5.8192	0.0678	220.3129	-0.0003
5.8189	0.0000	220.2155	0.0000
5.8189← raíz			



Gráfica del problema 3.9

Prob.3.10 Resolver la ecuación f(x) = $e^{-x/4}$(2-x)-1 (Fig. E3.10), por el método de Newton Raphson. Obtenga el resultado con cuatro decimales exactos.

Solución. Como en el caso anterior, la primer derivada de esta ecuación es,

$$f'(x) = \frac{1}{4} e^{-x/4}(x-6)$$

Para manejar cuatro decimales exactos, se requiere que la tolerancia sea ε=0.00001. Con esta aclaración, se iniciaron cálculos similares al ejemplo anterior y se obtuvo, con x_0 = 0

$f(x_0) = e^{-0/4}(2-0)-1=1.0000$

$$f'(x_0) = \frac{1}{4}e^{-0/4}(0-6) = -1.5000$$

$$h_N = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{1}{-1.5} = 0.66667$$

$$x_{0+1} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 = 0 + 0.66667 = 0.6667$$

De acuerdo al algoritmo dado en Fig. D3.4, se observa que 0.6667, que es el valor absoluto de h_N, no es menor que 0.00001, por lo que, se repite el proceso con x_1, llegando a,

$f(x_1) = e^{-0.6667/4}(2-0.6667)-1=0.1290$

$$f'(x_1) = \frac{1}{4}e^{-0.6667/4}(0.6667-6) = -1.1290$$

$$h_N = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.1140$$

$$x_{1+1} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_2 = 0.6667 + 0.1140 = 0.7806$$

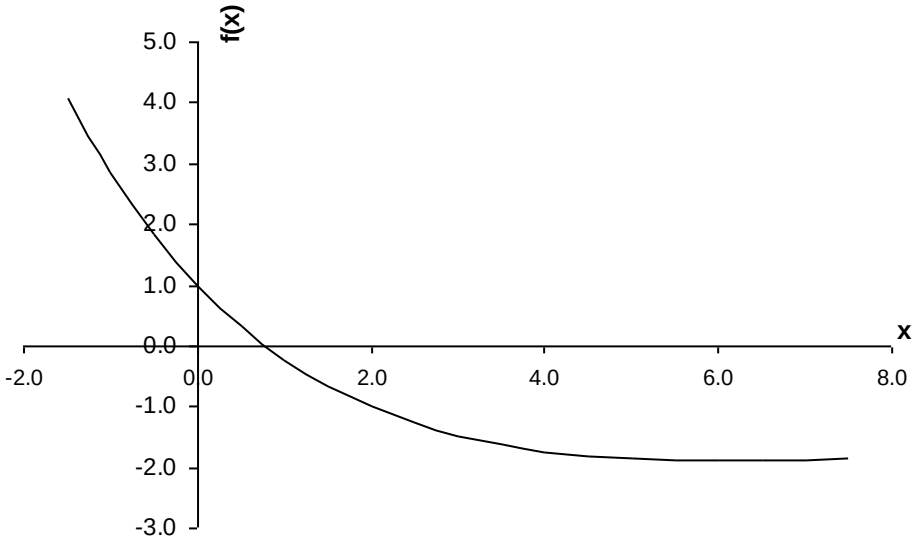
nuevamente se nota que 0.114 es mayor que el error, por lo que, se debe repetir el procedimiento, pero ahora con x = 0.7806. Los resultados a que se llegó, inclusive con otro valor, son,

x	f(x)	f´(x)	h
0.0000	1.0000	-1.5000	0.6667
0.6667	0.1286	-1.1286	0.1140
0.7806	0.0032	-1.0735	0.0029
0.7836	0.0000	-1.0721	0.0000

0.7836←---raíz

Se probó con otro valor inicial diferente y, sin embargo, se llegó a la misma raíz.

x	f(x)	f´(x)	h
-1.0000	2.8521	-2.2470	1.2693
0.2693	0.6181	-1.3394	0.4614
0.7307	0.0574	-1.0974	0.0523
0.7830	0.0007	-1.0724	0.0006
0.7836	0.0000	-1.0721	0.0000
0.7836 ←---raíz			



Gráfica del problema 3.9

Prob. 3.11 Resolver, por el método de Newton modificado, con una exactitud de tres decimales exactos, la siguiente ecuación,

$$f(x) = \cos x + e^x - x^2 + 1 \qquad \text{(Fig. E3.11)}$$

Solución. De acuerdo a la presentación hecha en sección 3.8, la ecuación (3-12) es aplicable para este método,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{U(x_n)}{U'(x_n)} \qquad \text{(3-12)}$$

con

$$U(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (3\text{-}11)$$

y

$$U'(x) = 1 - \frac{f(x_n).f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} \qquad (3\text{-}13)$$

las dos primeras derivadas de f(x) son,

f ‘(x) =-sen(x) + e^x –2x

f “(x) = -cos(x) + e^x -2

proponiendo x_0 = 1, se obtuvieron los siguientes valores, para la primer iteración:

f(x) =cos(1) + e^1 – $(1)^2$ + 1 = 3.2586
f ‘(x) = -sen(1) + e^1 –2(1) = -0.1232
f “(x) = -cos(1) + e^1 –2 = 0.1780

ahora, de ecuaciones (3-11) y (3-13) se tiene,

$$U(x_0) = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{3.259}{-0.123} = -26.4519$$

$$U'(x_0) = 1 - \frac{f(x_0).f''(x_0)}{\left[f'(x_0)\right]^2} = 1 - \frac{(3.259)(0.178)}{(-0.123)^2} = -37.2168$$

$$h = -\frac{U(x_0)}{U'(x_0)} = -\frac{-26.4519}{-37.2168} = -0.7108$$

y de ecuación (3-12), el nuevo valor de x es,

$$x_{0+1} = x_0 - \frac{U(x_0)}{U'(x_0)} = 1 - \frac{-26.4519}{-37.2168} = 0.2892$$

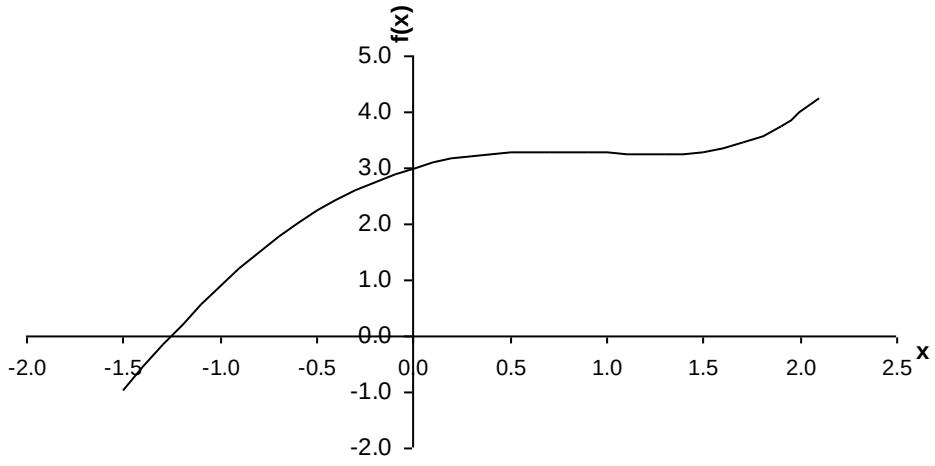
Tomando en cuenta la prueba de convergencia; se observa que el valor absoluto del cociente $U(x_0)/U'(x_0) = 0.7108$ es mayor que el error admisible, se concluye que el valor de $\mathbf{x_1}$ obtenido, no es la raíz y, en consecuencia, se repite el proceso a partir de $\mathbf{x_1}$**,** llegando, ahora, al os siguientes resultados,

$f(x_1) = 3.2102$
$f'(x_1) = 0.4717$
$f''(x_1) = -1.6230$
$U(x_1) = 6.8057$
$U'(x_1) = 24.4175$
$h = 0.2787$
$x_2 = 0.0105$

nuevamente se observa que el valor absoluto de h es muy grande y se repitió el procedimiento, descrito, pero ahora con x1 = 0.0105, para obtener x_2, después con x_2 para estimar x_3, etc. llegando a los siguientes resultados.

x	f(x)	f´(x)	f´´(x)	U	U´	h
1.0000	3.2586	-0.1232	0.1780	-26.4519	-37.2168	-0.7108
0.2892	3.2102	0.4717	-1.6230	6.8057	24.4175	-0.2787
0.0105	3.0104	0.9790	-1.9894	3.0750	7.2484	-0.4242
-0.4137	2.4057	1.8906	-2.2544	1.2724	2.5173	-0.5055
-0.9192	1.1604	3.0323	-2.2076	0.3827	1.2786	-0.2993
-1.2185	0.1561	3.6712	-2.0494	0.0425	1.0237	-0.0415
-1.2600	0.0019	3.7558	-2.0222	0.0005	1.0003	-0.0005
-1.2605	0.0000	3.7568	-2.0218	0.0000	1.0000	0.0000

-1.2605← raíz



Gráfica del problema 3.11

Prob. 3.12 Con el uso del método de Newton Modificado, encuentre una raíz de la ecuación,

$$f(x) = \cos(x)\cosh(x)-1 \qquad \text{(Fig. E3.12)}$$

Solución. Como en el caso anterior, se obtuvieron las dos primeras derivadas de f(x) y se propusieron dos valores diferentes de x para encontrar dos raíces; con lo que se llegó a los siguientes resultados:

$$f'(x) = \cos(x)\operatorname{senh}(x)-\operatorname{sen}(x)\cosh(x)$$

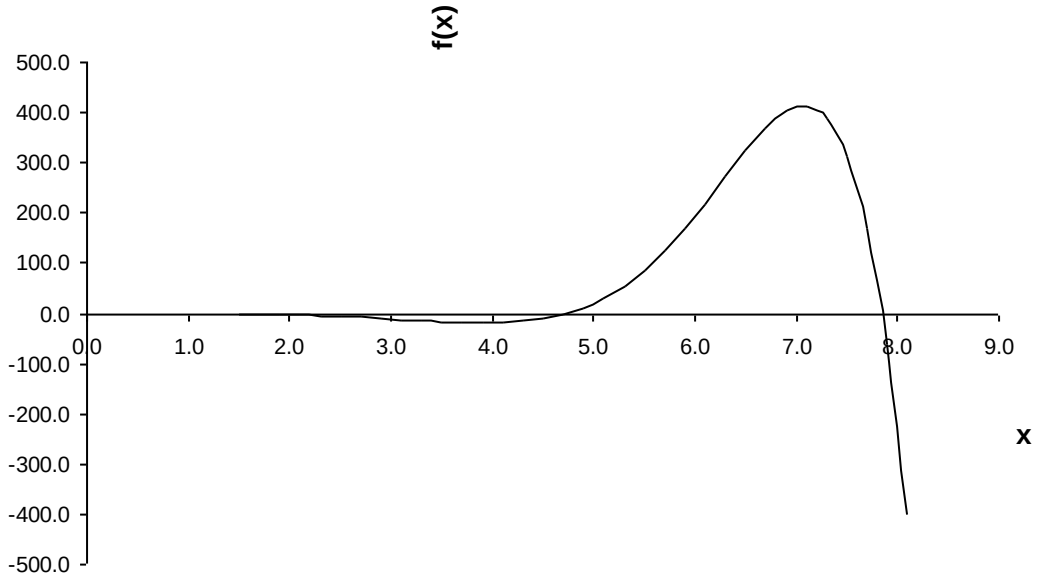
$$f''(x) = -2\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(x)$$

a) Para $x_0 = 5$

x	f(x)	f´(x)	f´´(x)	U	U´	h
5.0000	20.0506	92.2104	142.3105	0.2174	0.6644	-0.3273
4.6727	-3.1212	51.3364	106.8958	-0.0608	1.1266	0.0540
4.7267	-0.1922	57.2673	112.9015	-0.0034	1.0066	0.0033
4.7300	-0.0006	57.6443	113.2725	0.0000	1.0000	0.0000
4.7300← raíz						

b) Con $x_0 = 7.5$

x	f(x)	f´(x)	f´´(x)	U	U´	h
7.500	312.366	-534.607	-1,695.943	-0.584	2.854	0.205
7.705	163.940	-932.172	-2,194.223	-0.176	1.414	0.124
7.829	30.210	-1,224.784	-2,511.987	-0.025	1.051	0.023
7.853	0.757	-1,284.469	-2,572.452	-0.001	1.001	0.001
7.853	0.000	-1,285.984	-2,573.968	0.000	1.000	0.000
7.853← raíz						



Gráfica del problema 3.12

Prob. 3.13 Encuentre al menos una raíz, usando el método de la secante, de la ecuación,

$$f(y) = (5+1.5y)y\left[\frac{(5+1.5y)y}{5+3.6056y}\right]^{\frac{2}{3}} - 31.25$$

Solución. Desarrollando el proceso dado en el diagrama de flujo (Fig. D3.5), se tiene (tomando en cuenta que el argumento es “y”):

Paso 1. Sea y_{n-1} = 4 e y_n = 4.5

Paso 2. f(y_{n-1}) = f(4) = $(5+1.5(4))(4)\left[\frac{(5+1.5(4))(4)}{5+3.6056(4)}\right]^{\frac{2}{3}} - 31.25 = 44.647$

f(y_n) = $f(4.5) = (5+1.5(4.5))(4.5)\left[\frac{(5+1.5(4.5))(4.5)}{5+3.6056(4.5)}\right]^{\frac{2}{3}} - 31.25 = 65.917$

Paso 3. tan(θ)= $\frac{f(y_{n-1}) - f(y_n)}{y_{n-1} - y_n} = \frac{44.647 - 65.917}{4 - 4.5} = 42.5409$

Paso 4. El cociente de $h_s = -\frac{65.917}{42.5409} = -1.5495$

Paso 5. El nuevo valor de *y* es: $y_{n+1} = y_n + h_s = 4.5 + (-1.5495) = 2.9505$

Paso 6. El valor absoluto de h_s (1.5495) es muy grande, concluyendo que *y* = 2.9505 no es una raíz, por lo que se repetirá el proceso eliminando el valor más lejano de la variable independiente (y = 4.00); es decir, con los valores de y = 4.5 e y = 2.9505, llegando, en esta ocasión, a los siguientes resultados,

f(4.5) = 65.9167 y f(2.9505) = 9.5722
tan(θ)= 36.3633
hs = - 0.3622
y = 2.6873

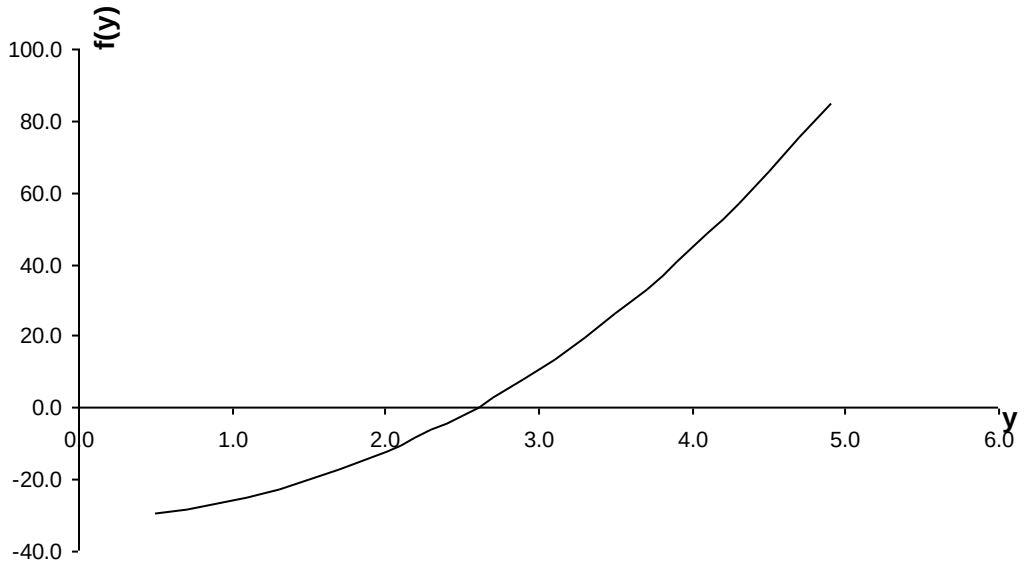
Puesto que el valor absoluto de hs, es aún muy grande, se repite el proceso con y = 2.9505 e y = 2.6873, con los que se llegó a,

f(2.9505) = 9.5722 y f(2.6873) = 2.6661
tan(θ)= 26.2349 hs = - 0.1016
y = 2.5856

Continuando con este proceso se llegó a los siguientes resultados:

y	A	P	R	f(y)	tg(θ)	h
4.000	44.000	19.422	2.265	44.646		
4.500	52.875	21.225	2.491	65.916	42.541	-1.549
2.951	27.811	15.638	1.778	9.572	36.363	-0.263
2.687	24.269	14.689	1.652	2.666	26.235	-0.102
2.586	22.957	14.323	1.603	0.191	24.357	-0.008
2.578	22.857	14.295	1.599	0.004	23.803	0.000

2.578← raíz



Gráfica del problema 3.13

Prob. 3.14 Resolver, por el método de la Secante, la ecuación:

$$f(x) = 4^{2x} - (8)4^{x} + 12$$

Igual que en el problema anterior, se procedió como sigue:

Paso 1. Se propone que x_{n-1} = 0.0 y x_n = 2.00

Paso 2. $f(x_{n-1})$ = f(0.0) = $4^{2(0)} - (8)4^{0} + 12$ = 5.00

$f(x_n)$ = f(2.0) = $4^{2(2)} - (8)4^{2} + 12$ = 140.00

Paso 3. tan(θ)= $\dfrac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n} = \dfrac{5.00 - 140.00}{0.00 - 2.00}$ = 67.500

Paso 4. El cociente de $h_s = -\frac{f(x_n)}{\tan(\theta)} = -\frac{140.00}{67.500} = -2.0741$

Paso 5. El nuevo valor de *x* es: $x_{n+1} = x_n + h_s = 2.00 - 2.0741 =$ -0.0741

Se observa que el valor absoluto de hs (2.0741) es muy grande, por lo que, se repite el procedimiento, pero ahora con x_n = 2.00 y x_{n+1} = -0.0741; es decir, se eliminó x_{n-1}, para realizar la actual iteración. En esta ocasión se obtuvieron los siguientes resultados:

Paso 1. Sea x_n = 2.0 y x_{n+1}=-0.0741

Paso 2. f(x_n) = f(2.0) = 140.00 (fue calculada arriba)

f(x_{n+1}) = f(-0.0741) = $4^{2(-0.0741)} - (8)4^{-0.0741} + 12 =$ 5.5951

Paso 3. tan(θ)= $\frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n} = \frac{140.00 - 5.5951}{2.00 - (-0.0741)}$ = 64.8024

Paso 4. El cociente de $h_s = -\frac{f(x_n)}{\tan(\theta)} = -\frac{5.5951}{64.8024} = -$ =0.0863

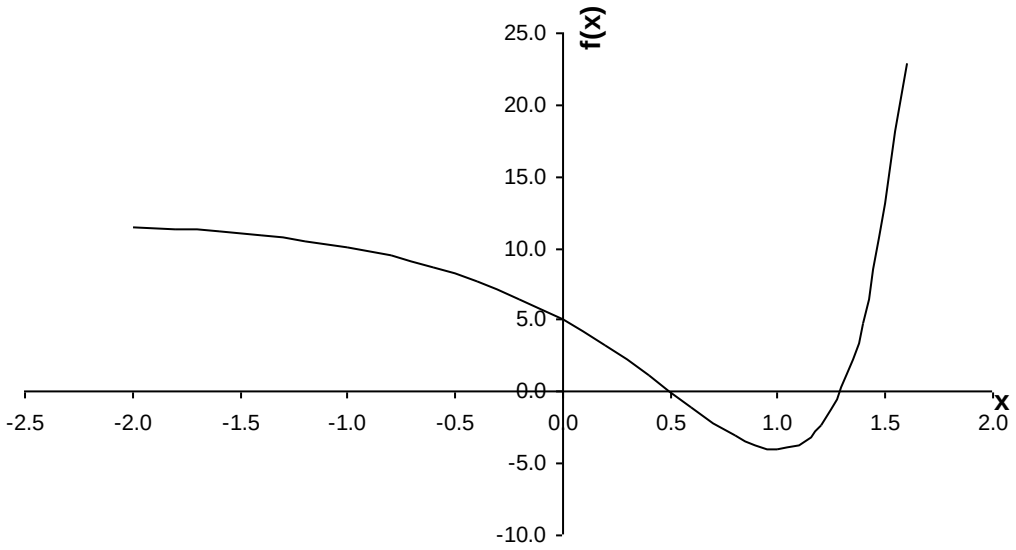
Paso 5. El nuevo valor de *x* es: $x_{n+2} = x_{n+1} + h_s =$ -0.1604

nuevamente se observa que el valor absoluto del cociente h, no es menor que la tolerancia, por lo que se prosiguió con este proceso, llegando a:

x	f(x)	tg(θ)	h
0.000	5.000		
1.000	-4.000	-9.000	-0.444
0.556	-0.615	-7.617	-0.081
0.475	0.279	-11.073	0.025
0.500	0.000	-11.086	0.000
0.500← raíz			

Con otro par de valores, se llegó a la raíz de x = 1.292, como se muestra en seguida.

x	f(x)	tg(θ)	h
1.000	-4.000		
1.500	12.000	32.000	-0.375
1.125	-3.427	41.139	0.083
1.208	-2.207	14.652	0.151
1.359	2.650	32.249	-0.082
1.277	-0.502	38.352	0.013
1.290	-0.088	31.603	0.003
1.293	0.004	33.036	0.000
1.292	0.000	33.282	0.000
1.292 ←- raíz			



Gráfica del problema 3.14

La gráfica de la ecuación confirma los valores obrtenidos.

Problemas propuestos

3.1 Resolver la ecuación $f(y) = (5+2y)y\left[\frac{(5+2y)y}{5+2y\sqrt{5}}\right]^{\frac{2}{3}} - 31.25$

a) Use el método de falsa posición, con ε = 0.001
b) Aplique el método de la secante, con x_{00} = 2 y x_0 = 2.2 y con el mismo error que en el inciso a.

3.2 Resuelva la ecuación, dada en problema 3.1
a) Usando el método de bisección, con una precisión de dos decimales exactos.
b) Ahora use el método de Monte Carlo con x_{al} = 0.6981, con la misma precisión que en el inciso anterior.

3.3 Resuelva la siguiente ecuación, por tres métodos diferentes, aceptando un error de ε = 0.001:

$$f(y) = y + \frac{Q^2}{2gA^2} + 12.50\left(\frac{0.012Q}{AR^{2/3}}\right)^2 - 3.035$$

para Q = 25 m^3/s; A =2.5y +0.8y^2; R= A/P, donde P = 2.5 +2y $\sqrt{1+k^2}$.

3.4 Localice la raíz positiva de f(x) = 0.5x – sen(x). Use el método de Newton Raphson y el método de la secante. En ambos casos, acepte una tolerancia de 0.0001

3.5 La concentración de la bacteria contaminante C en un lago decrece de acuerdo con la relación:

$$C = 80e^{-2t} + 20e^{-0.1t}$$

Determínese el tiempo requerido para que la bacteria se reduzca a 10, usando a) el método gráfico y b) el método de Newton Raphson. Compare resultados.

3.6 El movimiento de una estructura se define mediante la siguiente ecuación, para una oscilación amortiguada:

$$y = 10e^{-0.5t} + \cos(2t)$$

a) Úsese el método gráfico, para obtener una estimación inicial del tiempo necesario para que el desplazamiento baje hasta 4.
b) Use el método de Newton Raphson para determinar una raíz con un error relativo del 0.01%.
c) Aplique el método de la secante para determinar la raíz con el mismo error relativo que se pide en el inciso anterior.

3.7 Una corriente oscilatoria, en un circuito eléctrico, se describe mediante:

$$I = 10e^{-t} sen(2\pi t)$$

en donde t está dado en segundos. Determínense todos los valores de t, tales que I =2. Use dos métodos diferentes para encontrar la solución.

3.8 Resuelva por dos métodos diferentes, la ecuación:

$$f(x) = 8\cos^2(x) + 3\cos(x) - 5$$

los resultados obtenidos, se desea que tengan un error relativo igual o menor al 0.01%.

3.9 Aplique todos los métodos para resolver la ecuación: $f(x) = 4^{2x} - (8)4^x + 12$. Se acepta un error relativo del 0.01%.

3.10 Aplique el método de Newton y, posteriormente, el método de Monte Carlo, para resolver la ecuación:

$$f(x) = 4\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 3sen(\pi x) - \sqrt{2}$$

con un error relativo, para la variable independiente, de 0.0001

3.11 Determine las raíces de la siguiente ecuación, $f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{3}} - sen(x)$, usando el método de falsa posición, con una aproximación de tres decimales exactos.

3.12 Resuelva la ecuación dada, por el método de falsa posición y por el de secante, con una tolerancia de tol = 0.0001

$$f(x) = 4sen(x) + 5\cos(x)Ln(x^2 + 3)$$

3.13 Aplicando el método de Newton – Raphson, encuentre una raíz de la ecuación, dada en seguida:

$$\frac{26.315}{y} + 4.572y^2 = 27.751$$

3.14 Mediante el método de secante, resuelva (para $p_{máx}$), la siguiente ecuación:

$$15000 = \frac{p_{máx}}{1 + \left(\frac{p_{máx}}{10} - 1 \right) e^{-2x10^{-6}(p_{máx})(60)}}$$

3.15 Haga un programa de computadora, para resolver cualquier ecuación que tenga la forma f(x) = 0. Si lo desea, aplique el programa a cualquier ecuación de las dadas arriba y compare los resultados obtenidos.

Capítulo **4**

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTANEAS

4.1 Introducción

La solución simultánea de sistemas de ecuaciones lineales, consume una fracción de tiempo de cálculo significante en un equipo de cómputo. La solución de tales sistemas, permite la aplicación a una gran variedad de problemas, incluyendo la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales parciales, análisis estructural, análisis de trabajo neto, optimización y análisis de datos. Los sistemas consisten de un gran número de ecuaciones simultáneas y se deberá seleccionar el mejor método para cualquier problema dado. Puesto que las técnicas básicas del álgebra matricial son requeridas en este capítulo, tal como veremos más tarde, se empieza con una discusión de la terminología y operaciones matriciales.

4.2 Conceptos y operaciones básicas con matrices.

Conceptos teóricos de matrices

Una *matriz* es definida, en este contexto, como un arreglo rectangular de números, caracterizada por el número de renglones y el número de columnas. Por tanto,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 0 & 5 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 9 \\ 6 & 2 & -1 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

es una matriz de 4 renglones y 6 columnas. Cualquier elemento dado de la matriz **A** será denotado por $\mathbf{a}_{ij}$, donde i es la localización en el renglón y j su localización en columna. Así, $a_{23} = 5$.

Nuestro interés primario será con matrices cuadradas y matrices de dimensión columna 1 o con dimensión en renglón 1. Matrices con dimensión 1 en columna, tal como,

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

son referidas como *vectores columnas*, mientras que las matrices con dimensión 1 en el renglón, tal como

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Son llamados *vectores renglón*.

Las matrices cuadradas pueden tener ciertas configuraciones especiales que son de interés en ingeniería. Podríamos ilustrar con una matriz de 4x4. Todas las exposiciones son aplicables a matrices cuadradas de cualquier tamaño. Considere,

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

La diagonal consistente de c_{11}, c_{22}, c_{33} y c_{44} es llamada *la diagonal principal* de la matriz. La matriz es llamada *simétrica* sí $c_{ij} = c_{ji}$. Una *matriz triangular superior* es aquella en la cual todos los elementos debajo de la diagonal son cero. Por tanto,

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ & & c_{33} & c_{34} \\ & & & c_{44} \end{bmatrix}$$

es triangular superior. Note que cuando los bloques de elementos son cero hay simplemente blancos en la representación de la matriz.
Una *matriz triangular inferior* es aquella en la cual todos los elementos arriba de la diagonal son cero, como:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & & & \\ c_{21} & c_{22} & & \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

Una *matriz diagonal* es aquella en la que todos los elementos son cero excepto los de la diagonal principal. Una matriz diagonal particularmente importante es

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la cual es llamada *matriz unitaria* o *matriz identidad*. Una *matriz bandeada* tiene todos los elementos cero excepto para una banda centrada en la diagonal principal. Por consiguiente, el siguiente arreglo matricial es una matriz *tridiagonal* también llamada *matriz bandeada*, en este caso con tres bandas.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & & \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \\ & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ & & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

Una *matriz transpuesta* es aquella que convierte sus renglones en columnas y sus columnas en renglones. Así, por ejemplo, la transpuesta de la matriz de 4x4 que hemos presentado para la discusión, es

$$C^T = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{32} & c_{41} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & c_{42} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{43} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} \end{bmatrix}$$

Una *matriz aumentada* resulta cuando a la matriz original se le agrega una o más columnas, por ejemplo, las dos siguientes matrices son aumentadas.

$$C = \left[\begin{array}{cccc:c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & b_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & b_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & b_3 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & b_4 \end{array}\right]$$

se agregó el vector de términos constantes del sistema original de ecuaciones lineales.

$$C=\left[\begin{array}{cccc|cccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

se agregó la matriz identidad.

Operaciones con matrices

Podemos ahora definir algunas de las operaciones básicas con matrices. La adición matricial es representada como

$$[S]= [A] + [B] \qquad (4\text{-}1)$$

se realiza sumando los elementos correspondientes de cada matriz, así por ejemplo,

$$S_{ij}= a_{ij} + b_{ij} \qquad (4\text{-}1.1)$$

Para **i** = 1, 2, 3, ..., m y **j** = 1, 2, 3, ..., n.

De manera similar, la resta de dos matrices, A y B se representa

$$[C] = [A] - [B] \qquad (4\text{-}2)$$

Obteniendo la matriz C restando los elementos correspondientes de cada matriz, es decir,

$$c_{ij}= a_{ij} – b_{ij} \qquad (4\text{-}2.1)$$

Para **i** = 1, 2, 3, ..., m y **j** = 1, 2, 3, ..., n.

De acuerdo a estas definiciones, se concluye que la suma y resta de matrices se puede llevar a cabo, si y solo si, las matrices a sumar o restar tienen la misma dimensión.

La multiplicación de una matriz [C] por un escalar k se obtiene multiplicando cada elemento de [C] por el escalar k, así que,

[G]=k[C]

Si la matriz [C] está dada por

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

entonces, k[C] se escribe como

$$C = k\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

Sin embargo, el producto de dos matrices se simboliza como [C]=[A][B] y se define

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad (4\text{-}4)$$

donde *n* es la dimensión de las columnas de [A] y de los renglones de [B]. En otras palabras, el número de columnas de la primer matriz, debe ser igual al número de renglones de la segunda matriz, de otra manera no puede efectuarse la multiplicación matricial.

Aunque la multiplicación matricial es posible, en términos de (4-4), la *división matricial* aun no está definida. Sin embargo, si una matriz [C] es cuadrada, hay otra matriz $[C]^{-1}$, llamada *inversa* de [C] tal que su producto es la matriz identidad, como se muestra abajo.

$$[C][C]^{-1} = [C]^{-1}[C] = [I] \qquad (4\text{-}5)$$

4.3 Métodos de solución

Los métodos analíticos de solución, no siempre son recomendables para la solución de sistemas grandes de ecuaciones algebraicas lineales; ya que, su

metodología podría parecer difícil, aunque realmente no lo sea. Por ejemplo, si un sistema de ecuaciones simultáneas de 8x8 ó menor, es resuelto por determinantes, la solución se obtiene con cierta facilidad, pero para sistemas más grandes, este método resulta de cierta manera, dificultoso. Sin embargo, un método numérico asociado a un equipo de cómputo “grande”, permite resolver sistemas de ecuaciones de grandes dimensiones, en poquísimo tiempo de cálculo.

Los métodos numéricos que se presentan, son esencialmente sencillos de *programar*, por lo que, será un pasatiempo divertido para los estudiosos. Actualmente hay varios métodos numéricos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, pero en este libro se dan aquellos que facilitan el trabajo del ingeniero y que, permiten el uso de equipo electrónico moderno. En orden de aparición y por su facilidad, se discutirán los siguientes métodos: Eliminación completa de Gauss & Jordan; Inversión matricial y los métodos iterativos de Jacobi, así como el de Gauss & Seidel.

Aunque en el presente capítulo sólo se resuelven, a manera de ilustración algunos ejemplos, haciendo cálculos manuales, en las aplicaciones de ingeniería se resolverán sistemas grandes de ecuaciones lineales, en donde, la limitante podría ser la capacidad del equipo de cómputo disponible. Sin embargo, en la actualidad esa ya no es una dificultad, debido a los avances tecnológicos en el ramo de las máquinas electrónicas.

4.3.1 Eliminación completa de Gauss – Jordan

a) *Sistemas cuadrados de ecuaciones lineales.*

Para estos sistemas, la matriz de coeficientes **A** es de orden **nxn**, es decir, el número de renglones es igual al número de columnas. En notación matricial se representa como.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_5 \end{bmatrix}$$

En notación matricial, cualquier sistema de ecuaciones lineales se representa como,

$$[A]_{mxn}[X]_{mx1} = [B]_{mx1} \qquad (4\text{-}7)$$

ó simplemente,

$$[A].[X]=[B] \qquad (4\text{-}8)$$

La aplicación del método de eliminación completa de Gauss & Jordan, consiste de los siguientes pasos:

Paso 1. Escribir el sistema (4-8), como un sistema aumentado, quedando:

$$[A|B] \qquad (4\text{-}9)$$

Paso 2. Seleccionar, de la diagonal principal de **A**, el *Pivote*; para lo cual se viaja por dicha diagonal de izquierda a derecha, por lo que, el primer elemento seleccionado será el coeficiente $\mathbf{a}_{11}$, en segundo lugar el $\mathbf{a}_{22}$, en tercer lugar el elemento $\mathbf{a}_{33}$ y, así sucesivamente, hasta llegar al elemento $\mathbf{a}_{nn}$.

Paso 3. Dividir los elementos del renglón con pivote entre el coeficiente seleccionado, esto es, la primer vez, el renglón número 1, con lo cual queda transformado.

Paso 4. Los demás elementos de la matriz **A**, que no están en renglón con pivote, se transforman con la ecuación,

$$a_{ij}^{t} = a_{ij} - \frac{a_{iL}}{a_{LL}^{*}}(a_{Lj}) \qquad (4\text{ -}10)$$

Paso 5. Los elementos que están en **B**, se transforman con una ecuación equivalente a la anterior, que se escribe como,

$$b_{m}^{t} = b_{m} - \frac{a_{mL}}{a_{LL}^{*}}(b_{L}) \qquad (4\text{-}11)$$

donde

a_{ij}^{t} es el elemento que estará en el renglón “i” y en la columna “j”, pero transformado.

a_{LL}^{*} es el elemento pivote, como está en la diagonal principal, su renglón coincide con su columna.

a_{iL} corresponde al elemento que está en el mismo renglón que el elemento por transformar y en la misma columna que el pivote.

a_{mL} es el elemento de **A** que está en el mismo renglón que b_m y en la columna donde está el pivote.

a_{Lj} elemento que está en el mismo renglón que el pivote y en la misma columna que el elemento por transformar.
b_L elemento de B que está en la columna de b_m, pero en el renglón pivote.

En este momento, el sistema (4-9) se ha transformado en otro *sistema equivalente*, que se denotará por,

$$\left[A' \middle| B'\right]$$

Paso 6. Se repiten los pasos 2-5, tantas veces como elementos tenga la diagonal principal, es decir, hasta que en lugar de la matriz de coeficientes **A** se ha convertido en una matriz identidad **I**, teniendo ahora el último sistema equivalente, como,

$$\left[I \middle| B_{sol}\right] \qquad (4\text{-}12)$$

donde **I** es la matriz identidad del mismo orden que la matriz **A** y $\mathbf{B_{sol}}$ es la solución del sistema de ecuaciones algebraicas lineales. El diagrama de flujo se puede ver en Fig. D4.1.

*b) Sistemas de ecuaciones lineales con **m** ecuaciones y **n** incógnitas.*

Elementos teóricos

Sea el sistema,

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &- \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \qquad (4\text{-}13)$$

un sistema no homogéneo, con $b_m \neq 0$ y $m \neq n$. Si se forma un nuevo sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas, se igualan a cero las restantes (*n* – *m*) incógnitas y se encuentra la solución al nuevo sistema así obtenido, se dirá que es básica, si en ella todos los resultados son diferentes a cero, en caso contrario se dirá que es degenerada.

Teorema 4.1 Una condición necesaria y suficiente para que una solución básica no sea degenerada es de que, exista independencia lineal entre el vector de los

términos independientes y cualquier grupo de (m-1) vectores columna, de la matriz de los coeficientes.

Los grupos de soluciones básicas de estos sistemas, se obtienen con la combinación que resulte de,

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \qquad (4\text{-}14)$$

Para encontrar cada solución básica dada por (4-14), se recomienda el uso del método de Gauss & Jordan, explicado anteriormente, modificando ecuación (4-10), para quedar como,

$$a_{ij}^{t} = a_{ij} - \frac{a_{iK}}{a_{LK}^{*}}(a_{Lj}) \qquad (4-15)$$

donde a_{LK}^{*} es el pivote.

En este caso, se inicia seleccionando como pivote, el coeficiente a_{ij} asociado a una variable del grupo de solución y se aplica el proceso del método de Gauss & Jordan, obteniendo un *nuevo sistema equivalente*, como antes. A continuación se escoge como siguiente pivote, otro coeficiente a_{ij} que no esté en el mismo renglón que el anterior, asociado a la siguiente variable, del grupo de solución, para aplicar nuevamente la rutina del método que nos ocupa. Si aún no han sido seleccionados todos los coeficientes a_{ij} correspondientes a las variables de una solución básica, se continúa como antes, tomando en cuenta que ningún pivote debe estar en el mismo renglón que otro. Al concluir esto, se ha obtenido una solución básica.

Para obtener la siguiente solución básica, se tienen dos caminos: Repetir todo el proceso anterior desde el inicio, como si aún no se hubiera iniciado ó partir del último sistema equivalente, seleccionando adecuadamente el siguiente pivote, de tal forma que permita entrar a la base el grupo de variables que conformarán otra solución básica. Continuando así hasta obtener todas las soluciones dadas por (4-14).

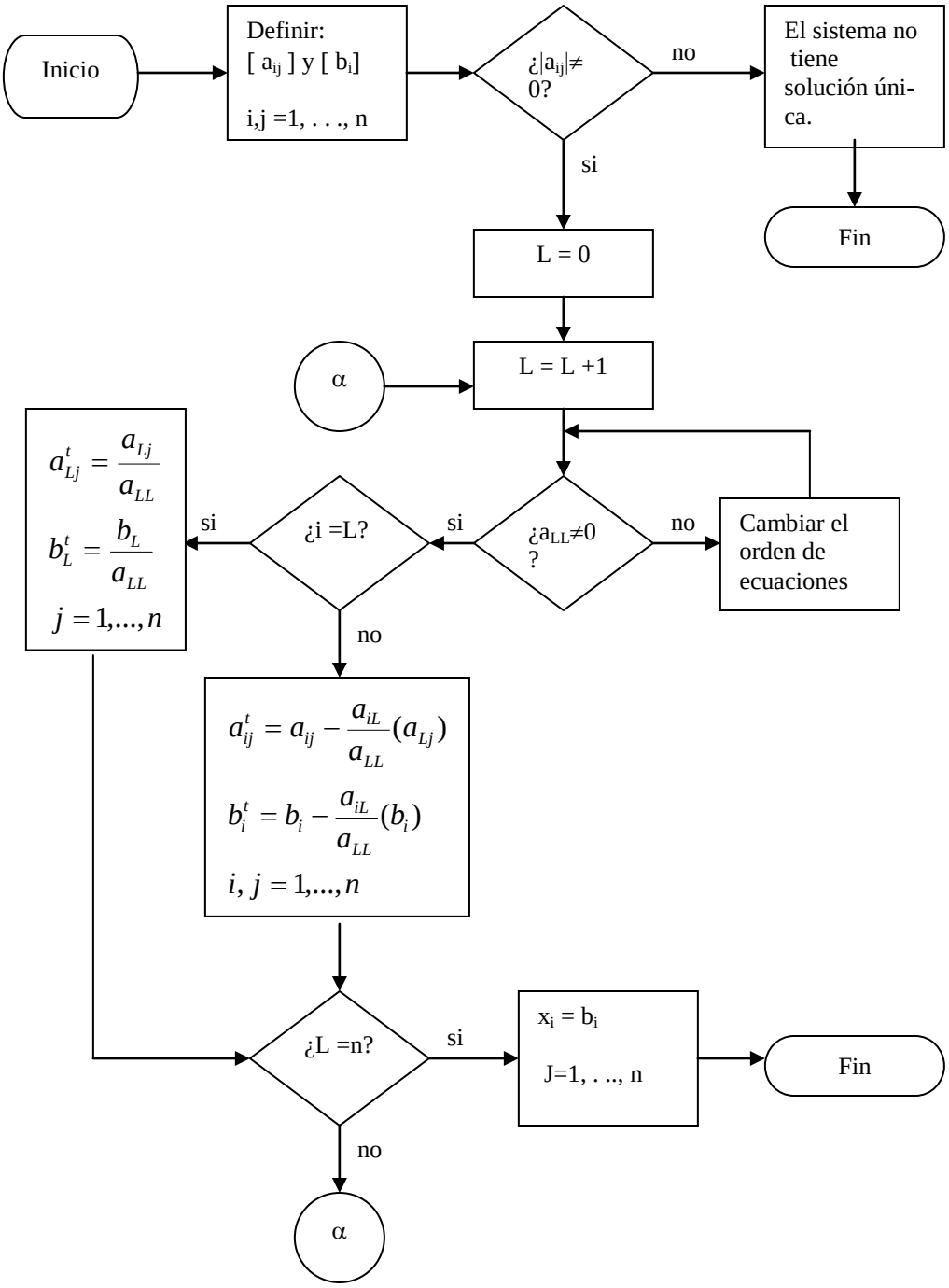


Fig. D4.1 Diagrama de flujo del método de eliminación completa de Gauss – Jordan.

4.3.2 Método de matriz inversa

Este método se aplica única y exclusivamente a los sistemas de ecuaciones lineales cuadrados (m = n). Partiendo de un arreglo como el dado por (4-9), con la siguiente modificación:

$$\left[A|I\right] \qquad (4 - 16)$$

donde **I** es una matriz identidad del mismo orden que la matriz **A**.

La aplicación del método de Gauss – Jordan a este arreglo, facilita grandemente la obtención de la matriz inversa de **A** que se denota por $\mathbf{A}^{-1}$. Puesto que son seleccionados todos los elementos de la diagonal principal como pivotes. Al finalizar, la ecuación (4-16) tiene la forma:

$$\left[I|A^{-1}\right] \qquad (4 - 17)$$

Para encontrar la solución al sistema de ecuaciones simultáneas, se parte del hecho algebraico siguiente,

$$AX = B$$

de donde $\left[X\right] = \dfrac{B}{A} = A^{-1} * B$ (4-18)

Aquí [X], representa el vector que contiene las incógnitas en columna.
B es el vector columna, de términos independientes
A^{-1} la matriz inversa de la matriz de coeficientes

4.3.4 Método de Jacobi

Este método iterativo, en la solución de sistemas de ecuaciones lineales cuadrados es muy similar al método de aproximaciones sucesivas para resolver ecuaciones no lineales; porque en general, parte de una solución supuesta para obtener la siguiente solución, seguramente más cercana a la solución real, del sistema. A esta solución aproximada se le aplica el criterio de convergencia relativa y, si lo cumple, la solución obtenida es aceptada, en caso contrario, se repite el proceso, pero ya no se supone una solución, más bien se parte de esta última solución. La estrategia que permite resolver un sistema de ecuaciones lineales, por este método, es el siguiente:

1. Se despeja x_1 de la ecuación número 1, del sistema a resolver; x_2 de la ecuación número 2; x_3 de ecuación número 3; etc. Este sistema se le denomina *sistema recursivo*. Si el sistema dado es de *n* ecuaciones, entonces se tiene, un sistema recursivo como el siguiente:

$$x_1^{k+1} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \ldots - a_{1n}x_n^k}{a_{11}}$$

$$x_2^{k+1} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - \ldots - a_{2n}x_n^k}{a_{22}}$$

$$x_3^{k+1} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k - \ldots - a_{2n}x_n^k}{a_{33}} \qquad (4\text{-}19)$$

.
.
.

$$x_n^{k+1} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^k - a_{n2}x_2^k - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^k}{a_{nn}}$$

2. Se empieza el proceso, proponiendo una solución inicial que se denota por

$$X_j^0$$

3. Se sustituye este vector en el sistema recursivo, empezando por calcular x_1. Después se calcula x_2; luego x_3 y así, sucesivamente hasta calcular todas las incógnitas, cuyo vector se simboliza por,

$$X_j^1$$

4. Se checa la convergencia con,

$$\left| \frac{X_j^k - X_j^{k-1}}{X_j^{k+1}} \right| \leq \varepsilon ? \qquad (4\text{-}20)$$

Para la primera vez queda:

$$\left| \frac{X_j^1 - X_j^0}{X_j^1} \right| \leq \varepsilon ?$$

5. Si esta condición es cumplida se detiene el proceso, en caso contrario se repiten los pasos 3 y 4, entrando con los valores del vector X_j^1, con lo que se obtiene el vector X_j^2, para el cual se revisa, nuevamente la convergencia, entre estos dos últimos vectores; de cumplirse, este vector X_j^2 es la solución y se detiene el proceso, de no ser así, se repite la secuencia de pasos 3 y 4, deteniendo el proceso hasta que se cumpla la condición de convergencia; esto es, hasta que dos vectores consecutivos se repitan.

4.3.3 Método de Gauss – Seidel

Es el método iterativo más usado y permite manejar un acercamiento a la solución, tanto, como sea requerido, es decir, puede prefijarse un error admisible (ε). Este método es muy similar al método de Jacobi, sin embargo, es preferible por ser más dinámico, ya que al calcular cada variable usa su valor actual en el cálculo de las demás incógnitas, como se verá en las aplicaciones. La rutina de cálculo, en la aplicación de este método, consiste de los siguientes pasos:

1. Al igual que en el método de Jacobi se obtiene el *sistema recursivo*, cuyo cambio sólo consiste en la actualización del valor de la variable calculada.

$$x_1^{k+1} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \ldots - a_{1n}x_n^k}{a_{11}}$$

$$x_2^{k+1} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \ldots - a_{2n}x_n^k}{a_{22}}$$

$$x_3^{k+1} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - \ldots - a_{2n}x_n^k}{a_{33}} \qquad (4\text{-}21)$$

$$x_4^{k+1} = \frac{b_4 - a_{41}x_1^{k+1} - a_{42}x_2^{k+1} - \ldots - a_{4n}x_n^k}{a_{44}}$$

.
.
.

$$x_n^{k+1} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1}}{a_{nn}}$$

Si al formular el sistema recursivo, algún elemento de la diagonal principal es cero, se recomienda intercambiar las ecuaciones de tal forma de eliminar esta dificultad y, entonces, formar el sistema recurrente.

2. Se propone una solución inicial, denotada por X_j^0

3. Se sustituye este vector en el sistema recursivo, empezando por calcular x_1. Con este valor actualizado de x_1 y los demás valores propuestos en paso 2, se calcula x_2; dejando actualizado también la variable x_2, que será usado junto con x_1 y los demás valores propuestos (aún no actualizados), para calcular x_3 y así, sucesivamente hasta obtener el vector total actualizado que será simbolizado como,

   X_j^1

4. Se checa la convergencia con ecuación (4-20), de igual forma que se hizo en el método de Jacobi.

5. Si esta condición es cumplida se detiene el proceso, en caso contrario se repiten los pasos 3 y 4, entrando con los valores del vector X_j^1, con lo que se obtiene el vector X_j^2 revisándose nuevamente la convergencia, entre estos dos últimos vectores; de cumplirse, este vector X_j^2 es la solución y se detiene el proceso, de no ser así, se repite la secuencia de pasos 3 y 4, deteniendo el proceso hasta que se cumpla la condición de convergencia; esto es, hasta que dos vectores consecutivos se repitan.

4.3.4 Método de Gauss Seidel con relajaciones

Originalmente las *relajaciones* se desarrollaron como una técnica de cálculo manual muy sofisticada, para resolver iterativamente grandes sistemas de ecuaciones lineales. La aproximación no es conveniente, en esas condiciones, para

su uso en una computadora digital porque la lógica requerida es extensa. Sin embargo, al cambiar algunos de los conceptos originales por otros más simples, fue posible combinarse con el método de Gauss- Seidel obteniendo el conocido método de relaciones, el cual se explica brevemente a continuación.

El método consiste básicamente en el cálculo del valor de cada incógnita, por la iteración de Gauss- Seidel y, entonces, se modifica el valor así obtenido antes de detener el proceso. La ecuación fundamental para la *relajación* es:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \lambda\left[x_i^{(k+1)*} - x_i^{(k)}\right] \qquad (4\text{-}22)$$

Al igual que antes, se considera la iteración (k+1) como la iteración actual y la (k) como la iteración anterior. En esta ecuación la cantidad $x_i^{(k+1)*}$ es el valor de la incógnita obtenida en la iteración actual del método de Gauss- Seidel; mientras que, λ es un número positivo que varía entre 0 y 2 y es llamado *factor de relajación*. El efecto de este factor puede ser visto más fácilmente si ecuación (4-21) se escribe como:

$$x_i^{(k+1)} = \lambda x_i^{(k+1)*} + (1-\lambda)x_i^{(k)} \qquad (4\text{-}23)$$

Si el factor de relajación, λ= 1, entonces, el valor de la incógnita calculado por Gauss Seidel no se modifica. Para 0 < λ < 1, el valor actual obtenido por Gauss – Seidel es ponderado por el valor anterior. Este rango se conoce como de *baja relajación¸* sin embargo, si 1 < λ 2, el rango es de sobre-relajación y el valor actual es esencialmente extrapolado más allá del valor dado por Gauss- Seidel. Se tiene probado que para λ > 2, el proceso diverge, por lo que no es recomendable su selección. En muchos de los casos conviene proponer factores de relajación comprendidos en el rango de 0 a 1, sin embargo, esto no necesariamente garantiza una rápida convergencia del método, ya que, el vector inicial con que se empiece a desarrollar el método de Gauss- Seidel, es otro factor que influye en la convergencia del método.

Con todas las dificultades que pueda representar la selección del factor de relajación, λ, el uso del mismo, siempre servirá para acortar el camino de la solución de un sistema de ecuaciones lineales y, algunos casos, de sistemas cuadrados de sistemas no lineales, como se verá en las aplicaciones, aunque éste no haya sido el objetivo de esta sección, ya que, los métodos aquí presentados y en la literatura técnica consultada, el propósito primario es la solución de sistemas de ecuaciones lineales, que tienen muchas aplicaciones en el área de ingeniería.

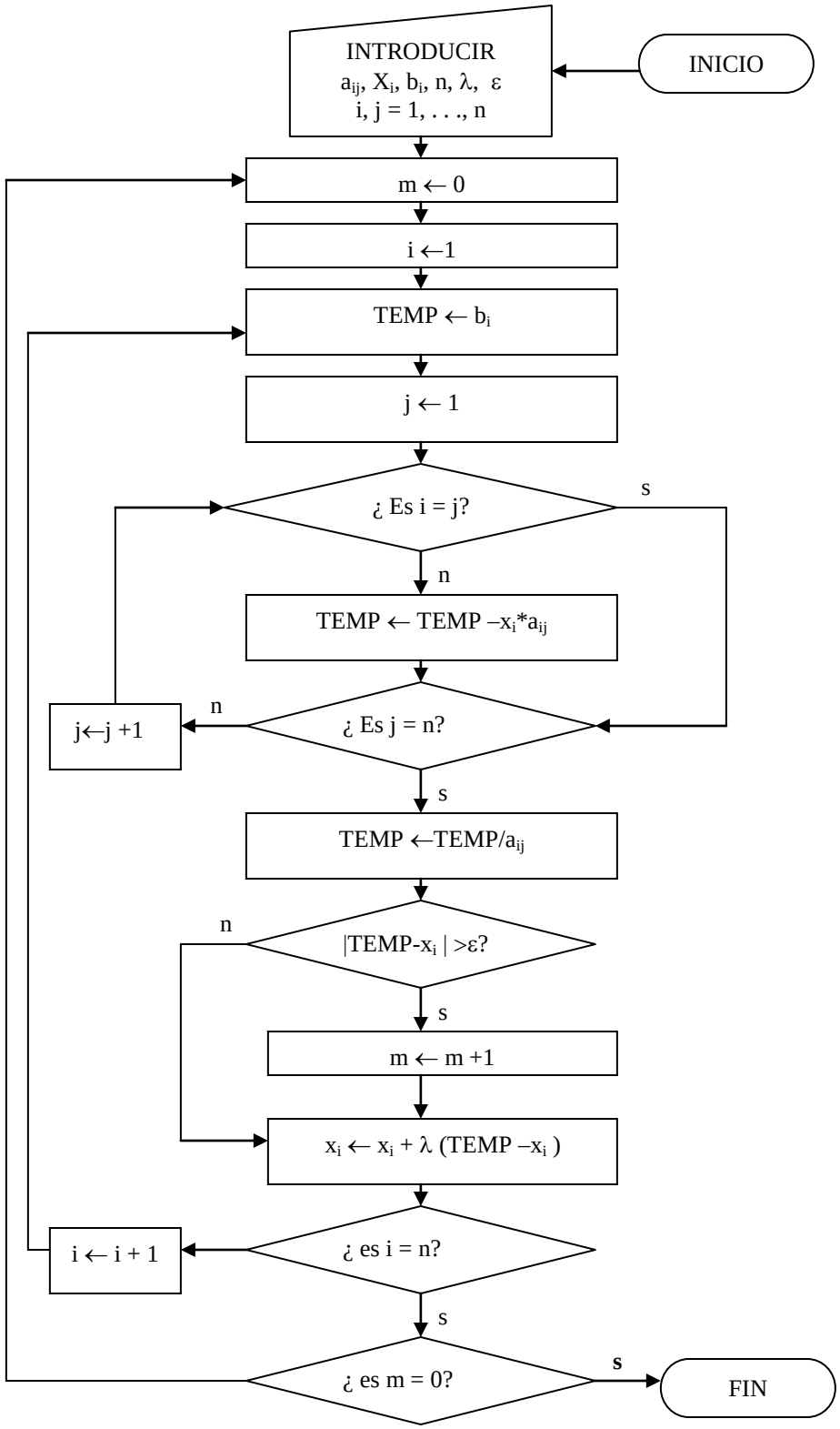


Fig. D4.2 Diagrama de flujo del método de Gauss – Seidel con relajaciones

Problemas resueltos

Prob. 4.1 El siguiente sistema de 3x3, se resuelve por el método de eliminación completa de Gauss – Jordan.

$$\begin{aligned} 16x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 60 \\ 2x_1 - 18x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 6x_2 + 12x_3 &= 62 \end{aligned}$$

Solución. Primero se escribe la matriz aumentada, seleccionando en ella el primer pivote de la diagonal principal, siendo en este caso el $\mathbf{a}_{11}$ = 16. También se identificaron los renglones para facilitar su identificación.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 6 & 60 \\ 2 & -18 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 12 & 62 \end{array}\right]$$

De acuerdo al método planteado, el pivote es, en esta ocasión, el elemento a_{11} = 16; por lo que, el renglón uno (R_1), se dividió por 16, quedando, 16/16 = 1.00; 1/4; 3/8 y 15/4. Los demás elementos del arreglo anterior que no están en el renglón R_1, se transformaron con ecuación (4-10). Por ejemplo, los elementos del renglón R_2 quedan,

Elemento a_{21} (i = 2 y j = 1),

$$a_{21}^{t} = a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}^{*}}(a_{11}) = 2 - \frac{2}{16}(16) = 0.000$$

Elemento a_{22}.(i = 2, j =2)

$$a_{22}^{t} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}^{*}}(a_{12}) = -18 - \frac{2}{16}(4) = -18.5000$$

Elemento a_{23} (i = 2, j = 3)

$$a_{23}^{t} = a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}^{*}}(a_{13}) = 4 - \frac{2}{16}(6) = 3.250$$

Elemento b_2 (m = 2, j = 4), de ecuación (4- 11)

$$b_m^t = b_m - \frac{a_{mL}}{a_{LL}^*}(b_L) = 2 - \frac{2}{16}(60) = -5.500$$

Para los elementos del R_3, se hizo:

Elemento a_{31} (i = 3 y j = 1),

$$a_{31}^t = a_{31} - \frac{a_{31}}{a_{11}^*}(a_{11}) = 4 - \frac{4}{16}(16) = 0.000$$

Elemento a_{32} (i = 3 y j = 2)

$$a_{32}^t = a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}^*}(a_{12}) = 6 - \frac{4}{16}(4) = 5.000$$

Elemento a_{33} (i = 3 y j = 3)

$$a_{33}^t = a_{23} - \frac{a_{31}}{a_{11}^*}(a_{13}) = 12 - \frac{4}{16}(6) = 10.500$$

Elemento b_3 (m = 3 , j = 4), según ecuación (4-11)

$$b_m^t = b_m - \frac{a_{mL}}{a_{LL}^*}(b_L) = 62 - \frac{4}{16}(60) = 47.000$$

Hasta aquí se ha hecho la transformación del arreglo original ampliado, obteniendo el *primer sistema equivalente*, el cual queda como,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1.000 & 0.250 & 0.375 & 3.750 \\ 0.000 & -18.500 & 3.250 & -5.500 \\ 0.000 & 5.000 & 10.500 & 47.000 \end{array}\right]$$

En este nuevo sistema, se escoge como segundo pivote al elemento a_{22} = -18.500 con el que se obtuvo el siguiente sistema equivalente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1.000 & 0.000 & 0.419 & 3.676 \\ 0.000 & 1.000 & -0.176 & 0.297 \\ 0.000 & 0.000 & 11.378 & 45.514 \end{array}\right]$$

Para el último pivote (a_{33} = 11.375), se llegó a, finalmente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 2.0 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 1.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 4.0 \end{array}\right], \therefore \mathbf{x_1 = 2;\ x_2 = 1\ y\ x_3 = 4}$$

Prob. 4.2 Por el mismo método, se muestra la solución de un sistema de cuatro ecuaciones simultáneas. Con la finalidad de no repetir la explicación y que el estudiante compruebe los cálculos, se presentan los resultados finales a que se llegó partiendo del sistema ampliado, es decir, que en la última columna se incluyen los términos independientes:

$$\begin{bmatrix} 20 & 25 & 40 & 50 \\ 10 & 15 & 20 & 22 \\ 10 & 8 & 10 & 15 \\ 3 & 4 & 7 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1970 \\ 970 \\ 601 \\ 504 \end{bmatrix}$$; sistema original, en su representación matricial.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 20 & 25 & 40 & 50 & 1970 \\ 10 & 15 & 20 & 22 & 970 \\ 10 & 8 & 10 & 15 & 601 \\ 3 & 4 & 7 & 20 & 504 \end{array}\right]$$; matriz aumentada

Seleccionando pivotes a los elementos de la *diagonal principal* y aplicando la eliminación completa de Gauss – Jordan; se escriben a continuación los sistemas equivalentes obtenidos. Se deja al estudiante la tarea de verificar esos resultados, con el objeto que le sirva de práctica.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1.25 & 2.00 & 2.50 & 98.50 \\ 0 & 2.50 & 0.00 & -3.0 & -15.00 \\ 0 & -4.50 & -10.0 & -10.0 & -384.00 \\ 0 & 0.25 & 1.00 & 12.50 & 208.50 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0.00 & 2.00 & 4.00 & 106.00 \\ 0 & 1.00 & 0.00 & -1.20 & -6.00 \\ 0 & 0.00 & -10.0 & -15.40 & -411.00 \\ 0 & 0.00 & 1.00 & 12.80 & 210.00 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0.00 & 0.00 & 0.92 & 23.80 \\ 0 & 1.00 & 0.00 & -1.20 & -6.00 \\ 0 & 0.00 & 1.00 & 1.54 & 41.10 \\ 0 & 0.00 & 0.00 & 11.26 & 168.90 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 10.0 \\ 0 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 12.0 \\ 0 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 18.0 \\ 0 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 15.0 \end{array}\right]$$

La solución es: w = 10; x = 12; y = 18 y z = 15

Prob. 4.3 En este ejemplo se resuelve un sistema de 2 ecuaciones y 4 incógnitas, obteniendo las soluciones básicas del sistema.

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 16$$

Solución. Puesto que se trata de un sistema de dos ecuaciones (m =2) y cuatro incógnitas (n = 4), el número de soluciones básicas es, de acuerdo a (4-14),

$$\binom{n}{m} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$$

que pueden sintetizarse como las siguientes combinaciones: x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4; x_2x_3, x_2x_4; x_3x_4.

Para incidir en la primer solución, primero será escogido, del arreglo inicial, como pivote a_{11} y luego a_{22}, con lo cual se tendrá la primer solución básica.

v.b.	**X_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**b_m**
*	**2.000**	3.000	3.000	4.000	20.000
*	3.000	2.000	4.000	2.000	16.000

Igual que en los casos normales de la aplicación del método de Gauss- Jordan, el primer renglón se dividió por 2 (pivote) y, los elementos del renglón R_2 se transformaron con la ecuación (4-15), con L = 1 y K =1, quedando:

x_1	1.000	1.500	1.500	2.000	10.000
*	0.000	**-2.500**	-0.500	-4.000	-14.000

En este sistema equivalente, se seleccionó como pivote al elemento a_{22} (= -2.5), como se dijo antes; por lo que x_2 entró a la base. Los elementos del renglón R_2 se dividieron por el pivote (-2.50) y los elementos del renglón R_1 se transformaron con ecuación (4-15). Se hace notar que L = 2 y K =2. De acuerdo a lo anterior, se llegó a los siguientes resultados:

x_1	1.000	0.000	1.200	-0.400	**1.600**
x_2	0.000	1.000	**0.200**	1.600	**5.600**

Puesto que x_1 y x_2 están en la base, la **primer solución básica** es: x_1 = 1.60 y x_2 = 5.60

Para encontrar la segunda solución, que corresponde a la combinación x_1x_3, se marcó como pivote el coeficiente relacionado con x_3, es decir, el elemento a_{23} = 0.20, ya que x_1 está en la base. El renglón R_2 se dividió por 0.20 y el renglón R_1 se transformó con ecuación (4 –15), tomando en cuenta que L =2 y K = 3, quedando:

x_1	1.000	-6.000	0.000	-10.000	**-32.000**
x_3	0.000	5.000	1.000	**8.000**	**28.000**

Siendo la **segunda solución básica**, x_1 = -32 y x_3 = 28.

La tercer solución se obtuvo al seleccionar a_{24} (=8.00) como pivote, puesto que corresponde a la combinación x_1x_4 y x_1 ya está en la base. Llegando al siguiente sistema equivalente:

x_1	1.000	**0.250**	1.250	0.000	**3.000**
x_4	0.000	0.625	0.125	1.000	**3.500**

De la misma manera se fueron obteniendo las siguientes soluciones básicas, es decir, se seleccionó adecuadamente el pivote para que entrara a la base la variable de interés, llegando a los siguientes sistemas equivalentes:

x_2	4.000	1.000	5.000	0.000	**12.000**
x_4	-2.500	0.000	**-3.000**	1.000	**-4.000**

x_2	0.167	1.000	0.000	**1.667**	**5.333**
x_3	0.833	0.000	1.000	-0.333	**1.333**

x_4	-0.100	0.600	0.000	1.000	**3.200**
x_3	0.800	0.200	1.000	0.000	**2.400**

Un resumen final de todas las soluciones básicas obtenidas, para el sistema propuesto es:

No.Sol.	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**
1	**1.60**	**5.60**	**0.00**	**0.00**
2	**-32.00**	**0.00**	**28.00**	**0.00**
3	**3.00**	**0.00**	**0.00**	**3.50**
4	**0.00**	**12.00**	**0.00**	**-4.00**
5	**0.00**	**5.33**	**1.33**	**0.00**
6	**0.00**	**0.00**	**2.40**	**3.20**

Prob. 4.4 Encuentre las soluciones básicas del siguiente sistema lineal, de tres ecuaciones con cuatro incógnitas.

$$2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 61$$
$$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 52$$
$$3x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 10x_4 = 50$$

Solución. En este caso m = 3 y n = 4; por lo que, ecuación (4-14) indica que el presente sistema tiene 4 soluciones básicas que corresponden a las combinaciones: $x_1x_2x_3$; $x_1x_2x_4$; $x_1x_3x_4$ y $x_2x_3x_4$. A continuación se obtienen estas soluciones, aplicando el método de Gauss & Jordan, con auxilio de ecuación (4-15).
Note usted que se agregó una columna a la izquierda, para identificar la variable que entra a la base; así como encabezado de columnas para facilidad de localización de los elementos del arreglo matricial. El pivote está marcado, en cada sistema equivalente, con letras negritas.

v.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_m
*	**2.000**	-5.000	3.000	6.000	61.000
*	-1.000	2.000	-4.000	5.000	52.000
*	3.000	7.000	-4.000	-10.000	50.000
X_1	1.000	-2.500	1.500	3.000	30.500
*	0.000	**-0.500**	-2.500	8.000	82.500
*	0.000	14.500	-8.500	-19.000	-41.500
X_1	1.000	0.000	14.000	-37.000	-382.000
X_2	0.000	1.000	5.000	-16.000	-165.000
*	0.000	0.000	**-81.000**	213.000	2351.000
X_1	1.000	0.000	0.000	-0.185	**24.346**
X_2	0.000	1.000	0.000	-16.000	**-165.000**
X_3	0.000	0.000	1.000	**-2.630**	**-29.025**
X_1	1.000	0.000	-0.070	0.000	**26.390**
X_2	0.000	1.000	**0.125**	1.000	**11.601**
X_4	0.000	0.000	-0.380	1.000	**11.038**
X_1	1.000	0.563	0.000	0.563	32.925

X_3	0.000	8.000	1.000	8.000	92.808
*	0.000	3.042	0.000	**4.042**	46.331

X_1	1.000	**0.139**	0.000	0.000	**26.468**
X_3	0.000	1.979	1.000	0.000	**1.115**
X_4	0.000	0.753	0.000	1.000	**11.462**

X_2	7.175	1.000	0.000	0.000	**189.909**
X_3	-14.200	0.000	1.000	0.000	**-374.733**
X_4	-5.400	0.000	0.000	1.000	**-131.467**

Cada solución básica puede deducirse de cada sistema que presenta tres variables en la base, por ejemplo, la primer solución básica es:

X_1 = 24.346
X_2 =-165.000
X_3 = -29.025

Prob. 4.5 Para el sistema de ecuaciones simultáneas dado a continuación, obtenga la inversa y posteriormente la solución del sistema.

6.122x + 1500.500 y = 1506.622
2000x + 3y = 2003

Solución. El sistema ampliado es, en este problema,

6.1220	1500.5000	1.00000000	0.00000000
2000.0000	3.0000	0.00000000	1.00000000

Primer pivote: a_{11} = 6.122. Aplicando la transformación de Gauss – Jordan, se tiene,

1.0000	245.0996	0.16334531	0.00000000
0.0000	**-490196.2813**	-326.69062398	1.00000000

Ahora con el pivote a_{22} = -490196.281, se llega al siguiente sistema equivalente,

1.00	0.00	-0.00000100	0.00050000
0.00	1.00	0.00066645	-0.00000204

Por tanto, la matriz inversa es,

$$\left[A^{-1}\right]=\begin{bmatrix}-0.00000100+0.00050000\\+0.00066645-0.00000204\end{bmatrix}$$

La solución del sistema se obtiene aplicando el producto matricial dado por (4-19)

$$\left[X\right]=\frac{B}{A}=A^{-1}*B$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.00000100 & 0.00050000\\0.00066645 & -0.00000204\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1506.622\\2003.000\end{bmatrix}$$

De donde se obtiene que, x = 1.000 e y = 1.000, como solución del sistema compuesto por estas dos ecuaciones simultáneas.

Prob. 4.6 Como problema alterno se resuelve un sistema de 5x5, presentando sucesivamente los sistemas equivalentes. Sea el sistema:

$$\begin{aligned}8x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 + 4x_5 &= 10\\2x_1 - x_2 + 6x_3 + 17x_4 + x_5 &= 21\\4x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 + 6x_5 &= 10\\12x_1 - x_2 + 6x_3 + 14x_4 + 2x_5 &= 28\\7x_1 + 6x_2 + x_3 + 9x_4 + 10x_5 &= 38\end{aligned}$$

La matriz ampliada, del sistema anterior es,

8.000	3.000	-9.000	7.000	4.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.000	-1.000	6.000	17.000	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
4.000	3.000	-7.000	1.000	6.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
12.000	-1.000	6.000	14.000	2.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000
7.000	6.000	1.000	9.000	10.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

Con pivote en a_{11} y aplicando el proceso de Gauss- Jordan, se obtuvo el primer sistema equivalente:

1.000	0.375	-1.125	0.875	0.500	0.125	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	**-1.750**	8.250	15.250	0.000	-0.250	1.000	0.000	0.000	0.000
0.000	1.500	-2.500	-2.500	4.000	-0.500	0.000	1.000	0.000	0.000
0.000	-5.500	19.500	3.500	-4.000	-1.500	0.000	0.000	1.000	0.000
0.000	3.375	8.875	2.875	6.500	-0.875	0.000	0.000	0.000	1.000

Tomando los pivotes subsecuentes en a_{22}, a_{33}, a_{44} y a_{55}, se fueron generando, los sistemas equivalentes siguientes,

1.000	0.000	0.643	4.143	0.500	0.071	0.214	0.000	0.000	0.000
0.000	1.000	-4.714	-8.714	0.000	0.143	-0.571	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	**4.571**	10.571	4.000	-0.714	0.857	1.000	0.000	0.000
0.000	0.000	-6.429	-44.429	-4.000	-0.714	-3.143	0.000	1.000	0.000
0.000	0.000	24.786	32.286	6.500	-1.357	1.929	0.000	0.000	1.000

1.000	0.000	0.000	2.656	-0.063	0.172	0.094	-0.141	0.000	0.000
0.000	1.000	0.000	2.188	4.125	-0.594	0.313	1.031	0.000	0.000
0.000	0.000	1.000	2.313	0.875	-0.156	0.188	0.219	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	**-29.563**	1.625	-1.719	-1.938	1.406	1.000	0.000
0.000	0.000	0.000	-25.031	-15.188	2.516	-2.719	-5.422	0.000	1.000

1.000	0.000	0.000	0.000	0.084	0.017	-0.080	-0.014	0.090	0.000
0.000	1.000	0.000	0.000	4.245	-0.721	0.169	1.135	0.074	0.000
0.000	0.000	1.000	0.000	1.002	-0.291	0.036	0.329	0.078	0.000
0.000	0.000	0.000	1.000	-0.055	0.058	0.066	-0.048	-0.034	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	**-16.563**	3.971	-1.078	-6.613	-0.847	1.000

1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	**0.037**	**-0.086**	**-0.048**	**0.086**	**0.005**
0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	**0.297**	**-0.107**	**-0.560**	**-0.143**	**0.256**
0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	**-0.050**	**-0.029**	**-0.071**	**0.027**	**0.061**
0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	**0.045**	**0.069**	**-0.026**	**-0.031**	**-0.003**
0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	**-0.240**	**0.065**	**0.399**	**0.051**	**-0.060**

Por lo que la inversa de **A**, es

$$\left[A^{-1}\right]=\begin{bmatrix} +0.037-0.086-0.048+0.086+0.005 \\ +0.297-0.107-0.560-0.143+0.256 \\ -0.050-0.029-0.071+0.027+0.061 \\ +0.045+0.069-0.026-0.031-0.003 \\ -0.240+0.065+0.399+0.051-0.060 \end{bmatrix}$$

Nuevamente de (4-19), se tiene que, la solución es:

$$\left[X\right]=\frac{B}{A}=A^{-1}*B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} +0.037-0.086-0.048+0.086+0.005 \\ +0.297-0.107-0.560-0.143+0.256 \\ -0.050-0.029-0.071+0.027+0.061 \\ +0.045+0.069-0.026-0.031-0.003 \\ -0.240+0.065+0.399+0.051-0.060 \end{bmatrix}*\begin{bmatrix} 10 \\ 21 \\ 10 \\ 28 \\ 38 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es,

x_1 = **0.6852**
x_2 = **0.8565**
x_3 = **1.2221**
x_4 = **0.6503**
x_5 = **2.0990**

Prob. 4.7 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones, aplicando el método de Jacobi, aceptando un error ε =1x10^{-3}.

$4x + y^2 + z = 11$
$x + 4y + z^2 = 18$
$x^2 + y + 4z = 15$

Solución. El sistema recursivo (*paso 1*) queda, para este sistema es:

$$x^{k+1}=\frac{11-(y^2)^k-z^k}{4}$$

$$y^{k+1} = \frac{18 - x^k - (z^2)^k}{4}$$

$$z^{k+1} = \frac{15 - (x^2)^k - y^k}{4}$$

Paso 2. Proponiendo como solución inicial, x_0 = 11/4; y_0 = 18/4 y z_0 = 15/4, se tienen los siguientes valores:

Paso 3. La sustitución queda,

$$x^1 = \frac{11 - (18/4)^2 - (15/4)}{4} = -3.250$$

$$y^1 = \frac{18 - 11/4 - (15/4)^2}{4} = 0.297$$

$$z^1 = \frac{15 - (11/4)^2 - 18/4}{4} = 0.734$$

Paso 4. Como estos valores son diferentes a los propuestos, se repite el proceso con estos valores para x, y ,z. De esta forma se llegó (en las primera cinco iteraciones) a los siguientes resultados:

N	X	Y	z
0	2.750	4.500	3.750
1	-3.250	0.297	0.734
2	2.544	5.178	1.035
3	-4.211	3.596	0.837
4	-0.692	5.378	-1.582
5	-4.084	4.047	2.286

Las últimas iteraciones son,

98	-0.654	2.462	2.922
99	0.504	2.530	3.028
100	0.393	2.082	3.054

Claramente se observa que el método no converge.

Prob. 4.8 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones, aplicando el método de Jacobi, aceptando un error $\varepsilon = 1x10^{-3}$.

$12x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$
$x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -51$
$4x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 61$

Su sistema recurrente es:

$$x_1^{k+1} = \frac{8 + x_2^k - 3x_3^k}{12}$$

$$x_2^{k+1} = \frac{-51 - x_1^k + 3x_3^k}{7}$$

$$x_3^{k+1} = \frac{61 - 4x_1^k + 4x_2^k}{9}$$

Partiendo con el vector inicial { 8/12, -51/7, 61/9}, se obtuvieron los siguientes resultados,

n	X_1	x_2	x_3
0	0.667	-7.286	6.778
1	-1.635	-4.476	3.243
2	-0.517	-5.662	5.515
3	-1.184	-4.848	4.491
4	-0.860	-5.192	5.149
5	-1.053	-4.956	4.853
6	-0.959	-5.056	5.043
7	-1.015	-4.987	4.957
8	-0.988	-5.016	5.013
9	-1.004	-4.996	4.988
10	-0.997	-5.005	5.004
11	-1.001	-4.999	4.996
12	-0.999	-5.001	5.001
13	-1.000	-5.000	4.999
14	-1.000	-5.000	5.000

Llegando, en este caso, a la solución: x_1 = -1.000; x_2 = -5.000 y x_3 = 5.000, con los tres decimales exactos.

Prob. 4.9 Como problema alterno se resuelve el problema 4.1 (escrito como se muestra), usando el método de Jacobi.

$8x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30$
$x_1 – 9x_2 + 2x_3 = 1$

$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 31$

Solución. En este caso el *sistema recursivo* es:

$$x_1^{k+1} = \frac{30 - 2x_2^k - 3x_3^k}{8}$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1 - x_1^k - 2x_3^k}{-9}$$

$$x_3^{k+1} = \frac{31 - 2x_1^k - 3x_2^k}{6}$$

Usando como solución inicial X_j^0 = [1, 1, 1], se llegó, para la primer iteración, a los siguientes resultados:

$$x_1^1 = \frac{30 - 2(1) - 3(1)}{8} = 3.125$$

$$x_2^1 = \frac{1 - 1 - 2(1)}{-9} = 0.222$$

$$x_3^1 = \frac{31 - 2(1) - 3(1)}{6} = 4.333$$

Con estos valores, X_j^1 = [3.125, 0.222, 4.333], la segunda iteración, es:

$$x_1^2 = \frac{30 - 2(0.222) - 3(4.333)}{8} = 2.070$$

$$x_2^2 = \frac{1 - 3.125 - 2(4.333)}{-9} = 1.199$$

$$x_3^2 = \frac{31 - 2(3.125) - 3(0.222)}{6} = 4.014$$

A continuación se presenta el resumen de los resultados obtenidos:

n	**x_1**	**x_2**	**x_3**
0	1.000	1.000	1.000
1	3.125	0.222	4.333
2	2.069	1.199	4.014

3	1.945	1.011	3.877
4	2.043	0.967	4.013
5	2.003	1.008	4.002
6	1.997	1.001	3.995
7	2.002	0.999	4.000
8	2.000	1.000	4.000
9	2.000	1.000	4.000

Por tanto, la solución: $x_1 = 2.0$; $x_2 = 1.0$ y $x_3 = 4.0$.

Prob. 4.10 Resuélvase, por el método de Gauss - Seidel, el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$3x_1 – 0.1x_2 – 0.2x_3 =7.85$ Ec. (1)

$0.1x_1 + 7x_2 – 0.3x_3 =-19.3$ Ec. (2)

$0.3x_1 – 0.2x_2 + 10x_3 =71.4$ Ec. (3)

Solución. El *sistema recursivo* queda:

$$x_1^{k+1} = \frac{7.85 + 0.1x_2^k + 0.2x_3^k}{3}$$

$$x_2^{k+1} = \frac{-19.3 - 0.1x_1^{k+1} + 0.3x_3^k}{7}$$

$$x_3^{k+1} = \frac{71.4 - 0.3x_1^{k+1} + 0.2x_2^{k+1}}{10}$$

Si se propone como vector solución inicial es $X_j^0 = \{1,0,1\}$, entonces, del sistema recursivo se llega a (en la primer iteración):

$$x_1^{0+1} = \frac{7.85 + 0.1(0) + 0.2(1)}{3} = \frac{8.05}{3} = 2.6833$$

$$x_2^{0+1} = \frac{-19.3 - 0.1(2.6833) + 0.3(1)}{7} = -2.7526$$

$$x_3^{0+1} = \frac{71.4 - 0.3(2.6833) + 0.2(-2.7526)}{10} = 7.0044$$

Hemos llegado al vector X_j^1={2.6833,-2.7526,7.0044 }; el cual es diferente al vector inicial, por consiguiente, repetimos el mismo proceso tomando estos valores como iniciales, obteniendo (en la segunda iteración):

$$x_1^{k+1} = \frac{7.85 + 0.1(-2.7526) + 0.2(7.0044)}{3} = \frac{8.9756}{3} = 2.9919$$

$$x_2^{k+1} = \frac{-19.3 - 0.1(2.9919) + 0.3(7.0044)}{7} = -2.4997$$

$$x_3^{k+1} = \frac{71.4 - 0.3(2.9919) + 0.2(-2.4997)}{10} = 7.0002$$

Ahora el nuevo vector es: X_j^2={2.9919,-2.4997,7.0002 }. Procediendo reiteradamente, se llega a los siguientes valores:

x_1	x_2	x_3
1	0	1
2.6833333	-2.7526190	7.0044476
2.9918759	-2.4996933	7.0002499
3.0000269	-2.4999897	6.9999994
3.0000003	-2.5000000	7.0000000
2.999999998	-2.5	7
3	-2.5	7

Se concluye que la solución es x_1 = 3; x_2 = -2.5 y x_3 = 7, debido a que el último vector y antepenúltimo, se repiten; por lo que, la solución es exacta.

Prob. 4.11 En seguida se resuelve, por el método de Gauss- Seidel el siguiente grupo de ecuaciones simultáneas.

$$5w + x^2 + y + z = 8.70$$
$$w^2 - 6x + 2y - z = 7.3$$
$$w - x + 4y + z^2 = 17.29$$
$$2w + x + y^2 + 11z = 34.7$$

Solución. Se trata de un sistema de **ecuaciones no lineales**, sin embargo, puede aplicarse el método de Gauss- Seidel debido a que este sistema es cuadrado y en la diagonal principal se tienen variables lineales. El *sistema recursivo* es,

$$w = \frac{8.7 - x^2 - y - z}{5}$$

$$x = \frac{-7.3 + w^2 + 2y - z}{6}$$

$$y = \frac{17.29 - w + x - z^2}{4}$$

$$z = \frac{34.7 - 2w - x - y^2}{11}$$

Proponiendo como vector inicial X_j^0 = [1.74, -1.2167, 4.3225, 3.1545], se llegó a los siguientes resultados:

Primer iteración:

$$w = \frac{8.7 - (-1.2167)^2 - 4.3225 - 3.1545}{5} = -0.0515$$

$$x = \frac{-7.3 + (-0.0515)^2 + 2(4.3225) - 3.1545}{6} - 0.3011$$

$$y = \frac{17.29 - (-0.0515) + (-0.3011) - (3.1545)^2}{4} = 1.7723$$

$$z = \frac{34.7 - 2(-0.0515) - (-0.3011) - (1.7723)^2}{11} = 2.9057$$

Repitiendo el proceso, en la segunda iteración, se tiene,

$$w = \frac{8.7 - (-0.3011)^2 - 1.7723 - 2.9057}{5} = 0.7863$$

$$x = \frac{-7.3 + (0.7863)^2 + 2(-0.3011) - 2.9057}{6} - 1.0072$$

$$y = \frac{17.29 - (0.7863) + (-1.0072) - (2.9057)^2}{4} = 1.7633$$

$$z = \frac{34.7 - 2(0.7863) - (-1.0072) - (1.7633)^2}{11} = 2.8205$$

Repitiendo el proceso, para otras iteraciones, se llegó a,

k	w	x	y	z
0	1.7400	-1.2167	4.3225	3.1545
1	-0.0515	-0.3011	1.7723	2.9057
2	0.7863	-1.0072	1.7633	2.8205
3	0.6204	-1.0348	1.9199	2.8007
4	0.5817	-0.9871	1.9693	2.7860
5	0.5941	-0.9657	1.9921	2.7735
6	0.6003	-0.9548	2.0106	2.7647
7	0.6026	-0.9467	2.0243	2.7585
8	0.6042	-0.9408	2.0339	2.7542
9	0.6054	-0.9367	2.0406	2.7511
10	0.6062	-0.9337	2.0454	2.7489
11	0.6068	-0.9316	2.0488	2.7473
12	0.6072	-0.9302	2.0512	2.7462
13	0.6075	-0.9291	2.0529	2.7454
14	0.6077	-0.9284	2.0542	2.7449
15	0.6078	-0.9278	2.0550	2.7445
16	0.6079	-0.9275	2.0556	2.7442
17	0.6080	-0.9272	2.0561	2.7440
18	0.6080	-0.9270	2.0564	2.7438
19	0.6081	-0.9269	2.0566	2.7437
20	0.6081	-0.9268	2.0567	2.7437
21	0.6081	-0.9267	2.0569	2.7436
22	0.6081	-0.9267	2.0569	2.7436
23	0.6081	-0.9266	2.0570	2.7436
24	0.6082	-0.9266	2.0570	2.7435
25	**0.6082**	**-0.9266**	**2.0571**	**2.7435**
26	**0.6082**	**-0.9266**	**2.0571**	**2.7435**

En el último renglón se encuentra la solución a este sistema de ecuaciones, simultáneas, o sea que w = 0.6082; x = -0.9266: y = 2.0571 y z = 2.7435; considerada exacta en los cuatro decimales. La comprobación se deja al estudiante como un ejercicio suplementario.

Prob. 4.12 Obtener las primeras siete iteraciones, usando el método de Gauss-Seidel, aplicadas al siguiente grupo de ecuaciones:

$8x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30$
$x_1 – 9x_2 + 2x_3 =1$
$2x_1 + 3x_2 +6x_3 = 31$

Solución. En este caso el *sistema recursivo* es:

$$x_1^{k+1} = \frac{30 - 2x_2^k - 3x_3^k}{8}$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1 - x_1^{k+1} - 2x_3^k}{-9}$$

$$x_3^{k+1} = \frac{31 - 2x_1^{k+1} - 3x_2^{k+1}}{6}$$

Usando como solución inicial X_j^0= [1, 1, 1], se llegó a los siguientes resultados, para la primer iteración,

$$x_1^{0+1} = \frac{30 - 2(1) - 3(1)}{8} = x_1^1 = 3.1250$$

$$x_2^{0+1} = \frac{1 - (3.1250) - 2(1)}{-9} = x_2^1 = 0.4583$$

$$x_3^{0+1} = \frac{31 - 2(3.1250) - 3(0.4583)}{6} = x_3^1 = 3.8959$$

La prueba de convergencia, indica que el error relativo es,

$$\left| \frac{X_j^{k+1} - X_j^k}{X_j^{k+1}} \right|, para - x_1 - queda = \left| \frac{3.1250 - 1}{3.1250} \right| = 0.680$$

$$\left| \frac{X_j^{k+1} - X_j^k}{X_j^{k+1}} \right|, para - x_2 - queda = \left| \frac{0.4583 - 1}{0.4583} \right| = 1.1820$$

$$\left| \frac{X_j^{k+1} - X_j^k}{X_j^{k+1}} \right|, para - x_3 - queda = \left| \frac{3.8959 - 1}{3.8959} \right| = 0.7433$$

continuando de la misma forma, se llegó a los resultados,

n	**x_1**	**x_2**	**X_3**	**Er (x1)**	**Er (x2)**	**Er (x3)**
0	1	1	1			
1	3.1250	0.4583	3.8958	0.6800	1.1818	0.7433
2	2.1745	0.9962	3.9437	0.4371	0.5399	0.0121
3	2.0220	0.9899	3.9977	0.0754	0.0064	0.0135

4	2.0034	0.9999	3.9989	0.0093	0.0099	0.0003
5	2.0004	0.9998	3.9999	0.0015	0.0000	0.0003
6	2.0001	1.0000	4.0000	0.0002	0.0002	0.0000
7	2.0000	1.0000	4.0000	0.0000	0.0000	0.0000

De donde se desprende que la solución exacta (ya que el error es cero), es $x_1 = 2$; $x_2 = 1$ y $x_3 = 4$

Prob. 4.13 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones, aplicando el método de Gauss-Seidel con relajaciones, aceptando un error $\varepsilon = 1x10^{-3}$.

$$4x + y^2 + z = 11$$
$$x + 4y + z^2 = 18$$
$$x^2 + y + 4z = 15$$

Solución. El sistema recursivo (*paso 1*) queda, para este sistema es,

$$x^{k+1} = \frac{11 - (y^2)^k - z^k}{4}$$

$$y^{k+1} = \frac{18 - x^{k+1} - (z^2)^k}{4}$$

$$z^{k+1} = \frac{15 - (x^2)^{k+1} - y^{k+1}}{4}$$

Paso 2. Proponiendo como solución inicial, $x_0 = 11/4 = 2.75$; $y_0 = 18/4 = 4.5$ y $z_0 = 15/4 = 3.75$, se tienen los siguientes valores,

Paso 3. La sustitución, para Gauss-Seidel, queda,

$$x^1 = \frac{11 - (18/4)^2 - (15/4)}{4} = -3.250$$

$$y^1 = \frac{18 - (-3.25) - (15/4)^2}{4} = 1.797$$

$$z^1 = \frac{15 - (1.797) - (-3.25)^2}{4} = 0.660$$

La sustitución, en la ecuación relajante indica que los valores para la siguiente iteración son:

x = 0.64*(-3.25) + (1-0.64)*2.75 = -1.090
y = 0.64*(1.797) + (1-0.64)*4.50 = 2.770
z = 0.64*(0.660) + (1-0.64)*3.75 = 1.773

Estos valores se sustituyen en el sistema recursivo de G-Seidel y, los valores obtenidos se sustituyen ahora en la ecuación (4-22), para estimar un mejor valor mediante relajaciones.

Los resultados a que se llegó son,

	ITER	METODO DE GAUSS SEIDEL			R E L A J A C I O N E S			
		x_1	x_2	x_3	x_1	X_2	x_3	FACTOR
	1	2.75	4.5	3.75	2.75	4.5	3.75	0.64
	2	-3.250	1.797	0.660	-1.090	2.770	1.773	0.64
	3	0.389	3.617	2.549	-0.144	3.312	2.269	0.64
	4	-0.560	3.353	2.907	-0.410	3.338	2.677	0.64
	5	-0.705	2.884	2.987	-0.599	3.048	2.875	0.64
	6	-0.291	2.506	3.034	-0.402	2.701	2.977	0.64
	7	0.182	2.239	3.150	-0.028	2.405	3.088	0.64
	8	0.532	1.984	3.254	0.330	2.136	3.194	0.64
	9	0.811	1.747	3.286	0.638	1.887	3.253	0.64
	10	1.047	1.593	3.250	0.900	1.699	3.251	0.64
	85	1.000	1.999	3.000	1.000	2.000	3.000	0.64
	86	1.000	1.999	3.000	1.000	1.999	3.000	0.64
	87	1.001	1.999	3.000	1.000	1.999	3.000	0.64
	88	1.001	2.000	3.000	1.001	2.000	3.000	0.64
	89	1.000	2.000	3.000	1.000	2.000	3.000	0.64
	90	1.000	2.000	3.000	1.000	2.000	3.000	0.64

Problemas propuestos

4.1 Escribir un programa de computadora para resolver un grupo de ecuaciones lineales simultáneas por el método de Eliminación de Gauss _ Jordan. Suponer que la maximización del pivote no es requerid. El programa debe ser capaz de resolver sistemas de ecuaciones de cualquier tamaño, pero no mayor de 20x20.

4.2 Escribir un programa de computadora para resolver un sistema de ecuaciones lineales simultáneas por el método iterativo de Gauss & Seidel ó por puntos de relajación. El programa debe ser capaz de resolver sistemas de ecuaciones de cualquier tamaño, pero no mayor de 20x20. La entrada debe incluir la solución inicial, para las variables no conocidas, el criterio de convergencia (el cual puede ser absoluto o relativo, como se prefiera) y el factor de relación.

4.3 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando eliminación de Gauss & Jordan.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ -2 & 4 & -3 \\ -1 & 9 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \\ 27 \end{bmatrix}$$

4.4 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales, usando el programa de computadora escrito en el problema 4.1:

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 6 & 4 & -2 & -3 & 8 \\ 1 & 1 & -9 & 15 & 1 & -9 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & 5 & -1 & 6 & 11 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 7 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 1 & -7 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 9 & -8 & 11 & -1 & -4 & -1 \\ 7 & 2 & -1 & 2 & 7 & -1 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 17 \\ 24 \\ 8 \\ 13 \\ -10 \\ 34 \end{bmatrix}$$

4.5 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método iterativo de Gauss & Seidel; así también por el método de Jacobi. Compare el número de iteraciones para obtener la solución, si converge.

a) $$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 3 & 15 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 19 \\ 87 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 1 & -10 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 12 \\ 9 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 21 \\ 37 \end{bmatrix}$$

4.6 Resolver el sistema tridimensional dado, usando la iteración de Gauss & Seidel, mediante el programa escrito en 4.2

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -15 \\ -15 \\ -15 \\ -15 \\ -15 \\ -15 \\ -15 \\ -15 \\ -15 \end{bmatrix}$$

4.7 Resolver el problema 4.4 usando relajación, con los factores de 1.3, 1.6 y 1.8. Compare, en cada caso, el número de iteraciones requeridas y diga ¿cuál es mejor, el método iterativo de Gauss & Seidel o el método iterativo con relajaciones?

4.8 En los siguientes problemas obtenga las soluciones básicas, indicando si existe degeneración, inconsistencia o redundancia.

a) $x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4$
$2x_1 - 6x_2 + 6x_3 - x_4 = -6$

b) $3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 10$
$x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 16$

c) $5x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4 = 21$
$3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -18$
$16x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 6$

d) $7x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 15$
$2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 20$
$14x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 18$

e) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 20$
$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 18$
$3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 38$

Capítulo **5**

INTERPOLACIÓN Y AJUSTE DE CURVAS

5.1 Introducción

Las observaciones y los experimentos científicos se registran, en forma tabular, como puntos discretos; de igual manera ocurre con los resultados de cálculos numéricos para una función. Estos puntos, extendidos a lo largo de la variable independiente, conducen a gráficas como la mostrada en figura 5.1. Los valores de la función f(x) pueden estar espaciados en forma constante o no, a lo largo del eje horizontal. En este capítulo se discutirán los métodos y técnicas para estimar el valor de la función f(x) entre puntos tabulados; es decir, se interpolarán valores de la función f(x) no conocidos, a partir de un grupo de datos obtenidos de una investigación o experimento. La interpolación puede ser *lineal* ó *polinomial*; la primera de ellas, se aplica para dos puntos consecutivos siempre y cuando, la gráfica de los puntos dados describan aproximadamente una línea recta; sin embargo, la interpolación polinomial es aplicada para los puntos cuya gráfica no describe una recta.

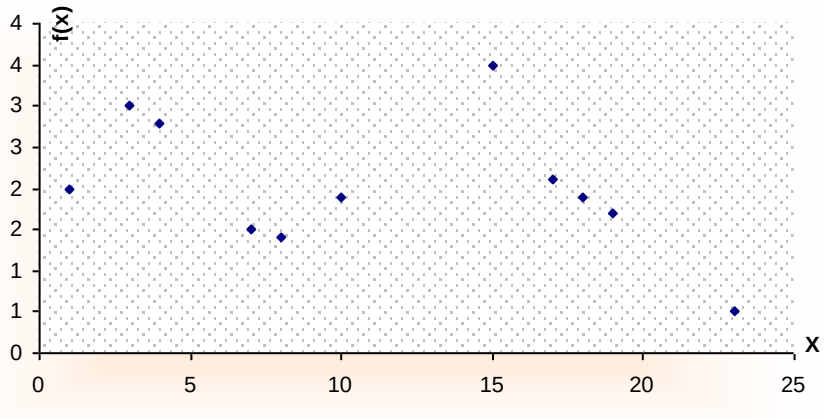


Fig. 5.1 Puntos discretos

5.2 Interpolación lineal

Cuando se aplica esta interpolación, se asume que los puntos consecutivos, de coordenadas (x_k, y_k) y (x_{k+1}, y_{k+1}) se unen con una recta, como se muestra en figura 5.2. Estos puntos consecutivos, son dos cualesquiera de la información dada u obtenida, entre los cuales está el punto no conocido.

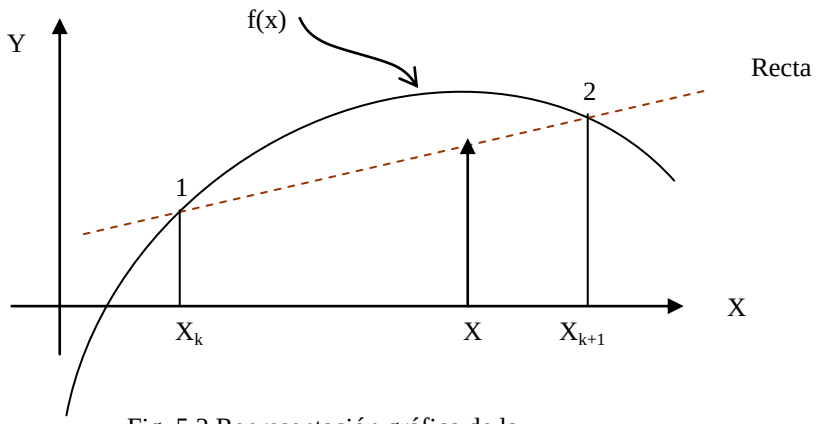


Fig. 5.2 Representación gráfica de la interpolación lineal.

De acuerdo a figura anterior, las coordenadas de los puntos 1 y 2 (consecutivos) son, respectivamente: (x_k, y_k) y (x_{k+1}, y_{k+1}). Como están sobre la curva y también pertenecen a la recta, su ecuación (según la Geometría elemental) es:

$$f(x) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) \qquad (5\text{-}1)$$

donde f(x) es el valor de la función para cualquier valor de *x* que se encuentre entre x_k y x_{k+1}. Por ejemplo, para los valores de la tabla 5.1, suponga usted que se desea estimar el valor de la función f(x) para cuando **x** = 3.5; para este caso se tendría que $x_k = 3$, $y_k = 25$ y $x_{k+1} = 4$, $y_{k+1} = 62$; debido a que, x = 3.5 está en este intervalo.
En figura 5.3 se han graficado los datos dados en tabla 5.2, notando que la interpolación lineal no sería lo más apropiado aplicar; sin embargo, a manera de aplicación de ecuación (5-1) se hace aquí y, en consecuencia, el valor obtenido se podrá mejorar usando la interpolación polinomial, que se verá más adelante. Observe que ecuación (5-1) conduce a:

$$f(3.5) = 25 + \frac{62-25}{4-3}(3.5-3) = 43.5$$

TABLA 5.1 Datos con Δx constante

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	-7	-3	6	25	62	129

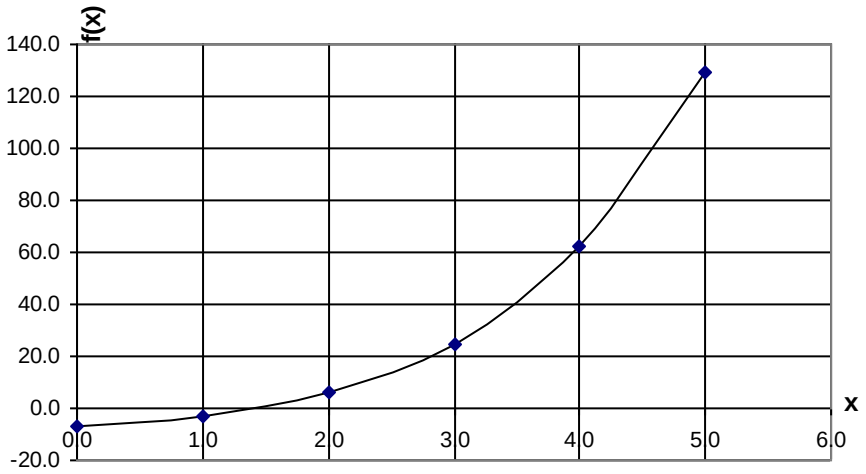


Fig. 5.3.- Gráfica del problema 5.1

5.3 Interpolación polinomial

La interpolación polinomial se usa cuando al graficar, la base de datos, los puntos no se pueden ajustar a una recta, como ya se dijo antes. Es claro que para la figura 5.1, este tipo de interpolación sería el más apropiado, ya que, la función f(x) describe una curva. Una función de *interpolación* es aquella que pasa a través de puntos dados como datos, los cuales se muestran comúnmente como una tabla de valores o se toman directamente de una función dada.

La interpolación de los datos puede hacerse mediante un polinomio algebraico, las funciones *spline,* una función racional o las series de Fourier entre otras posibles formas. La interpolación polinomial es uno de los temas más importantes en métodos numéricos, ya que la mayoría de los demás modelos numéricos se basan en la interpolación polinomial. Por ejemplo, los modelos de integración numérica se obtienen integrando fórmulas de interpolación polinomial y, los modelos de diferenciación numérica se obtienen derivando las interpolaciones polinomiales.

Los datos obtenidos mediante una medición pueden interpolarse, pero en la mayoría de los casos no es posible una interpolación directa debido a los errores aleatorios implicados en la propia medición. Así pues, el ajuste de una curva a los datos obtenidos de esta forma, se describe un la segunda sección de este capítulo.

5.3.1 Interpolación de Lagrange

En algunas ocasiones los datos obtenidos no contienen un cambio constante en las variable independiente, ya que muchas de las veces no es posible recabar la información de esa manera. Si además, los valores puntuales *no se agrupan en una recta* (Fig. 5.1), con mayor razón la interpolación lineal no es la más apropiada. En este caso se debe usar una interpolación polinomial, a la cual corresponde la fórmula de Lagrange.

Considere una serie de puntos de coordenadas $[x_i, f(x_i)]$ donde las x_i no están, en general, igualmente espaciados e **i** puede tomar todos los valores enteros de **0** a **n** (lo que indica que hay n+1 de esos puntos). Un ejemplo típico es mostrado en la figura 5.4, para n = 9 (tabla 5.2). Como se verá después con más detalle, un polinomio de orden *n* que pasa a través de n+1 puntos es único. Esto significa que, independientemente de la fórmula de interpolación que se aplique, todas las interpolaciones polinomialeas que se ajustan a los mismos datos son matemáticamente idénticas.

TABLA 5.2 Información con espacios diferentes

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
xi	2	4	6	7	9	11	13	14	15
f(x)	8	12	7	6	7.4	7	17	20	18

Supóngase que se tienen n+1 puntos, tales como:

$\mathbf{x_0 \ \ x_1 \ldots x_n}$
$f_0 \quad f_1 \ldots f_n$

donde x_0, x_1, ... son las abscisas de los puntos, dados en orden creciente; los espacios entre ellos son arbitrarios, como ya se dijo. El polinomio de orden *n* que pasa a través de los n+1 puntos se puede escribir en una serie de potencias como:

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n \qquad (5\text{-}2)$$

donde los a_i son coeficientes. El ajuste de la serie de potencias a los n+1 puntos dados, da un sistema de ecuaciones lineales, como el que sigue:

$$
\begin{aligned}
f_0 &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n \\
f_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n \\
f_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n \\
&. \\
&. \\
&. \\
f_n &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n
\end{aligned}
\qquad (5\text{-}3)
$$

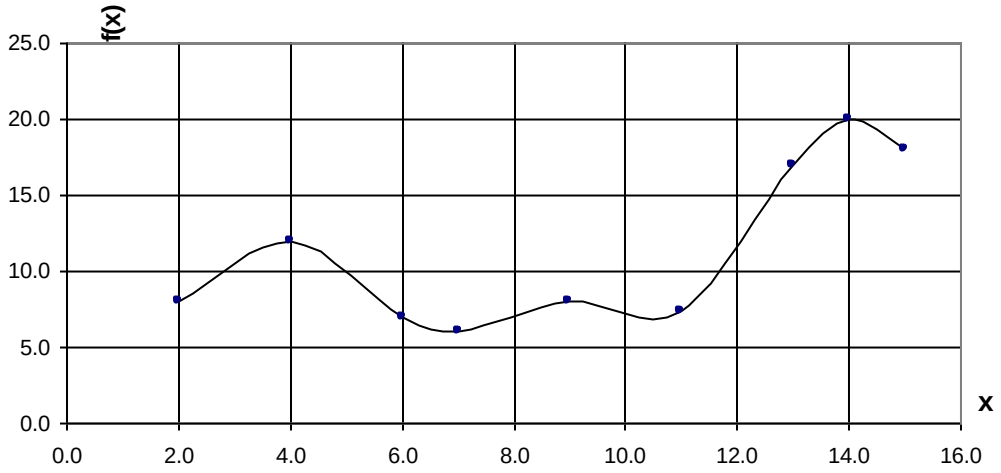


Fig. 5.4.- Gráfica de puntos con espacios desiguales

Aunque los coeficientes a_i pueden determinarse resolviendo el sistema de ecuaciones, se deja para el ajuste de curvas esta tarea, por lo pronto se aplicará la interpolación de Lagrange y las fórmulas de Gregory- Newton hacia delante y hacia atrás, para efectuar la interpolación polinomial. En particular, para la interpolación de Lagrange, considere el producto de los factores dados por,

$$V_0(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \qquad (5\text{-}4)$$

que se refieren a los n+1 puntos dados antes. La función V_0 es un polinomio de orden n de x y se anula en $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si se divide $V_0(x)$ entre $V_0(x_0)$, la función resultante

$$P_0(x) = \frac{V_0(x)}{V_0(x_0)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_n)} \qquad (5\text{-}5)$$

toma el valor de **uno** para **x = x_0**, y de **cero** para x = x_1, x = x_2, ..., x = x_n. En forma análoga puede escribirse

$$P_1(x) = \frac{V_1(x)}{V_1(x_1)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_1-x_1)(x_1-x_2)...(x_1-x_n)} \qquad (5\text{-}6)$$

siendo el valor de **uno** para **x = x_1**, y de **cero** para x = x_1, x = x_2, ..., x = x_n. En general, puede escribirse

$$P_i(x) = \frac{V_i(x)}{V_i(x_i)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)...(x_i-x_n)} \qquad (5\text{-}7)$$

donde el numerador no incluye (x = x_i) y el denominador omite (x_i –x). La función Vi(x) es un polinomio de orden *n* y toma el valor de uno en x = x_i y cero en x = x_j, para j≠i. Así, si multiplicamos $V_0(x)$, $V_1(x)$, $V_2(x)$,..., $V_n(x)$ por f_0, f_1, f_2,..., f_n, respectivamente y las sumamos, el resultado será un polinomio cuando más de orden n e igual a f_i para cada i = 0 hasta i = n. La fórmula de interpolación de Lagrange, así obtenida se escribe como:

$$g(x)= P_0(x)f_0 + P_1(x)f_1 + P_2(x)f_2 + ... + P_n(x)f_n \qquad (5\text{-}8)$$

5.3.2 Interpolación polinomial, mediante fórmulas de Gregory – Newton

Las fórmulas de Gregory y Newton son recomendadas cuando la variación de la variable independiente es constante (Δx = constante). Su aplicación se apoya fuertemente en las diferencias finitas de los valores de la función f(x). Se usan diferencias finitas *hacia delante*, simbolizadas con Δf, cuando el valor de la variable independiente (x), para el cual se requiere estimar la función, queda ó se localiza cerca del *inicio del rango de valores dados*; sin embargo, cuando el valor buscado queda cerca del final de este rango, se usan *diferencias finitas hacia atrás*, que se simbolizan con ∇f. Por otra parte, cuando la función a estimar se localiza muy cerca del centro del rango de valores dados, se usan *diferencias finitas centrales*, cuyo símbolo es δf.

Fórmula con diferencias hacia delante

Si se considera que los valores dados están distribuidos como se muestra en la figura 5.5, donde la variación de x es **h** y, si la función es analítica, de la serie de Taylor se puede escribir, para x = 0:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots \qquad (5-9)$$

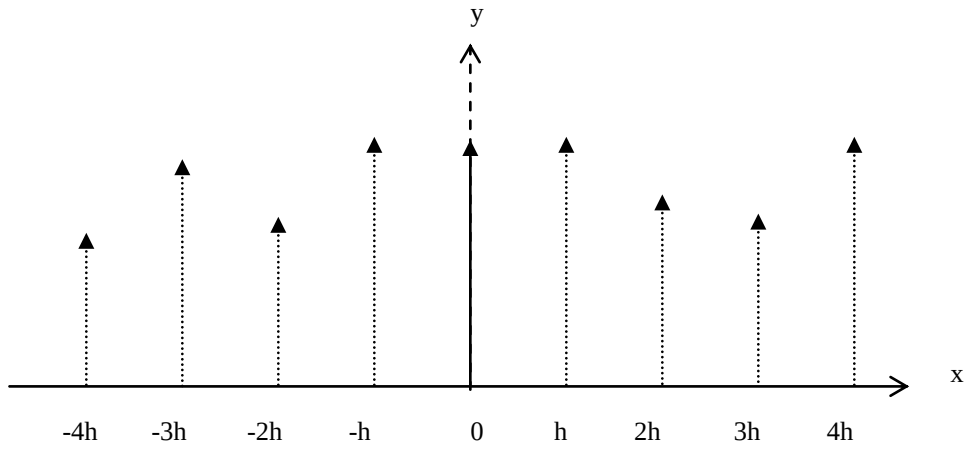


Fig. 5.5 Gráfica de datos con espacios de paso iguales

Aunque ninguno de los valores para las derivadas son conocidos, puede escribirse que:

$$f'(0) = \frac{\Delta f_0}{h} - \frac{h}{2} f''(0) + \vartheta(h^2) \qquad (5-10)$$

con lo cual, ecuación (5-9) queda como,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f_0 + \frac{x(x-h)(x-2h)}{3!h^3}\Delta^3 f_0 + \frac{x(x-h)(x-2h)(x-3h)}{4!h^4}\Delta^4 f_0 + \ldots$$

$$+ \frac{x\sum_{j=1}^{n-1}(x-jh)}{(n)!h^n}\Delta^n f_0 \qquad (5-11)$$

la cual es llamada *fórmula de interpolación de Gregory – Newton con diferencias hacia delante.* Las diferencias se obtienen de una tabla de diferencias finitas hacia delante, desde luego. El subíndice “0” se refiere al valor de las diferencias que se encuentran en el **renglón base**, el cual corresponde al *primer valor de* **x** en el intervalo donde se encuentra el valor para el cual deseamos interpolar; por ejemplo, si un grupo de valores está dado desde x =-2 hasta x = 5, con h = 1 y se desea estimar f(-1.8) que no esté en la tabla de valores; el valor de x = -1.8 está en el intervalo [-2,-1], por lo que x_0 = -2; es decir, el renglón base es el que tiene como x =x_0.

Fórmula con diferencias hacia atrás

Una fórmula enteramente similar se puede obtener con diferencias hacia atrás, la cual queda, ahora como:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x}{h}\nabla f_0 + \frac{x(x+h)}{2!h^2}\nabla^2 f_0 + \frac{x(x+h)(x+2h)}{3!h^3}\nabla^3 f_0 + \frac{x(x+h)(x+2h)(x+3h)}{4!h^4}\nabla^4 f_0 + \ldots$$

$$+ \frac{x\sum_{j=1}^{n-1}(x+jh)}{(n)!h^n}\nabla^n f_0 \qquad (5\text{-}12)$$

en este caso, se considera que el recorrido, del eje “x”, se realiza en sentido contrario al convencional y, el *renglón base* queda determinado de la misma forma que con diferencias hacia delante; es decir, .corresponde al primer valor del intervalo donde se encuentra el valor para el cual deseamos interpolar, encontrado en el sentido del recorrido.
Finalmente, el valor **x** de la fórmula, se calcula (si el valor de x para el cual deseamos interpolar se simboliza por x_i):

$$x = x_i - x_0 \qquad (5\text{-}13)$$

5.3.4 Interpolación con diferencias centrales

Hay ocasiones en que el valor de la variable independiente, para el cual se requiere interpolar, está cerca de la parte central del conjunto de datos. En este

caso, se tendrá una mejor aproximación, si se usan diferencias centrales simbolizadas con δf_0. Sin embargo, las diferencias hacia delante proporcionan buenos resultados. Para la estimación de f(x), por diferencias centrales, existen varias fórmulas estudiadas. Dos de las más socorridas, por su sencillez, son:

Fórmula de Stirling (toda la línea como base)

$$f(x) = f(0) + x(\delta f_0) + \frac{x^2}{2!}(\delta^2 f_0) + \frac{x(x^2-1)}{3!}(\delta^3 f_0) + \frac{x^2(x^2-1)}{4!}(\delta^4 f_0) + \frac{x(x^2-1)(x^2-1)}{5!}(\delta^5 f_0) + \ldots \qquad (5\text{-}14)$$

Fórmula de Bessel (línea media como base)

$$f(x) = f(0) + x(\delta f_0) + \frac{(x^2-1/4)}{2!}(\delta^2 f_0) + \frac{x(x^2-1/4)}{3!}(\delta^3 f_0) + \frac{(x^2-1/4)(x^2-9/4)}{4!}(\delta^4 f_0) + \frac{x(x^2-1/4)(x^2-9/4)}{5!}(\delta^5 f_0) + \ldots \qquad (5\text{-}15)$$

En esta sección será aplicada la fórmula de Bessel; para ello se requiere que el valor de *x* (obtenido con la fórmula 5-13) debe estar en el rango de ± 0.25. Si los datos tienen espaciamientos mayores que este valor, entonces se recomienda que se sub-dividan los intervalos; primero a la mitad con valores de f(x) igual al promedio de los que se tienen en cada intervalo y se hace la prueba del valor de *x*, en caso que sea cumplida se aplica la ecuación directamente, pero de no ser así, se hace otra partición, hasta que se cumpla la condición. Por ejemplo, supóngase que para los datos de Tabla 5.1, se quiere interpolar para x = 2.7. Puesto que el intervalo general de valores está dado para $0 \leq x \leq 5$, entonces x = 2.7 está muy cerca del centro de este rango de valores, por lo que, la fórmula de Bessel dará buen resultado. Una tabla inicial será,

Tabla 5.7 Muestra de datos cuando se realizan diferencias centrales

x	f(x)	δf	$\delta^2 f$	$\delta^3 f$	$\delta^4 f$	$\delta^5 f$
0	-7					
		4				
1	-3		5			
		9		5		
2	**6**		**10**		**3**	**Reng-Base**

		19		8		1
3	25		18		4	
		37		12		
4	62		30			
		67				
5	129					

Tomando en cuenta que el *renglón base* es el señalado con $x_0 = 2$, entonces *x =2.7-2.0 = 0.70>0.25*. Se observa que no se cumple la condición y por tanto, es necesario dividir los intervalos de Δx a la mitad y calcular los valores de f(x) como la media de los valores presentes, por ejemplo, el primer intervalo (0 –1), se convierte en dos sub-intervalos (0-0.5) y (0.5 –1) y el valor de la función será ½(-7-3)= -5; para el intervalo de (1- 2) el punto medio es x = 1.5 y f(x) promedia, linealmente, en 1.5, etc. Los resultados a que se llegó se presentan en la siguiente tabla.

x	f(x)	δf	$\delta^2 f$	$\delta^3 f$	$\delta^4 f$	$\delta^5 f$
0	-7					
0.5	-5	4				
1	-3	6.5	5			
1.50	1.50	9	7.5	5		
2	6	14	10	6.5	3	
2.50	**15.50**	**19**	**14**	**8**	**3.5**	**1**
3	25	28	18	10	4	
3.50	43.50	37	24	12		
4	62	52	30			
4.50	95.50	67				
5	129					

En esta ocasión el renglón base está a una distancia de 0.20 de x = 2.7, por lo que se cumple la condición y puede aplicarse la fórmula de interpolación, quedando:

$$f(2.5) = f(0.2) = 15.5 + 0.2(19) + \frac{(0.2^2 - 1/4)}{2!}(14) + \frac{0.2(0.2^2 - 1/4)}{3!}(8)$$
$$+ \frac{(0.2^2 - 1/4)(0.2^2 - 9/4)}{4!}(3.5) + \frac{0.2(0.2^2 - 1/4)(0.2^2 - 9/4)}{5!}(1) = 17.84245$$

5.4 Ajuste de curvas- Aproximación funcional

Método de mínimos cuadrados

Cuando se tienen parejas de valores (x, y), tabulados como los dados en tabla 5.1, y se quiere estimar el valor de la función f(x) solamente para un valor de la variable independiente *x*, el problema se resuelve con la interpolación o extrapolación, según que el valor por estimar se encuentre entre o fuera de los datos discretos conocidos, respectivamente.
Sin embargo, en muchos de los casos se desea tener una *ecuación* que represente todos esos datos y que con sólo proponer (en ella) valores de *x* se obtengan los valores de la función de manera inmediata. Esta ecuación puede ser un polinomio de grado *n* [representado por g(x)] ó una función especial que se determina con ayuda de la experiencia del investigador.

Puesto que g(x) no pasará, en general, por todos los puntos (Fig. 5.6), existirá un error ε entre g(x) y f(x); por lo que será necesario proponer un método que minimice el error existente. El método de *mínimos cuadrados* garantiza este requisito y con esas definiciones, la magnitud de la distancia local está dada por:

$$d(x) = \left| f(x) - g(x) \right| \qquad (5\text{-}16)$$

Si hacemos esta práctica para cada punto y, tomando en cuenta que, el cuadrado de esta diferencia será aún más pequeña, entonces el error total simbolizado por E, para todos los puntos puede escribirse,

$$E = \sum_{i=1}^{i=n} d^2(x_i) \qquad (5\text{-}17)$$

que debe ser minimizado.

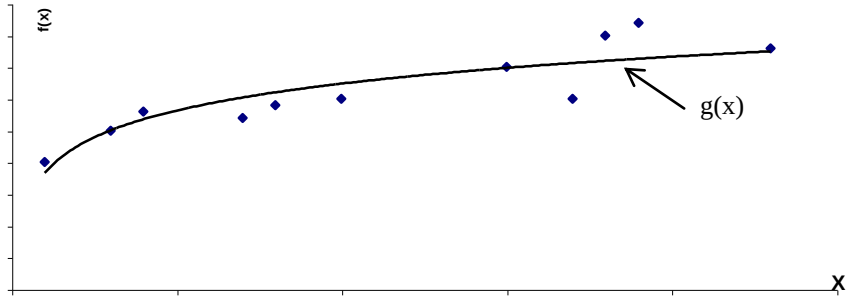


Fig. 5.6 Puntos discretos con línea de tendencia

Considerando que g(x) corresponde a un polinomio de grado *l*, ecuación (5-17) se transforma en,

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x) - a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_l x^l \right]^2 \qquad (5\text{-}18)$$

que también puede escribirse,

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_l x^l - f(x) \right]^2 \qquad (5\text{-}19)$$

por estar entre paréntesis un valor absoluto.

La minimización del cuadrado del error E, puede obtenerse igualando a cero la primer derivada de E calculada para cada coeficiente a_i, en virtud de la propiedad del cálculo diferencial, quedando,

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = \frac{\partial E}{\partial a_1} = \frac{\partial E}{\partial a_2} = \ldots \frac{\partial E}{\partial a_l} = 0 \qquad (5\text{-}20)$$

Para ilustrar el desarrollo, paso a paso, de la forma de estas ecuaciones se realiza la primer derivación de las ecuaciones dadas en (5-20), de esta manera se tiene:

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = \frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^{n} \left[a_0 + a_1 x + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + \ldots + a_l x_i^l - f(x_i) \right]^2 = 0$$

ó

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{n} 2\left[a_0 + a_1 x + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + ... + a_l x_i^l - f(x_i)\right](1) = 0$$

desarrollando término a término y dividiendo por 2, encontramos,

$$na_0 + \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] a_1 + \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] a_2 + \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right] a_3 + ... + \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^l\right] a_l = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

similarmente para la segunda ecuación se tiene:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] a_0 + \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] a_1 + \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right] a_2 + \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right] a_3 + ... + \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^{+1l}\right] a_l = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

y así para las demás derivadas planteadas en ecuaciones (5-20), llegando al arreglo matricial siguiente:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & . . . & \sum_{i=1}^{n} x_i^l \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^l & . . . & \sum_{i=1}^{n} x_i^{l+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^5 & . . . & \sum_{i=1}^{n} x_i^{l+2} \\ . & . & . & . & . . . & . \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^l & \sum_{i=1}^{n} x_i^{l+1} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{l+2} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{l+3} & . . . & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) \\ . \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^l f(x_i) \end{bmatrix}$$

Para funciones especiales (trigonométricas, exponenciales, etc.), se sustituye en ecuación (5-19), la ecuación especial correspondiente, derivando la ecuación resultante, tantas veces como constantes existan en la función especial; originando un sistema de igual número de incógnitas como constantes tenga la ecuación propuesta. Por ejemplo, si la función especial es **g(x) = A + Bsen(x)**, entonces, ecuación (5-19) se transforma en:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left[A + Bsenx_i - f(x_i)\right]^2 \qquad (5\text{-}21)$$

formando un sistema de dos ecuaciones, ya que solamente existen dos constantes A y B, quedando:

$$\frac{\partial E}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A}\sum_{i=1}^{n}\left[A + Bsenx_i - f(x_i)\right]^2 = 2\sum_{i=1}^{n}\left[A + Bsenx_i - f(x_i)\right]\frac{\partial}{\partial A}\left[A + Bsenx_i - f(x_i)\right] = 0$$

de donde, la ecuación resultante queda:

$$nA + \left[\sum_{i=1}^{n} senx_i\right]B = \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right] \qquad \text{Ecuación 1}$$

y la otra derivada es,

$$\frac{\partial E}{\partial B} = \frac{\partial}{\partial B}\sum_{i=1}^{n}\left[A + Bsenx_i - f(x_i)\right]^2 = 2\sum_{i=1}^{n}\left[A + Bsenx_i - f(x_i)\right]\frac{\partial}{\partial B}\left[A + Bsenx_i - f(x_i)\right] = 0$$

llegando a,

$$\left[\sum_{i=1}^{n} senx_i\right]A + \left[\sum_{i=1}^{n} sen^2 x_i\right]B = \left[\sum_{i=1}^{n} senx_i f(x_i)\right] \qquad \text{Ecuación 2}$$

Cuando la función es g(x) = ae^{bx}, ó g(x) = ax^b, ecuación (5 -19) queda, respectivamente, como:

$$E = \sum_{i=1}^{n}\left[ae^{bx} - f(x_i)\right]^2$$

$$E = \sum_{i=1}^{n}\left[ax^{b} - f(x_i)\right]^2$$

En estos casos, si la derivación representa problemas para el estudiante, se recomienda linearizar la ecuación propuesta mediante la aplicación de logaritmos, quedando como sigue:

g(x) = ae^{bx}, se transforma en ----→ Ln g(x) = Ln**a** + **b**x --→ y = b + mx (5-22 a)

g(x) = cx^d, se transforma en -----→ Ln g(x) = Ln**c** + **d**Lnx -→ y =b + mx (5-22 b)

obteniendo, por superposición que para el primer caso, y = Lng(x); b = Ln**a**; m = b. Para el segundo caso; y = Lng(x); b = Ln**c** y m = **d**.

5.5 Aproximación a funciones continuas

Las mejores aproximaciones para funciones continuas, usualmente son consideradas para ser aproximaciones que minimicen el error en el sentido del *minimax*. Desafortunadamente, a menudo es muy difícil encontrar la mejor aproximación para una cierta clase de función dada; sin embargo, deberíamos invocar a la experiencia para tener una aproximación que sea la mejor. Por ejemplo, en lugar de encontrar la mejor aproximación para una función cuadrática podríamos haber aproximado con una cuadrática que siempre será razonablemente cercana a la mejor cuadrática. Las buenas aproximaciones para funciones continuas, usualmente tienen un error d(x) que oscila alrededor de cero en la región de interés, ya que, las magnitudes positivas son aproximadamente iguales a las magnitudes negativas.
La forma más común y simple de aproximación para una función continua es con algún tipo de polinomial. En efecto, siempre que es usada una representación en serie de potencias para calcular una función, entonces, la aproximación polinomial está siendo usada, puesto que, la serie de potencias debería ser truncada en algún punto y, una serie de potencias truncada es siempre una polinomial.
Empezaremos nuestra discusión de la aproximación a funciones continuas mediante el examen de un método para el improvisar la efectividad del truncado de las series de potencias, ó en otras palabras, de obtener la mejor exactitud con pocos términos. Esta práctica es llamada una serie de potencias telescópica o *economización*. Como veremos, también tiene aplicaciones directas a la aproximación de cualquier polinomial.

Economización de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev se pueden expresar de dos formas distintas, pero equivalentes; una utiliza funciones *coseno* y la otra *serie de potencias*. En el primer caso, el polinomio de Chebyshev normalizado de orden K, se define como,

$$T_K(x) = \cos[K\cos^{-1}(x)], \qquad -1 \le x \le 1 \qquad (5\text{-}23)$$

Puesto que la función coseno se anula en $\pm\,\pi/2$; $\pm\,3\pi/2$; $\pm\,5\pi/2$; $\pm\,7\pi/2$, ..., las raíces de un polinomio de Chebyshev de orden K satisfacen la ecuación,

$$K\cos^{-1}(x_n) = \left(K + \frac{1}{2} - n\right) * \pi, n = 1,2,3...,K \qquad (2\text{-}24)$$

ó más explícitamente:

$$x_n = \cos\left(\frac{(K + 1/2 - n)}{K} * \pi\right), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, K \qquad (2\text{-}25)$$

Por ejemplo, si K = 3, entonces esta ecuación conduce a,

$$x_1 = \cos\left(\frac{(3 + 1/2 - 1)}{3} * \pi\right) = -0.86602$$

$$x_2 = \cos\left(\frac{(3 + 1/2 - 2)}{3} * \pi\right) = 0.00000$$

$$x_3 = \cos\left(\frac{(3 + 1/2 - 3)}{3} * \pi\right) = +0.86602$$

En segundo caso, los términos de los polinomios de Chebyshev, son generados por con la ecuación recurrente:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad (5\text{-}26)$$

Requerimos tener presente estos polinomios para propósitos de aplicación. Algunos términos son,

$T_0(x) = 1$
$T_1(x) = x$
$T_2(x) = 2x^2 - 1$
$T_3(x) = 4x^3 - 3x$
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ (5-27)
$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$
$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$
$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$

Recuerde que estos polinomios tienen una magnitud máxima de 1 en el intervalo de $-1 \le x \le 1$.
Para nuestros propósitos, también es interesante invertir esos polinomios para listar las potencias de *x* en términos de $T_n(x)$; quedando:

$$
\begin{aligned}
1 &= T_0 \\
x &= T_1 \\
x^2 &= \tfrac{1}{2}\,(T_0 + T_2) \\
x^3 &= \tfrac{1}{4}\,(3T_1 + T_3) \\
x^4 &= 1/8(3T_0 + 4T_2 + T_4) \\
x^5 &= 1/16(10T_1 + 5T_3 + T_5) \\
x^6 &= 1/32(10T_0 + 15T_2 + 6T_4 + T_6) \\
x^7 &= 1/64\,(35T_1 + 21T_3 + 7T_5 + T_7) \\
x^8 &= 1/128(35T_0 + 56T_2 + 28T_4 + 8T_6 + T_8)
\end{aligned}
\qquad (5\text{-}28)
$$

Note usted que los Tn(x) fueron escritos simplemente como Tn

Los polinomios de Chebyshev se puede aplicar en cualquier rango distinto de $-1 \le x \le 1$, si se transforma primero a él, el rango de interés. Si este rango está dado por $a \le x \le b$, la transformación está dada por;

$$x = \frac{2y - b - a}{b - a}, \qquad -1 \le x \le 1 \qquad (5\text{-}29)$$

ó en forma equivalente,

$$y = \frac{(b - a)x + a + b}{2}, \qquad a \le y \le b \qquad (5\text{-}30)$$

por consiguiente, al sustituir los puntos de Chebyshev x_n en [-1, 1] dados por (5-25), en la ecuación (5-30), los puntos de Chebyshev y_n en [a, b] son,

$$y_n = \frac{1}{2}\left[(b-a)\cos\left(\frac{(K+\frac{1}{2}-n)}{K} * \pi\right) + a + b\right], \quad n= 1,2, 3, ..., K \quad (5\text{-}31)$$

Como ejemplo, considere una función e^{-x}, que puede ser representada por una serie de potencias, como

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - ... \quad (5\text{-}32)$$

Si la serie alternativa ($e^{-x} = 1 - x + ...$) es truncada después del término en x^5, el error no será mayor de 1.6152×10^{-3}. Usando la representación de las polinomiales de Chebyshev de las potencias de x, el truncado de la función ($e^{-x} = 1 - x + ..$) puede escribirse como

$$e^{-x} = T_0 - T_1 + \frac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(T_0 + T_2)\right] - \frac{1}{3!}\left[\tfrac{1}{4}(3T_1 + T_3)\right] + \frac{1}{4!}\left[\tfrac{1}{8}(3T_0 + 4T_2 + T_4)\right] - \frac{1}{5!}\left[\tfrac{1}{16}(10T_1 + 5T_3 + T_5)\right] + \varepsilon_1 \quad (5\text{-}33)$$

donde ε_1 tiene una magnitud máxima de 1.1652×10^{-3}. Agrupando términos, obtenemos,

$$e^{-x} \cong 1.2656250T_0 - 1.1302083T_1 + 0.2708333T_2 - 0.0442798T_3 + 0.0052083T_4 - 0.0005208T_5 \quad (5\text{-}34)$$

Ahora podemos hacer valer el factor de que la magnitud de Tn es 1 (sobre $-1 \leq x \leq 1$). Si truncamos la expresión anterior después del término que involucra T_3, acumularemos un error adicional no mayor que la suma de las magnitudes de los coeficientes de T_4 y T_5, o sea 0.0052083 + 0.0005208 = 0.0057291. Ahora

$$e^{-x} \cong 1.2656250T_0 - 1.1302083T_1 + 0.2708333T_2 - 0.0442798T_3 \quad (5\text{-}35)$$

La magnitud del error máximo posible en ecuación anterior, es la suma de la magnitud máxima del error de truncamiento de la serie original, la cual fue de 0.0016152 y la máxima magnitud del error en el truncamiento fue de 0.0057291.

Esta suma es de 0.0073444. Las polinomiales de Chebyshev en la expresión de arriba pueden escribirse en términos de **x**, con lo cual queda como:

$$e^{-x} \cong 1.2656250(1) - 1.1302083(x) + 0.2708333(2x^2 - 1) - 0.0442798(4x^3 - 3x)$$

desarrollando y agrupando términos, se llega a

$$e^{-x} \cong 0.9947917 - 0.9973959x + 0.5416667x^2 - 0.1770832x^3 \qquad (5\text{-}36)$$

Estos expresión de aproximación de cuatro términos, es muy similar a los primeros cuatro términos de la serie original (5-32) excepto que el error máximo de (5-36) es de 0.0073444 comparado con un error máximo posible de 0.0516152 para los primeros cuatro términos de la serie original. En efecto, si tomamos cinco términos de la serie (5-32), el error máximo posible será de 0.00994895, el cuál aún es más grande que el máximo error posible dado por la expresión de cuatro términos de (5-36). Esta expresión es llamada *serie telescópica de potencias ó serie economizada*. Si más términos de la serie original de Taylor son tomados antes de que sea truncada, entonces los coeficientes de la aproximación de cuatro términos (5-36) cambiarán ligeramente y la aproximación puede ser más exacta. Es importante notar que no hay garantía de que (5-36) sea la *mejor aproximación para* e^{-x}, no obstante puede indicar una buena aproximación.

En el caso de (5-36), la serie telescópica de e^{-x}, requiere dos términos menos que la serie original para obtener la misma exactitud. Los ahorros en general, son altamente dependientes del número de términos de la serie original de potencias. La economización de series convergentes rápidamente (tales como la serie para e^{-x}) proveen relativamente modestas ganancias, mientras que la forma economizada de muchas series de convergencia lenta pueden proveer exactitud con un mínimo de términos que podría requerir cientos de términos de la serie original.

Este procedimiento de economización puede ser usado para aproximar cualquier polinomial con una polinomial de orden inferior sobre cualquier intervalo finito.

Problemas resueltos

5.1 Interpole linealmente para x = 2.9, si se conocen los siguientes datos:

x	–1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	7	4.98	3.01	1	-1	-3	-4.89	-7

Solución. Para aplicar ecuación (5-1), se tiene que $x_k = 2$ y $x_{k+1} = 3$, obteniendo:

$$f(x) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) = 1 + \frac{-1-1}{3-2}(x-2) = 0.80$$

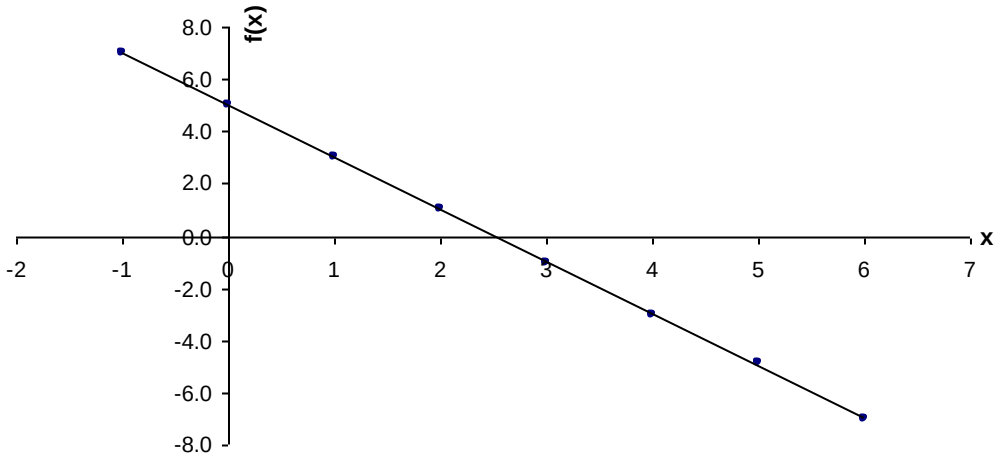


Figura del problema 5.1

5.2 Si se tienen los datos, interpole mediante la fórmula de Lagrange, para estimar f(7).

i	0	1	2	3
xi	1	2	4	8
f(xi)	1	3	7	11

Solución. Sustituyendo x = 7 en ecuaciones (5-5), (5-6) y (5-7), se llega a los siguientes resultados:

$$P_0(x) = \frac{V_0(x)}{V_0(x_0)} = \frac{(7-2)(7-4)(7-8)}{(1-2)(1-4)(1-8)} = 0.71429$$

$$P_1(x) = \frac{V_1(x)}{V_1(x_1)} = \frac{(7-1)(7-4)(7-8)}{(2-1)(2-4)(2-8)} = -1.500$$

$$P_2(x) = \frac{V_2(x)}{V_2(x_2)} = \frac{(7-1)(7-2)(7-8)}{(4-1)(4-2)(4-8)} = 1.250$$

$$P_1(x) = \frac{V_1(x)}{V_1(x_1)} = \frac{(7-1)(7-2)(7-4)}{(8-1)(8-2)(8-4)} = 0.53571$$

sustituyendo en ecuación (5-8), se tiene, finalmente:

g(x)= (0.71429)(1) + (-1.500)(3) + (1.2500)(7) + (0.53571)(11) = 10.85710

o sea que f(7) ≈ 10.85710

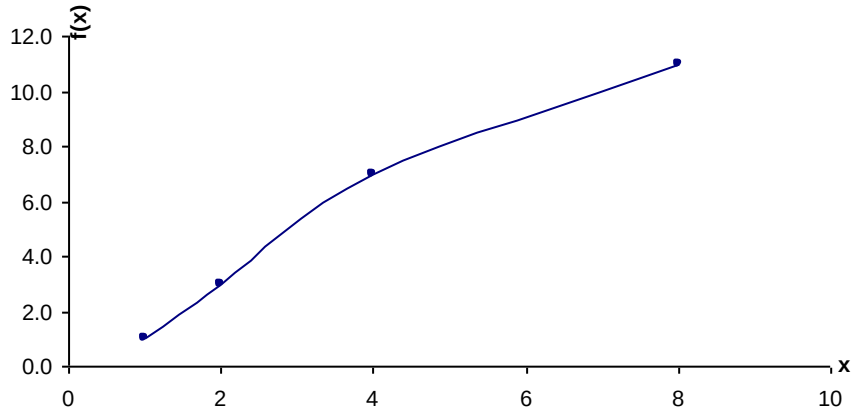


Figura del problema 5.2

5.3 Las densidades de sodio para tres temperaturas están dadas como sigue:

i	Temperatura (^{0}C)	Densidad (kg/m^3)
0	94	929
1	205	902
2	371	860

a) Escriba la fórmula de interpolación de Lagrange que se ajusta a los tres datos
b) Determine la densidad para una temperatura, T = 251 ^{0}C utilizando la fórmula obtenida en el paso anterior.

Solución a) Ya que el número de datos es tres, el orden de la fórmula de Lagrange es N=2, por lo que ésta queda,

$$g(x) = \frac{(T-205)(T-371)}{(94-205)(94-371)}(929) + \frac{(T-94)(T-371)}{(205-94)(205-371)}(902) +$$

$$\frac{(T-94)(T-205)}{(371-94)(371-205)}(860)$$

Solución b) Sustituyendo T = 251 ^{0}C en el polinomio anterior, se tiene

g(x) = 890.55612 kg/m^3

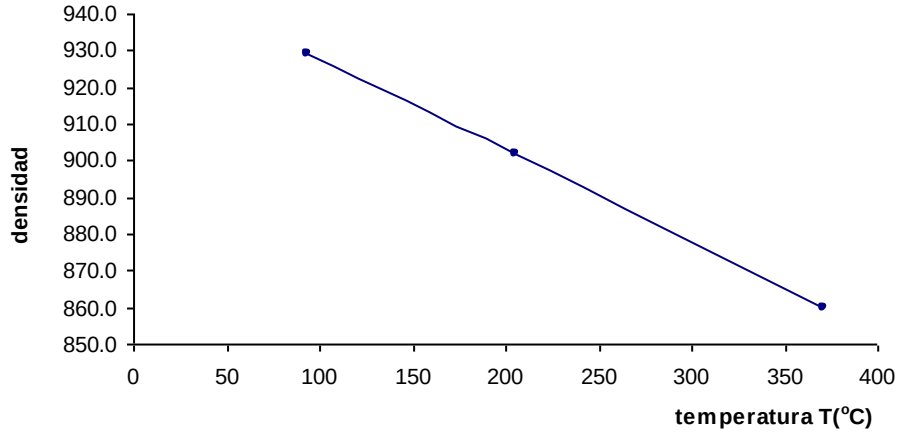


Figura del problema 5.3

5.4 Para los datos de la tabla 5.1, determine f(1.1) y f(4.7)

Solución. A continuación se presenta primeramente la tabla de diferencias finitas hacia delante, para estimar f(1.1). En esta tabla se observa que el *renglón base* es aquel que tiene x = 1, por lo que, de ecuación (5-13), se concluye que x = 1.1 –1 = 0.10 (valor que será usado en ecuación 5-11). Posteriormente se muestra la tabla de diferencias finitas hacia atrás, par evaluar f(4.7), haciendo notar que x_0 (quedando definido el renglón base), en este caso es igual a 5, en consecuencia, el valor a usar en ecuación (5-12), es x = 4.7 – 5 = -0.30.

Tabla 5.5 Diferencias finitas hacia delante, del problema 5.4.

x	f(x)	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
0	-7	4	5	5	3	1
1	**-3**	**9**	**10**	**8**	**4**	**Renglón base**
2	6	19	18	12		
3	25	37	30			
4	62	67				
5	129					

Tabla 5.6 Diferencias finitas hacia atrás, del problema 5.4.

x	f(x)	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$	$\nabla^4 f$	$\nabla^5 f$
0	-7					
1	-3	4				
2	6	9	5			
3	25	19	10	5		
4	62	37	18	8	3	
5	**129**	**67**	**30**	**12**	**4**	**1 R.base**

De ecuación (5-11) y con datos de tabla 5.5, se tiene:

$$f(0.1) = (-3) + \frac{0.1}{1}(9) + \frac{0.1(0.1-1)}{2!(1)^2}(10) + \frac{0.1(0.1-1)(0.1-2)}{3!(1)^3}(8)$$

$$+ \frac{0.1(0.1-1)(0.1-2)(0.1-3)}{4!(1)^4}(4)$$

$$f(0.1) = -2.40465$$

ahora de ecuación (5-12) y con datos de la tabla 5.6, se llega a,

$$f(-0.3) = (129) + \frac{-0.3}{1}(67) + \frac{-0.3(-0.3+1)}{2!(1)^2}(30) + \frac{-0.3(-0.3+1)(-0.3+2)}{3!(1)^3}(12) +$$

$$+ \frac{-0.3(-0.3+1)(-0.3+2)(-0.3+3)}{4!(1)^4}(4) + \frac{-0.3(-0.3+1)(-0.3+2)(-0.3+3)(-0.3+4)}{5!(1)^5}(1)$$

$f(-0.3) =$ 129 + (-20.1) + (-3.15) + (-0.714) + (-0.16065) + (-0.02972025)

f(4.7) = f(-0.3) =104.84562975

5.5. Dados los siguientes datos:

X	2.10	6.22	7.17	10.52	13.68
f(x)	2.90	3.85	5.80	5.76	7.74

La gráfica de estos puntos discretos es (se ha marcado la línea de tendencia):

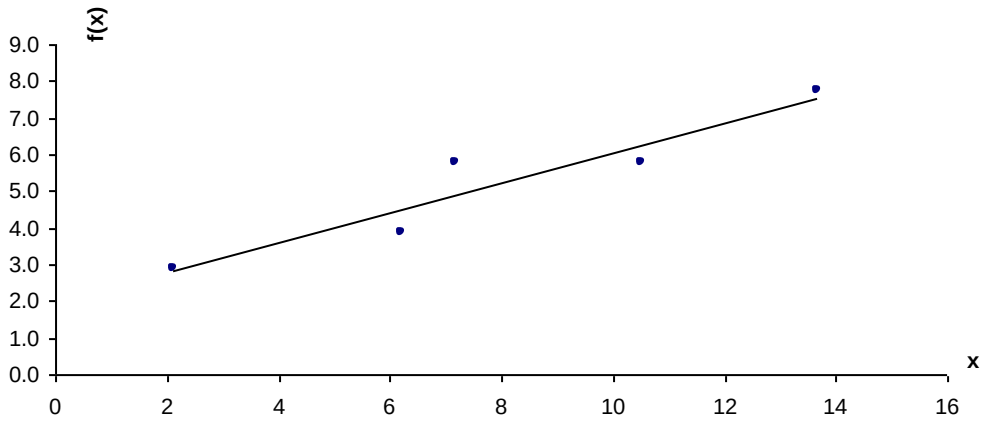


Figura del problema 5.5

Puesto que los datos están alineados aproximadamente en una línea recta, el grado del polinomio de ajuste es $l = 1$, por lo que el sistema que permite obtener los coeficientes de ajuste, a_0 y a_1, es:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \end{bmatrix}$$

Calculando cada elemento de este sistema, se tiene,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2.10 + 6.22 + 7.17 + 10.52 + 13.68 = 39.69$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (2.10)^2 + (6.22)^2 + (7.17)^2 + (10.52)^2 + (13.68)^2 = 392.3201$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 2.90 + 3.85 + 5.80 + 5.76 + 7.74 = 26.05$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = (2.10)(2.90)+(6.22)(3.85)+(7.17)(5.80)+(10.52)(5.76)+(13.68)(7.74)=238.1014$$

Sustituyendo queda,

$$\begin{bmatrix} 5 & 39.69 \\ 39.69 & 392.3201 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26.05 \\ 238.1014 \end{bmatrix}$$

La eliminación completa de Gauss – Jordan conduce a los siguientes resultados:

$a_0 = 1.99245475589$ y
$a_1 = 0.405334497873$

de esta manera, el polinomio de ajuste es:

$g(x) = 1.99245475589 + 0.405334497873x$

5.6. Dados los siguientes datos:

x	0	1.0	1.5	2.3	2.5	4.0	5.1	6.0	6.5	7.0	8.1	9.0
f(x)	0.2	0.8	2.5	2.5	3.5	4.3	3.0	5.0	3.5	2.4	1.3	2.0

continuación

x	9.3	11.0	11.3	12.1	13.1	14.0	15.5	16.0	17.5	17.8	19.0	20.0
f(x)	-0.3	-1.3	-3.0	-4.0	-4.9	-4.0	-5.2	-3.0	-3.5	-1.6	-1.4	-0.1

a) Determine el grado del polinomio de ajuste, mediante el método gráfico y posteriormente obtenga, usando el criterio de mínimos cuadrados, el polinomio de referencia.

b) Revise si el gráfico puede ajustarse mediante una función especial. De ser así, obtenga dicha función.

c) Haga una gráfica donde se encuentren dibujados los datos, el polinomio de ajuste obtenido en a) y la función especial determinada en b).

Solución a). De la gráfica, de los datos, se concluye que, el polinomio de ajuste debe ser de tercer grado ($l = 3$), ya que, para el rango de información se nota que los puntos interceptan tres veces el eje *x*, por lo que el polinomio propuesto es: $g_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Para obtener los coeficientes de este polinomio se aplica el método de mínimos cuadrados. El sistema a resolver es,

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^5 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^5 & \sum_{i=1}^{n} x_i^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^l f(x_i) \end{bmatrix}$$

Igual que en el caso anterior, se calculó cada término del sistema mostrado arriba, quedando como,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.0 + 1 + 1.5 + ...+ 19 + 20 = 229.50$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (0)^2 + (1)^2 + (1.5)^2 +...+ (19)^2 + (20)^2 = 3{,}060.20$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = (0)^3 + (1)^3 + (1.5)^3 + ... + (19)^3 + (20)^3 = 46{,}342.79$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^4 =(0)^4 + (1)^4 + (1.5)^4 + ...+ (19)^4 + (20)^4 = 752{,}835.21$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^5 =(0)^5 + (1)^5 + (1.5)^5 + ...+ (19)^5 + (20)^5 = 12{,}780{,}147.70$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^6 =(0)^6 + (1)^6 + (1.5)^6 + ...+ (19)^6 + (20)^6 = 223{,}518{,}116.77$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 0.2+ 0.8 + 2.5 +...+ (-1.4) + (-0.1) = -1.30$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) =(0)(0.2)+ (1.0)(0.8)+ (1.5)(2.5)+ ...+ (19)(-1.4)+ (20)(-0.1) = -316.88$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) =(0)^2(0.2)+ (1.0)^2(0.8)+ (1.5)^2(2.5)+ ...+ (19)^2(-1.4)+ (20)^2(-0.1) = -6{,}037.242$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 f(x_i) =(0)^3(0.2)+ (1.0)^3(0.8)+ (1.5)^3(2.5)+ ...+ (19)^3(-1.4)+ (20)^3(-0.1) = -9{,}943.3597$$

De esta manera, el sistema queda:

$$\begin{bmatrix} 24 & 229.6 & 3060.2 & 46342.79 \\ 229.6 & 3060.2 & 46342.79 & 752835.2 \\ 3060.2 & 46342.79 & 752835.2 & 12780148 \\ 46342.79 & 752835.2 & 12780148 & 223518120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.3 \\ -316.88 \\ -6037.242 \\ -99433.597 \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema, mediante el método de eliminación completa de Gauss- Jordan conduce a los siguientes resultados:

a_0 =-0.35934718
a_1 = 2.3051112
a_2 = -0.35319014
a_3 = 0.01206020

por tanto, el polinomio de ajuste es,

$g_1(x)$ =-0.35934718+ 2.3051112X -0.35319014X^2 + 0.01206020X^3.

Solución b) La gráfica sugiere el uso de una función trigonométrica, tal como el seno. Podría proponerse, entonces, la función especial:

$$g_2(x) = A + Bseno(\frac{\pi x}{10})$$

ya que, el período debe tomarse como 20. Del criterio de mínimos cuadrados, se puede escribir, según ecuación (5-21):

$$E = \sum_{i=1}^{n}\left[A + Bseno(\frac{\pi}{10}x_i) - f(x_i)\right]^2$$

llegando al siguiente sistema,

$$nA + \left[\sum_{i=1}^{n} seno(\frac{\pi}{10}x_i)\right]B = \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right] \qquad \text{(a)}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} seno(\frac{\pi}{10}x_i)\right]A + \left[\sum_{i=1}^{n} seno^2(\frac{\pi}{10}x_i)\right]B = \left[\sum_{i=1}^{n} seno(\frac{\pi}{10}x_i) f(x_i)\right] \qquad \text{(b)}$$

por un procedimiento similar al inciso anterior, se llega a,

24A + 1.1328096B = -1.300, para ecuación (a)

1.1328096A + 11.053666B = 47.515395, para ecuación (b)

resolviendo el sistema se tienen los siguientes valores para las constantes,

A= -0.25831225

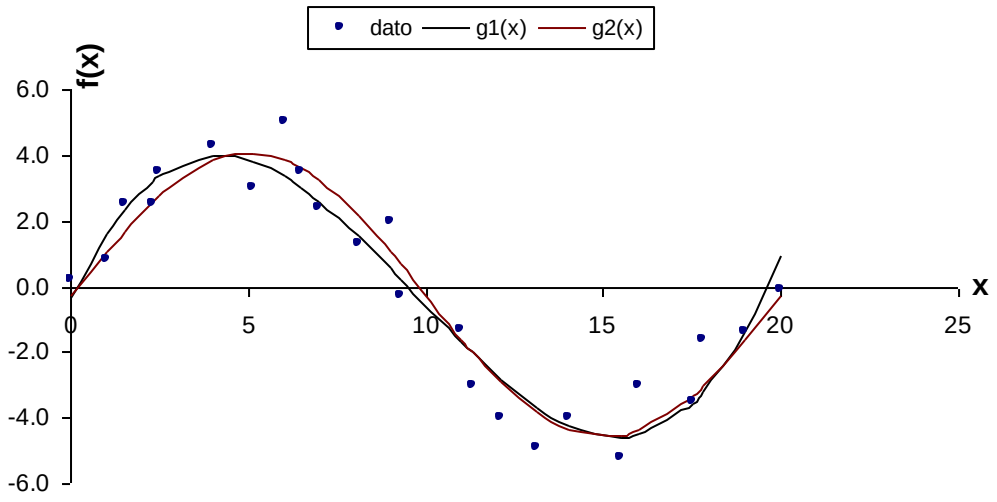
y

B = 4.3250821

por lo que, el polinomio de ajuste queda,

$$g_2(x) = -0.25831225 + 4.3250821\, seno(\frac{\pi x}{10})$$

La gráfica siguiente muestra una vista de conjunto, es decir, los datos, el polinomio $g_1(x)$ y la función $g_2(x)$, con el objeto de visualizar la bondad de las propuestas de solución. Cabe señalar que ambas soluciones son consistentes quedando a juicio del investigador la selección final de alguna de ellas.



gráfica de conjunto del prob. 5.6

5.7 Ajuste los datos dados en la siguiente tabla, a una ecuación de potencias.

x	F(x)
1	0.5
2	1.7
3	3.4
4	5.7
5	8.4

Solución. El modelo de una ecuación de potencias es, $g(x) = a_2 x^{b_2}$, la cual se puede linearizar aplicando logaritmos a ambos miembros de la igualdad. Por lo que,

$$\text{Ln } g(x) = \ln a_2 + b_2 [\ln x]$$

que puede escribirse como,

$$Y = B + mX$$

Superponiendo la ecuación de la recta con la ecuación linearizada se tiene que, Lng(x) = Y; B = $\ln a_2$; X = ln x, y m = b_2; por consiguiente, se organizaron los datos, como se sigue, para determinar los valores de las constantes, a_2 y b_2

X	f(x)	lnx	lnf(x)
1	0.5	0	-0.69314718
2	1.7	0.69314718	0.53062825
3	3.4	1.09861229	1.22377543
4	5.7	1.38629436	1.74046617
5	8.4	1.60943791	2.12823171
15	**19.7**	**4.78749174**	**4.92995438**

Considerando que los datos, de las dos últimas columnas, se ajustan a una recta y resolviendo por el método de mínimos cuadrados, se llega al siguiente sistema.

n = 5; $\sum$xi = 4.7875; $\sum$f(xi) = 4.930; $\sum x_i^2 = 6.1995$ y $\sum$xi*f(xi) = 7.5503.

$$\begin{bmatrix} 5 & 4.7875 \\ 4.7875 & 6.1995 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.930 \\ 7.5503 \end{bmatrix}$$

cuya solución es,

$B = \ln a_2 = -0.69074$ y $a_1 = m = b_2 = 1.75116$

por consiguiente, la recta de ajuste queda

$\ln g(x) = -0.69073876 + 1.75116 \ln x$

sacando antilogaritmos, se obtuvo,

$g(x) = 0.5012x^{1.75116}$

A continuación se presentan los datos tabulados, así como los datos obtenidos con la curva de ajuste, así como la gráfica de ajuste correspondiente.

X	f(x)	g(x)
1	0.500	0.500
2	1.700	1.683
3	3.400	3.424
4	5.700	5.666
5	8.400	8.375

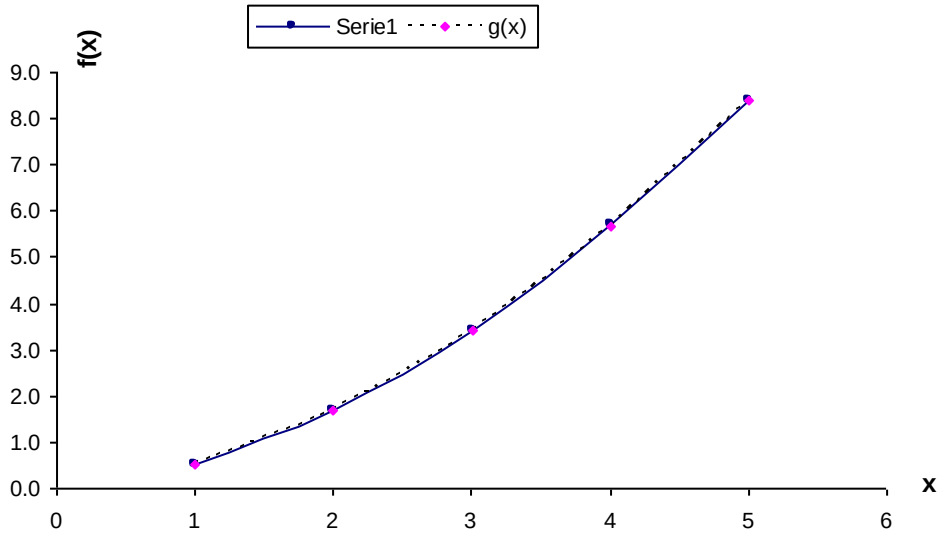


Figura del problema 5.7

5.8 Ajuste a un polinomio de segundo grado, la curva definida por los siguientes datos.

X	-3.20	-2.70	-2.20	-1.70	-1.20	-0.70	-0.20	0.30
f(x)	8.84	5.64	2.94	0.74	-0.96	-2.16	-2.86	-3.06

0.80	1.30	1.80	2.30	2.80	3.30	3.80
-2.76	-1.96	-0.66	1.14	3.44	6.24	9.54

De acuerdo al método de mínimos cuadrados, el ajuste de estos datos, se resuelve con un polinomio de la forma,

$g(x) = a_o + a_1x + a_2x^2$

por lo que, el sistema representativo de este ajustes es,

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) \end{bmatrix}$$

que al evaluar los elementos del arreglo matricial, se obtiene la matriz ampliada como,

$$\begin{array}{ccc|c} 15.000 & 4.500 & 71.350 & 24.100 \\ 4.500 & 71.350 & 63.405 & 14.230 \\ 71.350 & 63.405 & 622.422 & 376.669 \end{array}$$

cuya solución, por eliminación completa de Gauss Jordan, conduce a,

$g(x) = -3.0 +-1.5x + x^2$

La gráfica de este ajuste se muestra a continuación.

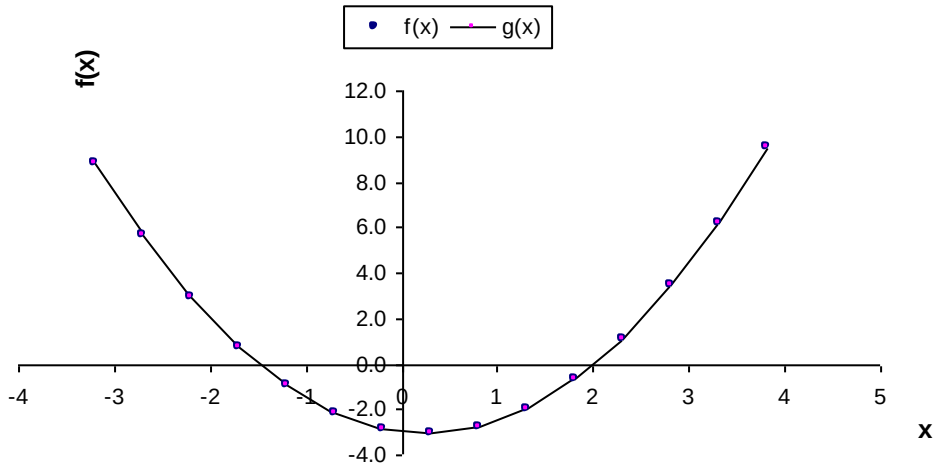


Figura del problema 5.8

5.8 Usando economización de Chebyshev, encontrar una aproximación lineal para la función

$$f(y) = y^2 - 2y + 3$$

sobre el intervalo $0 \leq y \leq 10$

***Solución*.** Primero mapeamos el intervalo dado sobre $-1 \leq y \leq 1$ mediante la transformación, dada por (5-29), es decir:

$$x = \frac{2y - b - a}{b - a} = \frac{2y - 10 - 0}{10 - 0} = \frac{y}{5} - 1$$

o

$$y = 5(x + 1)$$

Por consiguiente, la ecuación por transformar queda:

$$f_1(x) = [5(x + 1)]^2 - 2[5(x + 1)] + 3 = 25x^2 + 40x + 18$$

Puesto que $f_1(x)$ está definida, ahora, sobre $-1 \leq x \leq 1$, podemos proceder a usar la economización de Chebyshev. Rescribiendo las potencias de x en términos de los Tn(x), se tiene:

$$f_1(x) = 24\left[\frac{1}{2}(T_0 + T_2)\right] + 40T_1 + 18T_0 = \frac{61}{2}T_0 + 40T_1 + \frac{25}{2}T_2$$

A partir de aquí podemos encontrar la aproximación lineal por eliminación del término en T_2. Esta aproximación tiene un error máximo posible de magnitud igual al coeficiente de T_2, es decir, $\varepsilon = 25/2 = 12.50$. Entonces,

$$f_1(x) = \frac{61}{2}T_0 + 40T_1$$

o en términos de *x*,

$$f_1(x) = \frac{61}{2} + 40x$$

reconvirtiendo a una función de "y", recordando que x = $\frac{y}{5}$ –1, se tiene:

$$g(y) = \frac{61}{2} + 40(\frac{y}{5} - 1) \approx -\frac{19}{2} + 8y$$

Esta es la aproximación lineal requerida, la cual podría tener un error hasta de 12.5.

Problemas propuestos

5.1 La siguiente función tabulada representa puntos de una polinomial. ¿ Cuál es el grado de la polinomial?¿ Cuál es el coeficiente de la potencia más alta de x?

I	Xi	f(xi)
1	0	-7
2	1	-4
3	2	5
4	3	26
5	4	65
6	5	128

5.2 La siguiente función tabulada representa puntos de una polinomial. ¿ Cuál es el grado de la polinomial?

I	xi	f(xi)
1	0	0
2	1	-2
3	2	-8
4	3	0
5	4	64
6	5	250
7	6	648
8	7	1372

5.3 Preparar una tabla de diferencias finitas hacia delante y otra tabla de diferencias finitas hacia atrás, para la siguiente función tabulada:

I	xi	f(xi)
1	1	6
2	2	10
3	3	46
4	4	138
5	5	430

Ahora, suponiendo que la función es una polinomial, llenar todos los espacios en blanco en la tabla e interpolar para f(4.31) usando la fórmula de interpolación para diferencias finitas hacia delante con x = 4 como renglón base.

5.4 Dada la siguiente función tabulada:

i	Xi	f(xi)
1	0.0	-3.000
2	0.3	-0.742
3	0.6	2.143
4	0.9	6.452
5	1.2	14.579
6	1.5	31.480
7	1.8	65.628

Encontrar a) f(1.09); b) f(0.93); c) f(1.42); d) f(0.21).

5.5 Usando interpolación de Lagrange, encontrar f(4.3) para la siguiente función:

i	xi	f(xi)
1	0.0	0.0
2	1.0	0.569
3	2.0	0.791
4	3.8	0.224
5	5.0	-0.185

5.6 Dada la siguiente función tabulada

I	Xi	f(xi)
1	1	150
2	2	36.75
3	3	17.33
4	4	9.19

Prepare una tabla de diferencias hacia atrás y otra hacia delante. Después interpole para encontrar a) f(1.1) y b) f(3.9)

5.7 Determine una función lineal ajustada a los siguientes datos, mediante el método de mínimos cuadrados:

I	Xi	f(xi)
1	1.0	2.0
2	1.5	3.2
3	2.0	4.1
4	2.5	4.9
5	3.0	5.9

5.8 Igual que en el caso anterior, pero para los siguientes datos:

i	xi	f(xi)
1	0.1	9.9
2	0.2	9.2
3	0.3	8.4
4	0.4	6.6
5	0.5	5.9
6	0.6	5.0
7	0.7	4.1
8	0.8	3.1
9	0.9	1.9
10	1.0	1.1

5.9 Dados los siguientes datos, ajuste a una línea recta esos datos, usando el criterio de mínimos cuadrados:

i	xi	f(xi)
1	1.1	50
2	2.9	43
3	4.3	28
4	6.2	25
5	8.1	22.7
6	9.6	16.9
7	12	7.4

5.10 Ajuste una función cuadrática a los siguientes datos y grafique la curva ajustada junto con los puntos dados:

i	xi	f(xi)
1	0.000	0.00
2	0.200	7.78
3	0.400	10.68
4	0.600	8.37
5	0.800	3.97
6	1.000	0.00

5.11 Ajuste un polinomio cúbico a los datos del problema anterior y diga usted, cual es el mejor ajuste. Haga una gráfica de conjunto, para los dos problemas.

5.12 Ajuste los datos de la tabla siguiente:

I	xi	f(xi)
1	0.1	0.0000
2	0.2	1.1220
3	0.3	3.0244
4	0.4	3.2568
5	0.5	3.1399
6	0.6	2.8579
7	0.7	2.5140
8	0.8	2.1639
9	0.9	1.8358

A la función:

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 sen(\pi x) + a_3 sen(2\pi x)$$

Recuerde iniciar con ecuación (5-19), donde en vez de sustituir el polinomio de grado *l*, tiene usted que emplear la función propuesta arriba y posteriormente

derivar con respecto a cada uno de los coeficientes, para obtener el sistema de ecuaciones que permitan estimar los coeficientes de la función g(x).

5.13 Dados los siguientes datos:

I	xi	f(xi)
1	1.2	2.1
2	2.8	11.5
3	4.3	28.1
4	5.4	41.9
5	6.8	72.3
6	7.9	91.4

Usando el criterio de mínimos cuadrados, ajustar a una función de la forma $g(x) = Ax^B$

5.14 Dados los siguientes datos:

I	xi	f(xi)
1	0.00	1.37
2	0.50	1.48
3	1.25	2.09
4	2.00	2.77
5	2.70	3.60
6	3.00	4.10
7	3.50	4.88
8	3.90	6.01
9	4.75	7.95
10	5.25	9.90

Ajustar una función de la forma $g(x) = Ce^{Dx}$ para estos, usando el criterio de mínimos cuadrados.

5.15 Encontrar una expresión de aproximación de tres términos para *seno(x)* sobre $-1 \leq x \leq 1$ por economización de Chebyshev de la serie de Taylor. Truncar la serie original después del cuarto términos. Evaluar el error máximo en la aproximación

de tres términos y comparar éste con el error máximo que podría resultar si los tres primeros términos de la serie de Taylor fueron usados.

5.16 Encontrar una aproximación cuadrática para

$$f(y) = y^4 - 2y^3 + y - 6$$

sobre el intervalo $-1 \leq y \leq 2$ usando economización de Chebyshev. Dar un límite para el error de estas aproximación. Si está disponible una computadora, grafique el error como una función de *y* sobre el intervalo de interés.

5.17 Ajuste los datos del ejemplo 5.6 a la función $g_3(x) = C\text{seno}(Dx)$

5.18 Escriba un Programa de computadora para resolver la fórmula de interpolación de Gregory Newton, con diferencias finitas hacia delante. El programa debe requerir cuando menos 8 parejas de valores (x, y), con variación de *x* constante; así como el valor de *x* para el cual se desea interpolar. La salida debe incluir los datos administrados, la tabla de diferencias finitas y el valor interpolado de f(x).

5.19 Escriba un Programa de computadora para resolver la fórmula de interpolación de Gregory Newton, con diferencias finitas hacia atrás. El programa debe requerir cuando menos 8 parejas de valores (x, y), con variación de *x* constante; así como el valor de *x* para el cual se desea interpolar. La salida debe incluir los datos administrados, la tabla de diferencias y el valor interpolado de f(x).

5.20 Escriba un Programa de computadora para resolver la fórmula de interpolación de Lagrange. La entrada de datos debe requerir cuando menos 8 parejas de valores (x, y), con variación de *x* arbitraria; así como el valor de *x* para el cual se desea interpolar. La salida debe incluir solamente los datos administrados y el valor interpolado de f(x).

5.21 Empleé el programa del problema 5.18 para encontrar f(1.3) para la siguiente función:

i	xi	f(xi)
1	0	4
2	1	-250
3	2	-881
4	3	-1667
5	4	-2357
6	5	-2493

7	6	-1295
8	7	2450

5.22 Empleé el programa del problema 5.20 para encontrar f(6.3) para la siguiente función:

i	xi	f(xi)
1	0.0	1.000
2	1.2	0.671
3	1.7	0.398
4	2.8	-0.185
5	4.4	-0.342
6	5.8	0.092
7	7.0	0.300
8	8.0	0.172

Capítulo 6

INTEGRACIÓN NUMÉRICA

6.1 Introducción

La definición pura del término **integración**, indica que su significado es " unir todas las partes en un todo; juntar todas las partes en una, indicar la cantidad total, etc,...".
El modelo matemático que representa esta acción, está dado por,

$\int f(x)dx$, que simboliza una *integral indefinida*

$\int_a^b f(x)dx$, para simbolizar la *integral definida*

En cualquier caso, el modelo representa la integral de la función f(x) con respecto al eje **x**. Por consiguiente, una integral indefinida representa el área bajo la curva definida por f(x), el eje *x* y $-\infty \leq x \geq +\infty$ (Fig. 6.1,a); sin embargo, una integral definida representará el área bajo la curva encerrada por la función f(x), el eje *x* y por las verticales acotadas por x = a y x = b (Fig. 6.1,b).

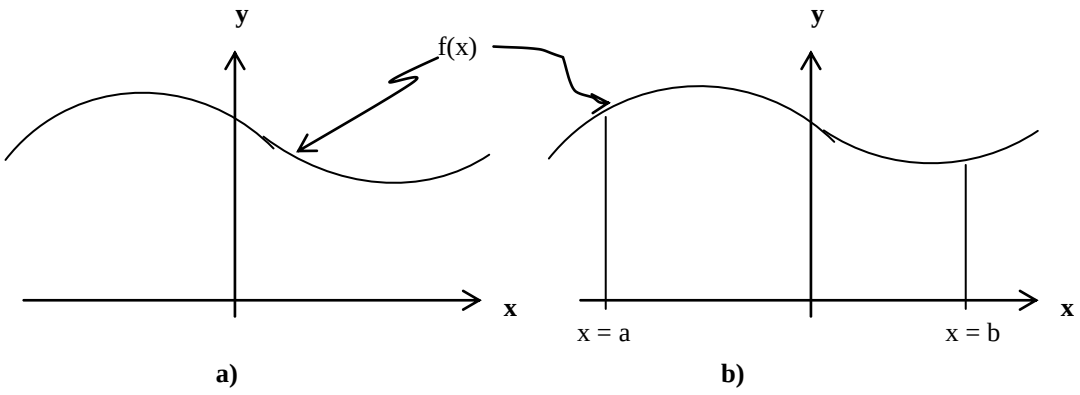


Fig. 6.1. Representación gráfica de una integral; a) indefinida y b)

6.2 Elementos teóricos

De acuerdo con el teorema fundamental de la integral, una integral definida se evalúa como,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \qquad (6\text{-}1)$$

en donde F(x) es la integral de f(x), esto es, cualquier función, tal que su derivada F'(x) = f(x). F(x) también recibe el nombre de antiderivada de f(x). El valor numérico de la integral se obtiene sustituyendo los límites de integración; es decir,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (6\text{-}2)$$

Los métodos de integración analítica, permiten encontrar F(x). Por ejemplo, si se evalúa la integral,

$$\int_0^{0.8} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400^5)dx$$

se obtiene que F(x)= $0.2x + 12.5x^2 - \frac{200}{3}x^3 + 168.75x^4 - 180x^5 + \frac{400}{6}x^6$ + C.; donde C es una constante de integración, es decir, la primitiva de una función dada no es única, por ejemplo, x^2, x^2 +5 y x^2-4.5 son todas ellas primitivas de f(x) = 2x, ya que, $\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(x^2+5) = \frac{d}{dx}(x^2 - 4.5)$. Todas las antiderivadas de f(x) = 2x quedan incluidas en F(x) = x^2 + C.

De ecuación (6-2), F(a)= 0 y F(b) = 1.64053334, por lo que, el valor de la integral es: **I** = 1.64053334. Este valor es igual al área bajo el polinomio f(x) y las verticales x = a = 0 y x = b = 0.8. Sin embargo, hay ocasiones en que es muy difícil o imposible obtener F(x), por lo que, no será fácil evaluar la integral. En estos casos se recomienda aplicar una técnica numérica que permita estimar la integral que, con los procedimientos ordinarios no es posible resolver.

En el presente capítulo se muestran los métodos numéricos que sirvan para obtener el área, ya que de acuerdo a lo dicho en líneas anteriores, si se encuentra una forma simple de estimar el área por procesos geométricos, se tendrá una

estimación de la integral. Por ejemplo, si bajo la curva definida por f(x), el eje x y las verticales x = a y x = b, se trazan rectángulos como figuras de apoyo para evaluar el área bajo la curva, el método recibe el nombre de *rectangular*; de ser trapecios la figuras que se tracen, el método se denomina *trapecial*; cuando se ajustan parábolas a la curva, se dice que el método es *parabólico*, etc.
Estas técnicas numéricas usadas, son de gran utilidad donde la dificultad analítica es muy notable o donde sea imposible la evaluación de las integrales mediante los procedimientos ordinarios.

6.3 Método trapecial

Con base en la figura 6.2 en la que se han trazado *n* trapecios de altura Δx; se estiman las áreas a_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., n) y posteriormente se suman para obtener el área total, la cual será aproximadamente igual a la integral.

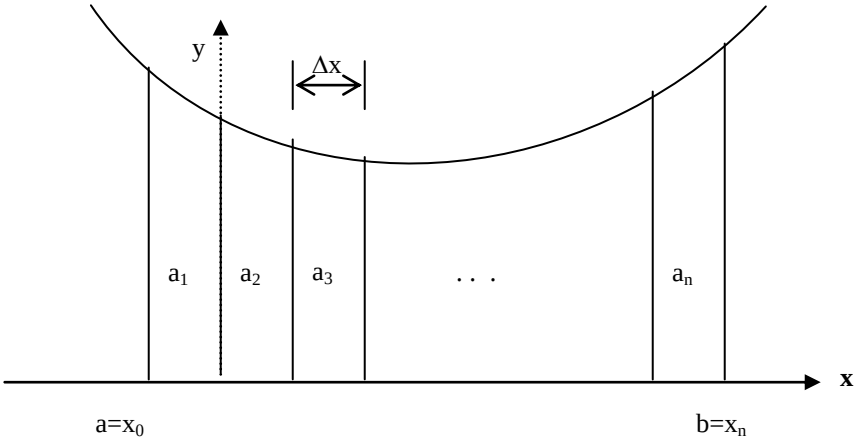


Fig.6.2 Representación de una integral definida.

$$a_1 = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right]$$

$$a_2 = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$$a_3 = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_2) + f(x_3)\right]$$

$$a_4 = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_3) + f(x_4)\right]$$

- - - -

$$a_n = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

Puesto que $\int_a^b f(x)dx$ = $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, entonces, puede escribirse que,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1}(x_0 + \Delta x.j) + f(x_n)\right] \qquad (6\text{-}3)$$

Como x_0 = a, x_n = b y Δx = (b-a)/n, ecuación (6-1) se reduce a,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1}(a + \Delta x.j) + f(b)\right] \qquad (6\text{-}4)$$

donde ***n*** es el número de trapecios en que se ha divididó el área total. Se observa que si ***n*** tiende a infinito, Δx tiende a *cero* y, en consecuencia, el valor obtenido con ecuación (6-4) será más próximo al valor exacto de la integral. El diagrama de flujo está dado en Fig. D6.1

6.3.1 Error en el método trapecial

Cuando se emplea un solo segmento de línea recta (Fig. 6.3) para estimar la integral bajo una curva f(x), se incurre en un error que puede ser sustancial. Una estimación del error por truncamiento, de una sola aplicación de la regla trapezoidal está dada por,

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a) \qquad (6\text{-}5)$$

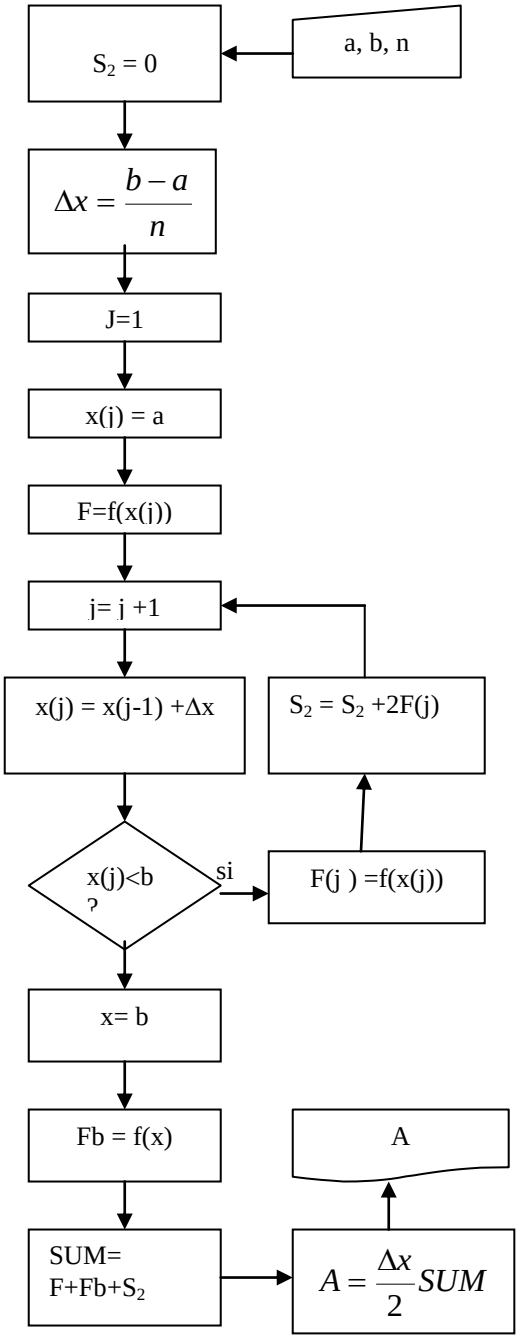


FIG. D6.1 METODO TRAPECIAL

donde ξ es un punto cualquiera dentro del intervalo de integración; para efectos prácticos podría ser el punto medio del segmento $\overline{ab}$. La ecuación anterior indica que si la función que se está integrando es lineal, el método trapecial proporcionará valores exactos, ya que, la segunda derivada de una recta es *cero*; de otra manera ocurrirá un error, para funciones curvas.

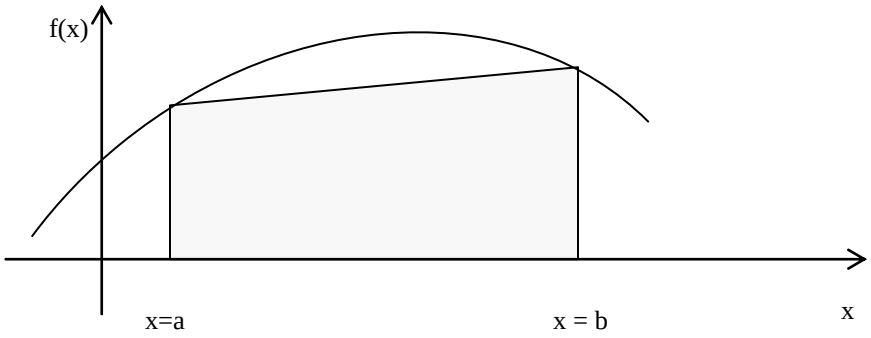


Fig. 6.3 Estimación de la integral con un solo trapecio

Por otra parte, cuando se usan varios segmentos de líneas rectas (Fig. 6.2), el error total se obtiene sumando los errores de cada segmento, llegando a:

$$E_v = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \qquad (6\text{-}6)$$

en donde f ”(ξ_i) es la segunda derivada de la función a integrar, evaluada en el punto ξ_i localizado dentro del segmento i.

6.4 Métodos de Simpson

El método de Simpson permite conectar puntos de una curva con polinomios de orden superior, por ejemplo, si hay un punto medio entre f(a) y f(b), pueden conectarse los tres puntos con una parábola, generando el *método parabólico* (Fig. 6.4-a). Sin embargo, si existen dos puntos igualmente espaciados entre f(a) y f(b), entonces los cuatro puntos se pueden conectar con un polinomio de tercer grado (

Fig. 6.4-b), etc. A las fórmulas resultantes de calcular la integral bajo estos polinomios se les llama *reglas de Simpson*. Este método proporciona una aproximación más precisa que la regla trapezoidal, ya que se unen puntos consecutivos mediante curvas.

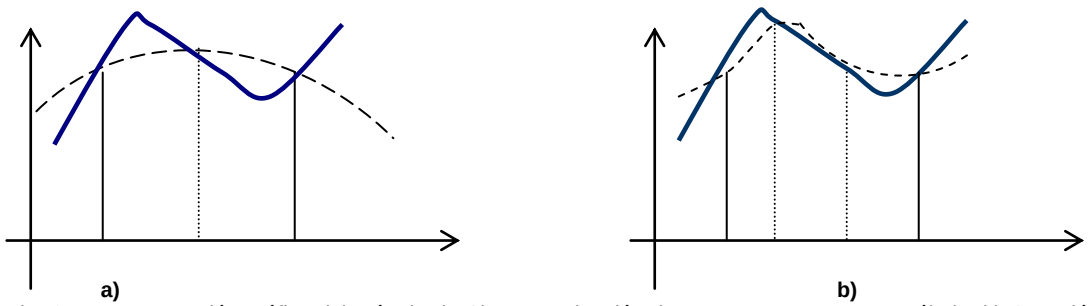


Fig. 6.4 Representación gráfica del método de Simpson, a) unión de tres puntos con una parábola, b) Conexión de cuatro puntos con un polinomio de tercer grado.

Método parabólico

Consiste, como se dijo, en conectar grupos sucesivos de tres puntos (**a**, **b** y **c**), como se muestra en figura 6.4-a, mediante parábolas. Suponiendo que el punto medio coincide con el eje *y* (Fig. 6.5); la integral de la parábola es,

$$\int_{-\Delta x}^{\Delta x}(ax^2+bx+c)dx=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\Big|_{-\Delta x}^{\Delta x}=\frac{2}{3}a(\Delta x)^3+2.c.(\Delta x) \qquad (6\text{-}7)$$

Para encontrar las constantes **a** y **c**, se sustituyen las coordenadas de los puntos **a**, **b** y **c**, obteniendo,

f(**a**) $=a(-\Delta x)^2+b(-\Delta x)+c$

f(**b**)$=a(0)^2+b(0)+c$

f(**c**)$= a(\Delta x)^2+b(\Delta x)+c$

La solución simultánea de estas tres ecuaciones es:

$$a=\frac{f(a)-2f(b)+f(c)}{2(\Delta x)^2}$$

$$b = \frac{f(c) - f(a)}{2(\Delta x)} \qquad (6\text{-}8)$$

c = f(b)

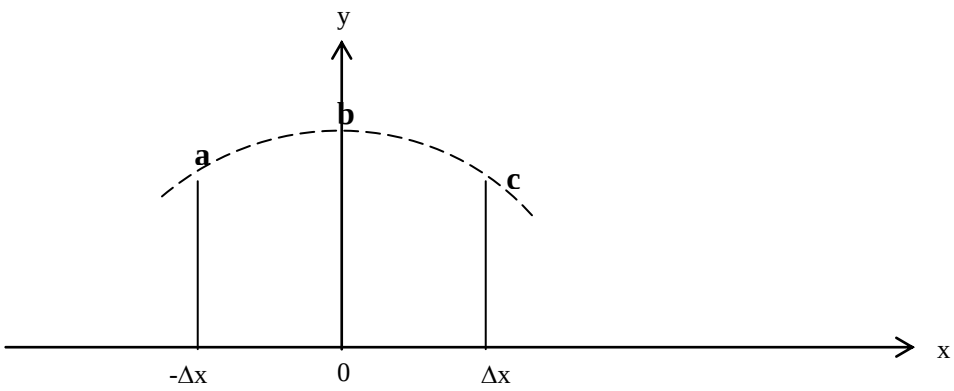


Fig. 6.5 Gráfica explicativa del método parabólico

sustituyendo estos valores en ecuación (6-7), resulta finalmente que,

$$\int_{-\Delta x}^{\Delta x} (ax^2 + bx + c)dx = \frac{\Delta x}{3}\left[f(a) + 4f(b) + f(c)\right]$$

Para no confundir f(**b**) con f(b), es conveniente escribir, en forma general,

y_i = f(**a**); y_{i+1} = f(**b**) y y_{i+2} = f(**c**); con lo que, ecuación (6-7) se transforma en:

$$\int_{-\Delta x}^{\Delta x} (ax^2 + bx + c)dx = \frac{\Delta x}{3}\left[y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}\right] \qquad (6\text{-}9)$$

Si *i* = 0, ecuación (6- 9) queda:

$$\int_{-\Delta x}^{\Delta x} (ax^2 + bx + c)dx = \frac{\Delta x}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right] \qquad (6\text{-}10)$$

Con un razonamiento similar se puede concluir que si al área bajo la curva se divide en *n* sub-áreas (arriba fue n = 2, por lo que *n* tiene que ser par), entonces, una ecuación general, para encontrar el área bajo la curva por el método numérico de Simpson – cuya rutina de cálculo se muestra en figura D6.2- puede escribirse como,

$$\int_{-\Delta x}^{\Delta x}(ax^2+bx+c)dx=\frac{\Delta x}{3}\left[f(a)+4\sum_{j=1,3,5,\ldots}^{n-1}f(a+\Delta xj)+2\sum_{j=2,4,6,\ldots}^{n-2}f(a+\Delta xj)+f(b)\right] \quad (6\text{-}11)$$

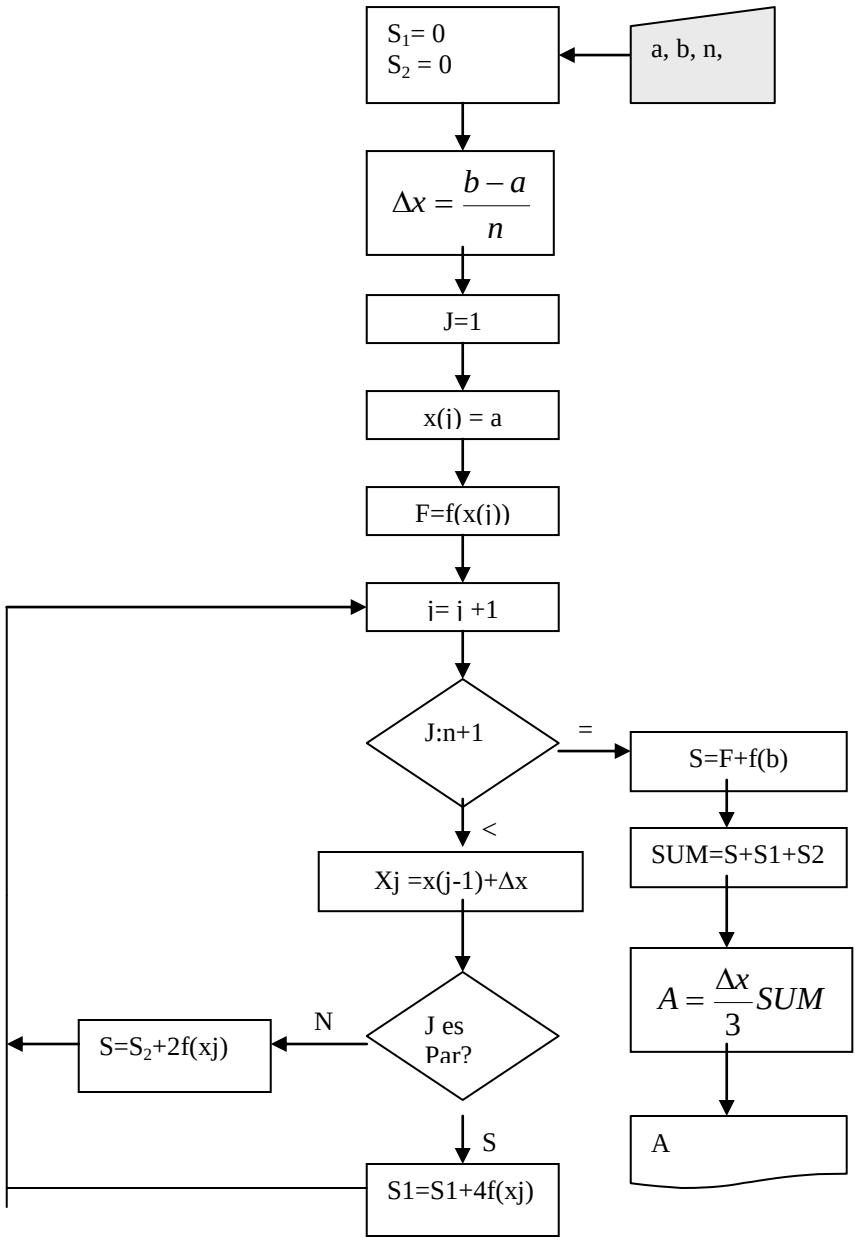


FIG. D6.2 METODO DE SIMPSON

6.4.1 Error en el método parabólico

En este caso, el error se puede estimar con una ecuación del tipo (6-6), es decir,

$$E_v = -\frac{(\Delta x)^5}{180}\sum_{i=1}^{n} f^{IV}(\xi_i) \qquad (6\text{-}12)$$

donde ξi puede estimarse para los puntos medios de cada Δx. Si se conoce el valor exacto de la integral, entonces es conveniente que (6-12) se escriba como

$$E_v = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(IV)} \qquad (6\text{-}13)$$

6.5 Método de Romberg

Esta técnica poderosa y eficiente, de integración numérica, está basada en el uso de la regla trapezoidal combinada con la extrapolación de *Richardson*. Debido a que para aplicar esta extrapolación, es necesario conocer la forma general de los errores para la regla trapecial. En el curso de la derivación del método de Romberg, no se consideraron dichos términos, los cuales incluyen el término dominante $\vartheta(\Delta x)^2$. La derivación de estos términos es muy lenta y no será dada aquí, pero lo detalles son dados por Ralston. El resultado es que la regla trapezoidal puede ser escrita como:

$$I = \frac{\Delta x}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(a+\Delta x * j) + C(\Delta x)^2 + D(\Delta x)^4 + E(\Delta x)^6 + \ldots \right] \qquad (6\text{-}14)$$

donde C, D, E, etc., son funciones de f(x) y sus derivadas, pero no son funciones de Δx. Los términos involucran los anteriores Δx de orden superior conteniendo el error.

Si se le llama $\bar{I} = \frac{\Delta x}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(a+\Delta x * j) + f(b) \right]$, entonces, ecuación (6-14) puede ser escrita como,

$$\bar{I} = I - C(\Delta x)^2 - D(\Delta x)^4 - E(\Delta x)^6 - \qquad (6\text{-}15)$$

Considerando ahora dos valores de Δx, Δx_1 y Δx_2. Si denotamos los valores correspondientes de $\bar{I}$ por $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_2$, respectivamente, para Δx_1 y Δx_2; la ecuación (6-15) conduce a,

$$\bar{I}_1 = I - C(\Delta x_1)^2 - D(\Delta x_1)^4 - E(\Delta x_1)^6 - \qquad (6\text{-}16)$$

$$\bar{I}_2 = I - C(\Delta x_2)^2 - D(\Delta x_2)^4 - E(\Delta x_2)^6 - \qquad (6\text{-}17)$$

Si en ecuaciones anteriores, se considera primero que $\Delta x_1 = 2\Delta x_2$, entonces, (6-16) se transforma en,

$$\bar{I}_1 = I - 4C(\Delta x_1)^2 - 16D(\Delta x_1)^4 - 64E(\Delta x_1)^6 - \qquad (6\text{-}18)$$

Si ahora se multiplica (6-17) por 4, se sustrae (6-18) y se divide por 3, se obtiene,

$$\frac{4\bar{I}_2 - \bar{I}_1}{3} = I + 4D(\Delta x_2)^4 + 20E(\Delta x_2)^6 + \qquad (6\text{-}19)$$

El término $(\Delta x)^2$ fue eliminado y el valor de la integral se aproxima con el término $\vartheta(\Delta x)^4$. La extrapolación de este tipo es llamada *extrapolación de Richardson*. Si ahora evaluamos $\bar{I}_3$,donde $\Delta x_3 = \frac{1}{2}\Delta x_2$ y extrapolando $\bar{I}_2$ y $\bar{I}_3$, se llega a,

$$\frac{4\bar{I}_3 - \bar{I}_2}{3} = I + 4D(\Delta x_2)^4 + 20E(\Delta x_2)^6 + \qquad (6\text{-}20)$$

Entre ecuaciones (6-20) y (6-21), puede eliminarse el término $(\Delta x)^4$, para obtener una estimación de la integral exacta para el término $\vartheta(\Delta x)^6$. Por consiguiente, para cada nueva evaluación de $\bar{I}$, puede ser eliminado un término más en el error, por extrapolación. Este procedimiento sistemático es llamado *integración de Romberg*. Debido a que para describir el *algoritmo* en detalle, se adopta una nueva notación, la regla trapezoidal, en forma generalizada, puede de la siguiente manera,

$$T_{(1,k)} = \frac{\Delta x}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{l} f(a + \Delta x * j) + f(b) \right] \qquad (6\text{-}21)$$

donde

$$\Delta x = \frac{b-a}{2^{(k-1)}} \qquad (6\text{-}22)$$

$$l = 2^{(k-1)} - 1 \qquad (6\text{-}23)$$

El número de paneles (trapecios), en $T_{(1,k)}$ está dado por 2^{k-1}. Por tanto,

$T_{(1,1)} = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b) \right]$, con Δx =b-a y *l* = 0

$T_{(1,2)} = \frac{b-a}{4}\left[f(a) + 2f(a + \frac{b-a}{2}) + f(b) \right]$, con Δx = $\frac{b-a}{2}$ y *l* = 1

$T_{(1,3)} = \frac{b-a}{8}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{3} f(a + \Delta x * j) + f(b) \right]$, con Δx = $\frac{b-a}{4}$ y *l* = 3, etc.

La extrapolación se obtiene con,

$$T_{(L,K)} = \frac{4^{L-1} T_{(L-1,K+1)} - T_{(L-1,K)}}{4^{L-1} - 1} \qquad (6\text{-}24)$$

por ejemplo, para la columna 2 (L =2), se reduce a,

$$T_{(2,1)} = \frac{4\ T_{(1,2)} - T_{(1,1)}}{3}$$

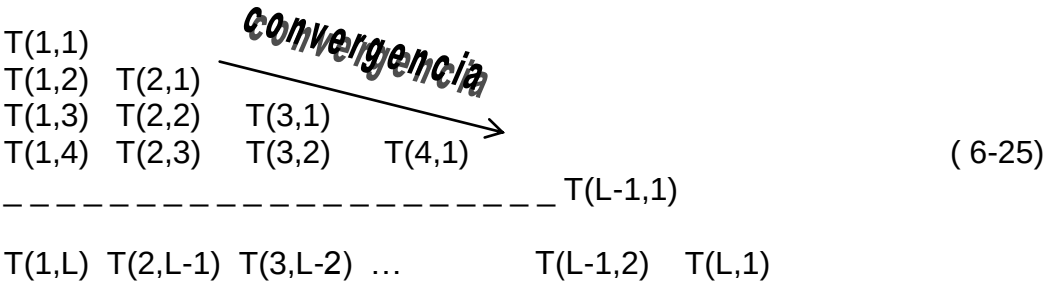
$T_{(2,2)} = \frac{4\ T_{(2,3)} - T_{(2,2)}}{3}$, etc.,

para L =3, se tiene:

$$T_{(3,1)} = \frac{16T_{(2,2)} - T_{(2,1)}}{15}$$

$$T_{(3,2)} = \frac{16T_{(2,3)} - T_{(2,2)}}{15}$$, etc.,

Los resultados anteriores pueden ser ordenados en el siguiente arreglo matricial.



(6-25)

Los valores extrapolados a lo largo de la diagonal, convergerán a la respuesta correcta mucho más rápidamente que los valores proporcionados por la regla trapezoidal, en la primer columna.
Para detener el proceso se aplica la prueba de convergencia relativa, sobre los dos últimos valores de la diagonal.

$$\left| \frac{T_{(L,1)} - T_{(L-1,1)}}{T_{(L,1)}} \right| \leq \text{tol} \qquad (6\text{-}26)$$

donde *tol* es la tolerancia admitida en la exactitud prefijada, si ésta es cero significa que no se admite error en la solución.
El procedimiento, para una fácil aplicación del método numérico de Romberg, consiste de los siguientes pasos:

1. Con ecuación (6- 21) Calcular $T_{(1,1)}$ y $T_{(1,2)}$.
2. Con ecuación (6-24) calcular $T_{(2,1)}$
3. Comparar los dos últimos elementos de la diagonal, en esta ocasión $T_{(2,1)}$ con $T_{(1,1)}$,
4. aplicando prueba dada por (6-26). Si se cumple la condición, entonces, $T_{(2,1)}$ es el valor de la integral; en caso contrario, se desarrolla el siguiente renglón (paso 4).
5. Calcular $T_{(1,3)}$, $T_{(2,2)}$ y $T_{(3,1)}$

6. Repetir paso 3 comparando $T_{(3,1)}$ con $T_{(2,1)}$, mediante ecuación (6-26); de cumplirse, $T_{(3,1)}$ es el valor aproximado de la integral, de otra manera se repite el proceso para el siguiente renglón.

El diagrama de flujo correspondiente al método de Romberg, puede consultarse en Fig. D6.3.

6.6. Cuadratura de Gauss

La cuadratura Gaussiana es un método de integración numérica, muy poderoso, el cual emplea espacios de intervalos desiguales, a diferencia de los métodos trapecial y de Simpson que son de aplicación inmediata para intervalos constantes, aunque también se pueden aplicar con ciertas reservas. Debido a que la regla trapecial debe pasar a través de los puntos límites, uniendo con un segmento de recta los puntos con coordenadas [a, f(a)] y [b, f(b)]; existen casos como el de la figura 6.6, en donde la fórmula genera un error muy grande.
Ahora, supóngase que la restricción de fijar los puntos base se elimina y se va a evaluar libremente el área bajo el segmento de línea recta que une dos puntos cualesquiera de la curva, colocando estos puntos de manera que dicha línea minimice el error en el cálculo del área (Fig. 6.7), por lo que, el valor de integral será más exacto. La cuadratura gaussiana usa esta estrategia. Las fórmulas particulares de cuadratura gaussiana descritas en esta sección se llaman *fórmulas de Gauss- Legendre*. Aunque la derivación de estas fórmulas no son objeto de este libro, se obtiene aquí la fórmula de Gauss –Legendre basada en dos puntos, como ilustración.

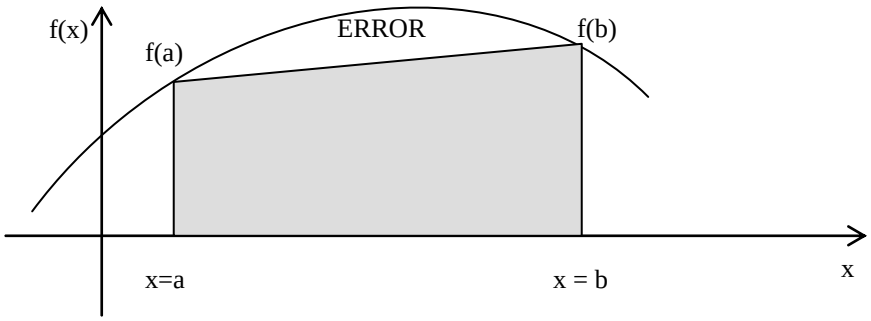
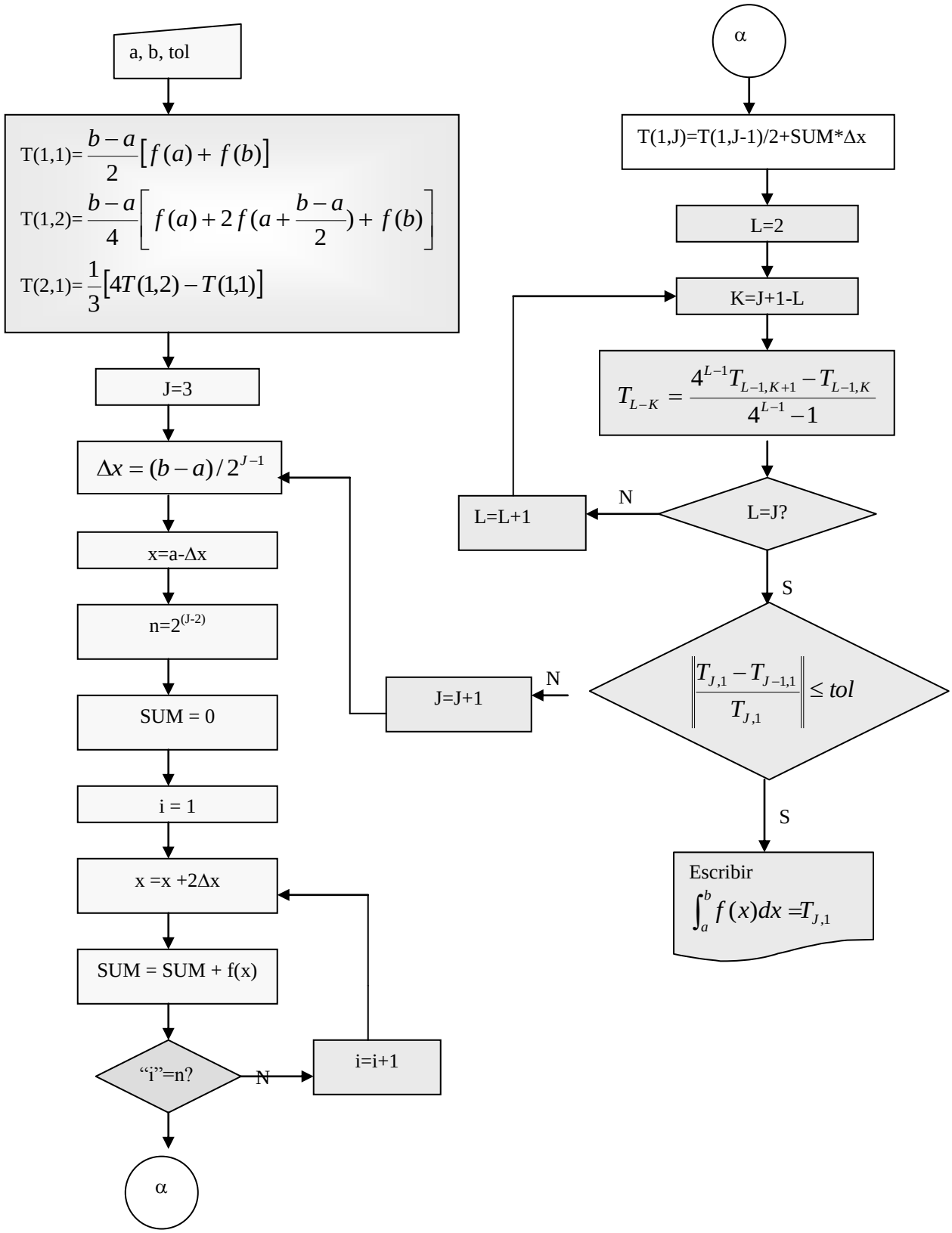


Fig. 6.6 Regla trapezoidal usando un solo trapecio


a, b, tol
T(1,1)= $\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$
T(1,2)= $\frac{b-a}{4}\left[f(a)+2f(a+\frac{b-a}{2})+f(b)\right]$
T(2,1)= $\frac{1}{3}[4T(1,2)-T(1,1)]$
J=3
$\Delta x=(b-a)/2^{J-1}$
x=a-Δx
n=2(J-2)
SUM = 0
i = 1
x =x +2Δx
SUM = SUM + f(x)
"i"=n?
N
i=i+1
α
α
T(1,J)=T(1,J-1)/2+SUM*Δx
L=2
K=J+1-L
$T_{L-K}=\frac{4^{L-1}T_{L-1,K+1}-T_{L-1,K}}{4^{L-1}-1}$
L=J?
N
L=L+1
S
$\left\|\frac{T_{J,1}-T_{J-1,1}}{T_{J,1}}\right\|\le tol$
N
J=J+1
S
Escribir
$\int_a^b f(x)dx=T_{J,1}$

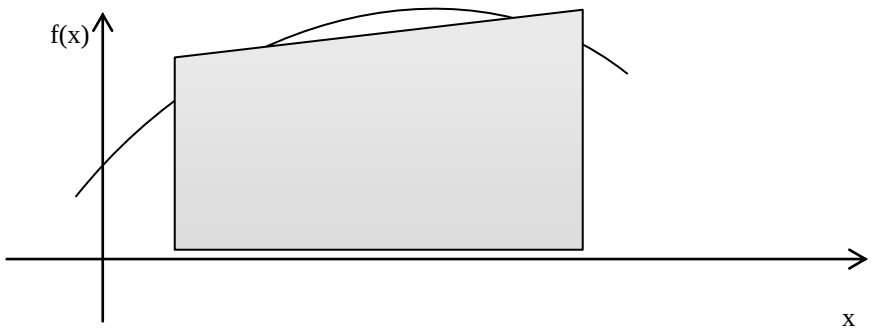


Fig. 6.7 Segmento de recta compensando áreas.

6.6.1 Derivación de la fórmula de Gauss- Legendre basada en dos punto

Se observa en figura 6.6 que el área del trapecio es,

$$I = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a)$$

que puede escribirse como

$$I \cong c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \qquad (6\text{-}27)$$

En donde c_1 y c_2 son incógnitas. Sin embargo, en contraste a la regla trapezoidal que usa como puntos extremos a y b, los argumentos de la función x_1 y x_2 ahora no están a los puntos extremos a y b, sino que son incógnitas (Fig.6.8). Por lo tanto, se tiene un total de cuatro incógnitas que se deben evaluar y, por consiguiente, se requieren de cuatro condiciones para determinarlos exactamente.
Se pueden obtener dos de estas condiciones suponiendo que la ecuación (6-27) ajusta exactamente la integral de una constante (y = 1) y de una función lineal (y = x). Entonces, para llegar a las otras dos condiciones, se extiende este razonamiento al suponer que también se ajusta la integral a una función parabólica ($y = x^2$) y a una función cúbica ($y = x^3$). Haciendo esto, se determinan las cuatro

incógnitas conviniendo en derivar una fórmula de integración de doble punto que es exacta para cúbicas. Las cuatro ecuaciones por resolver son:

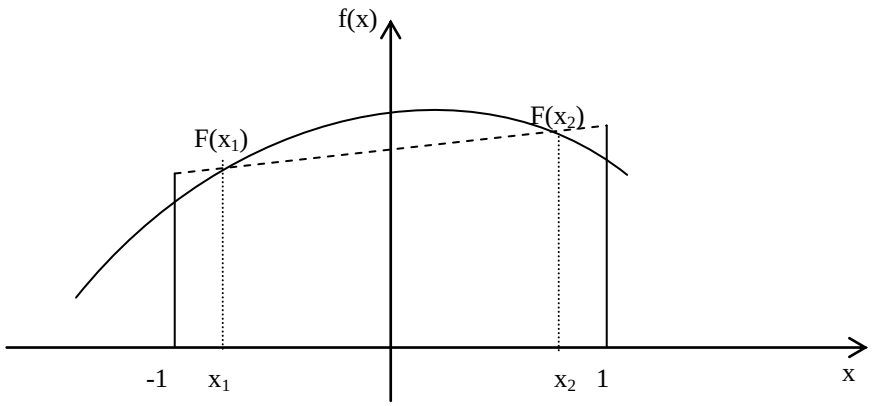


Fig. 6.8 Gráfica para deducir la fórmula de Gauss- Legendre.

$$c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^{+1} 1dx = 2 \qquad (6\text{-}28)$$

$$c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^{+1} xdx = 0 \qquad (6\text{-}29)$$

$$c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^{+1} x^2 dx = \frac{2}{3} \qquad (6\text{-}30)$$

$$c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0 \qquad (6\text{-}31)$$

La solución simultánea de estas ecuaciones (se deja la demostración al lector), es,

$c_1 = c_2 = 1$

$x_1 = -x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

por lo que ecuación (6-27) queda,

$$I \cong 1f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + 1f(\frac{1}{\sqrt{3}}) \qquad (6\text{-}32)$$

Que es la ecuación de Gauss- Legendre basada en dos puntos. Como se observa se llega al resultado interesante de que la suma de la función valuada en x_1 y x_2 lleva a una estimación de la integral con una exactitud de tercer orden.
Es interesante observar que los límites de integración de ecuaciones (6-28 a 6-31), van desde –1 a +1. Esto se hizo para simplificar la aritmética y hacer la formulación tan general como sea posible. Un simple cambio de la variable se puede usar para trasladar otros límites de integración en esta forma. Por ejemplo, suponiendo que la nueva variable x_t está dada en función de la variable original x, en forma lineal, entonces puede escribirse que,

$$x = a_0 + a_1 x_t \qquad (6\text{-}33)$$

Puesto que cuando x = a, x_t = -1 y para x = b, x_t = +1, se tiene:

$a_0 = \frac{b+a}{2}$ y que $a_1 = \frac{b-a}{2}$, con lo que, ecuación (6-33) se transforma en:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_t \qquad (6\text{-}34)$$

y

$$dx = \frac{b-a}{2} dx_t \qquad (6\text{-}35)$$

En muchas ocasiones esta transformación dificulta aparentemente los cálculos, por lo que una forma más práctica para resolver una integral es aproximándola con,

$$\bar{I} = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^{m} w_k f(x_k) \qquad (6\text{-}36)$$

donde los w_k son los factores de peso, las x_k son los **m** puntos con espacios desiguales y corresponde al número de puntos para los cuales la función f(x) será evaluada. La ecuación equivalente a la (6-34) es, en este caso,

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \xi \qquad (6\text{-}37)$$

los valores de ξ_k con sus correspondientes pesos w_k, fueron obtenidos para valores de m de 2 a 256. (Los ξ_k son los **m** ceros del m-avo grado de las polinomiales de Legendre). En el apéndice **B** se encuentran valores de ξ_k y w_k, desde m = 2 y m = 24. después deseleccionar el valor de m, los valores de x_k correspondientes a los ξ_k pueden ser encontrados de (6-37) y, finalmente, usar (6-36) para estimar la integral.

Problemas resueltos

6.1 Resuelva la integral definida, usando el método trapecial con 10 segmentos (n = 10); calcule el error con ecuación (6-6) y, finalmente, compare sus resultados con el que se obtenga en forma analítica (nota: no siempre es posible esta comparación, ya que, algunas veces la integración cerrada, no es posible de obtener, como se dijo antes)

$$\int_0^4 (x^2 + 2x - 1)dx$$

Solución. En este caso Δx = (b-a)/n = (4-0)/10=2/5, puesto que a = 0 y b = 4. La función a integrar es f(x) = x^2 +2x-1, por lo que, f(a) = -1.00 y f(b) = 23.00. Ahora, para la parte intermedia de ecuación (6-4) se tiene,

$$2\sum_{j=1}^{n-1} f(a + \Delta x.j) = 2\sum_{j=1}^{10-1} f(0 + 0.4j) = 2\left[\sum_{j=1}^{9} f(0.4j)\right]$$

lo cual se facilita si se escriben tres columnas (tabla 6.1) para evaluar el paréntesis y en la última columna se calcula la segunda derivada del integrando para calcular el error con ecuación (6-6). Sin embargo, si se usa ecuación (6-7) para estimar el error, se debe obtener solamente la primer derivada de f(x), esto es f ´(x) = 2x + 2.
Con estos datos se obtiene que,

$$2\left[\sum_{j=1}^{9} f(0.4j)\right] = 2(72.6) = 145.20$$

y de ecuación (6-4) se llega a,

$$\int_0^4 (x^2 + 2x - 1) = \frac{0.4}{2}\left[-1.0 + 145.20 + 23.00\right] = 33.44 \text{ u}^2.$$

Ahora, de ecuación (6-6), el error se estima en,

$$E_v = \frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = -\frac{(4-0)^3}{12(10)^3} * (20) = -0.1066666667$$

por lo que, un resultado más preciso de la integral que se está evaluando, es,

$\int_0^4 (x^2 + 2x - 1)$ =33.44-0.1066666667 =33.333333333 u^2.

Tabla 6.1 Datos para calcular el término medio de Ec. (6-4) y el error según Ec. (6-6).

J	0.4j	f(0.4j)		n	ξ	F”(ξ)
1	0.40	-0-04		1	0.2	2
2	0.80	1.24		2	0.6	2
3	1.20	2.84		3	1.0	2
4	1.60	4.76		4	1.4	2
5	2.00	7.00		5	1.8	2
6	2.40	9.56		6	2.2	2
7	2.80	12.44		7	2.6	2
8	3.20	15.64		8	3.0	2
9	3.60	19.16		9	3.4	2
		72.60		10	3.8	2
						20

La solución analítica, que en este ejemplo puede obtenerse, es:

$$\int_0^4 (x^2 + 2x - 1) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x\Big]_0^4 = 33.333\,33333 \text{ u}^2.$$

Con lo que se confirma el resultado obtenido.

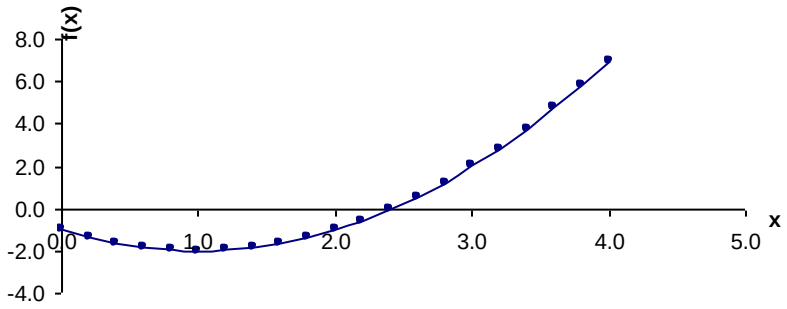


Figura del problema 6.1

6.2 Resolver el siguiente problema que corresponde a la fuerza sobre el mástil de un velero de carreteras (aplicación a ingeniería civil), representado por la integral:

$$F = \int_0^{30} 200\left(\frac{z}{5+z}\right)e^{(-2z/30)}dz$$

Use el método trapecial con n = 30.

Solución. Identificación de elementos:
a = 0
b = 30 y
f(z) = $200\left(\frac{z}{5+z)}\right)e^{(-2z/30)}$

con lo que,

f(a)= $200\left(\frac{0}{5+0)}\right)e^{(-2*0/30)}$ = 0.0000

f(b)= $200\left(\frac{30}{5+30)}\right)e^{(-2*30/30)}$ =23.20033427

Si se usan 30 trapecios (n = 30), entonces Δz = 1. La parte intermedia de ecuación (6-4) es,

$$2\sum_{j=1}^{n-1} f(a+\Delta z.j) = 2\left[\sum_{j=1}^{29} f(1*j)\right] = 2(1465.533478) = 2931.066957$$

de ecuación (6-4) se tiene que el valor de la integral es

$$F = \int_0^{30} 200\left(\frac{z}{5+z}\right)e^{(-2z/30)}dz = \frac{1}{2}\left[0 + 2931.066957 + 23.20033427\right] = 1477.133646$$

En este caso no es fácil encontrar la solución analítica como en el caso anterior, por lo que, se incrementó el número de trapecios para mejorar el resultado. Siguiendo el mismo procedimiento para otros valores de ***n***, se llegó a los siguientes valores.

N	**Δz**	$2\sum_{j=1}^{n-1} f(a+\Delta z)$	$\int_0^{30} 200\left(\frac{z}{5+z)}\right)e^{(-2z/30)}\,\mathbf{dz}$
60	0.50	5895.625196	1479.706383
100	0.30	9845.185388	1480.257858
200	0.15	19716.67695	1480.490796
300	0.10	29587.46700	1480.533367
600	0.05	59199.19356	1480.559847

De estos resultados se concluye que el valor de integral está muy cerca de **1480.559847 u^2**; ya que, al hacer crecer el valor de *n* el resultado que se obtenga tiende a la integral.

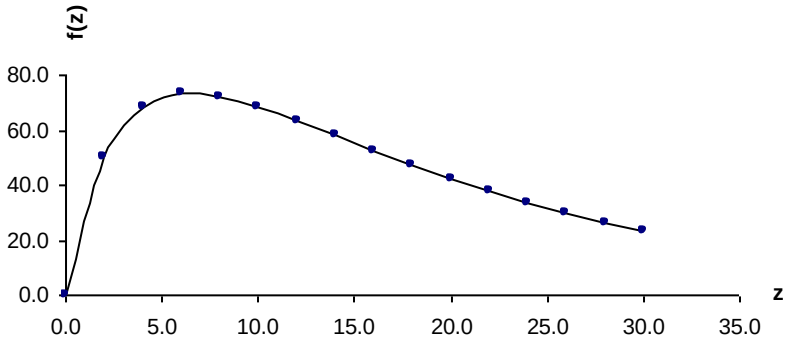


Figura del problema 6.2

6.3 En la figura se ilustra una sección transversal de un canal común que transporta agua a superficie libre. Los puntos representan posiciones en donde se ancló el bote y se tomaron lecturas de la profundidad. Calcular el área transversal usando el método trapecial, tomando 10 áreas (n = 10).
Las coordenadas medidas son: (0, 0); (2, 1.80); (4, 2); (6, 4); (8, 4); (10, 6); (12, 4); (14, 3.4); (16, 3.6); (18, 2.8) y (20, 0).

Solución. De ecuación (6-4), se observa que puede escribirse como:

$$I = \frac{2}{2}\left[0 + 2(1.8 + 2 + 4 + 4 + 6 + 4 + 3.4 + 3.6 + 2.8) + 0\right] = 63.20 \text{ m}^2$$

Esto conduce que este método también se puede aplicar para puntos discretos, tabulados como fueron presentados arriba.

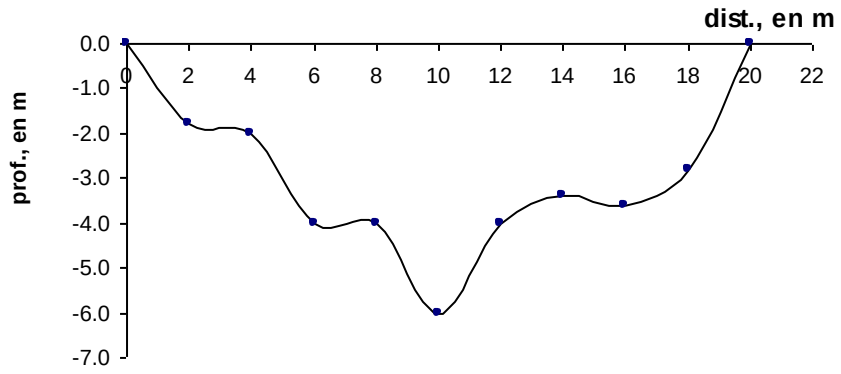


Figura del problema 6.3

6.4 Resolver el problema 6.1 por el método de Simpson, usando las mismas áreas que en aquél (n = 10).

Solución. Con los datos de la tabla 6.1 se concluye que:

$$\sum_{j=impar}^{9} f(0.4 * j) = 41.40$$

y

$$\sum_{j=par}^{8} f(0.4 * j) = 31.20$$

por lo que, de ecuación (6-12), se llega a:

$$\int_0^4 (x^2 + 2x - 1) = \frac{0.4}{3}\left[-1 + 4(41.40 + 2(31.20) + 23.00\right] = 33.333 \text{ u}^2.$$

La cual corresponde al valor exacto de la integral, ya que, la función por integrar está representada por una ecuación de segundo grado. Otra forma de observar que 2/3 es valor exacto de la integral es por observación directa de ecuación (6-13), la cual indica que el error es *cero*, debido a que la $f^{IV}(x)$ es nula.

6.5 Use la regla de Simpson para evaluar la integral $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+senx)^2}$, con *n* = 10.

Solución. En cualquier caso, primero deben conocerse los límites y la función que se integra, así que:

Límite inferior a = 0
Límite superior b = $\pi/2$
La función a integrar es, f(x) = $\frac{1}{(1+senx)^2}$, con lo que
f(a) = f(0)= 1.0000
f(b) =f($\pi/2$) = 0.2500
Para n = 10, Δx = $\pi/20$
Ahora, con datos de tabla 6.2 se puede escribir,

$$\left[4 \sum_{j=1,3,5,\ldots}^{n-1} f(a+\Delta x * j)\right] = 4(2.096) = 8.3864$$

y

$$\left[2 \sum_{j=2,4,6,\ldots}^{n-2} f(a+\Delta x * j)\right] = 2(1.5486) = 3.0972$$

sustituyendo en ecuación (6-12), se tiene:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+senx)^2} = \frac{\pi/20}{3}\left[1.0000 + 4(2.0966) + 2(1.5486) + 0.2500\right] = 0.66673$$

entonces,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+senx)^2} = 0.66673 \text{ u}^2.$$

Tabla 6.2 Datos del ejemplo 6.5

J	x	f(x)	Identificación
0	0.0000	1.0000	f(a)
1	0.1571	0.7478	J impar

2	0.3142	0.5836	J par
3	0.4712	0.4730	J impar
4	0.6283	0.3967	J par
5	0.7854	0.3431	J impar
6	0.9425	0.3056	J par
7	1.0996	0.2796	J impar
8	1.2566	0.2627	J par
9	1.4137	0.2531	J impar
10	1.5708	0.2500	f(b)

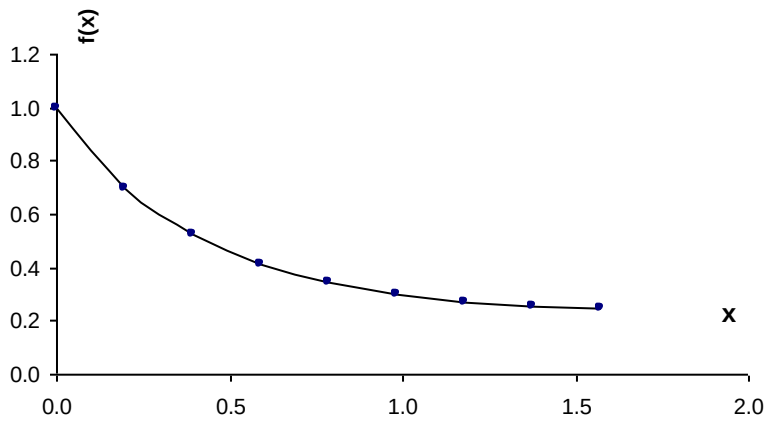


Figura del problema 6.5

6.6 Resolver la integral $\int_0^8 (\frac{5}{8}x^4 - 4x^3 + 2x + 1)dx$ (ver figura del ejemplo), con un margen de error igual o menor que el 0.001%, de acuerdo al método de Romberg.
Solución. Este polinomio puede ser integrado analíticamente, dando un resultado de 72 u^2 y la integración de Romberg debería aportar una respuesta en solamente unas cuantas extrapolaciones. Aquí,

$$f(x) = \frac{5}{8}x^4 - 4x^3 + 2x + 1$$

a = 0, por tanto, f(a) =f(0) = $\frac{5}{8}(0)^4 - 4(0)^3 + 2(0) + 1$= 1

b = 8, así que, f(b) =f(8) = $\frac{5}{8}(8)^4 - 4(8)^3 + 2(8) + 1$=529

$T_{(1,1)} = \frac{8-0}{2}[1 + 529]$ = 2120

$$T_{(1,2)} = \frac{8-0}{4}\left[1+2f(4)+529\right] = 712$$

Ahora, de ecuación (6-25), se llega a,

$$T_{(2,1)} = \frac{4\ T_{(1,2)} - T_{(1,1)}}{3} = \frac{4\ *712-2120}{3} = 242.66667$$

Si se efectúa la prueba de convergencia sobre la diagonal, es claro que 242.666667 difiere mucho de T(1,1)=2120, por lo que se prosigue con el siguiente renglón, como se dijo.

$$T_{(1,3)} = \frac{8-0}{8}\left[1+2\sum_{j=1}^{3} f(\frac{8}{4}*j)+529\right] = \left[1+2\sum_{j=1}^{3} f(2j)+529\right] = 240$$

extrapolando para T(1,2) y T(1,3), con ecuación (6-25), se tiene:

$$T_{(2,2)} = \frac{4\ *240-712}{3} = 82.666667$$

y

$$T_{(3,1)} = \frac{16*82.66667-242.66667}{15} = 72$$

La prueba de convergencia indica que tol = $\left|\frac{242.666667-72}{72}\right|$ = 2.37, por lo que se calculó del siguiente renglón, aplicando ecuaciones (6-22) y (6-25), obteniendo los siguientes resultados.

2120
712 242.6667
240 82.6667 72
114.5 72.6667 72 72

la convergencia resulta, para esta cuarta línea, $\left|\frac{72-72}{72}\right| = 0$, por lo tanto, el valor exacto de la integral es 72, es decir, puede escribirse la solución como,

$$\int_0^8 (\frac{5}{8}x^4 - 4x^3 + 2x + 1)dx = 72$$

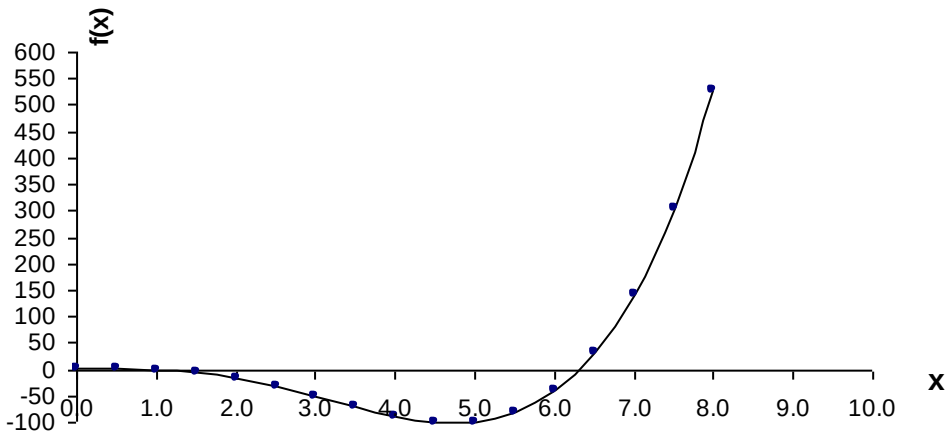


Figura del problema 6.6

6.7 Resolver el ejemplo 6.2, por el método de Romberg.

$$F = \int_0^{30} 200\left(\frac{z}{5+z}\right)e^{(-2z/30)}dz$$

Solución.- Se tiene que,

f(z) = $200\left(\frac{z}{5+z)}\right)e^{(-2z/30)}$

y

a = 0
b = 30

por lo que,

f(a)= $200\left(\frac{0}{5+0)}\right)e^{(-2*0/30)}$ = 0.0000

f(b)= $200\left(\frac{30}{5+30)}\right)e^{(-2*30/30)}$ =23.20033427

Siguiendo el mismo procedimiento que el ejemplo 6.6, se llegó a los resultados siguientes:

348.005							
1001.731	1219.640						
1320.585	1426.869	1440.685					
1435.007	1473.148	1476.233	1499.665				
1468.644	1479.857	1480.304	1480.933	1480.859			
1477.548	1480.515	1480.559	1480.628	1480.627	1480.627		
1479.811	1480.565	1480.568	1480.572	1480.572	1480.572	1480.572	
1480.379	1480.568	1480.568	1480.569	1480.569	1480.569	1480.569	1480.569

De donde se concluye que el valor de la integral, es igual a 1480.569, resultado muy similar al obtenido en el ejemplo 6.2 con el método trapecial, pero con 600 trapecios. Sin embargo, puede observarse que en este método solo se usaron 256 paneles.

6.8 Use el método numérico de Romberg para resolver la siguiente integral, con una exactitud de dos decimales.

$$\int_4^{10}(e^x - 2x)dx$$

Solución.- En esta integral f(x) = e^x-2x; a = 4 y b = 10. Por tanto b-a = 10-4 = 6.

$$f(a) = e^4 - 2(4) = 46.59815003$$

$$f(a) = e^{10} - 2(10) = 22006.46579$$

de ecuación (6-22),

$$T_{(1,1)} = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right] = \frac{6}{2}\left[46.59815003 + 22006.46579\right] = 66159.19182$$

$$T_{(1,2)} = \frac{b-a}{4}\left[f(a) + 2f(a + \frac{b-a}{2}) + f(b) \right] = \frac{6}{4}\left[f(a) + 2f(7) + f(b) \right] = 36327.49539$$

ahora de ecuación (6-25),

$$T_{(2,1)} = \frac{4\ T_{(1,2)} - T_{(1,1)}}{3} = \frac{4\ (36327.49539) - 66159.19182}{3} = 26383.60$$

los resultados obtenidos, en forma reiterada, se presentan a continuación.

66159.19						
36327.50	26383.60					
25860.94	22372.09	22104.65				
22908.27	21924.05	21894.18	22241.71			
22144.75	21890.24	21887.99	21884.55	21883.15		
21952.20	21888.02	21887.87	21887.77	21887.78	21887.79	
21903.96	21887.88	21887.87	21887.87	21887.87	21887.87	21887.87
21891.89	21887.87	21887.87	21887.87	21887.87	21887.87	21887.87	21887.87

Por tanto, $\int_4^{10} (e^x - 2x)dx$=21, 887.87 u^2.

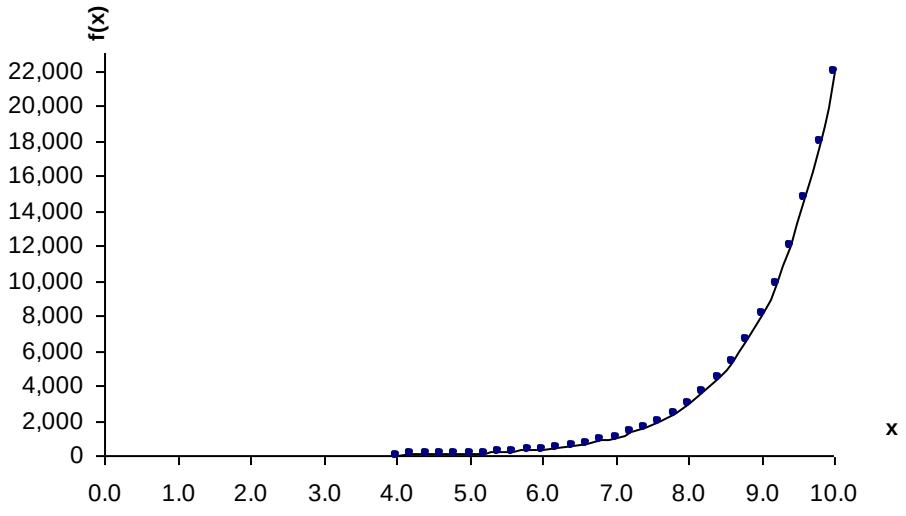


Figura del problema 6.8

6.9 Use el método de Romberg para resolver la integral, dada a continuación con tres decimales exactos.

$$\int_0^5 (2senx - e^x + 1)dx$$

Solución. Sabiendo que $f(x) = 2senx - e^x + 1$ y a = 0, b = 5, se procedió igual que en el ejemplo anterior, llegando a,

$$f(a) = f(0) = 0.000$$

$$f(b) = f(5) = -149.3310077$$

-373.328
-211.628 -157.728
-159.885 -142.637 -141.631
-145.795 -141.099 -140.996 -143.234
-142.190 -140.988 -140.981 -140.970 -140.962
-141.283 -140.981 -140.980 -140.980 -140.980 -140.980
-141.056 -140.981 -140.980 -140.980 -140.980 -140.980 -140.980

En este caso $\int_0^5 (2senx - e^x + 1)dx$ =-140.980 u^2.

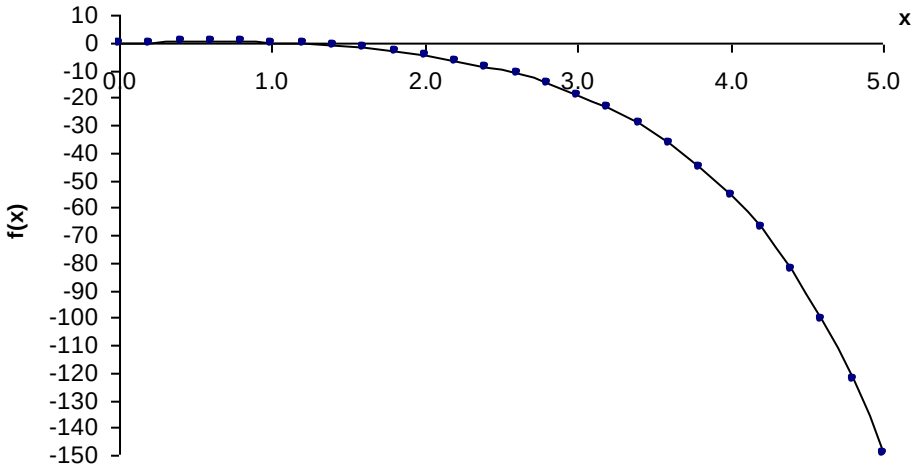


Figura del problema 6.9

6.10 A continuación se resuelve la integral $\int_{-4}^{20}\sqrt{x^2+4}dx$, por el método de Romberg.

Solución. Con a = -4; b = 20 y f(x) = $\sqrt{x^2+4}$,

f(a) = f(-4)= $\sqrt{x^2+4}$ = $\sqrt{(-4)^2+4}$ =4.472136

f(b) =f(20) = $\sqrt{x^2+4}$ = $\sqrt{(20)^2+4}$ = 20.09975124

se llegó a los resultados siguientes:

294.86						
246.39	230.23					
225.02	217.89	217.07				
220.26	218.68	218.73	222.21			
219.18	218.82	218.83	218.86	218.84		
218.91	218.83	218.83	218.83	218.83	218.83	
218.85	218.83	218.83	218.83	218.83	218.83	218.83

Por tanto, $\int_{-4}^{20}\sqrt{x^2+4}dx$ =218.83 u^2.

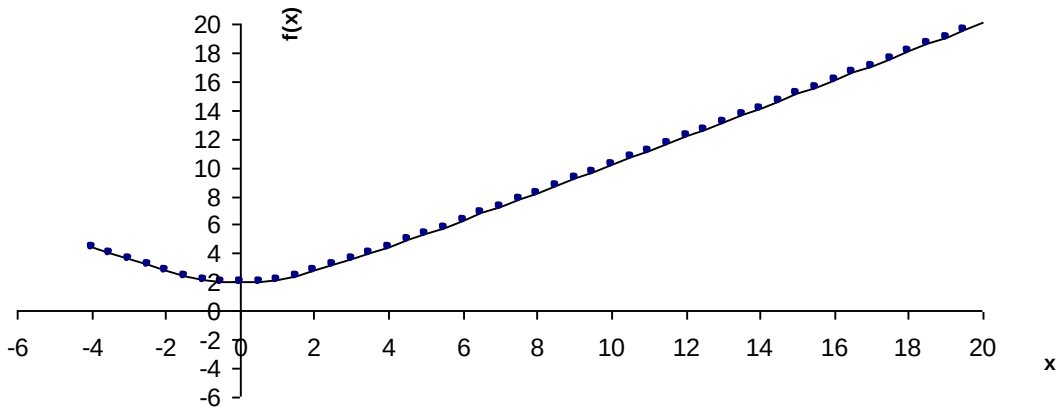


Figura del problema 6.10

6.11 Resolver la integral $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx$,usando la cuadratura de Gauss- Legendre con m = 4.

Solución. Del apéndice **B** se encuentra que los ceros y los pesos son,

k	ξ_k	w_k
1	+ 0.3399810436	0.6521451549
2	- 0.3399810436	0.6521451549
3	+ 0.8611363116	0.3478548451
4	- 0.8611363116	0.3478548451

De ecuación (6-37) los valores de las x_k son,

$$x_1 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}(+0.3399810436) = 1.052418651$$

$$x_2 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}(-0.3399810436) = 0.5183776762$$

$$x_3 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}(+0.8611363116) = 1.461733041$$

$$x_4 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}(-0.8611363116) = 0.1090632858$$

Los correspondientes valores de f(x) son,

$$f(x_1) = x_1^2 \cos x_1 = (1.052418651)^2 \cos(1.052418651) = 0.5487769211$$

$$f(x_2) = x_2^2 \cos x_2 = (0.5183776762)^2 \cos(0.5183776762) = 0.2334126957$$

$$f(x_3) = x_3^2 \cos x_3 = (1.461733041)^2 \cos(1.461733041) = 0.2325698375$$

$$f(x_4) = x_4^2 \cos x_4 = (0.1090632858)^2 \cos(0.1090632858) = 0.01182412731$$

Finalmente, de ecuación (6-36),se tiene que el valor aproximado de la integral es,

$$\bar{I} = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{m} w_k f(x_k) = \bar{I} = \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{4} w_k f(x_k)$$

$$\bar{I} = \frac{\pi}{4}\left[0.5951147936\right] = 0.467402066 \text{ u}^2.$$

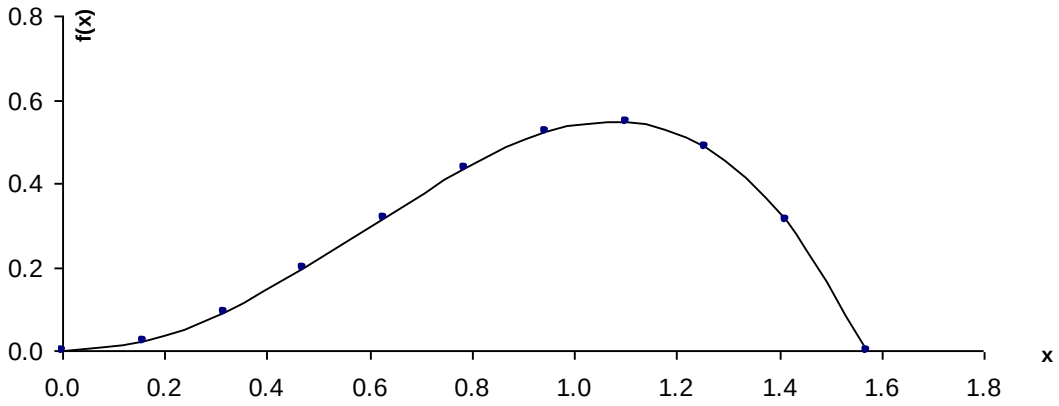


Figura del problema 6.11

6.12 Resolver la integral $\int_0^{0.8}(0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5)dx$. Primero use ecuaciones (6-35) y (6-36) y, posteriormente aplique ecuaciones (6-38) y (6-37). En ambos casos use m = 2, es decir, para el primer caso apóyese en ecuación (6-33).

Solución. Haciendo el cambio de variable de tal forma que los límites sean desde –1 hasta +1. De ecuación (6-35) se tiene:

$x = 0.4 + 0.4x_t$.

y de ecuación (6-36)

$dx = 0.40\ dx_t$

sustituyendo en la integral por resolver, ésta queda:

$$\int_{-1}^{+1}(0.2+25x_t-200x_t^2+675x_t^3-900x_t^4+400x_t^5)(0.4)dx_t$$

puesto que para dos puntos es válida ecuación (6-33), en la que sólo basta calcular la función transformada en x_1= -x_2 = -1/√3; pueden estimarse las variables así:

x_1 = 0.4 + 0.4x_t.=0.4+0.4(-0.5773502692)=0.1690598923 y
x_2 = 0.4 + 0.4x_t. = 0.4+0.4(+0.5773502692)=0.6309401077

por tanto f(x_1)= 1.291851362*.4=0.5167404544
f(x_2)= 3.264553074*.4=1.3058212300

usando (6-33),se tiene,

I = 0.5467405448+1.3058212300 = 1.822562

Ahora se resuelve como en el ejemplo 6.8. De tabla 6.3 se encuentran los ceros y los pesos como,

K	ξ_k	w_k
1	+ 0.5773502692	1.0000000
2	- 0.5773502692	1.0000000

De ecuación (6-38) los valores de las x_k resultaron,

$$x_1=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\xi = \quad 0.40+0.4(-0.5773502692)=0.16900598923$$

$$x_2=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\xi = \quad 0.40+0.4(+0.5773502692)=0.6309401077$$

Los correspondientes valores de f(x) son,

$$f(x)=0.2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$$

$$f(x_1)=0.2+25x_1-200x_1^2+675x_1^3-900x_1^4+400x_1^5=1.29185136$$

$$f(x_2)=0.2+25x_2-200x_2^2+675x_2^3-900x_2^4+400x_2^5=3.264593082$$

Finalmente, de ecuación (6-36),se tiene que el valor aproximado de la integral es,

$$\bar{I} = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{m} w_k f(x_k) = 0.4\sum_{k=1}^{2} w_k f(x_k)$$

.

I= $0.4\sum_{k=1}^{2} w_k f(x_k)$ =0.4(4.556444442)=1.822577777, por tanto,

$\int_0^{0.8}(0.2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5)dx$ = 1.822577777 u^2.

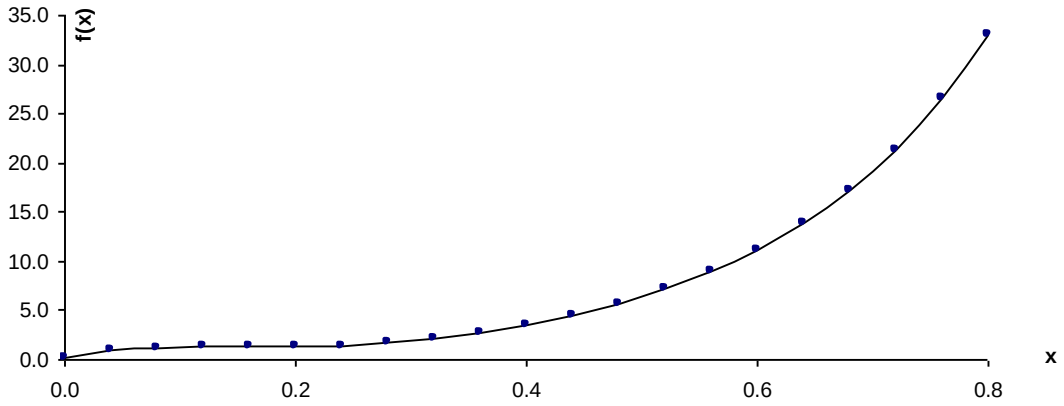


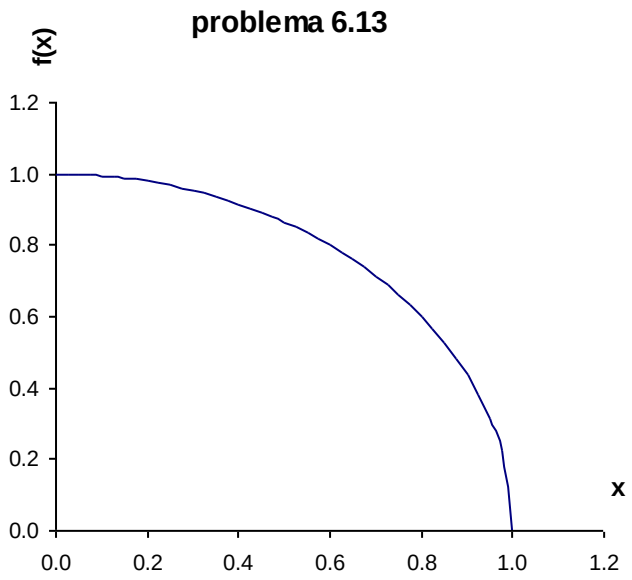
Figura del problema 6.12

Problema 6.13.- Hallar el área de un círculo que tiene un radio igual a la unidad.
Solución.- Por facilidad, partimos de un círculo que tiene su centro en el origen del sistema, como se muestra en la figura. Para el problema planteado, se requiere la aplicación de la integral definida. Puesto que la ecuación del círculo de radio igual a 1, es,

$$x^2 + y^2 = 1$$

entonces, $y = \sqrt{1-x^2}$

Si encontramos el área del círculo en el primer cuadrante y después, lo multiplicamos por 4 veces, habremos resuelto el problema. De acuerdo a ello, la integral definida se plantea como,



$$A = I = 4\left[\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\right]dx$$

Se resuelve la integral, dada entre corchetes, por el método de Simpson, con 40 divisiones (n = 40).

Puede demostrarse que el valor de integral, por este método, es I = 0.784943838, por lo que, A = 4(0.784943838) = 3.139775352 u^2. Por otra parte, del cálculo integral se demuestra que,

$$I = \left[\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\right]dx = \frac{\pi}{4}$$

por lo que, el valor de los cuatro cuadrantes es 4 veces el valor de $\frac{\pi}{4}$, es decir 4* $\frac{\pi}{4}$ = π $u^2 \approx$ 3.139775352 (obtenido por el método aplicado).

Problema 6.14.- Calcular el volumen de un cono en revolución, generado por la recta y = 2x.

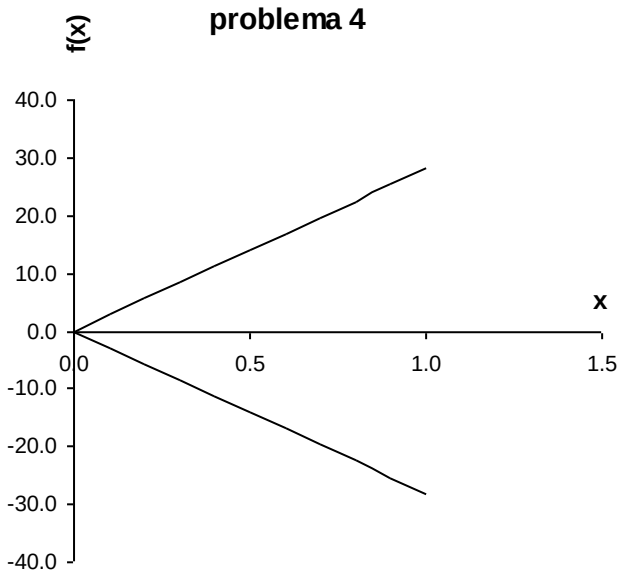
Solución.- La teoría demuestra que el volumen de un cuerpo en revolución se obtiene con la fórmula,

$$S = 2\pi\int_a^b f(x).\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

Con los datos que se dan, f(x) = 2x, por tanto, f'(x) = 2.

$$S = 2\pi\int_0^1 2x.\sqrt{1+4}dx = 4\pi\sqrt{5}\int_0^1 xdx = 4\pi\sqrt{5}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi\sqrt{5}$$

Usando el método trapecial, por su facilidad, para n = 10, se llegó al siguiente resultado, S = 14.04966232 $\equiv 2\pi\sqrt{5}$.



Problemas propuestos

Resolver los siguientes problemas por los métodos que se indican a la derecha

6.1 $\int_0^{3\pi/20}[sen(5x+1)]dx$, método trapecial (n = 20)

6.2 $\int_0^4 xe^{2x}dx$, método de Simpson con n = 10

6.3 $\int_0^3 \frac{e^x senx}{1+x^2}dx$, método trapecial con n =12

6.4 $\int_{-3}^{3} \frac{2}{1+2x^2}dx$, método de Simpson con n = 8

6.5 $\int_0^{\pi}(8+5senx)dx$, método de Romberg con tol = 0.0001

6.6 $\int_0^1 15.3^{2.5x}dx$, método de Romberg con tol = 0.001

6.7 $\int_0^{10}(10+2x-6x^2+5x^4)dx$, cuadratura de Gauss con m =3 y analíticamente.

6.8 $\int_{-3}^{5}(1-x-4x^3+3x^5)dx$, cuadratura de Gauss con m = 4

6.9 $\int_0^{\pi/2}\frac{senx}{\sqrt{1-0.25sen^2x}}dx$, por todos lo métodos y compare resultados.

6.10 $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$, por todos los métodos y compare resultados.

En los problemas siguientes (6.11 a 6.16), primero trate de resolverlos con sus conocimientos de cálculo integral, es decir, use los métodos analíticos para encontrar la solución. Podrá comprobar que son difíciles de resolver, por no decir imposibles; si es así, aplique el método numérico que le asegure un resultado satisfactorio.

6.11 $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{senx}{x}dx$, por dos métodos y compare resultados.

6.12 $\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx$, por dos métodos y compare resultados.

6.13 $\int_0^{1.8} \sqrt{1+x^3}\,dx$, por dos métodos y compare resultados.

6.14 $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x^2}\,dx$, por dos métodos y compare resultados.

6.15 $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$, por dos métodos y compare resultados.

6.16 $\int_0^{\pi/2} \sqrt{senx}\,dx$, por dos métodos y compare resultados.

6.17 Demuestre que el valor exacto de $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \pi$

6.18 Resuelva, por el método de Simphson (n =20) y Romberg (ε = 0.0001), la integral:

$$\int_2^5 5^{e^x}\,dx$$

Capítulo 7

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

7.1 Generalidades

Una ecuación diferencial se define como aquella que involucra derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes. Las ecuaciones diferenciales se clasifican en:

- Ecuaciones diferenciales ordinarias y,
- Ecuaciones diferenciales parciales

Ejemplos:

$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$, ecuación diferencial ordinaria

$\frac{d^4y}{dx^4} + 5\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 3x = sen(t)$, ecuación diferencial ordinaria

$\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial t} = U$, ecuación diferencial parcial

$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$, ecuación diferencial parcial

Una ecuación diferencial ordinaria de orden *n*, con variable dependiente ***y*** y variable independiente ***x***, es una ecuación diferencial que puede ser expresada, en la forma:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x)$$

para $a_0(x) \neq 0$.

Ejemplos:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + x^2\frac{d^3 y}{dx^3} + x^3\frac{dy}{dx} = xe^x$$

Observaciones

Primera.- La variable dependiente *y* y sus derivadas ocurren solamente a la primer potencia.
Segunda.- No hay productos de *y* y/o cualquiera de sus derivadas.
Tercera.- La variable dependiente *y* no es función trascendente.
Una ecuación diferencial ordinaria no lineal es aquella que, no cumple una o todas las recomendaciones anteriores, por ejemplo,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 5y^2 = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5y(\frac{dy}{dx})^2 + 6y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5y\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

La aproximación numérica, a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, es notable en el sentido de que cualquiera de la enorme variedad de técnicas numéricas disponibles pueden ser aplicadas, virtualmente a cualquier ecuación diferencial. En las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y, en las condiciones de frontera o condiciones iniciales, rara vez se requiere modificación a las técnicas numéricas. La técnica numérica posteriormente puede ser virtualmente

cambiada, sin tomar en consideración la ecuación diferencial por ser resuelta, desde luego, en marcado contraste al problema de dificultad para encontrar una solución analítica exacta, a una ecuación diferencial. De igual manera los sistemas lineales pueden, algunas veces, presentar grandes obstáculos para encontrar una técnica analítica adecuada y algunas ecuaciones diferenciales lineales; la mayoría no lineales, son virtualmente imposibles de resolver con los métodos analíticos exactos. Posteriormente es posible encontrar soluciones aproximadas a tales problemas, pero la exactitud de las soluciones aproximadas puede, rara vez, ser propiamente adecuada.

Mientras que las técnicas numéricas, para ecuaciones diferenciales ordinarias son muy poderosas y pueden ser aplicadas a una gran variedad de problemas, debe tenerse presente que tales métodos numéricos pueden tener dificultades inherentes propias, como se verá más adelante.

En esta sección introducimos ciertas bases, de métodos numéricos, para la aproximación de la solución de un problema de valor inicial, que se presenta con el siguiente modelo matemático:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (7\text{-}1)$$

y la condición inicial

$$y(x_0) = y_0 \qquad (7\text{-}2)$$

Los métodos numéricos emplean la ecuación diferencial (7-1) y la condición inicial (7-2), para obtener aproximaciones de los valores de ***y*** correspondientes a varios valores seccionados de ***x***. Para ser más explícito, sea denotada por *y* la solución del problema y *h* un incremento positivo de *x*. La condición inicial (7-2) nos expresa que $y = y_0$ en $x = x_0$. Un método numérico empleará la ecuación diferencial (7-1) y la condición inicial (7-2) para aproximar, sucesivamente los valores de *y* en $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, etc. Denotaremos esos valores aproximados de *y* por y_1, y_2, y_3, ..., respectivamente; es decir, denotamos por y_n el valor aproximado de *y* en $x = x_n = x_0 + nh$ (n = 1, 2, 3, 4,...,). Ahora todo lo que conocemos, acerca de *y* antes de iniciar es que $y = y_0$ en $x = x_0$. Con el objeto de empezar, necesitamos un método que requiera *solamente* el valor de y_n a fin de obtener el siguiente valor de *y*, es decir, y_{n+1}. Podemos aplicar tal método con $n = 0$ y usar el valor de y_0 para estimar el valor de y_1. Un método que use solamente y_n para encontrar y_{n+1} y que, por lo tanto, nos permita iniciar, es llamado *método de arranque*. Una vez que hemos usado un método de arranque para obtener y_1, podemos repetir con n = 1 para obtener y_2, con n =2, para encontrar y_3 y, así sucesivamente. Sin embargo, una vez que se han calculado varios valores de *y*, frecuentemente es conveniente cambiar a un método, en el cual se use y_n y uno o más valores anteriores y_{n-1}, y_{n-2},...para encontrar el siguiente valor de y_{n+1}. Tal método que nos permita continuar, una vez que hemos conseguido iniciar suficientemente, es llamado *método de continuación*. La mayoría de nuestra atención, en este texto, será para los métodos de arranque.

Nuestro principal objetivo, en esta sección, es presentar los detalles de ciertos métodos básicos para resolver problemas de valor inicial de primer orden. En general, no deberíamos considerar la justificación teórica de esos métodos, ni deberíamos entrar en discusiones detalladas de temas, tales como *error* y *exactitud*.
A continuación se presenta un problema simple de valor inicial que podría usarse para propósito de ilustración a lo largo de esta sección. Sea el problema:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y \qquad (7\text{-}3)$$

con y(0) = 1 (7-4)

Se observa que se trata de una ecuación diferencial lineal y, por consiguiente, puede ser resuelta de manera exacta. De acuerdo con los métodos analíticos, la solución exacta queda.

$$y = -2(x+1) + Ce^{x} \qquad (7\text{-}5)$$

donde C es una constante arbitraria. Aplicando la condición inicial (7-4) a (7-5), se encuentra que C = 3, por tanto, la solución exacta de (7-3) es:

$$y = -2(x+1) + 3e^{x} \qquad (7\text{-}6)$$

Se ha escogido este problema sencillo para propósitos ilustrativos, por dos razones importantes. *Primera*, la ecuación diferencial (7-3) es simple, a fin de que los métodos numéricos pueden serle aplicados sin involucrar una introducción a la computación, la cual podría oscurecer los pasos importantes del método, para un principiante. *Segunda*, puesto que la solución exacta (7-6), del problema, ha sido encontrada podemos comparar los valores numéricos obtenidos con la solución aproximada y los de la solución exacta, con lo que se puede aumentar alguna comprensión en la veracidad de los métodos numéricos.
Por supuesto, en la práctica no deberíamos resolver una ecuación diferencial lineal simple tal como (7-3) con un método numérico. Los métodos de esta sección son diseñados para ecuaciones diferenciales, que no pueden ser resueltas exactamente o para aquellas que prácticamente son difíciles de resolver.

7.2 Métodos de solución

Los métodos numéricos que se describen, en esta sección, para resolver ecuaciones diferenciales no lineales o ecuaciones diferenciales lineales que tenga dificultades para su resolución con los métodos analíticos tradicionales, son:

- Euler
- Euler modificado
- Heun
- Runge-Kutta
    1. Segundo orden
    2. Tercer orden
    3. Cuarto orden
    4. Orden superior

Después de la presentación de estos métodos, se resuelven problemas para un mejor entendimiento de los mismos.

7.2.1 Método de Euler

Consideremos que la ecuación diferencial (7-1) se escribe en diferencias finitas hacia delante, quedando,

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = f(x_i, y_i) \qquad (7\text{-}7)$$

despejando y_{i+1}, se tiene:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x * f(x_i, y_i) \qquad (7\text{-}8)$$

Ecuación (7-8) es conocida como *ecuación de Euler*. Note usted que $f(x_i, y_i)$ representa la ecuación diferencial por resolver, por lo que, ecuación (7-8) puede escribirse también como,

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x\, y' \qquad (7\text{-}9)$$

La ventaja de esta ecuación es que es muy fácil de aplicar, ya que, la parte derecha de ella es conocida, puesto que, para i = 0 se conoce la condición inicial dada por (7-2) y el método de Euler proporciona y_1 mediante una extrapolación lineal, dentro del intervalo Δx (Fig. 7.1). Una vez conocido y_1 y $x_1 = x_0 + \Delta x$; con estos nuevos

valores se obtiene y_2 y $x_2 = x_0 + 2\Delta x$ y así sucesivamente. Sin embargo, se ha observado que para Δx grandes, las estimaciones de y_{i+1}, tienen mucho error al comparar los resultados obtenidos con los valores que arroja la solución exacta; de esta manera, su aplicación sólo se hará para tener una aproximación inicial de la solución y para aplicaciones de gran trascendencia se recomienda el uso de otro método ó hacer que Δx tienda a cero.

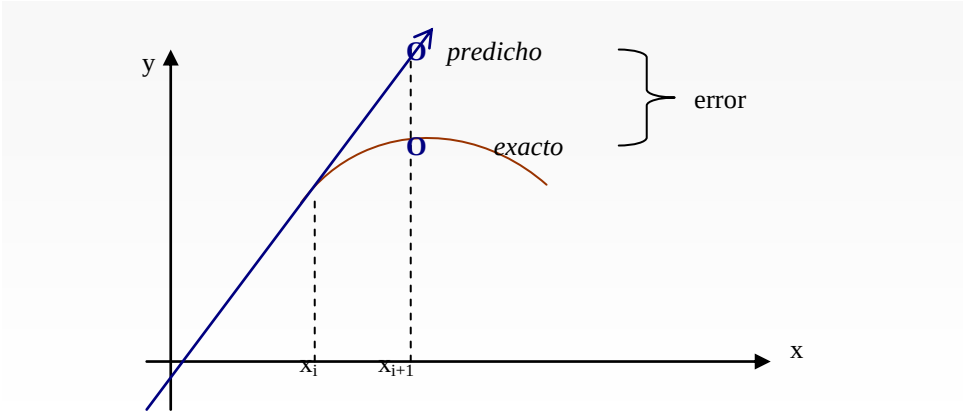


Fig. 7.1 Método de Euler

7.2.1.1 Análisis de error en el Método de Euler

La solución numérica de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) incluye dos tipos de errores: 1. *Errores por truncamiento* causados por la naturaleza de los métodos empleados en la aproximación a los valores de *y*, y 2. *Errores por redondeo* causados por lo limitado de dígitos o de cifras significativas que puede retener la computadora usada.

Los errores de truncamiento se componen de dos partes. La primera está compuesta por un *error de truncamiento local*, que resulta al aplicar un paso del método; la segunda es un *error de propagación* que resulta de las aproximaciones producidas durante los anteriores. La suma de los dos errores es el *error de truncamiento global*. El error de truncamiento se puede obtener derivando el método de Euler directamente de la expansión de la serie de Taylor, alrededor del punto inicial (x_i, y_i).

$$y_{i+1} = y_i + y_i'\Delta x + \frac{y_i''}{2}(\Delta x)^2 + \ldots + \frac{y_i^{(n)}}{n!}(\Delta x)^n + R_n \qquad (7\text{-}10)$$

donde $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ y R_n es el término residual definido como,

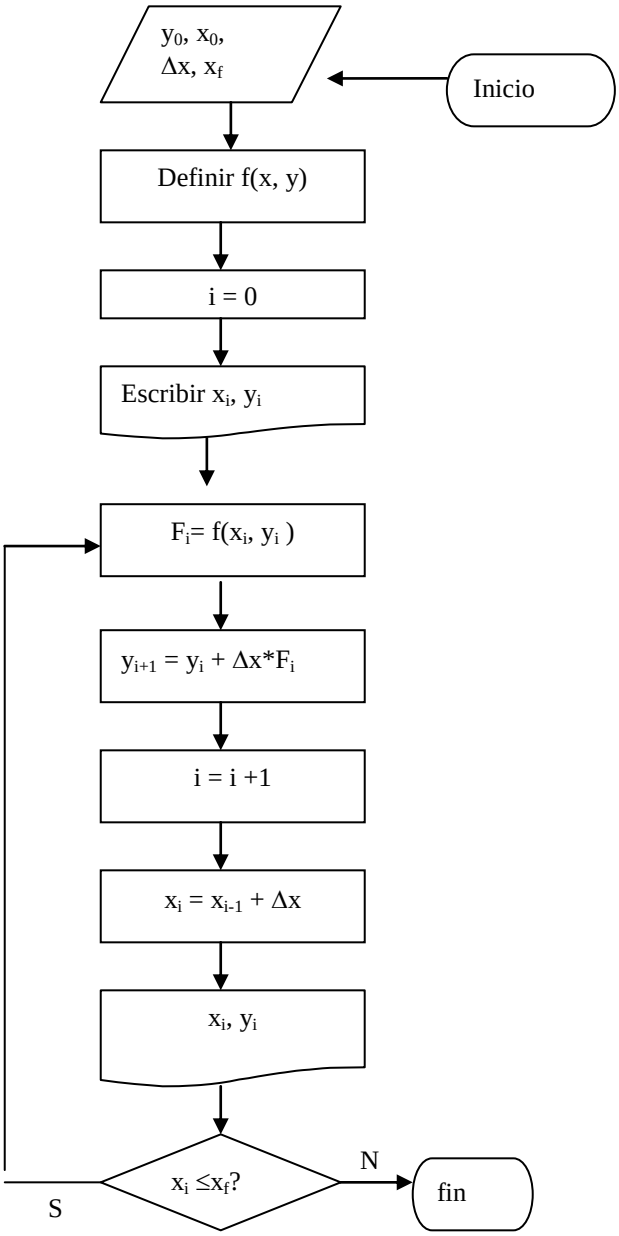


DIAGRAMA DE FLUJO METODO DE *EULER*

$$R_n = \frac{y^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1} \qquad (7\text{-}11)$$

en esta ecuación ξ, está dentro del intervalo definido por x_i y x_{i+1}. Se puede desarrollar una forma alternativa, sustituyendo la ecuación (7-1) en las ecuaciones (7-10) y (7-11), quedando:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x + \frac{f'(x_i, y_i)}{2}(\Delta x)^2 + \frac{f''(x_i, y_i)}{3!}(\Delta x)^3 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!}(\Delta x)^n + \theta(\Delta x^{n+1}) \qquad (7\text{-}12)$$

donde $\theta(\Delta x^{n+1})$ especifica que el error de truncamiento local es proporcional al tamaño del paso elevado a la (n+1)-ésima potencia.
Comparando ecuación (7-8) con ecuación (7-12), se nota que el error de truncamiento local Ev, está dado por:

$$E_v = \frac{f'(x_i, y_i)}{2}(\Delta x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!}(\Delta x)^n + \theta(\Delta x^{n+1}) \qquad (7\text{-}13)$$

para un Δx suficientemente pequeño, los errores dados por esta ecuación decrecen a medida que el *orden crece* y, el resultado, a menudo se representa por,

$$E_a = \frac{y_i''}{2}(\Delta x)^2 \quad \text{ó} \quad E_a = \theta(\Delta x)^2 \qquad (7\text{-}14)$$

donde E_a es el error de truncamiento local aproximado.
Aunque la serie de Taylor es un medio para cuantificar el error en el método de Euler, tiene muchas limitaciones asociadas con su uso para este propósito, entre las cuales pueden citarse:

- La serie de Taylor sólo proporciona una aproximación local del error por truncamiento, es decir, el error generado durante el primer paso del método. No proporciona una medida de la propagación y, por ello, no es posible estimar el error global por truncamiento.

- En problemas reales, usualmente se trata con funciones más complicadas que un simple polinomio; por consiguiente, las derivadas necesarias para evaluar la serie de Taylor no siempre son fáciles de obtener.

Aunque estas limitaciones no ayudan en el análisis exacto de errores en la mayor parte de los problemas prácticos, esta serie proporciona una idea valiosa del comportamiento del método de Euler. De acuerdo con ecuación (7-14), se ve que el error local es proporcional al cuadrado del tamaño del paso (Δx) y la primer derivada de la ecuación diferencial. Estas observaciones conducen a las siguientes conclusiones:

1. El error se puede reducir disminuyendo Δx.
2. El método proporciona predicciones libres de error, si la función fundamental (es decir, la solución de la ecuación diferencial) es lineal, ya que la segunda derivada de una línea recta es nula. De aquí que el método de Euler se conozca como *método de primer orden*.

7.2.1.2 Modificaciones y mejoras al Método de Euler

Una fuente fundamental de error en el método de Euler es que la derivada, al principio del intervalo (Δx), se supone que se aplica a través del intervalo entero, lo cual es falso, ya que, se predice el valor de y_{i+1} con una recta (Fig. 7.1). Existen dos modificaciones simples para ayudar a evitar este inconveniente, que por su sencillez se describen a continuación.

7.2.2 Método mejorado del polígono – Euler modificado

Este método usa el método de Euler para predecir un valor de *y* en el punto medio del intervalo, es decir, obtiene,

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{1}{2}\Delta x * f(x_i, y_i) \qquad (7\text{-}15)$$

con este valor se calcula la pendiente en el punto medio de Δx (Fig. 7.2, a), con,

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) \qquad (7\text{-}16)$$

la cual se supone representa una aproximación válida de la pendiente promedio en el intervalo completo Δx. Ahora esta pendiente se usa en la ecuación predictora de Euler para extrapolar linealmente de xi a x_{i+1}; por lo que,

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \; f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) \qquad (7\text{-}17)$$

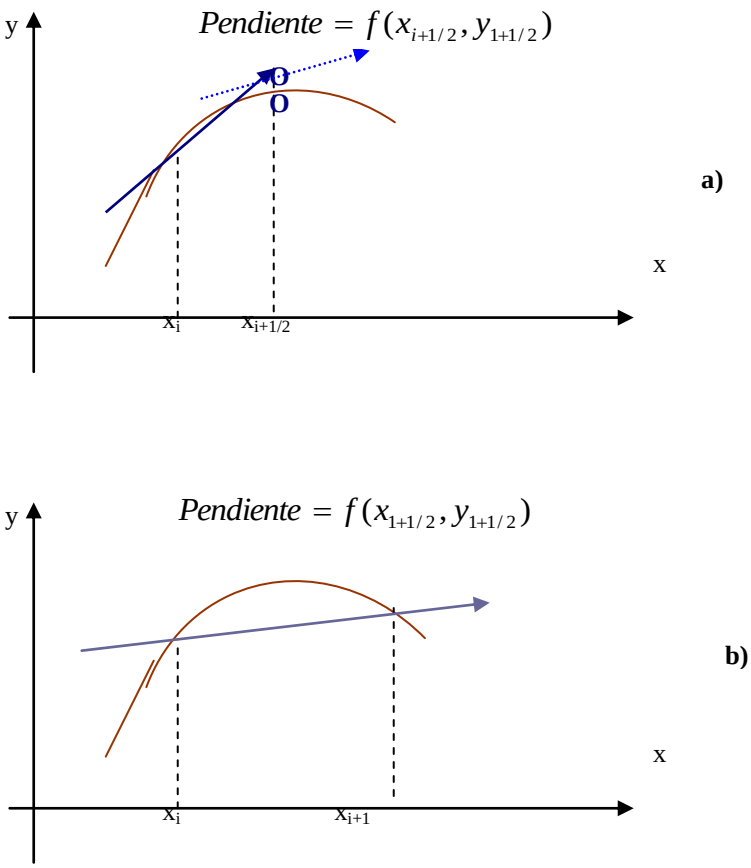


Fig. 7.2 Esquema gráfico del método de Euler modificado

El método del polígono mejorado es superior al método de Euler, ya que éste utiliza una aproximación de la pendiente en el punto medio del intervalo de predicción.

7.2.3 Método de Heun

Este método calcula las dos derivadas en el intervalo, una en el punto inicial (x_i, y_i) y otra en el punto final del intervalo (x_{i+1}, y_{i+1}). En seguida se promedian las dos derivadas con lo que se obtiene una aproximación mejorada, de la pendiente en el intervalo completo (Fig. 7.3).
El método estándar se detendría en este punto, sin embargo, en el método de Heun, esta ecuación sólo es una predicción intermedia, por lo que se llama *ecuación predictora*. Con este valor se calcula una pendiente aproximada al final del intervalo, esto es:

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y^E_{i+1}) \qquad (7\text{-}18)$$

En el método de Euler, la pendiente al principio de un intervalo, se estima con,

$$y'_i = f(x_i, y_i)$$

la cual se usa para extrapolar linealmente a y_{i+1}, quedando:

$$y^E_{i+1} = y_i + \Delta x * f(x_i, y_i) \qquad (7\text{-}19)$$

Tomando en cuenta que la pendiente promedio, es la pendiente que se extrapola para predecir el valor final de y_{i+1}, entonces la ecuación de Euler se transforma en:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \left[\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^E_{i+1})}{2} \right] \qquad (7\text{-}20)$$

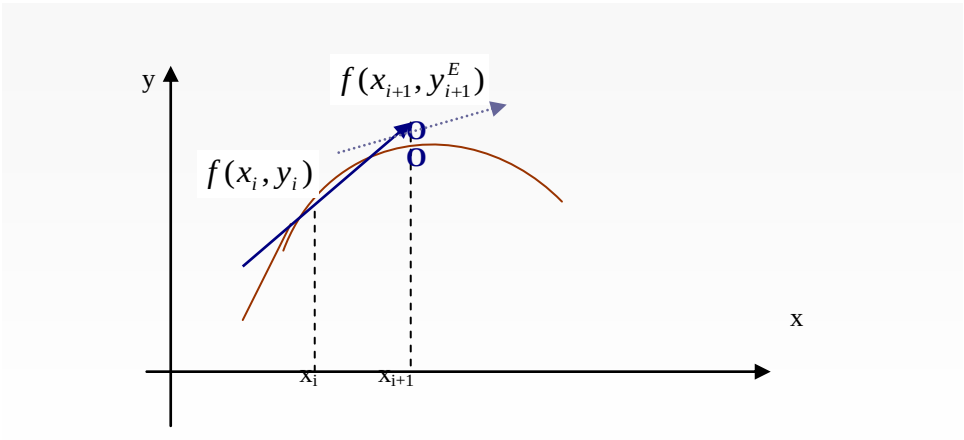
Que se llama *ecuación correctora*. En consecuencia, el método de Heun es un método *predictor – corrector*; por esta razón es común encontrar representado este método como:

Predictor-→ $y^E_{i+1} = y_i + \Delta x * f(x_i, y_i)$ (7-8)

Corrector→ $y_{i+1} = y_i + \Delta x \left[\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^E_{i+1})}{2} \right]$ (7-20)

Para calcular el error de dos iteraciones consecutivas se usa el criterio dado por,

$$\varepsilon_a = \left| \frac{y_{i+1}^{j} - y_{i+1}^{j-1}}{y_{i+1}^{j}} \right| \qquad (7\text{-}21)$$



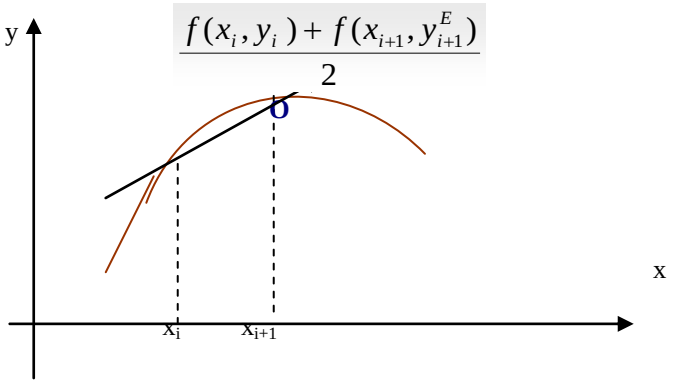


Fig. 7.3 Método de Heun

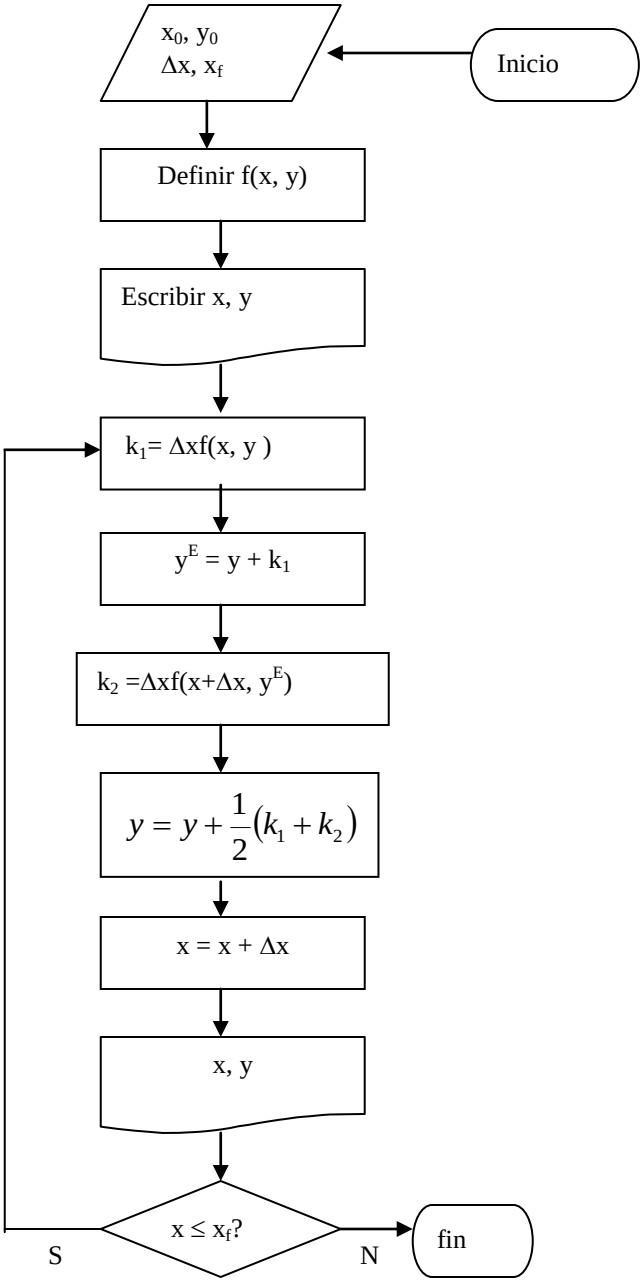


DIAGRAMA DE FLUJO METODO DE *HEUN*

7.2.4 Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta tienen la exactitud del esquema completo de la serie de Taylor, sin requerir del cálculo de las derivadas de orden superior. Existen muchas variaciones de estos métodos, pero todas ellas se pueden ajustar a la ecuación.

$$y_{i+1} = y_i + \Phi(x_i, y_i, \Delta x)\Delta x \qquad (7\text{-}22)$$

donde $\Phi(x_i, y_i, \Delta x)$ se le llama *función de incremento* y puede interpretarse como el promedio de la pendiente sobre el intervalo Δx. La función de incremento se puede generalizar con,

$$\Phi = a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + \ldots + a_nk_n \qquad (7\text{-}23)$$

en esta ecuación las a_n son constantes y las k_n quedan definidas como,

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad (7\text{-}24)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1\Delta x, y_i + q_{11}k_1\Delta x) \qquad (7\text{-}25)$$

$$k_3 = f(xi + p_2\Delta x, y_i + q_{21}k_1\Delta x + q_{22}k_2\Delta x) \qquad (7\text{-}26)$$

.
.
.

$$k_n = f(x_i + p_{n-1}\Delta x, y_i + q_{n-1,1}k_1\Delta x + q_{n-1,2}k_2\Delta x + \ldots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}\Delta x) \qquad (7\text{-}27)$$

Obsérvese que las k son relaciones recurrentes; o sea que, k_1 aparece en la ecuación de k_2. En el cálculo de k_3 aparecen k_1 y k_2, etc. Esta recurrencia hace que los métodos de Runge - Kutta sean fáciles de programar.
Se pueden desarrollar varios métodos de Runge - Kutta empleando una cantidad diferente de términos en la función de incremento (7-23), especificados por *n*. Por consiguiente el método de Runge - Kutta de *primer orden* con *n* = 1, corresponde al método de Euler. Una vez que se ha escogido *n*, los valores de las constantes **a**, de *p* y *q* se evalúan igualando la ecuación (7-22) a los términos en una expansión de la serie de Taylor. Por consiguiente, *n* representa por lo general el orden del método, al menos en los métodos de orden menor que el cuarto.

7.2.4.1 Método de Runge-Kutta de segundo orden

La versión de segundo orden de la ecuación (7-22) es

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x(a_1 k_1 + a_2 k_2) \qquad (7\text{-}28)$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad (7\text{-}29)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 \Delta x, y_i + q_{11} k_1 \Delta x) \qquad (7\text{-}30)$$

de la serie de Taylor se llega (ver apéndice **A**), a:

$a_1 + a_2 = 1$
$a_2 p_1 = \frac{1}{2} = a_2 q_{11} = \frac{1}{2}$

En este caso y debido a que se tienen *tres ecuaciones* con *cuatro incógnitas*, se debe suponer el valor de una de ellas, para determinar las otras tres; por ejemplo, si se propone el valor de a_2, entonces resulta que,

$$a_1 = 1 - a_2 \quad y, \qquad (7\text{-}31)$$

$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2} \qquad (7\text{-}32)$$

De lo anterior se concluye que existe un número infinito de métodos de Runge-Kutta de *segundo orden*, ya que, se puede escoger una cantidad infinita de valores para a_2; con la garantía de que cada versión llevaría a los mismos resultados, si la solución de la EDO es cuadrática, lineal o constante; es decir, que f(x, y) sea cuando más lineal.

7.2.4.1.1 Método de Runge-Kutta de segundo orden con a_2 =1/2 -Método de Heun con un corrector simple.

En este caso las ecuaciones (7-31) conducen a los siguientes valores: a_1 =1/2, p_1=q_{11}=1; por lo tanto, ecuaciones (7-30) se transforman en,

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x\left(\tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{2}k_2\right) = y_i + \frac{\Delta x}{2}\left(k_1 + k_2\right) \qquad (7\text{-}33)$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad (7\text{-}34)$$

$$k_2 = f(x_i + \Delta x, y_i + k_1 \Delta x) \qquad (7\text{-}35)$$

Obsérvese que k_1 es la pendiente al principio del intervalo y k_2 la pendiente al final Δx. Por tanto, este método corresponde al método de Heun con una sola iteración del corrector.

7.2.4.1.2 Método de Runge-Kutta de segundo orden con a_2 =1-Método del polígono.

Si $a_2 = 1$, las ecuaciones del método quedan así:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x k_2 \qquad (7\text{-}36)$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad (7\text{-}37)$$

$$k_2 = f(x_i + \tfrac{1}{2}\Delta x, y_i + \tfrac{1}{2}k_1 \Delta x) \qquad (7\text{-}38)$$

Con estas características, se observa que este conjunto de ecuaciones corresponde al método mejorado del polígono, es decir, es el método de Euler modificado.

7.2.4.1.3 Método de Runge-Kutta de segundo orden con a_2 =2/3-Método de Raltson.

En Raltson (1962) y Rabinowitz (1978) llegaron a la conclusión que escoger a_2 = 2/3 minimiza el error de truncamiento de los algoritmos de RK de segundo orden y, las ecuaciones son:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{3}\Delta x(k_1 + 2k_2) \qquad (7\text{-}39)$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad (7\text{-}40)$$

$$k_2 = f(x_i + \tfrac{3}{4}\Delta x,\ y_i + \tfrac{3}{4}k_1\Delta x) \qquad (7\text{-}41)$$

Algunos autores prefieren escribir estas ecuaciones de la siguiente forma:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2) \qquad (7\text{-}39)$$

donde

$$k_1 = \Delta x * f(x_i, y_i) \qquad (7\text{-}40)$$

$$k_2 = \Delta x * f(x_i + \tfrac{3}{4}\Delta x,\ y_i + \tfrac{3}{4}k_1) \qquad (7\text{-}41)$$

En cualquier caso los resultados finales son los mismos; por lo que se deja al estudiante la libertad de aplicar el modelo que más se le facilite.

7.2.4.1.4 Método de Runge-Kutta de tercer orden

Se puede llevar a cabo una derivación análoga a la del método de segundo orden, para *n* = 3. Los resultados de esta deducción a través de la serie de Taylor, indica que se llega a un sistema de seis ecuaciones con ocho incógnitas, por consiguiente se deben suponer *valores a dos incógnitas*, para poder resolver el sistema. La versión más común que resulta se escribe como,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\Delta x[k_1 + 4k_2 + k_3] \qquad (7\text{-}42)$$

donde

$k_1 = f(x_i, y_i)$ (7-43)

$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}k_1\Delta x)$ (7-44)

$k_3 = f(x_i + \Delta x, y_i - \Delta x k_1 + 2\Delta x k_2)$ (7-45)

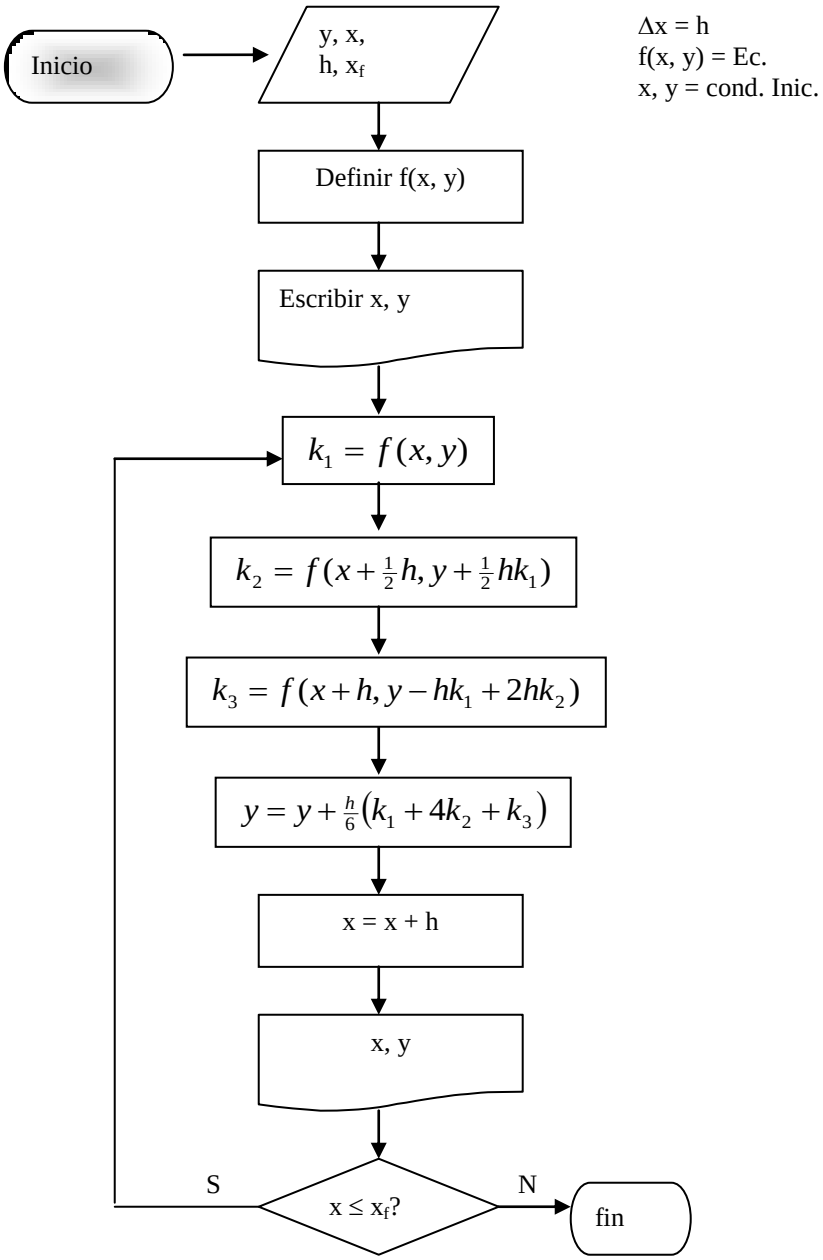


DIAGRAMA DE FLUJO METODO DE *RK-3*

Otra forma de escribir este grupo de ecuaciones (ref. 3), obteniendo el mismo resultado final (se recomienda al estudiante que los ejemplos resueltos los compruebe por esta versión), es,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left[k_1 + 4k_2 + k_3\right] \qquad (7\text{-}42)$$

donde

$$k_1 = \Delta x * f(x_i, y_i) \qquad (7\text{-}43)$$

$$k_2 = \Delta x * f(x_i + \tfrac{1}{2}\Delta x,\ y_i + \tfrac{1}{2} k_1) \qquad (7\text{-}44)$$

$$k_3 = \Delta x * f(x_i + \Delta x, y_i - k_1 + 2k_2) \qquad (7\text{-}45)$$

Se hace notar que los métodos de RK de tercer orden tienen errores globales de $\vartheta(\Delta x^4)$ y conducen a resultados exactos cuando la solución a la ecuación diferencial ordinaria es de tercer orden.

7.2.4.1.5 Método de Runge-Kutta de cuarto orden

Los métodos de RK más populares, por su exactitud y sencillez, son los de cuarto orden. Al igual que en los métodos anteriores, existe un número infinito de versiones. Sin embargo, el método clásico de RK de cuarto orden es el representado por el siguiente grupo de ecuaciones.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{6}\left[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4\right] \qquad (7\text{-}46)$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad (7\text{-}47)$$

$$k_2 = f(x_i + \tfrac{1}{2}\Delta x, y_i + \tfrac{1}{2}\Delta x k_1) \qquad (7\text{-}48)$$

$$k_3 = f(x_i + \tfrac{1}{2}\Delta x, y_i + \tfrac{1}{2}\Delta x k_2) \qquad (7\text{-}49)$$

$$k_4 = f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta x k_3) \qquad (7\text{-}50)$$

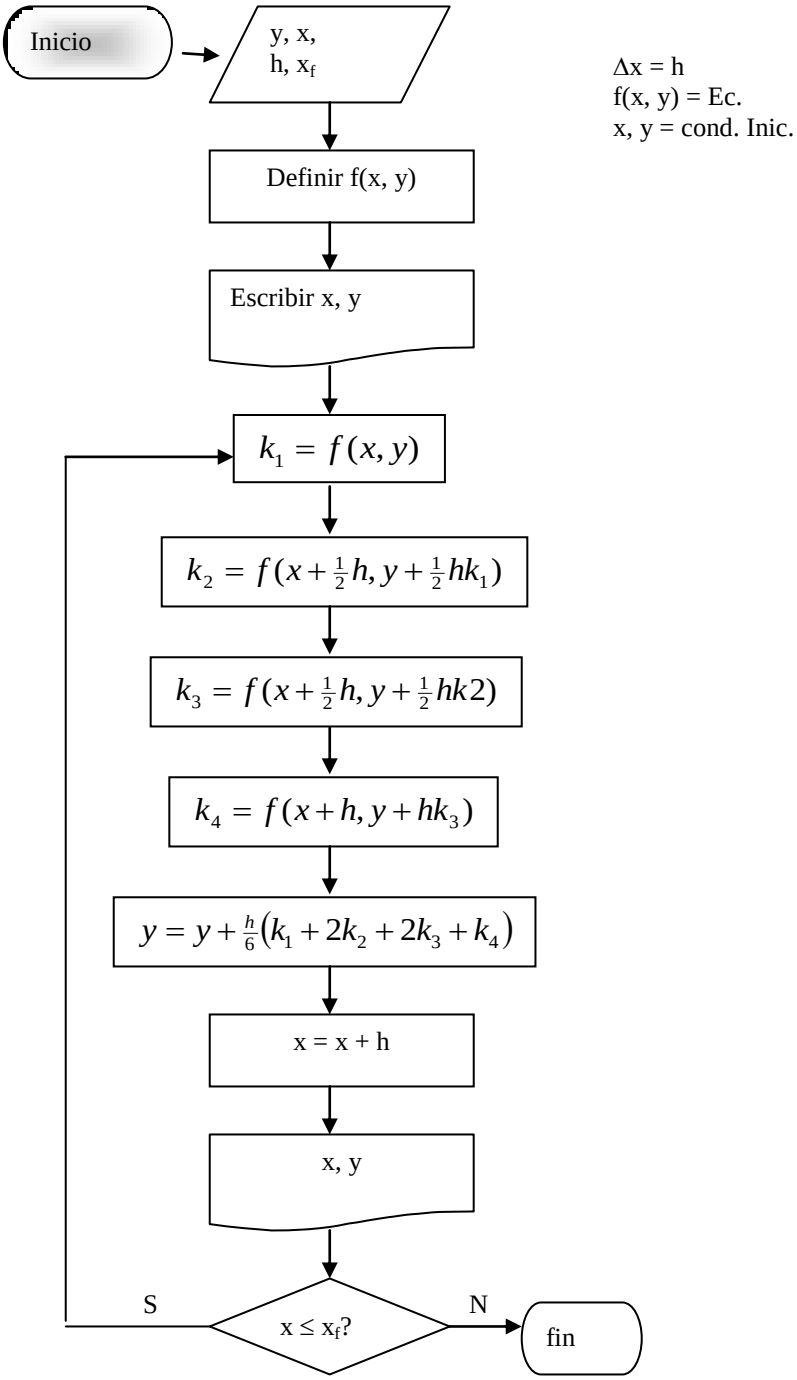


DIAGRAMA DE FLUJO METODO DE *RK-4*

Al igual que en el método anterior, estas ecuaciones también se pueden escribir como.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4\right] \qquad (7\text{-}46)$$

donde

$$k_1 = \Delta x * f(x_i, y_i) \qquad (7\text{-}47)$$

$$k_2 = \Delta x * f(x_i + \tfrac{1}{2}\Delta x, y_i + \tfrac{1}{2}k_1) \qquad (7\text{-}48)$$

$$k_3 = \Delta x * f(x_i + \tfrac{1}{2}\Delta x, y_i + \tfrac{1}{2}k_2) \qquad (7\text{-}49)$$

$$k_4 = \Delta x * f(x_i + \Delta x, y_i + k_3) \qquad (7\text{-}50)$$

7.2.4.1.6 Método de Runge-Kutta de orden superior

Donde se requiera de mayor exactitud, aunque el método de RK de cuarto orden es muy exacto, se recomienda el método de Runge-Kutta de *quinto orden, Butcher* (1964). Butcher encontró que los valores de *y* se obtienen con:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{90}\left[7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6\right] \qquad (7\text{-}51)$$

en la que

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad (7\text{-}52)$$

$$k_2 = f(x_i + \tfrac{1}{4}\Delta x, y_i + \tfrac{1}{4}\Delta x k_1) \qquad (7\text{-}53)$$

$$k_3 = f(x_i + \tfrac{1}{4}\Delta x, y_i + \tfrac{1}{8}\Delta x k_1 + \tfrac{1}{8}\Delta x k_2) \qquad (7\text{-}54)$$

$$k_4 = f(x_i + \tfrac{1}{2}\Delta x, y_i - \tfrac{1}{2}\Delta x k_2 + \Delta x k_3) \qquad (7\text{-}55)$$

$$k_5 = f(x_i + \tfrac{3}{4}\Delta x, y_i + \tfrac{3}{16}\Delta x k_1 + \tfrac{9}{16}\Delta x k_4) \qquad (7\text{-}56)$$

$$k_6 = f(x_i + \Delta x, y_i - \tfrac{3}{7}\Delta x k_1 + \tfrac{2}{7}\Delta x k_2 + \tfrac{12}{7}\Delta x k_3 - \tfrac{12}{7}\Delta x k_4 + \tfrac{8}{7}\Delta x k_5) \qquad (7\text{-}57)$$

Siguiendo la misma lógica que en los casos de RK de orden 3 y orden 4, estas ecuaciones se escriben (obteniendo, desde luego, el mismo resultado), de la forma que en seguida se establece:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}\left[7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6\right] \qquad (7\text{-}51)$$

en donde

$$k_1 = \Delta x * f(x_i, y_i) \qquad (7\text{-}52)$$

$$k_2 = \Delta x * f(x_i + \tfrac{1}{4}\Delta x, y_i + \tfrac{1}{4}k_1) \qquad (7\text{-}53)$$

$$k_3 = \Delta x * f(x_i + \tfrac{1}{4}\Delta x, y_i + \tfrac{1}{8}k_1 + \tfrac{1}{8}k_2) \qquad (7\text{-}54)$$

$$k_4 = \Delta x * f(x_i + \tfrac{1}{2}\Delta x, y_i - \tfrac{1}{2}k_2 + k_3) \qquad (7\text{-}55)$$

$$k_5 = \Delta x * f(x_i + \tfrac{3}{4}\Delta x, y_i + \tfrac{3}{16}k_1 + \tfrac{9}{16}k_4) \qquad (7\text{-}56)$$

$$k_6 = \Delta x * f(x_i + \Delta x, y_i - \tfrac{3}{7}k_1 + \tfrac{2}{7}k_2 + \tfrac{12}{7}k_3 - \tfrac{12}{7}k_4 + \tfrac{8}{7}k_5) \qquad (7\text{-}57)$$

Problemas resueltos

7.1 Resolver la ecuación diferencial dada, por todos los métodos vistos y comparar los resultados obtenidos, en cada caso, con la solución exacta.

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y$$

con y(0) = 1, desde x = 0 hasta x = 5

Solución. Como se dijo en la sección 7.1, la ecuación diferencial propuesta como ejemplo, tiene como solución exacta

$$y = -2(x+1) + 3e^x$$

que servirá para comparar los resultados obtenidos y poder cuantificar la exactitud del método de solución usado. Para este ejemplo, $f(x_i, y_i) = 2x_i + y_i$; el punto inicial conocido es $x_0 = 0$ y $y_0 = 1$. Se usará como tamaño de paso $\Delta x = 0.50$.

Solución por el Método de Euler tradicional

Ecuación (7-8) se escribe como:

$y_{i+1} = y_i + \Delta x * f(x_i, y_i) = y_i + 0.5*(2x_i + y_i)$

sustituyendo las condiciones iniciales, se tiene:

$y_{0+1} = y_0 + 0.5*(2x_0 + y_0) = 1 + 0.5[2(0)+1] = 1.50$, ($x_1 = x_0 + \Delta x = 0 + 0.50 = 0.50$)

Ahora, con estos valores se obtiene:

$y_{1+1} = y_1 + 0.5*(2x_1 + y_1) = 1.5 + 0.5[2(0.5)+1.5] = 2.75$

$y_2 = 2.75$ (aquí x = 1.00), etc.

Para calcular los valores exactos se sustituyen los mismos valores de *x* usados en el método de Euler y se obtienen los valores de *y*, por ejemplo, para x = 0, se tiene:

$y = -2(x+1) + 3e^x = -2(0+1)+3e^0 = -2(0+1) +3(1) = 1$

para x = 0.50

$y = -2(x+1) + 3e^{x}$ = -2(0.50+1)+3e$^{0.5}$ = 1.946, etc.

Continuando de la misma manera, es decir, usando la ecuación de Euler y la solución analítica, se llegó a los resultados.

x	y_{Euler}	y_{Exacta}	E(%)
0.000	1.000	1.000	0.00
0.500	1.500	1.946	22.93
1.000	2.750	4.155	33.81
1.500	5.125	8.445	39.31
2.000	9.188	16.167	43.17
2.500	15.781	29.547	46.59
3.000	26.172	52.257	49.92
3.500	42.258	90.346	53.23
4.000	66.887	153.794	56.51
4.500	104.330	259.051	59.73
5.000	160.995	433.239	62.84

Note usted que este método es muy aproximada, ya que existe un alto porcentaje de error. En seguida se presenta una gráfica, para tener en forma objetiva la solución y reflejar el error relativo.

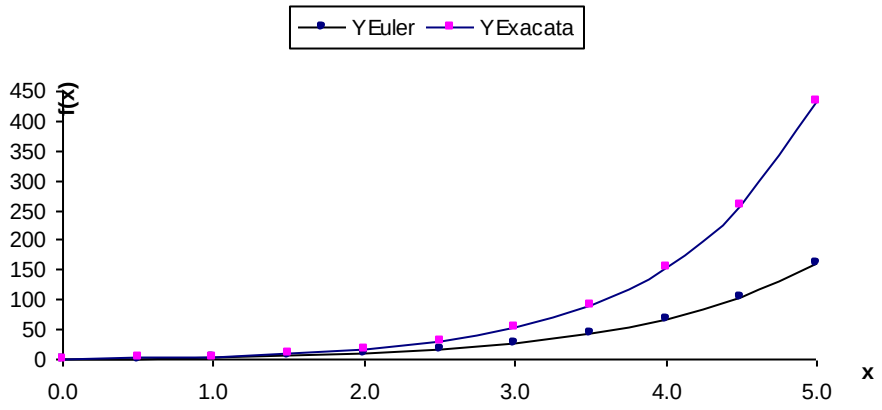


Figura del problema 7.1(Euler)

Solución por el Método de Euler modificado

En este caso, la predicción al final del intervalo se obtiene con ecuación (7-17); para ello se requiere calcular, en un paso intermedio, $f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$, mediante ecuación (7-13) con auxilio de ecuación (7-15); que para este problema quedan; con f(xi, yi) = $2x_i + y_i$, y(0) =1 y $\Delta x = 0.5$:

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{1}{2}\Delta x * f(x_i, y_i) = y_0 + 0.25*(2x_i + y_i) = 1 + 0.25[2*0 + 1] = 1.25$$

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) = 2x_{i+1/2} + y_{i+1/2} = 2(0.25) + 1.25 = 1.75$$

$$y_{0+1} = y_0 + \Delta x \; f(x_{0+1/2}, y_{0+1/2}) = 1 + 0.5*(1.75) = 1.875, \; (x_1 = 0.50).$$

Repitiendo el proceso, partiendo de los nuevos valores, se tiene:

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{1}{2}\Delta x * f(x_i, y_i) = 1.875 + 0.25*(2*0.5 + 1.875) = 2.594$$

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) = 2x_{i+1/2} + y_{i+1/2} = 2(0.75) + 2.594 = 4.094$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \; f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) = 1.875 + 0.5*(4.094) = 3.922, \text{ etc.}$$

Los resultados anteriores, y siguientes, se presentan en la siguiente tabla.

x	yExacta	yi+1/2	y´(i+1/2)	yEuler/modif	E(%)
0.000	1.000	1.000		1.000	0.00
0.500	1.946	1.250	1.750	1.875	3.66
1.000	4.155	2.594	4.094	3.922	5.61
1.500	8.445	5.402	7.902	7.873	6.77
2.000	16.167	10.591	14.091	14.919	7.72
2.500	29.547	19.648	24.148	26.993	8.65
3.000	52.257	34.991	40.491	47.238	9.60
3.500	90.346	60.548	67.048	80.762	10.61
4.000	153.794	102.703	110.203	135.864	11.66
4.500	259.051	171.830	180.330	226.029	12.75
5.000	433.239	284.786	294.286	373.172	13.86

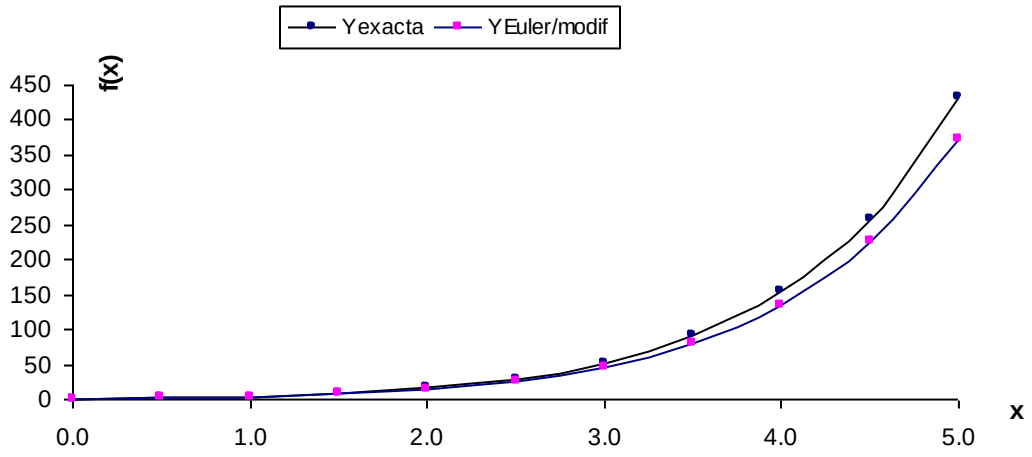


Figura del problema 7.1(Euler modif)

Solución por el método de Huen

Para esta aplicación, se usa ecuación (7-8) como predictor y ecuación (7-20) como corrector. Se tiene contemplado que $f(x_i, y_i) = 2x_i + y_i$; $y(0) = 1$ y $\Delta x = 0.5$. Por lo que la adaptación, del problema a resolver, queda.

$$f(x_i, y_i) = 2x_i + y_i$$

Predictor-→ $y_{i+1}^E = y_i + \Delta x * f(x_i, y_i) = y_i + 0.5*(2x_i + y_i)$

con

$$f(x_{i+1}, y_{i+1}^E) = 2x_{i+1} + y_{i+1}^E$$

Corrector→ $y_{i+1} = y_i + 0.50\left[\dfrac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^E)}{2}\right]$

Iniciando con $y_0 = 1$ y $x_0 = 0$ (valores iniciales), se tiene,

$f(x_i, y_i) = 2x_i + y_i$ = 2(0) + 1 = 1.00

$y_{i+1}^{E} = y_i + \Delta x * f(x_i, y_i)$ = 1 + 0.5*(2*0 +1) = 1.50

$f(x_{i+1}, y_{i+1}^{E}) = 2x_{i+1} + y_{i+1}^{E}$ = 2(0.5) + 1.50 = 2.50

finalmente el corrector conduce a,

Corrector→ y_{i+1} = 1.0 + 0.50$\left[\frac{1.00 + 2.50}{2}\right] = 1.875$

Repitiendo nuevamente el proceso, con x_1 = 0.5 y y_1 = 1.875, se tienen los siguientes resultados,

$f(x_i, y_i) = 2x_i + y_i$ = 2(0.5) + 1.875 = 2.875

$y_{i+1}^{E} = y_i + \Delta x * f(x_i, y_i)$ = 1.875 + 0.5*(2.875) = 3.3125

$f(x_{i+1}, y_{i+1}^{E}) = 2x_{i+1} + y_{i+1}^{E}$ = 2(1.0) + 3.3125 = 5.3125

finalmente el corrector conduce a,

Corrector→ y_{i+1} = 1.875 + 0.50$\left[\frac{2.875 + 5.3125}{2}\right] = 3.9219$

para la aproximación siguiente se parte del punto actual, es decir (1.0, 3.9219) llegando ahora a,

$f(x_i, y_i) = 2x_i + y_i$ = 5.92

$y_{i+1}^{E} = y_i + \Delta x * f(x_i, y_i)$ = 6.88

$f(x_{i+1}, y_{i+1}^{E}) = 2x_{i+1} + y_{i+1}^{E}$ = 9.88

finalmente el corrector conduce a,

Corrector→ y_{i+1} = 7.87, etc.

En tabla siguiente se presenta un resumen de los resultados obtenidos.

x	y_{Exacta}	f(x,y)	y^E=y+Dxf(x,y)	f(x,y^E)	y_{Heun}	E(%)
0.000	1.000	1.000			1.000	0.00
0.500	1.946	2.875	1.500	2.500	1.875	3.66
1.000	4.155	5.922	3.313	5.313	3.922	5.61
1.500	8.445	10.873	6.883	9.883	7.873	6.77
2.000	16.167	18.919	13.310	17.310	14.919	7.72
2.500	29.547	31.993	24.378	29.378	26.993	8.65
3.000	52.257	53.238	42.989	48.989	47.238	9.60
3.500	90.346	87.762	73.858	80.858	80.762	10.61
4.000	153.794	143.864	124.644	132.644	135.864	11.66
4.500	259.051	235.029	207.796	216.796	226.029	12.75
5.000	433.239	383.172	343.544	353.544	373.172	13.86

La figura es la misma que la de Euler modificado, por lo que no se incluye.

Solución usando métodos de RK de orden 2 - Heun con un corrector simple (a_2 = ½)

Las ecuaciones (7-33) a (7-35), adaptadas a la ecuación diferencial que se está resolviendo, son:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x\left(\tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{2}k_2\right) = y_i + \frac{0.5}{2}\left(k_1 + k_2\right)$$

con

$k_1 = f(x_i, y_i) = 2x_i + y_i$

$k_2 = f(x_i + 0.5, y_i + 0.5k_1) = 2(x_i + 0.5) + (y_i + 0.5k_1)$

sustituyendo las condiciones iniciales ($y_0 = 1$ y $x_0 = 0$), se tiene,

$k_1 = f(x_i, y_i) = 2x_i + y_i = 2(0) + 1.0 = 1.00$

$k_2 = f(x_i + 0.5, y_i + 0.5k_1) = 2(0 + 0.5) + (1 + 0.5*1) = 2.50$

ahora, de ecuación predictora, se tiene:

$$y_{0+1} = y_0 + \Delta x\left(\tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{2}k_2\right) = y_0 + \frac{0.5}{2}\left(k_1 + k_2\right) = 1.0 + 0.25*(1.0 + 2.50) = 1.875$$

Repitiendo con $x_1 = 0.50$ e $y_1 = 1.875$, se tiene,

$k_1 = f(x_i, y_i) = 2x_i + y_i = 2(0.5) + 1.875 = 2.875$

$k_2 = f(x_i + 0.5, y_i + 0.5k_1) = 2(0.5 + 0.5) + (1.875 + 0.5*2.875) = 5.3225$

$$y_2 = y_1 + \Delta x\left(\tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{2}k_2\right) = y_1 + \frac{0.5}{2}(k_1 + k_2) = 1.875 + 0.25*(2.875 + 5.325) = 3.9218$$

Con $y_2 = 3.9218$ y $x_2 = 1.00$, se repite el proceso para estimar y_3 y, así sucesivamente; llegando a los siguientes resultados:

x	y_{Exacta}	y_{KR-2}	K_1=f(x, y)	K2	$E_{r(\%)}$
0.00	1.00	1.00	1.00	2.50	0.0
0.50	1.95	1.88	2.88	5.31	3.7
1.00	4.15	3.92	5.92	9.88	5.6
1.50	8.45	7.87	10.87	17.31	6.8
2.00	16.17	14.92	18.92	29.38	7.7
2.50	29.55	26.99	31.99	48.99	8.6
3.00	52.26	47.24	53.24	80.86	9.6
3.50	90.35	80.76	87.76	132.64	10.6
4.00	153.79	135.86	143.86	216.80	11.7
4.50	259.05	226.03	235.03	353.54	12.7
5.00	433.24	373.17	383.17	575.76	13.9

La gráfica es idéntica a la del método de Euler modificado, por lo que, también es igual a la del método de Heun; en consecuencia, se omite dibujarla.

RK de orden 2- Método mejorado del polígono($a_2 = 1$)

En este caso las ecuaciones (7-36), (7-37) y (7-38) quedan, respectivamente, como,

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x k_2 = y_i + 0.5k_2$$

y

$k_1 = f(x_i, y_i) = 2x_i + y_i$

$k_2 = f(x_i + \tfrac{1}{2}\Delta x, y_i + \tfrac{1}{2}k_1\Delta x) = 2(xi + 0.25) + (yi + 0.25k_1)$

partiendo de y = 1 y x = 0, así como Δx = 0.50, se obtienen los siguientes valores:

k_1 = 2(0) + 1 = 1
k_2 = 2(0 + 0.25) + (1 + 0.25*1)) =1.75
y_1 = 1 + 0.5*(1.75) = 1.875,

Para otros valores se repite el proceso, ahora con x = 0.5 e y =1.875, obteniendo.

k_1 = 2(0.5) + 1.875 = 2.875
k_2 = 2(0.5 + 0.25) + (1.875 + 0.25*2.875)) =4.09
y_1 = 1.875 + 0.5*(2.875) = 3.92

x	y_{Exacta}	$y_{KR-2(a2=1)}$	K_1=f(x, y)	K_2	$E_{r(\%)}$
0.00	1.000	1.000	1.000	1.750	0.0
0.50	1.946	1.875	2.875	4.094	3.7
1.00	4.155	3.922	5.922	7.902	5.6
1.50	8.445	7.873	10.873	14.091	6.8
2.00	16.167	14.919	18.919	24.148	7.7
2.50	29.547	26.993	31.993	40.491	8.6
3.00	52.257	47.238	53.238	67.048	9.6
3.50	90.346	80.762	87.762	110.203	10.6
4.00	153.794	135.864	143.864	180.330	11.7
4.50	259.051	226.029	235.029	294.286	12.7
5.00	433.239	373.172	383.172	479.465	13.9

Como se observa, los resultados son iguales a los obtenidos por Heun.

RK de orden 2- Método de Raltson(a_2 =2/3)

La adaptación de las ecuaciones (7-39), (7-40) y (7-41), al problema por resolver, es,

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x(\tfrac{1}{3}k_1 + \tfrac{2}{3}k_2) = \; y_{i+1} = y_i + \frac{0.5}{3}(k_1 + 2k_2)$$

donde

$k_1 = f(x_i, y_i) = 2x_i + y_i$

$k_2 = f(x_i + \frac{3}{4}\Delta x, y_i + \frac{3}{4}k_1\Delta x) = 2(x_i + 0.75*.5) + (y_i + 0.75*.5k_1)$

Iniciando con el punto conocido x_0 =, y_0 =1, se obtiene,

$k_1 = 2(0)+1 = 1$

$k_2 = 2(0+0.375)+(1+0.375*1) = 2.125$

$y_1 = 1 + 0.5/3*(1 + 2*2.125) = 1.875$

Igual que en todos los métodos de RK de orden 2; el resumen es,

x	y_{Exacta}	$y_{KR-2}(a_2=2/3)$	$K_1=f(x, y)$	K_2	$E_{r(\%)}$
0.00	1.000	1.000	1.000	2.125	0.0
0.50	1.946	1.875	2.875	4.703	3.7
1.00	4.155	3.922	5.922	8.893	5.6
1.50	8.445	7.873	10.873	15.700	6.8
2.00	16.167	14.919	18.919	26.763	7.7
2.50	29.547	26.993	31.993	44.740	8.6
3.00	52.257	47.238	53.238	73.953	9.6
3.50	90.346	80.762	87.762	121.423	10.6
4.00	153.794	135.864	143.864	198.563	11.7
4.50	259.051	226.029	235.029	323.915	12.7
5.00	433.239	373.172	383.172	527.612	13.9

La figura es similar a la inmediata anterior, ya que no hay cambios sustanciales en el valor de “y” calculados.

RK de orden 3

La ecuación (7-42) predice los valores de *y* al final de cada intervalo, con apoyo de las ecuaciones (7-43), (7-44) y (7-45). La sustitución de la ecuación diferencial a resolver las transforma en,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(0.5)\left[k_1 + 4k_2 + k_3\right]$$

y

$k_1 = f(x_i, y_i) = 2x_i + y_i$

$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}k_1\Delta x) = 2(x_i + 0.25)+(y_i+0.25k_1)$

$k_3 = f(x_i + \Delta x, y_i - \Delta x k_1 + 2\Delta x k_2) = 2(x_i +0.5) + (y_i-0.5*k_1+k_2)$

Para las condiciones iniciales dadas, la primer iteración, arroja los siguientes valores.

$k_1 = f(x_i, y_i) = 2x_i + y_i = 2(0)+1 = 1$

$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}k_1\Delta x) = 2(x_i + 0.25)+(y_i+0.25k_1) = 1.75$

$k_3 = f(x_i + \Delta x, y_i - \Delta x k_1 + 2\Delta x k_2) = 2(x_i + 0.5) + (y_i - 0.5*k_1 + k_2) = 3.25$

Finalmente, el valor de ***y***, al final del primer intervalo (x = 0.50), es.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(0.5)[k_1 + 4k_2 + k_3] \qquad = 1 + \frac{1}{6}(0.5)[1 + 4(1.75) + 3.25] = 1.9375 \text{, etc,}$$

Un resumen de los resultados obtenidos es,

x	y_{Exacta}	k_1	k_2	k_3	Y_{RK-3}	E(%)
0.000	1.000	1.000	1.750	3.250	1.000	0.000
0.500	1.946	2.938	4.172	6.641	1.938	0.445
1.000	4.155	6.126	8.158	12.221	4.126	0.687
1.500	8.445	11.375	14.718	21.405	8.375	0.835
2.000	16.167	20.012	25.515	36.521	16.012	0.958
2.500	29.547	34.229	43.286	61.400	29.229	1.080
3.000	52.257	57.626	72.533	102.346	51.626	1.207
3.500	90.346	96.135	120.668	169.736	89.135	1.341
4.000	153.794	159.513	199.892	280.648	151.513	1.483
4.500	259.051	263.824	330.280	463.192	254.824	1.632
5.000	433.239				425.502	1.786

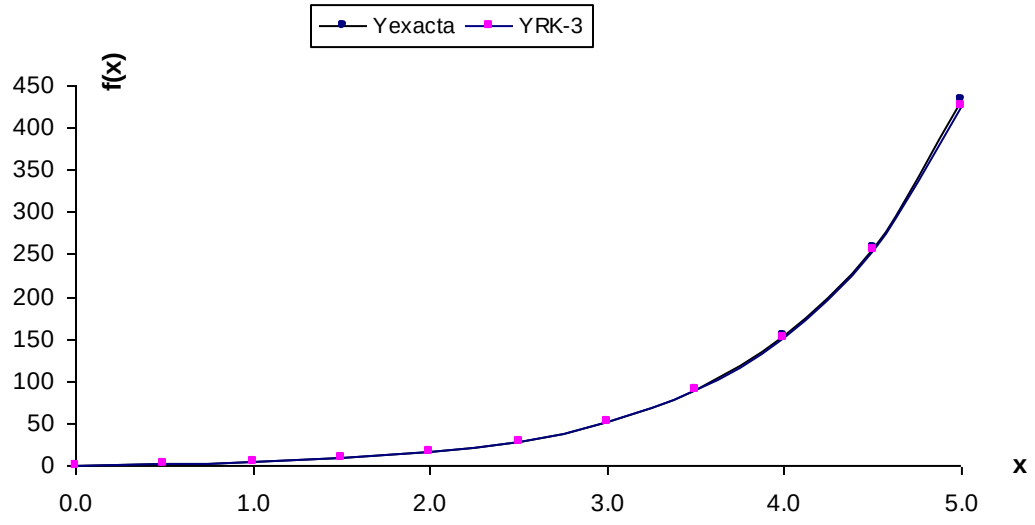


Figura del problema 7.1(RK-3)

RK de orden 4

Para la aplicación de este método se usan las ecuaciones (7-46) a (7-50), que al sustituir el valor de Δx dado, quedan de la siguiente forma.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{0.5}{6}\left[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4\right]$$

donde

$k_1 = f(x_i, y_i)$ = $2x_i + y_i$

$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}\Delta x k_1)$ = $2(x_i + 0.25)+(y_i + 0.25*k_1)$

$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}\Delta x k_2)$ = $2(x_i + 0.25)+(y_i + 0.25*k_2)$

$k_4 = f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta x k_3)$ =$2(x_i + 0.5) + (y_i + 0.5*k_3)$

Puede comprobarse que al sustituir las condiciones iniciales y procediendo igual que el método anterior, se llegó a los siguientes valores.

$k_1 = f(x_i, y_i)$ = $2x_i + y_i$ = 2(0) +1 = 1.00

$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}\Delta x k_1)$ = $2(x_i+0.25)+(y_i+0.25*k_1)$ = 2(0 +0.25)+(1+.25*1) =1.75

$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}\Delta x k_2)$ =$2(x_i+0.25)+(y_i + 0.25*k_2)$=2(0+0.25) + (1+.25*1.75)=1.94

$k_4 = f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta x k_3)$ =$2(x_i + 0.5) + (y_i + 0.5*k_3)$=2(0+.5) +(1+.5*1.94) =2.97

$y_1 = 1 + \frac{0.5}{6}\left[1.00 + 2(1.75 + 1.94) + 2.97\right] = 1.945$ (aquí x = 0.5)

Partiendo de x = 0.5 e y = 1.945, se llegó a los siguientes resultados.

$k_1 = f(x_i, y_i)$ = $2x_i + y_i$ = 2.945

$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}\Delta x k_1)$ = 4.182

$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}\Delta x k_2)$ = 4.491

$k_4 = f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta x k_3)$ = 6.191

$$y_2 = 1.945 + \frac{0.5}{6}\left[2.945 + 2(4.182 + 4.491) + 6.191\right] = 4.152 \quad \text{(aquí x = 1.0)}$$

Repitiendo el proceso, cada vez, con los <u>nuevos valores</u> se llegó a,

x	y_{Exacta}	k_1	k_2	k_3	k_4	Y_{RK-3}	E(%)
0.000	1.000	1.000	1.750	1.938	2.969	1.000	0.000
0.500	1.946	2.945	4.182	4.491	6.191	1.945	0.044
1.000	4.155	6.152	8.190	8.700	11.502	4.152	0.068
1.500	8.445	11.438	14.798	15.638	20.257	8.438	0.082
2.000	16.167	20.152	25.690	27.074	34.689	16.152	0.094
2.500	29.547	34.516	43.645	45.927	58.480	29.516	0.106
3.000	52.257	58.194	73.243	77.005	97.697	52.194	0.119
3.500	90.346	97.227	122.033	128.235	162.344	90.227	0.132
4.000	153.794	161.569	202.461	212.684	268.911	153.569	0.147
4.500	259.051	267.633	335.042	351.894	444.580	258.633	0.161
5.000	433.239					432.474	0.177

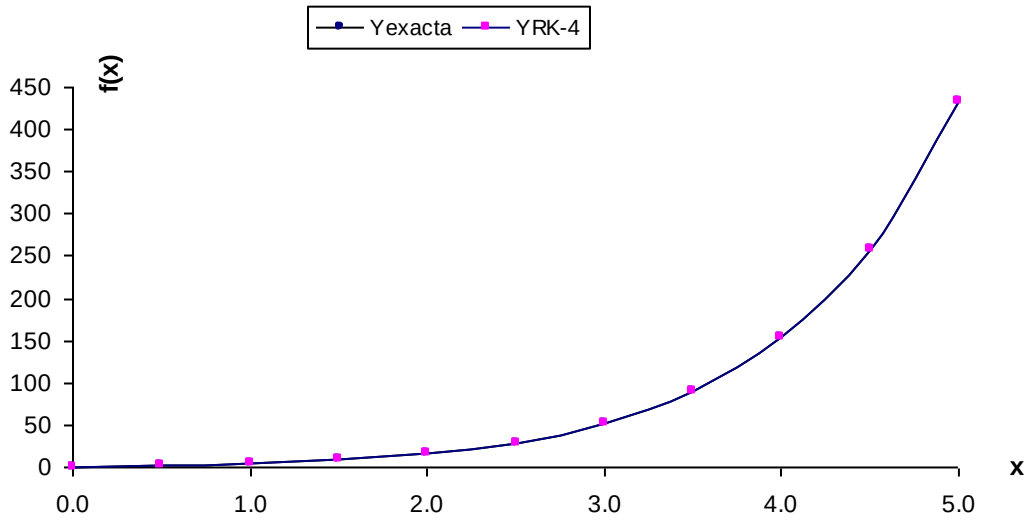


Figura del problema 7.1(RK-4)

RK-Orden superior(Método de quinto orden)

En este caso, las ecuaciones a usarse son de (7-51) a (7-57), las cuales quedan para este problema como,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{0.5}{90}\left[7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6\right]$$

en la que

$k_1 = f(x_i, y_i)$ = $2x_i + y_i$

$k_2 = f(x_i + \frac{1}{4}\Delta x, y_i + \frac{1}{4}\Delta x k_1)$ = $2(x_i + 0.125) + (y_i + 0.125 * k_1)$

$k_3 = f(x_i + \frac{1}{4}\Delta x, y_i + \frac{1}{8}\Delta x k_1 + \frac{1}{8}\Delta x k_2)$ =$2(x_i + 0.125)+(y_i+0.0625*(k_1+k_2))$

$k_4 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i - \frac{1}{2}\Delta x k_2 + \Delta x k_3)$ =$2(x_i+0.25)+(y_i - 0.25k_2+0.5k_3)$

$k_5 = f(x_i + \frac{3}{4}\Delta x, y_i + \frac{3}{16}\Delta x k_1 + \frac{9}{16}\Delta x k_4)$ =$2(x_i + 0.375)+(y_i + 0.09375k_1+0.28125k_4)$

$k_6 = f(x_i + \Delta x, y_i - \frac{3}{7}\Delta x k_1 + \frac{2}{7}\Delta x k_2 + \frac{12}{7}\Delta x k_3 - \frac{12}{7}\Delta x k_4 + \frac{8}{7}\Delta x k_5)$ =$2(x_i + 0.5) + (y_i - 1.5/7k_1 + 1/7*k_2 + 6/7*k_3 - 6/7*k_4 + 4/7*k_5)$

Sustituyendo, como siempre - en ecuaciones anteriores - las condiciones iniciales, se llegó a los siguientes resultados.

$k_1 = f(x_i, y_i)$ = 1.000

$k_2 = f(x_i + \frac{1}{4}\Delta x, y_i + \frac{1}{4}\Delta x k_1)$ = 1.375

$k_3 = f(x_i + \frac{1}{4}\Delta x, y_i + \frac{1}{8}\Delta x k_1 + \frac{1}{8}\Delta x k_2)$ = 1.398

$k_4 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i - \frac{1}{2}\Delta x k_2 + \Delta x k_3)$ = 1.855

$k_5 = f(x_i + \frac{3}{4}\Delta x, y_i + \frac{3}{16}\Delta x k_1 + \frac{9}{16}\Delta x k_4)$ = 2.366

$k_6 = f(x_i + \Delta x, y_i - \frac{3}{7}\Delta x k_1 + \frac{2}{7}\Delta x k_2 + \frac{12}{7}\Delta x k_3 - \frac{12}{7}\Delta x k_4 + \frac{8}{7}\Delta x k_5)$ = 2.942

$$y_{i+1} = y_i + \frac{0.5}{90}\left[7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6\right] = 1.946$$

Ahora, partiendo de estos valores (x_1 = 0.5 e y_1 = 1.946), se obtuvo y_2 = 4.155; con x_2 = 1.00 e y_2 = 4.155, se llegó a y_3 = 8.445; etc. Un resumen de esos resultados es,

x	y_{Exacta}	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	Y_{RK-5}	E(%)
0.000	**1.000**	1.000	1.375	1.398	1.855	2.366	2.942	**1.000**	0.000
0.500	**1.946**	2.946	3.564	3.603	4.357	5.198	6.148	**1.946**	0.000
1.000	**4.155**	6.155	7.174	7.238	8.480	9.867	11.434	**4.155**	0.000
1.500	**8.445**	11.445	13.126	13.231	15.279	17.565	20.149	**8.445**	0.000
2.000	**16.167**	20.167	22.938	23.111	26.488	30.258	34.518	**16.167**	0.000
2.500	**29.547**	34.548	39.116	39.402	44.969	51.184	58.208	**29.548**	0.000
3.000	**52.257**	58.257	65.789	66.260	75.439	85.686	97.267	**52.257**	0.000
3.500	**90.346**	97.347	109.765	110.541	125.676	142.569	161.663	**90.347**	0.000
4.000	**153.794**	161.795	182.270	183.549	208.503	236.355	267.835	**153.795**	0.001
4.500	**259.051**	268.053	301.810	303.919	345.060	390.981	442.883	**259.053**	0.001
5.000	**433.239**							**433.242**	0.001

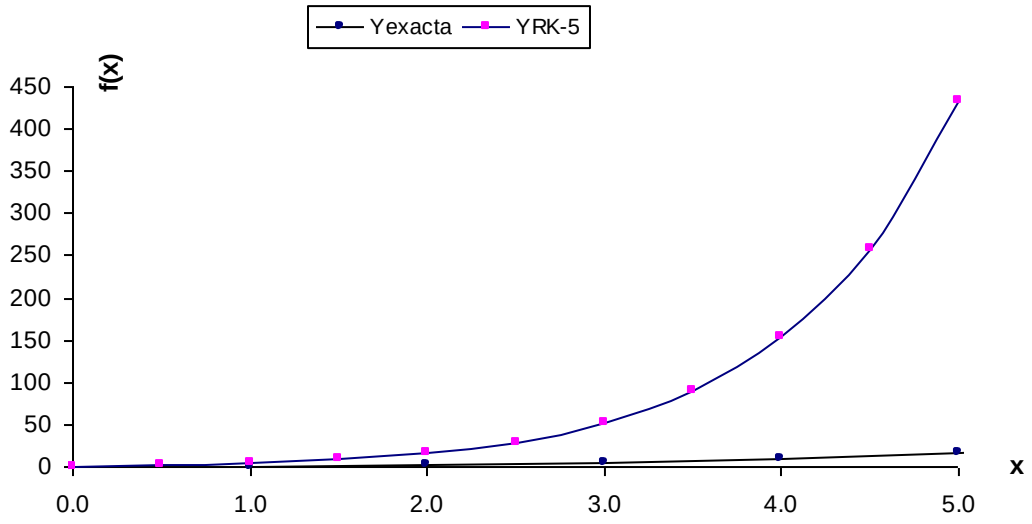


Figura del problema 7.1(RK-5=orden superior)

7.2 A continuación se resuelve la misma ecuación diferencial con Δx = 0.1, por el método de RK-4. De acuerdo a las ecuaciones (7-47) a (7-50), se tiene.

$k_1 = f(x_i, y_i)$ = 2x_i + y_i

$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}\Delta x k_1)$ = 2(x_i + 0.05)+(y_i + 0.05*k_1)

$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}\Delta x k_2)$ = 2(x_i + 0.05)+(y_i + 0.05*k_2)

$k_4 = f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta x k_3)$ =2(x_i + 0.1) + (y_i + 0.1*k_3)

Partiendo de las condiciones iniciales se llega a,

$k_1 = f(x_i, y_i)$ = 2x_i + y_i = 2(0) +1 = 1.00

$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}\Delta x k_1)$ = 2(0 + 0.05)+(1 + 0.05*1) = 1.150

$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}\Delta x k_2)$ = 2(0 + 0.05)+(1 + 0.05*1.150)= 1.158

$k_4 = f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta x k_3)$ =2(0 + 0.1) + (1 + 0.1*1.158)= 1.316

y de ecuación (7-46) se obtiene:

$y_1 = y_i + \frac{0.1}{6}[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4]$= 1.116 (note usted que x_1 = 0.1)

Repitiendo el proceso, con x_1 e y_1, se llegó a los siguientes resultados,

$k_1 = f(x_i, y_i)$ = 2x_i + y_i = 2(0.1) +1.116 = 1.316

$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}\Delta x k_1)$ = 2(0.1 + 0.05)+(1.116 + 0.05*k_1) = 1.481

$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}\Delta x k_2)$ = 2(0.1 + 0.05)+(1.116 + 0.05*k_2)= 1.490

$k_4 = f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta x k_3)$ =2(0.1 + 0.1) + (1.116 + 0.1*k_3)= 1.664

y de ecuación (7-46) se obtiene:

$y_2 = y_i + \frac{0.1}{6}[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4]$= 1.264 (note usted que x_2 = 0.2)

Se repitió el procedimiento, ahora para estos valores y luego con los valores obtenidos, hasta que x = 3.00; llegando a los siguientes resultados.

x	y_{Exacta}	k_1	k_2	k_3	k_4	Y_{RK-3}	E(%)
0.000	1.000	1.000	1.150	1.158	1.316	1.000	0.000
0.100	1.116	1.316	1.481	1.490	1.664	1.116	0.000
0.200	1.264	1.664	1.847	1.857	2.050	1.264	0.000
0.300	1.450	2.050	2.252	2.262	2.476	1.450	0.000
0.400	1.675	2.475	2.699	2.710	2.947	1.675	0.000
0.500	1.946	2.946	3.193	3.206	3.467	1.946	0.000
0.600	2.266	3.466	3.740	3.753	4.042	2.266	0.000
0.700	2.641	4.041	4.343	4.358	4.677	2.641	0.000
0.800	3.077	4.677	5.010	5.027	5.379	3.077	0.000
0.900	3.579	5.379	5.748	5.766	6.155	3.579	0.000
1.000	4.155	6.155	6.563	6.583	7.013	4.155	0.000
1.100	4.812	7.012	7.463	7.486	7.961	4.812	0.000
1.200	5.560	7.960	8.458	8.483	9.009	5.560	0.000
1.300	6.408	9.008	9.558	9.586	10.166	6.408	0.000
1.400	7.366	10.166	10.774	10.804	11.446	7.366	0.000
1.500	8.445	11.445	12.117	12.151	12.860	8.445	0.000
1.600	9.659	12.859	13.602	13.639	14.423	9.659	0.000
1.700	11.022	14.422	15.243	15.284	16.150	11.022	0.000
1.800	12.549	16.149	17.056	17.102	18.059	12.549	0.000
1.900	14.258	18.058	19.061	19.111	20.169	14.258	0.000
2.000	16.167	20.167	21.275	21.331	22.500	16.167	0.000
2.100	18.299	22.498	23.723	23.785	25.077	18.298	0.000
2.200	20.675	25.075	26.429	26.496	27.925	20.675	0.000
2.300	23.323	27.922	29.419	29.493	31.072	23.322	0.000
2.400	26.270	31.069	32.723	32.806	34.550	26.269	0.000
2.500	29.547	34.547	36.375	36.466	38.394	29.547	0.000
2.600	33.191	38.391	40.411	40.512	42.642	33.191	0.000
2.700	37.239	42.639	44.871	44.983	47.337	37.239	0.000
2.800	41.734	47.334	49.801	49.924	52.526	41.734	0.000
2.900	46.722	52.522	55.248	55.385	58.261	46.722	0.000
3.000	52.257	58.256	61.269	61.420	64.598	52.256	0.000

Se observa que el error relativo es nulo, por lo que la gráfica representa una sola curva, ya que al no existir error, la solución obtenida se superpondría con la solución exacta.

7.3 Como ejemplo alternativo, se resuelve la ecuación diferencial ordinaria, por el método de RK-3, con $\Delta x = 0.50$ y $x_{final} = 7.0$

$$\frac{dy}{dx} = 4e^{0.8x} - \frac{1}{2}y \text{, sujeta a } \quad y(0) = 2$$

Se puede demostrar que la solución analítica de esta ecuación diferencial es,

$$y = \frac{4}{1.3}\left(e^{0.8x} - e^{-0.5x}\right) + 2e^{-0.5x}$$

Las ecuaciones particulares, para esta ecuación diferencial ordinaria, son,

$k_1 = f(x_i, y_i) = 4e^{0.8x} - 0.5y$

$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}k_1\Delta x) = 4e^{0.8(x+0.25)} - (y + 0.25k_1)$

$k_3 = f(x_i + \Delta x, y_i - \Delta x k_1 + 2\Delta x k_2) = 4e^{0.8(x+.5)} - (y-0.5k_1+k_2)$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(0.5)\left[k_1 + 4k_2 + k_3\right]$$

Sustituyendo las condiciones iniciales, se tiene.

$k_1 = f(0, 2) = 4e^{0.8(0)} - 0.5(2) = 3.00$

$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}k_1\Delta x) = 4e^{0.8(0+0.25)} - (2 + 0.25*3) = 3.511$

$k_3 = f(x_i + \Delta x, y_i - \Delta x k_1 + 2\Delta x k_2) = 4e^{0.8(0+.5)} - (2-0.5k_1+k_2) = 3.962$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(0.5)\left[k_1 + 4k_2 + k_3\right] = 2 + \frac{1}{6}(0.5)\left[3 + 4(3.511) + 3.962\right] = 3.750$$

Se repitió la rutina, con estos valores y luego con los siguientes, hasta llegar a x = 7.0. Un resumen de los resultados obtenidos es,

X	yexacta	y_{RK-3}	k_1	k_2	k_3	Ev
0.0	2.000	2.000	3.000	3.511	3.962	0.000
0.5	3.752	3.750	4.092	4.902	5.599	0.031
1.0	6.195	6.192	5.806	7.051	8.110	0.044
1.5	9.707	9.702	8.429	10.316	11.910	0.051
2.0	14.844	14.836	12.394	15.231	17.621	0.055
2.5	22.427	22.414	18.349	22.599	26.173	0.057
3.0	33.677	33.657	27.264	33.618	38.957	0.058
3.5	50.412	50.382	40.588	50.078	58.047	0.059
4.0	75.339	75.294	60.483	74.649	86.542	0.060

4.5	112.496	112.429	90.178	111.318	129.064	0.060
5.0	167.906	167.805	134.490	166.031	192.508	0.060
5.5	250.549	250.399	200.604	247.662	287.162	0.060
6.0	373.825	373.600	299.242	369.447	428.376	0.060
6.5	557.719	557.384	446.397	551.134	639.046	0.060
7.0	832.049	831.549	665.931	822.182	953.332	0.060

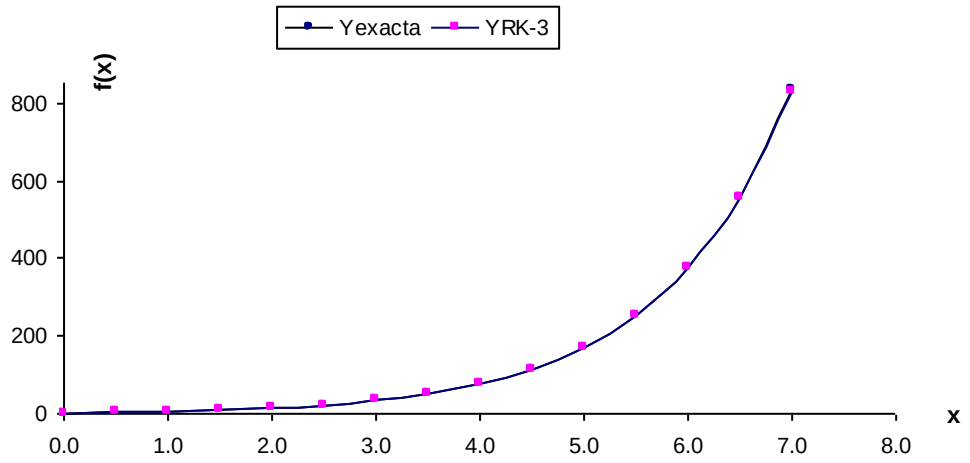


Figura del problema 7.3 [RK-3]

7.4 Resolver la ecuación diferencial ordinaria (EDO), dada a continuación por el método de Euler tradicional y por RK-3. Grafique los resultados conjuntamente con la solución exacta.

$$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{x}$$
$$y(0) = 1$$

Use Δx =0.2 y obtenga resultados desde x = 0 hasta x = 3

La solución exacta se puede obtener con mucha facilidad, separando variables. Con esa técnica se llega a,

$$y = e^{2/3(x^{3/2})}$$

Solución por el método de Euler tradicional. Para esta ecuación, se tiene

$y_{n+1} = y_n + 0.2*(y_n\sqrt{x_n})$

sustituyendo las condiciones iniciales x = 0, *y* =1, se tiene,

$y_1 = y_0 + 0.2*(y_0\sqrt{x_0}) = 1 + 0.2*(1)(\sqrt{0}) = 1.0.$

Con estos valores se repite nuevamente el procedimiento para estimar y_2, luego y_3 y, así, sucesivamente.

Solución por el método de RK-4. El formulario queda para esta EDO como,

$$k_1 = f(x_i, y_i) = y\sqrt{x}$$

$$k_2 = f(x_i + \tfrac{1}{2}\Delta x, y_i + \tfrac{1}{2}\Delta x k_1) = (y + 0.1k_1)\sqrt{(x + .1)}$$

$$k_3 = f(x_i + \tfrac{1}{2}\Delta x, y_i + \tfrac{1}{2}\Delta x k_2) = (y + 0.1k_2)\sqrt{(x + 0.1)}$$

$$k_4 = f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta x k_3) = (y + 0.2k_3)\sqrt{(x + 0.2)}$$

y ecuación (7-46) queda,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{0.2}{6}\left[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4\right]$$

Sustituyendo las condiciones iniciales se tiene,

$k_1 = y\sqrt{x} = 1\sqrt{0} = 0.00$

$k_2 = (y + 0.1k_1)\sqrt{(x + .1)} = (1 + 0.1*0)\sqrt{(0 + .1)} = 0.316$

$k_3 = (y + 0.1k_2)\sqrt{(x + 0.1)} = (1 + 0.1*0.316)\sqrt{(0 + 0.1)} = 0.326$

$k_4 = (y + 0.2k_3)\sqrt{(x + 0.2)} = (1 + 0.2k_3)\sqrt{(0 + 0.2)} = 0.476$

Por consiguiente,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{0.2}{6}\left[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4\right] = 1 + \frac{0.2}{6}\left[0.0 + 2(0.316 + 0.326) + 0.476\right] = 1.059$$

es decir, $\mathbf{y_1}$ = 1.059 y $\mathbf{x_1}$ = 0.2

Con estos valores se repitió el procedimiento del método de Runge Kutta de orden 4, para obtener y_2, asociada a x_2; con los que se calculó y_3 y x_3, etc.
Los resultados, tanto del método de Euler y de RK de orden 4, así como la gráfica de conjunto, se muestran en seguida.

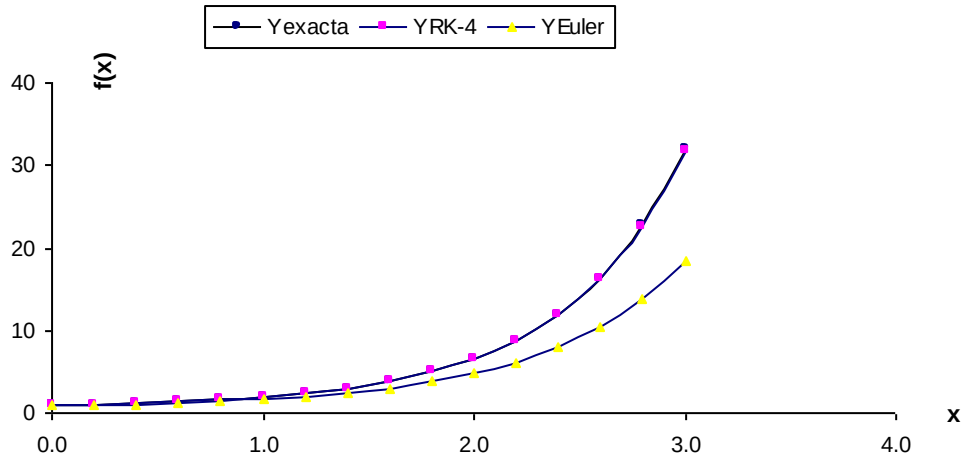


Figura del problema 7.4(Eulres y RK-4)

x	y_{Exacta}	y_{Euler}	k_1	k_2	k_3	k_4	Y_{RK-4}
0.000	1.000	1.000	0.000	0.316	0.326	0.476	1.000
0.200	1.061	1.000	0.473	0.606	0.613	0.747	1.059
0.400	1.184	1.089	0.747	0.888	0.898	1.054	1.181
0.600	1.363	1.227	1.053	1.226	1.240	1.438	1.360
0.800	1.611	1.417	1.437	1.661	1.682	1.944	1.607
1.000	1.948	1.671	1.943	2.241	2.273	2.626	1.943
1.200	2.402	2.005	2.625	3.031	3.077	3.563	2.396
1.400	3.017	2.444	3.561	4.122	4.191	4.867	3.009
1.600	3.854	3.023	4.863	5.647	5.749	6.700	3.844
1.800	5.003	3.788	6.694	7.800	7.953	9.306	4.990
2.000	6.590	4.804	9.296	10.873	11.101	13.043	6.573
2.200	8.806	6.163	13.027	15.295	15.639	18.452	8.783
2.400	11.926	7.991	18.426	21.720	22.241	26.351	11.894
2.600	16.361	10.467	26.311	31.136	31.929	37.990	16.318

2.800	22.726	13.842	37.926	45.056	46.270	55.286	22.665
3.000	31.948	18.474					31.861

7.5 Resolver la ecuación diferencial ordinaria (EDO)- dada en el problema 7.4 -, dada a continuación por el método de Heun, comparando sus resultados con la solución exacta y haga la gráfica de conjunto.

$$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{x}$$
$$y(0) = 1$$

Use Δx =0.2 y obtenga resultados desde x = 0 hasta x = 3

mmmmmm

Problemas propuestos

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias, por el método que se indica:

Problema	Ecuación diferencial	Método de solución
7.1	$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{x}$ $y(0) = 1$	Euler y Runge-Kutta –4 Δx=0.5 y x_{final} =10
7.2	$\frac{dy}{dx} = y + 2x$ $y(0) = 1$	RK-3, Euler y graficar los resultados. Δx=0.2 y x_{final} =4
7.3	$\frac{dy}{dt} = (x+t)^2$ $y(0) = -1$	Heun y RK-3. Grafique los resultados Δt=0.2 y t_{final} = 3
7.4	$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{x}$ $y(0) = 1$	RK-2, Δt=0.1 y t_{final} = 3 RK-4, Δt=0.1 y t_{final} = 3 Grafique los resultados
7.5	$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{y} - xy$ $y(0) = 3$	Euler, Δt = 0.5 y t_{final} = 3 RK-4, Δt = 0.5 y t_{final} = 3 Haga una gráfica
7.6	$\frac{dy}{dt} + y^2 = 1$ $y(0) = 0$	Heun, Δt= 1 y t_{final} = 10 RK-4, Δt=1 y t_{final} = 10

7.7	$\frac{dh}{dt} = 0.1 - 0.05\sqrt{h}$ $h(0) = 16$	Heun, Δt= 10 y h_{final} = 0 RK-4, Δt= 10 y h_{final} = 0 Haga una gráfica
7.8	$\frac{dy}{dx} = yx^2 - y$ $y(0) = 1$	RK-3, Δx= 0.5 y x_{final} = 10 Euler, Δx= 0.5 y x_{final} = 10 Haga una gráfica
7.9	$\frac{dy}{dt} - y = \frac{4t}{y}$ $y(0) = 3$	RK-2, Δx= 0.5 y x_{final} = 15 RK-4, Δx= 0.5 y x_{final} = 15 Euler, Δx= 0.5 y x_{final} = 15

7.10 Haga un programa de computadora, en compilador FORTRAN ó GWBASIC, para el método de RK de orden 4, que resuelva todos los problemas anteriores.

Problema	Ecuación diferencial	Método de solución
7.11	$\frac{dy}{dt} + ty = 1$ $y(0) = 1$	Jun, Δt= 1 y t_{final} = 10 RK-4, Δt= 1 y t_{final} = 10 Haga una gráfica
7.12	$\frac{dy}{dx} + y = 0$ $y(2.5) = 1.2$	Euler, Δx= 0.5 y x_{final} = 10 RK-3, Δt= 0.5 y x_{final} = 10 Haga una gráfica de conjunto si la solución exacta es y=3/x Calcule el error relativo.
7.13	$\frac{dy}{dt} + 3y = e^{-t}$ $y(0) = 1$	Euler, Δt= 0.2 y t_{final} = 3 RK-3, Δt= 0.2 y t_{final} = 3 Haga una gráfica
7.14	$\frac{dy}{dt} = (t^2 - 1)$ $y(0) = 0.5$	RK-2, Δt= 0.5 y x_{final} = 8 RK-4, Δt= 0.5 y x_{final} = 8 Euler, Δt= 0.5 y x_{final} = 8
7.15	$\frac{dy}{dt} + y\lvert y\rvert = 0$ $y(0) = 1$	RK-3, Δx= 0.5 y x_{final} = 10 Heun, Δx= 0.5 y x_{final} = 10 Euler, Δx= 0.5 y x_{final} = 10

7.16	$\frac{dy}{dt} + \sqrt{\lvert y \rvert} = sen(t)$ $y(0) = 1$	Heun y RK-3. Grafique los resultados Δt=0.2 y t_{final} = 5
7.17	$\frac{dy}{dt} = 3y + 5$ $y(0) = 0$	RK-2, Δx= 0.5 y x_{final} = 5 RK-4, Δx= 0.5 y x_{final} = 5 Euler, Δx= 0.5 y x_{final} = 5
7.18	$\frac{dy}{dt} + ty = 1$ $y(0) = 1$	Euler, Δt= 0.10 y t_{final} = 7 RK-3, Δt= 0.10 y t_{final} = 7 Haga una gráfica
7.19	$\frac{dy}{dt} = ty + 1$ $y(0) = 0$	Heun, Δt= 0.1 y t_{final} = 6 RK-4, Δt= 0.1 y t_{final} = 6 Haga una gráfica

7.20 Haga un programa de computadora, en compilador FORTRAN ó GWBASIC, para los métodos de RK de orden 3 y Heun, que resuelva todos los problemas 7.10-7.19.

Apéndice A

SERIE DE TAYLOR

A.1 Introducción

La serie de Taylor es la base de los métodos numéricos. Muchas de las técnicas numéricas son derivadas directamente de la Serie de Taylor, como son los estimadores de errores involucrados en esas técnicas. Aunque se supone que el lector está familiarizado con la Serie de Taylor, se consideró necesario dar algunos elementos teóricos de la misma.

A.2 Definición

Sea f(x) una función tal que f(x) y sus *n* primeras derivadas sean continuas en el intervalo cerrado [a-b]. Además, $f^{n+1}(x)$ existe para toda *x* en el intervalo abierto (a, b); entonces, hay un número ξ en el intervalo abierto (a, b) tal que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a) + \\ \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(\xi) \qquad \text{(A-1)}$$

La ecuación anterior también es válida si b < a; en tal caso [a-b] se reemplaza por [b-a] y (a, b) por (b, a). Nótese que cuando *n* = 0, ecuación (A-1) se transforma en:

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$$

donde ξ está entre a y b. Esto corresponde al teorema del valor medio.
Si en (A-1) b es sustituida por x, se obtiene la fórmula de Taylor, quedando:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \\ ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) \qquad \text{(A-2)}$$

donde ξ está entre *a* y *x*. Indicando con esto que el valor de una función f(x) puede ser expresado en la región de *x* cerca de x = a, por la serie infinita de potencias.
El caso especial de la fórmula de Taylor que se obtiene cuando a = 0, en (A-2) es:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \\ ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) \qquad \text{(A-3)}$$

donde ξ está entre 0 y *x*. Esta Fórmula se denomina *fórmula de Maclaurin*, en honor al matemático escocés Colin Maclaurin (1698- 1746). Sin embargo, la fórmula fue obtenida anteriormente por Taylor y otro matemático inglés, James Stirlin (1692-1770).
Al polinomio que resulta en (A-2) y en (A-3) al quitar el residuo, se conocen como *polinomio de Taylor y polinomio de Maclaurin*, respectivamente. Por lo que, una función f(x), se puede aproximar por medio de un polinomio de Taylor en un número *a* o bien por un polinomio de Maclaurin.

Ejemplo A.1. Se calcula el polinomio de Maclaurin de *n*-ésimo grado, para la función exponencial natural. Si f(x) = e^x, todas las derivadas f(x) en x son e^x y sus valores en x = 0 son unitarios; por tanto, de (A-3), se tiene:

$$p_n(x) = 1 + \frac{x}{1!}(1) + \frac{x^2}{2!}(1) + \frac{x^3}{3!}(1) + ... + \frac{x^n}{n!}(1) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

por tanto,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} \qquad \text{(A-4)}$$

Así, los primeros cuatro polinomios de Maclaurin, de la función exponencial, son:

$$p_0(x) = 1 \qquad p_1(x) = 1 + \frac{x}{1!}$$

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \qquad p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

En las siguientes figuras se muestra, gráficamente, la aproximación que se tiene al incrementar los términos del polinomio de Maclaurin. No olvide que este polinomio es un caso especial del polinomio de Taylor.

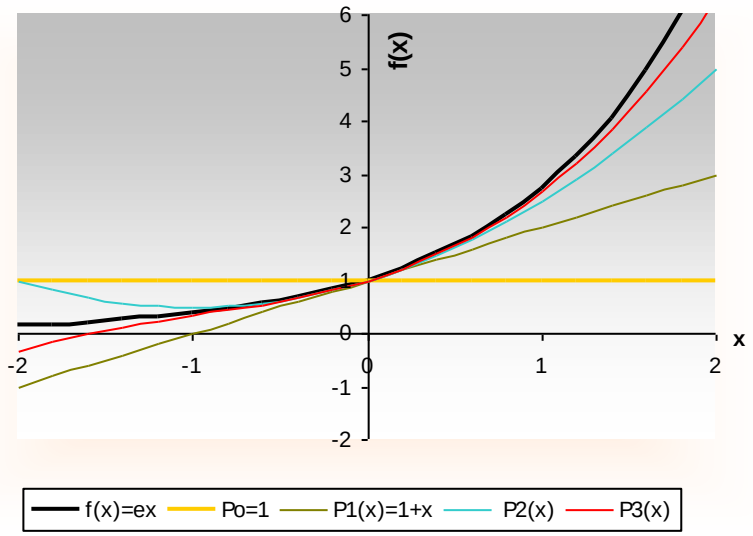


Figura del ejemplo A.1

Ejemplo A-2. Ahora se determina el polinomio de Maclaurin de *n*-ésimo grado, para la función *senox*. Si f(x) = seno(x), entonces;

X	F(x)	f'(x)	f"(x)	f'"(x)	$f^{iv}(x)$	$f^{v}(x)$	$f^{vi}(x)$
	senx	cosx	-senx	-cosx	senx	cosx	-senx
0	0	1	0	-1	0	1	0

Etc.

De (A-3) se llega a,

$$p_n(x) = 0 + \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + .. + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

es decir,

$$senx = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + .. + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad \text{(A-5)}$$

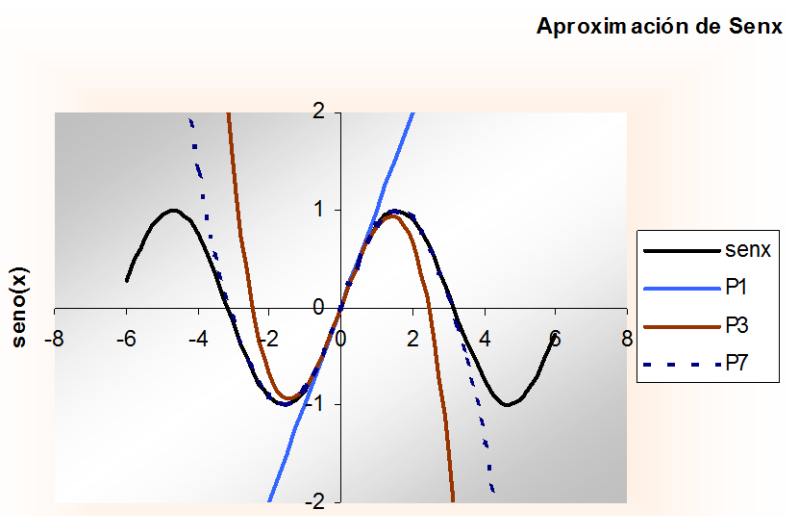
Así $p_0(x) = 0$ $\qquad p_1(x) = 0 + \frac{x}{1!}$

$p_2(x) = 0 + \frac{x}{1!}$ $\qquad p_3(x) = 0 + \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}$

$p_4(x) = 0 + \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{6}$ $\qquad p_5(x) = 0 + \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ =P_6

$p_7(x) = 0 + \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} = p_8$

A continuación se grafican P_1, P_5 y P_7



Ejemplo A-3. Con los resultados de los ejemplos anteriores, (A-4) y (A-5), encontrar $e^{0.5}$, e^{senx}, e^2, e^{-1} y sen2x.

Solución. Según (A-3) la función e^x (x en radianes) se aproxima por:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

por lo que, puede escribirse:

para x = 0.5

$$e^{0.5} = 1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2!} + \frac{0.5^3}{3!} + \frac{0.5^4}{4!} + \frac{0.5^5}{5!} + \frac{0.5^6}{6!} + \ldots + \frac{0.5^n}{n!} =$$

para x = sen*x*

$$e^{senx} = 1 + senx + \frac{senx^2}{2!} + \frac{senx^3}{3!} + \frac{senx^4}{4!} + \frac{senx^5}{5!} + \frac{senx^6}{6!} + \ldots + \frac{senx^n}{n!}$$

para x = 2

$$e^2 = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \ldots + \frac{2^n}{n!} =$$

y para x = -1

$$e^{-1} = 1 + -1 + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \frac{(-1)^5}{5!} + \frac{(-1)^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} =$$

Ahora de (A-5)

Para x=2x

$$sen2x = \frac{2x}{1!} - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + .. + (-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

si el argumento cambia a 0.5x, entonces,

$$sen(\tfrac{1}{2}x) = \frac{\frac{1}{2}x}{1!} - \frac{(\frac{1}{2}x)^3}{3!} + \frac{(\frac{1}{2}x)^5}{5!} - \frac{(\frac{1}{2}x)^7}{7!} + .. + (-1)^{n-1}\frac{(\frac{1}{2}x)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Ejemplo A-4. Encontrar la expansión en la serie de Taylor cerca de x = 0 para la función f(x) = $\log_e$ (1-x). Cuál es el radio de convergencia de esta serie?

Solución. La función y sus derivada son:

f(x) = $\log_e$ (1-x), si a = 0---→ f(a) =$\log_e$ (1)

$f'(x) = \frac{-1}{1-x}$ si x = a = 0 → f ‘ (a) = -1

$f''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}$ si x = a = 0 -→ f “ (a) = -1

$f'''(x) = \frac{-2}{(1-x)^3}$ si x = a = 0 → f “’(a) = -2

$f^{IV}(x) = \frac{-6}{(1-x)^4}$ si x = a = 0 -→ f^{IV}(a) = -6

……

De A-2, se tiene: $\log_e$ (1-x)= $\log_e$ (1) + x(-1) + $\frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}(-2) + \frac{x^4}{4!}(-6) + ...$

$\log_e$ (1-x)= -x - $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - ...$

Para encontrar el radio de convergencia de la serie, aplicamos la prueba:

$$\underbrace{lím}_{x-->\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \underbrace{\lim}_{x->\infty}\left|\frac{nx}{n+1}\right| = |x|$$

Esta prueba indica que la serie converge absolutamente, si este radio es menor que 1. De este modo, el radio de convergencia de la serie es | x | < 1. La prueba hecha no nos indica que si | x | = 1, pero notamos que si x = +1, entonces, tenemos el negativo de,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

la cuales la conocida serie divergente armónica. Si x = -1, tenemos la serie,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$$

la cuál es convergente. Por tanto, la serie es convergente para $-1 \leq x < 1$.

Apéndice B

Ceros y pesos de la cuadratura de Gauss Legendre

n	$\pm \varepsilon_k$	w_k
2	0.5773502692	1.0000000000
3	0.0000000000 0.7745966692	0.8888888889 0.5555555556
4	0.3399810436 0.8611363116	0.6521451549 0.3478548451
5	0.0000000000 0.5384693101 0.9061798459	0.5688888889 0.4786286705 0.2369268850
6	0.2386191861 0.6612093865 0.9324695142	0.4679139346 0.3607615730 0.1713244924
7	0.0000000000 0.4058451514 0.7415311856 0.9491079123	0.4179591837 0.3818300505 0.2797053915 0.1294849662
8	0.1834346425 0.5255324099 0.7966664774 0.9602898565	0.3626837834 0.3137066459 0.2223810345 0.1012285363
9	0.0000000000 0.3242534234 0.6133714327 0.8360311073 0.9681602395	0.3302393550 0.3123470770 0.2606106964 0.1806481607 0.0812743884
10	0.1488743390 0.4333953941 0.6794095683 0.8650633667 0.9739065285	0.2955242247 0.2692667193 0.2190863625 0.1494513492 0.0666713443
12	0.1252334085 0.3678314990 0.5873179543 0.7699026742 0.9041172564 0.9815606342	0.2491470458 0.2334925365 0.2031674267 0.1600783285 0.1069393260 0.0471753364

CEROS Y PESOS DE LA CUADRATURA DE GAUSS LEGENDRE
(Continuación)

N	$\pm\ \varepsilon_k$	w_k
16	0.0950125098	0.1894506105
	0.2816035508	0.1826034150
	0.4580167777	0.1691565194
	0.6178762444	0.1495959888
	0.7554044084	0.1246289713
	0.8656312024	0.0951585117
	0.9445750231	0.0622535239
	0.9894009350	0.0271524594
20	0.0765265211	0.1527533871
	0.2277858511	0.1491729865
	0.3737060887	0.1420961093
	0.5108670020	0.1316886384
	0.6360536807	0.1181945320
	0.7463319065	0.1019301198
	0.8391169718	0.0832767416
	0.9122344283	0.0626720483
	0.9639719273	0.0406014298
	0.9931285992	0.0176140071
24	0.0640568929	0.1279381953
	0.1911188675	0.1258374563
	0.3150426797	0.1216704729
	0.4337935076	0.1155056681
	0.5454214714	0.1074442701
	0.6480936519	0.0976186521
	0.7401241916	0.0861901615
	0.8200019860	0.0733464814
	0.8864155270	0.0592985849
	0.9382745520	0.0442774388
	0.9747285560	0.0285313886
	0.9951872200	0.0123412298

APENDICE C: Números aleatorios

0.1306	0.1189	0.5731	0.3968	0.5606	0.5084	0.8947	0.3897	0.1636	0.7810
0.0422	0.2431	0.0649	0.8085	0.5053	0.4722	0.6598	0.5044	0.9040	0.5121
0.6597	0.2022	0.6168	0.5060	0.8656	0.6733	0.6364	0.7649	0.1871	0.4328
0.7965	0.6541	0.5645	0.6243	0.7658	0.6903	0.9911	0.5740	0.7824	0.8520
0.7695	0.6937	0.0406	0.8894	0.0441	0.8135	0.9797	0.7285	0.5905	0.9539
0.5160	0.7851	0.8464	0.6789	0.3938	0.4197	0.6511	0.0407	0.9239	0.2232
0.2961	0.0551	0.0539	0.8288	0.7478	0.7565	0.5581	0.5771	0.5442	0.8761
0.1428	0.4183	0.4312	0.5445	0.4854	0.9157	0.9158	0.5218	0.1464	0.3634
0.3666	0.5642	0.4539	0.1561	0.7849	0.7520	0.2547	0.0756	0.1206	0.2033
0.6543	0.6799	0.7454	0.9052	0.6689	0.1946	0.2574	0.9386	0.0304	0.7945
0.9975	0.6080	0.7423	0.3175	0.9377	0.6951	0.6519	0.8287	0.8994	0.5532
0.4866	0.0956	0.7545	0.7723	0.8085	0.4948	0.2228	0.9583	0.4415	0.7065
0.8239	0.7068	0.6694	0.5168	0.3117	0.1586	0.0238	0.6160	0.9585	0.1133
0.8722	0.9191	0.3386	0.3443	0.0434	0.4586	0.4150	0.1224	0.6204	0.0937
0.1330	0.9120	0.8785	0.8382	0.2929	0.7089	0.3109	0.6742	0.2468	0.7025
0.2296	0.2952	0.4764	0.9070	0.6356	0.9192	0.4012	0.0618	0.2219	0.1109
0.3582	0.7052	0.3132	0.4519	0.9250	0.2486	0.0830	0.8472	0.2160	0.7046
0.5872	0.9207	0.7222	0.6494	0.8973	0.3545	0.6967	0.8490	0.5264	0.9821
0.1134	0.6324	0.6201	0.3792	0.5651	0.0538	0.4676	0.2064	0.0584	0.7996
0.1403	0.4497	0.7390	0.8503	0.8239	0.4236	0.8022	0.2914	0.4368	0.4529
0.3393	0.7025	0.3381	0.3553	0.2128	0.1021	0.8353	0.6413	0.5161	0.8583
0.1137	0.7896	0.3602	0.0060	0.7850	0.7626	0.0854	0.6565	0.4260	0.6220
0.7437	0.5198	0.8772	0.6927	0.8527	0.6851	0.2709	0.5992	0.7383	0.1071
0.8414	0.8820	0.3917	0.7238	0.9821	0.6073	0.6658	0.1280	0.9643	0.7761
0.8398	0.5224	0.2749	0.7311	0.5740	0.9771	0.7826	0.9533	0.3800	0.4553
0.0995	0.8935	0.2939	0.3092	0.2496	0.0359	0.0318	0.4697	0.7181	0.4035
0.6657	0.0755	0.9685	0.4017	0.6581	0.7292	0.5643	0.5064	0.1142	0.1297
0.8875	0.8369	0.7868	0.0190	0.9278	0.1709	0.4253	0.9346	0.4335	0.3769
0.8399	0.6702	0.0586	0.6428	0.7985	0.2979	0.4513	0.1970	0.1989	0.3105
0.6703	0.1024	0.2064	0.0393	0.6815	0.8502	0.1375	0.4171	0.6970	0.1201
0.4730	0.1653	0.9032	0.9855	0.0957	0.7366	0.0325	0.5178	0.7959	0.5371
0.8400	0.6834	0.3187	0.8688	0.1079	0.1480	0.6776	0.9888	0.7585	0.9998
0.3647	0.8002	0.6726	0.0877	0.4552	0.3238	0.7542	0.7804	0.3933	0.9475
0.6789	0.5197	0.8037	0.2354	0.9252	0.5497	0.0005	0.3986	0.1767	0.7981
0.2630	0.2721	0.2810	0.2185	0.6323	0.5679	0.4931	0.8336	0.6662	0.3566
0.1374	0.8625	0.1644	0.3342	0.1587	0.0762	0.6057	0.8011	0.2666	0.3759
0.1572	0.7625	0.9110	0.4409	0.0239	0.7059	0.3415	0.5537	0.2250	0.7292
0.9678	0.2877	0.7579	0.4935	0.0449	0.8119	0.6969	0.5383	0.1717	0.6719
0.0882	0.6781	0.3538	0.4090	0.3092	0.2365	0.6001	0.3446	0.9985	0.6007
0.0006	0.4205	0.2389	0.4365	0.1981	0.8158	0.7784	0.6256	0.3842	0.5603

APENDICE C: Números aleatorios (continuación)

0.4611	0.9861	0.7916	0.9305	0.2074	0.9462	0.0254	0.4827	0.9198	0.3974
0.1093	0.3784	0.4190	0.6332	0.1175	0.8599	0.9735	0.8584	0.6581	0.7194
0.3374	0.3545	0.6865	0.8819	0.3342	0.1676	0.2264	0.6014	0.5012	0.2458
0.3650	0.9676	0.1436	0.4374	0.7416	0.5548	0.8276	0.6235	0.6742	0.2154
0.7292	0.5749	0.7977	0.7602	0.9205	0.3599	0.3880	0.9537	0.4423	0.2330
0.2353	0.8319	0.2850	0.4026	0.3027	0.1708	0.3518	0.7034	0.7132	0.6903
0.1094	0.2009	0.8919	0.5676	0.7283	0.4982	0.9642	0.7235	0.8167	0.3366
0.0568	0.4002	0.0587	0.7265	0.1094	0.2006	0.7471	0.0940	0.4366	0.9554
0.5606	0.4070	0.5233	0.4339	0.6543	0.6695	0.5799	0.5821	0.3953	0.9458
0.8285	0.7537	0.1181	0.2300	0.5294	0.6892	0.1627	0.3372	0.1952	0.3028
0.2444	0.9039	0.4803	0.8568	0.1590	0.2420	0.2547	0.2470	0.8179	0.4617
0.5748	0.7767	0.2800	0.6289	0.2814	0.8381	0.1549	0.9519	0.3341	0.1192
0.7761	0.8583	0.0852	0.5619	0.6864	0.8506	0.9643	0.7763	0.9611	0.1289
0.6838	0.9280	0.2654	0.0812	0.3988	0.2146	0.5095	0.0150	0.8043	0.9079
0.6440	0.2631	0.3033	0.9167	0.4998	0.7036	0.0133	0.7428	0.9702	0.1376
0.8829	0.0094	0.2887	0.3802	0.5497	0.0318	0.5168	0.6377	0.9216	0.2802
0.9845	0.4796	0.2951	0.4449	0.1999	0.2691	0.5328	0.7674	0.7004	0.6216
0.5072	0.9000	0.3887	0.5739	0.7920	0.6074	0.4715	0.3681	0.2721	0.2701
0.9035	0.0553	0.1272	0.2600	0.3828	0.8197	0.8852	0.9092	0.8027	0.6144
0.5562	0.1080	0.2222	0.0336	0.1411	0.0303	0.7424	0.3713	0.9278	0.1918
0.2757	0.2650	0.8727	0.3953	0.9579	0.2442	0.8041	0.9869	0.2887	0.3933
0.6397	0.1848	0.1476	0.0787	0.4990	0.4666	0.1208	0.2769	0.3922	0.1158
0.9208	0.7641	0.3575	0.4279	0.1282	0.1840	0.5999	0.1806	0.7809	0.5885
0.2418	0.9289	0.6120	0.8141	0.3908	0.5577	0.3590	0.2317	0.8975	0.4593
0.7300	0.9006	0.5659	0.8258	0.3662	0.0332	0.5369	0.3640	0.0563	0.7939
0.6870	0.2535	0.8916	0.3245	0.2256	0.4350	0.6064	0.2438	0.2002	0.1272
0.2914	0.7309	0.4045	0.7513	0.3195	0.4166	0.0878	0.5184	0.6680	0.2655
0.0868	0.8657	0.8118	0.6340	0.9452	0.7460	0.3291	0.5778	0.0167	0.0312
0.7994	0.6579	0.6461	0.2292	0.9554	0.8309	0.5036	0.0974	0.9517	0.8293
0.8587	0.0764	0.6687	0.9050	0.1642	0.2050	0.4934	0.0027	0.1376	0.5040
0.8016	0.8345	0.2257	0.5084	0.8004	0.7949	0.3205	0.3972	0.7640	0.3478
0.5581	0.5775	0.7517	0.9076	0.4699	0.8313	0.8401	0.7147	0.9416	0.7184
0.2015	0.3364	0.6688	0.2631	0.2152	0.2220	0.1637	0.8333	0.4838	0.5699
0.7327	0.8987	0.5741	0.0102	0.1173	0.7350	0.7080	0.7420	0.1847	0.0741
0.3589	0.1991	0.1764	0.8355	0.9684	0.9423	0.7101	0.1063	0.4151	0.4875
0.2188	0.6454	0.7319	0.1215	0.0473	0.6589	0.2355	0.9579	0.7004	0.6209
0.2924	0.0472	0.9878	0.7966	0.2491	0.5662	0.5635	0.2789	0.2564	0.1249
0.1961	0.1669	0.2219	0.1113	0.9175	0.0260	0.4046	0.8142	0.4432	0.2664
0.2393	0.9637	0.0041	0.7536	0.0972	0.5153	0.0708	0.1935	0.1143	0.1704
0.7585	0.4424	0.2648	0.6728	0.2233	0.3518	0.7267	0.1732	0.1926	0.3833

APENDICE C: Números aleatorios (continuación)

0.0197	0.4021	0.9207	0.7327	0.9212	0.7017	0.8060	0.6216	0.1942	0.6817
0.9719	0.5336	0.5532	0.8537	0.2980	0.8252	0.4971	0.0000	0.6209	0.1556
0.8866	0.4785	0.6007	0.8006	0.9043	0.4109	0.5570	0.9249	0.9905	0.2152
0.5744	0.3957	0.8786	0.9023	0.1472	0.7275	0.1014	0.1104	0.0832	0.7680
0.7149	0.5721	0.1389	0.6581	0.7196	0.7072	0.6360	0.3084	0.7009	0.0239
0.7710	0.8479	0.9345	0.7773	0.9086	0.1202	0.8845	0.3163	0.7937	0.6163
0.5246	0.5651	0.0432	0.8644	0.6341	0.9661	0.2361	0.8377	0.8673	0.6098
0.3576	0.0013	0.7381	0.0124	0.8559	0.9813	0.9080	0.6984	0.0926	0.2169
0.3026	0.1464	0.2671	0.4691	0.0353	0.5289	0.8754	0.2442	0.7799	0.8983
0.6591	0.4365	0.8717	0.2365	0.5686	0.8377	0.8675	0.9789	0.7745	0.6360
0.0402	0.3257	0.0480	0.5038	0.1998	0.2935	0.1306	0.1190	0.2406	0.2596
0.7105	0.7654	0.4745	0.4482	0.8471	0.1424	0.2031	0.7803	0.4367	0.6816
0.7181	0.4140	0.1046	0.0885	0.1264	0.7755	0.1653	0.8924	0.5822	0.4401
0.3655	0.3282	0.2178	0.8134	0.3291	0.7262	0.8229	0.2866	0.7065	0.4806
0.5121	0.6717	0.3117	0.1901	0.5184	0.6467	0.8954	0.3884	0.0279	0.8635
0.3618	0.3098	0.9208	0.7429	0.1578	0.1917	0.7927	0.2696	0.3704	0.0833
0.0166	0.3638	0.4947	0.1414	0.7499	0.9189	0.2459	0.5056	0.5982	0.6154
0.6187	0.9653	0.3658	0.4730	0.1652	0.8096	0.8288	0.9368	0.5531	0.7788
0.1234	0.1448	0.0276	0.7290	0.1667	0.2823	0.3755	0.5642	0.4854	0.8844
0.8949	0.8731	0.4875	0.5724	0.2962	0.1182	0.2930	0.7539	0.4526	0.7252
0.4357	0.4146	0.8353	0.9952	0.8004	0.7945	0.1530	0.5207	0.4730	0.1967
0.5339	0.7325	0.6862	0.7584	0.8634	0.3485	0.2278	0.5832	0.0612	0.8118
0.6583	0.8433	0.0717	0.0606	0.9284	0.2719	0.1888	0.2889	0.0285	0.2765
0.6564	0.3526	0.2171	0.3809	0.3428	0.5523	0.9078	0.0648	0.7768	0.3326
0.4811	0.1933	0.3763	0.6265	0.8931	0.0649	0.8085	0.6177	0.4450	0.2139
0.6931	0.7236	0.1230	0.0441	0.4013	0.1352	0.6563	0.1499	0.7332	0.3068
0.8755	0.3390	0.6120	0.7825	0.9005	0.7012	0.1643	0.9934	0.4044	0.7022
0.6742	0.2260	0.3443	0.0190	0.9278	0.1816	0.7697	0.7933	0.0067	0.2906
0.6655	0.3930	0.9014	0.6032	0.7574	0.1685	0.5258	0.3100	0.5358	0.1929
0.8514	0.4806	0.4124	0.9286	0.0449	0.5051	0.4772	0.1651	0.0038	0.1580
0.8135	0.5004	0.7299	0.8981	0.4689	0.1950	0.2271	0.2201	0.8344	0.3852
0.4414	0.6855	0.0127	0.5489	0.5157	0.6386	0.7492	0.3736	0.7164	0.0498
0.3727	0.7959	0.5056	0.5983	0.8021	0.0204	0.7616	0.4325	0.7454	0.5039
0.5434	0.7342	0.0314	0.7252	0.0067	0.2800	0.6296	0.4706	0.3454	0.6881
0.7195	0.8828	0.9869	0.2785	0.3186	0.8375	0.7414	0.7232	0.0401	0.2483
0.2705	0.8245	0.6251	0.9611	0.1077	0.0641	0.0195	0.7024	0.6202	0.3899
0.1547	0.8981	0.4972	0.1280	0.4286	0.5678	0.0338	0.8096	0.8284	0.7010
0.3424	0.1435	0.1354	0.7631	0.7260	0.7361	0.0151	0.8903	0.9056	0.8684
0.8969	0.7551	0.3695	0.4915	0.7921	0.2913	0.3840	0.9031	0.9747	0.9735
0.5225	0.8720	0.8898	0.2478	0.3342	0.9200	0.8836	0.7269	0.2992	0.6284

BIBLIOGRAFÍA

1. Robert W. Hornbeck,Ph.D./**NUMERICAL METHODS**/QPI (QUANTUM PUBLISHERS, INC.)

2. Steven C. Chapra y Raymond P. Canale/**METODOS NUMERICOS PARA INGENIEROS**/McGraw-Hill.

3. Shoichiro Nakamura/ **METODOS NUMERICOS APLICADOS CON SOFTWARE**/PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A.

4. Luthe.Olivera.Schutz/ **MÉTODOS NUMÉRICOS**/ Limusa

5. Erwin Kreyszig/ **MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA VOL.1**/ Limusa.

6. Leithold/ **EL CÁLCULO con Geometría Analítica**/ Harla

7. Michael Spivak/ **CÁLCULO INFINITESIMAL**/ Ediciones RPLA,S.A.

8. Shepley L. Ross/ **DIFFERENTIAL EQUATIONS- Segunda edición**/ Jhon Wiley & Sons, Inc.

9. Frank Ayres, Jr & Elliot Mendelson/ **CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**/ Mc Graw-Hill

10. Luciano Couder, Alonso/ **TEORIA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS**/ Limusa.

EXAMEN PARCIAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS

NOMBRE:_____

1. Estime el valor de la integral dada, con un error relativo igual o menor que el 0.5%, usando el método de Romberg (7 puntos).

$$\int_0^4 xe^{2x}dx$$

Recuerde que el error relativo se define, para los elementos de la diagonal, como:

$$\varepsilon_r = \left| \frac{T(L,1) - T(L-1,1)}{T(L,1)} \right|$$

Nota. En caso de no resolver con T(3,1), se entregará el resultado y la solución completa será entregada al siguiente día.

2. Usando el método parabólico (4 puntos), resolver, para n = 8, la siguiente integral.

$$\int_{-3}^{+3} \frac{2}{1+2x^2}dx$$

Fecha: Chilpancingo, Gro., a _____ de diciembre de 2006.