

Titulo: OPERACIONES CON POLINOMIOS (Reducción de términos semejantes, suma y resta de polinomios, signos de agrupación, multiplicación y división de polinomios)

Año escolar: 2do: año de bachillerato

Autor: José Luis Albornoz Salazar

Ocupación: Ing Civil. Docente Universitario

País de residencia: Venezuela

Correo electrónico: martilloatomico@gmail.com

El autor de este trabajo solicita su valiosa colaboración en el sentido de enviar cualquier sugerencia y/o recomendación a la siguiente dirección :

martilloatomico@gmail.com

Igualmente puede enviar cualquier ejercicio o problema que considere pueda ser incluido en el mismo.

Si en sus horas de estudio o práctica se encuentra con un problema que no pueda resolver, envíelo a la anterior dirección y se le enviará resuelto a la suya.

ÁLGEBRA

ÁLGEBRA es la rama de la Matemática que estudia la **cantidad considerada del modo más general** posible.

El **concepto de la cantidad** en Álgebra es mucho más amplio que en Aritmética.

En Aritmética las cantidades se representan por **números** y éstos expresan valores **determinados**. Así, 20 expresa un solo valor: **veinte**; para expresar un valor mayor o menor que éste habrá que escribir un número distinto de 20.

En Álgebra, para lograr la **generalización**, las cantidades se representan por medio de **letras**, las cuales pueden **representar todos los valores**. Así, "a" representa el valor que **nosotros le asignemos**, y por lo tanto puede representar 20 o más de 20 o menos de 20, a nuestra elección, aunque conviene advertir que cuando en un problema asignamos a una letra un valor determinado, esa letra no puede representar, en el mismo problema, otro valor distinto del que le hemos asignado.

Los **símbolos** usados en Álgebra para representar las cantidades son los **números** y las **letras**.

Los **números** se emplean para representar cantidades conocidas y determinadas.

Las **letras** se emplean para representar toda clase de cantidades, ya sean conocidas o desconocidas.

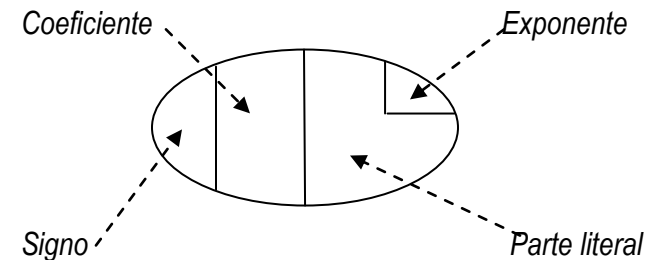
Una misma letra puede representar distintos valores diferenciándolos por medio de comillas ("a", "a'", "a'") o también por medio de subíndices (X_1 , X_2 , X_3).

Con las cantidades algebraicas, representadas por letras, se pueden hacer las mismas operaciones que con los números aritméticos.

◀EXPRESIÓN ALGEBRAICA es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones algebraicas.

Ejemplos: a, 5x, $\sqrt{4a}$, (a+b)c, x^2 , $\frac{(5x-3y)a}{2x}$

◀TÉRMINO es un conjunto formado por los cuatro (4) elementos siguientes:



Ejemplos :

-3X² es un término : tiene signo negativo, el coeficiente es "3", la parte literal es "X" y su exponente es "2".

+2a es un término : tiene signo positivo, coeficiente "2", parte literal "a" y aunque no se observa ningún exponente se sobre entiende que tiene exponente "1" (en álgebra $a^1 = a$).

7n⁵ es un término : aunque no se observa el signo se sobre entiende que es positivo, el coeficiente es "7", la parte literal es "n" y su exponente es "5".

-n³ es un término : tiene signo negativo, aunque no se observa el coeficiente se sobre entiende que es "1" (cualquier variable multiplicada por "1" es igual a dicha variable), la parte literal es "n" y su exponente es "3".

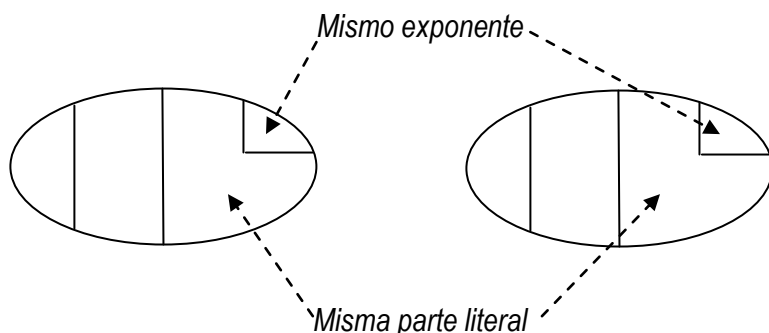
X es un término : aunque no se observa el signo se sobre entiende que es positivo, aunque no se observa el coeficiente se sobre entiende que es

"1", la parte literal es "X y aunque no se observa ningún exponente se sobre entiende que tiene exponente "1" (recuerde que $X^1 = X$).

5 es un término : aunque no se observa el signo se sobre entiende que es positivo, el coeficiente es "5", no tiene parte literal (pero pudiera ser cualquier variable elevada a cero que es igual a "1"). Un término que no tenga parte literal se denomina "término independiente".

$-5X^2Y^3$ es un término : tiene signo negativo, el coeficiente es "5", la parte literal es "XY", la letra "X" tiene exponente "2" y la letra "Y" tiene exponente "3".

◀TÉRMINOS SEMEJANTES : Dos términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal y el mismo exponente.



Ejemplos :

$-3X^2$ y $7X^2$ son términos semejantes, ambos tienen parte literal "X" y exponente "2" ($X^2 = X^2$).

$-5XY$; $8XY$ y $72XY$ son términos semejantes, todos tienen la misma parte literal ("XY") y el mismo exponente en cada una de las dos letras ($X = X$; $Y = Y$).

$-7X^4Y^2$ y $2X^4Y^2$ son términos semejantes, todos tienen la misma parte literal ("XY") y el mismo exponente en cada una de las dos letras ("X" tiene exponente "4" y "Y" exponente "2") ; ($X^4 = X^4$; $Y^2 = Y^2$).

$-7X^3n^5$ y $2n^5X^3$ son términos semejantes, todos tienen la misma parte literal (las letras "X" y "n") y el mismo exponente en cada una de las dos letras. No importa que las letras estén ordenadas de manera distinta, lo importante es que sean las mismas letras y que cada una tenga el mismo exponente en ambos términos ($X^3 = X^3$; $n^5 = n^5$).

$-6X^2$ y $8X^3$ NO son términos semejantes, ambos tienen parte literal "X" pero el exponente es distinto ($X^2 \neq X^3$).

$4X^2$ y $-4Y^2$ NO son términos semejantes, ambos tienen exponente "2" pero distinta parte literal ($X^2 \neq Y^2$).

$-7n^3Y^2$ y $2n^2Y^3$ NO son términos semejantes, porque aunque tienen la misma parte literal ("nY") el exponente en cada una de las dos letras es distinto ($n^3 \neq n^2$; $Y^2 \neq Y^3$).

$-9X^3Y^2$ y $9X^3Y^3$ NO son términos semejantes, porque aunque tienen la misma parte literal ("XY") y el exponente de la letra "X" es igual, el exponente de la letra "Y" es distinto ($Y^2 \neq Y^3$).

$-3a^3b^2$ y $5b^3a^2$ NO son términos semejantes, porque aunque tienen la misma parte literal ("ab") el exponente en cada una de las dos letras es distinto ($a^3 \neq a^2$; $b^2 \neq b^3$).

◀REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES :

Cuando en una misma expresión algebraica se encuentren dos o más términos semejantes se deben convertir en uno solo que sea equivalente a ellos.

Ejemplos :

1) $3X + 7X =$

Notamos que son dos términos semejantes (ambos tienen parte literal "X" y exponente "1").

Cuando una expresión algebraica presenta su primer término sin signo se sobre entiende que tiene signo positivo. Esto nada más se sobre entiende en el primer término, en ninguna otra ubicación más.

Cuando dos o más términos semejantes tengan igual signo se conserva el signo y se suman los coeficientes :

$$3X + 7X = 10X$$

2) $-3n - 5n =$

Notamos que son dos términos semejantes (ambos tienen parte literal "n" y exponente "1"), también podemos observar que ambos tienen signo negativo. Cuando dos o más términos semejantes tengan igual signo se conserva el signo y se suman los coeficientes :

$$-3n - 5n = -8n$$

3) $4X^3Y^2 + 3X^3Y^2 + 2X^3Y^2 =$ $9X^3Y^2$

4) $-10a^2b^5 - 4a^2b^5 - 2a^2b^5 =$ $-16a^2b^5$

5) $-9a + 2a =$

Notamos que son dos términos semejantes (ambos tienen parte literal "a" y exponente "1"), también podemos observar que tienen signos distintos.

Cuando dos términos semejantes tengan signos distintos, se colocará el signo del coeficiente mayor y se restarán los coeficientes :

$$-9a + 2a = -7a$$

6) $7X^2 - 3X^2 =$

Notamos que son dos términos semejantes (ambos tienen parte literal "X" y exponente "2"), también podemos observar que tienen signos distintos.

Aunque el primer término ($7X^2$) no presenta ningún signo, se sobreentiende que tiene signo positivo.

Cuando dos términos semejantes tengan signos distintos, se colocará el signo del coeficiente mayor y se restarán los coeficientes :

$$7X^2 - 3X^2 = 4X^2$$

7) $-9X^3n^2 + 2n^2X^3 =$ $-7X^3n^2$

8) $-3b + 5b - 9b + 2b =$

Notamos que son cuatro términos semejantes (todos tienen parte literal "b" y exponente "1"), también podemos observar que tienen signos distintos.

Cuando sean más de dos términos semejantes con diferentes signos, se recomienda primero sumar por separado los del mismo signo y después proceder como en los ejemplos anteriores.

$$\text{Sumando los términos con signo positivo : } 5b + 2b = 7b$$

$$\text{Sumando los términos con signo negativo : } -3b - 9b = -12b$$

$$\text{La expresión quedará como : } 7b - 12b =$$

Aplicando el procedimiento indicado en los ejemplos 5, 6 y 7 de esta misma página tendremos :

$$7b - 12b = -5b$$

9) $5X - 9X + 6X =$

$$11X - 9X = 2X$$

10) $5XY - 9XY + 6XY + 3YX - 8YX =$

$$14XY - 17XY = -3XY$$

11) $Y - 3Y + 4Y + 13Y - 15Y =$

$$18Y - 18Y = 0$$

12) $-3a + 5b - 9b + 2a =$

Notamos que son cuatro términos pero no todos son semejantes (dos tienen parte literal "a" y exponente "1" y dos tienen parte literal "b" y exponente "1")

En estos casos se deben reducir por separado los términos semejantes entre sí.

$$\text{Trabajando con "a" : } -3a + 2a = -a$$

$$\text{Trabajando con "b": } +5b - 9b = -4b$$

$$-3a + 5b - 9b + 2a = -a - 4b$$

◀MONOMIO : Es una expresión algebraica que consta de un solo término.

Ejemplos : $3a, \quad -9b, \quad X^2, \quad -5X^3Y^5, \quad \frac{XY^2}{2a}$

◀POLINOMIO : Es una expresión algebraica que consta de más de un término.

Ejemplos : $a + b, \quad a + x - y, \quad X^3 + 2X^2 + X - Y$

BINOMIO es un polinomio que consta de dos términos.

Ejemplos : $a + b, \quad x - y, \quad -\frac{XY^2}{2a} + \frac{Y}{b}$

TRINOMIO es un polinomio que consta de tres términos.

Ejemplos : $a + b - c, \quad x - y + 6, \quad 5X - \frac{XY^2}{2a} + \frac{Y}{b}$

EL GRADO de un polinomio puede ser **absoluto y con relación a una letra**.

Grado absoluto de un polinomio es el grado de su término de mayor grado. Así, en el polinomio $X^4 - 5X^3 + X^2 - 3X$ el primer término es de cuarto grado; el segundo, de tercer grado; el tercero, de segundo grado, y el último, de primer grado; luego, el **grado absoluto del polinomio es el cuarto**.

Grado de un polinomio con relación a una letra es el mayor exponente de dicha letra en el polinomio. Así, el polinomio $a^6 + a^4x^2 - a^2x^4$ es de **sexto grado** con relación a la "a" y de **cuarto grado** con relación a la "x".

Se dice que un **polinomio** es **completo con relación a una letra** cuando contiene todos los exponentes sucesivos de dicha letra, desde el más alto al más bajo que tenga dicha letra en el polinomio. Así, el polinomio $x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 3x$ es completo respecto de la "x", porque contiene todos los exponentes sucesivos de la "x" desde el más alto "5", hasta el más bajo "1", o sea 5, 4, 3, 2, 1; el polinomio $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$ es completo respecto de "a" y "b".

Polinomio ordenado con respecto a una letra es un polinomio en el cual los exponentes de una letra escogida, van aumentando o disminuyendo. Así, el polinomio $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x + 8$ está ordenado en **orden descendente** con relación a la letra "x"; el polinomio $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$ está ordenado en **orden descendente** respecto a la letra "a" y en **orden ascendente** respecto a la letra "b".

◀SUMA DE POLINOMIOS : Para sumar dos o más polinomios se escriben uno a continuación de los otros con sus propios signos y se reducen los términos semejantes si los hay.

Ejemplo : **Sumar** $-3a + 5b$ y $-9b + 2a$

Se escriben los dos polinomios uno a continuación del otro conservando los signos :

$$-3a + 5b - 9b + 2a$$

Se reducen por separado los términos semejantes entre sí.

Trabajando con "a": $-3a + 2a = -a$

Trabajando con "b": $+5b - 9b = -4b$

$$-3a + 5b - 9b + 2a = -a - 4b$$

En la práctica, suelen colocarse los polinomios unos debajo de los otros de modo que los términos semejantes queden en columnas y se hace la reducción de éstos, separándolos unos de otros con sus propios signos.

Ejemplos :

1) **Sumar $4a - 3b - 5c$ y $7b - 9a - 3c$**

Se coloca uno debajo del otro de manera que los términos semejantes queden en columnas (“a” debajo de “a”, “b” debajo de “b” y “c” debajo de “c”). Todos los términos conservan sus signos.

El segundo polinomio se reordena de manera tal que las letras queden en el mismo orden que en el primer polinomio:

$$\begin{array}{r} +4a - 3b - 5c \\ -9a + 7b - 3c \\ \hline \end{array}$$

Posteriormente se reducen los términos semejantes en sentido vertical.

$$\begin{array}{r} +4a - 3b - 5c \\ -9a + 7b - 3c \\ \hline -5a + 4b - 8c \end{array}$$

Resultado : $-5a + 4b - 8c$

2) **Sumar $5X^3 + 3X - 2$ y $2X^2 - 9X + 4$**

Se coloca uno debajo del otro de manera que los términos semejantes queden en columnas. Todos los términos conservan sus signos.

Los polinomios deben ordenarse en el mismo sentido (ascendente o descendente) y donde falte un término se dejará el espacio vacío.

$$\begin{array}{r} 5X^3 + 3X - 2 \\ 2X^2 - 9X + 4 \\ \hline \end{array}$$

Posteriormente se reducen los términos semejantes en sentido vertical. En la columna donde haya un solo término se coloca tal como esté.

$$\begin{array}{r} 5X^3 + 3X - 2 \\ 2X^2 - 9X + 4 \\ \hline 5X^3 + 2X^2 - 6X + 2 \end{array}$$

Resultado : $5X^3 + 2X^2 - 6X + 2$

3) **Sumar $5X^3 + 3X - 2$; $X^4 - 6X^2$; $2X^2 - 9X + 7$**

Se colocan uno debajo del otro de manera que los términos semejantes queden en columnas. Todos los términos conservan sus signos.

Los polinomios deben ordenarse en el mismo sentido (ascendente o descendente) y donde falte un término se dejará el espacio vacío.

$$\begin{array}{r} X^4 \quad 5X^3 \quad + 3X - 2 \\ \quad - 6X^2 \\ \hline X^4 \quad 5X^3 - 6X^2 - 9X + 7 \end{array}$$

Posteriormente se reducen los términos semejantes en sentido vertical. En la columna donde haya un solo término se coloca tal como esté.

$$\begin{array}{r} X^4 \quad 5X^3 \quad + 3X - 2 \\ \quad - 6X^2 \\ \quad 2X^2 - 9X + 7 \\ \hline X^4 + 5X^3 - 4X^2 - 6X + 5 \end{array}$$

4) **Sumar $a^3 - b^3$; $-5a^2b - 4ab^2$; $a^3 - 7ab^2 - b^3$**

$$\begin{array}{r} a^3 \quad - b^3 \\ - 5a^2b - 4ab^2 \\ a^3 \quad - 7ab^2 - b^3 \\ \hline 2a^3 - 5a^2b - 11ab^2 - 2b^3 \end{array}$$

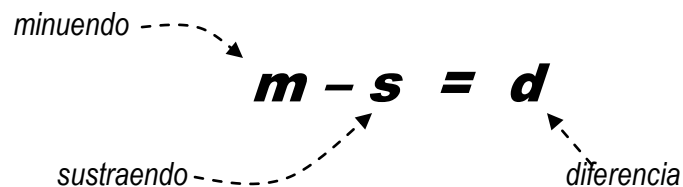
5) Sumar $X^3 - XY^2 - Y^3$; $X^3 - 5X^2Y - Y^3$; $2X^3 - 4XY^2 - 5Y^3$

$$\begin{array}{r} x^3 \quad - xy^2 \quad - y^3 \\ x^3 - 5x^2y \quad - y^3 \\ 2x^3 \quad - 4xy^2 - 5y^3 \\ \hline 4x^3 - 5x^2y - 5xy^2 - 7y^3 \end{array}$$

6) Sumar $X^4 - X^2Y^2$; $-5X^3Y + 6XY^3$; $-4XY^3 + Y^4$; $-4X^2Y^2 - 6$

$$\begin{array}{r} x^4 \quad - x^2y^2 \\ -5x^3y \quad + 6xy^3 \\ \quad - 4xy^3 + y^4 \\ \quad - 4x^2y^2 \quad - 6 \\ \hline x^4 - 5x^3y - 5x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 - 6 \end{array}$$

◀RESTA DE POLINOMIOS : Para restar dos polinomios se debe escribir el minuendo con sus propios signos y a continuación el sustraendo con los signos cambiados y se reducen los términos semejantes si los hay.



Ejemplo : De $-3a + 5b$ restar $9b - 2a$

Se escribe el minuendo (al que se le va a restar) con sus propios signos y a continuación el sustraendo (lo que se va a restar) con los signos cambiados :

$$-3a + 5b - 9b + 2a$$

Se reducen por separado los términos semejantes entre sí.

Trabajando con "a": $-3a + 2a = -a$

Trabajando con "b": $+5b - 9b = -4b$

$$= -a - 4b$$

$$(-3a + 5b) - (9b - 2a) = -3a + 5b - 9b + 2a = -a - 4b$$

En la práctica, suele escribirse el sustraendo con sus signos cambiados debajo del minuendo, de modo que los términos semejantes queden en columnas y se hace la reducción de éstos, separándolos unos de otros con sus propios signos.

Ejemplo :

1) $5X^3 + 3X - 2$ menos $-2X^2 + 9X - 4$

Se le cambian los signos al sustraendo (lo que se va a restar)

$$2X^2 - 9X + 4$$

Se coloca debajo del minuendo (al que se le va a restar) de manera que los términos semejantes queden en columnas.

Los polinomios deben ordenarse en el mismo sentido (ascendente o descendente) y donde falte un término se dejará el espacio vacío.

$$\begin{array}{r} 5X^3 \quad + 3X - 2 \\ \quad 2X^2 - 9X + 4 \\ \hline \end{array}$$

Posteriormente se reducen los términos semejantes en sentido vertical. En la columna donde haya un solo término se coloca tal como esté.

$$\begin{array}{r} 5X^3 \quad + 3X - 2 \\ \quad 2X^2 - 9X + 4 \\ \hline 5X^3 + 2X^2 - 6X + 2 \end{array}$$

Resultado : $5X^3 + 2X^2 - 6X + 2$

Es bueno aclarar que en la resta de polinomios se aplican los mismos criterios que en la suma de polinomios una vez que se le cambien los signos al sustraendo (lo que se va a restar).

Lo importante entonces es identificar el sustraendo (lo que se va a restar) y cambiarle todos los signos, no importa la forma como se plantee el ejercicio.

Ejercicios :

- 1) De $a + b$ restar $a - b$
- 2) De $2X - 3Y$ restar $-X + 2Y$
- 3) De $8a + b$ restar $-3a + 4$
- 4) De $X^2 - 3X$ restar $-5X + 6$

Respuestas:

$\begin{array}{r} 1. \quad a + b \\ \quad -a + b \\ \hline \quad \quad 2b \end{array}$	$\begin{array}{r} 2. \quad 2x - 3y \\ \quad \quad x - 2y \\ \hline \quad \quad 3x - 5y \end{array}$
$\begin{array}{r} 3. \quad 8a + b \\ \quad 3a \quad -4 \\ \hline \quad 11a + b - 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4. \quad x^2 - 3x \\ \quad \quad \quad 5x - 6 \\ \hline \quad \quad x^2 + 2x - 6 \end{array}$

- 5) Restar $7a^2b + 9ab^2$ de $a^3 - a^2b$
- 6) Restar $X - Y + Z$ de $X - Y + Z$
- 7) Restar $-X - Y + Z$ de $X + Y - Z$

Respuestas:

$\begin{array}{r} 5. \quad a^3 - a^2b \\ \quad -7a^2b - 9ab^2 \\ \hline \quad a^3 - 8a^2b - 9ab^2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6. \quad x - y + z \\ \quad -x + y - z \\ \hline \quad \quad \quad 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7. \quad x + y - z \\ \quad \quad x + y - z \\ \hline \quad 2x + 2y - 2z \end{array}$
--	---	---

◀SIGNOS DE AGRUPACIÓN : Los signos de agrupación son de cuatro (4) clases : el paréntesis (), el corchete [], las llaves { } y el vínculo o barra — (el último es muy poco usado).

Los signos de agrupación se emplean para indicar que las cantidades encerradas en ellos deben considerarse como un **todo**, o sea, como **una sola cantidad**.

Así, $X + (Y - Z)$, que equivale a $X + (+Y - Z)$, indica que la diferencia $Y - Z$ debe sumarse con X , y ya sabemos que para efectuar esta suma escribimos a continuación de X las demás cantidades con su propio signo y tendremos :

$$X + (Y - Z) = X + Y - Z$$

La expresión $X + (-2Y + Z)$ indica que a X hay que sumarle $-2Y + Z$; luego, a continuación de X , escribimos $-2Y + Z$ con sus propios signos y tendremos :

$$X + (-2Y + Z) = X - 2Y + Z$$

Vemos, pues, que hemos suprimido el paréntesis precedido del signo **+**, dejando a cada una de las cantidades que estaban dentro de él con sus propios signos.

La expresión $X - (Y + Z)$, que equivale a $X - (+Y + Z)$, indica que de X hay que restar la suma $Y + Z$ y como para restar escribimos el sustraendo con los signos cambiados a continuación del minuendo, tendremos:

$$X - (Y + Z) = X - Y - Z$$

La expresión $X - (-Y + Z)$, indica que de X hay que restar $-Y + Z$; luego cambiando los signos al sustraendo tendremos:

$$X - (-Y + Z) = X + Y - Z$$

Vemos pues, que hemos suprimido el paréntesis precedido del signo **-**, cambiando el signo a cada una de las cantidades que estaban encerradas en el paréntesis.

El corchete [], las llaves { } y el vínculo o barra —, tienen la misma significación que el paréntesis y se suprimen del mismo modo.

Ejercicios : Simplificar, suprimiendo los signos de agrupación y reduciendo términos semejantes:

$$\begin{aligned} 1. \quad & x - (x - y) \\ & = x - x + y \\ & = y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad & a + (a - b) + (-a + b) \\ & = a + a - b - a + b \\ & = 2a - a = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & x^2 + (-3x - x^2 + 5) \\ & = x^2 - 3x - x^2 + 5 \\ & = -3x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad & a^2 + [-b^2 + 2a^2] - [a^2 - b^2] \\ & = a^2 - b^2 + 2a^2 - a^2 + b^2 \\ & = 3a^2 - a^2 = 2a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & a + b - (-2a + 3) \\ & = a + b + 2a - 3 \\ & = 3a + b - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \quad & 2a - \{-x + a - 1\} - \{a + x - 3\} \\ & = 2a + x - a + 1 - a - x + 3 \\ & = 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & 4m - (-2m - n) \\ & = 4m + 2m + n \\ & = 6m + n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \quad & x^2 + y^2 - (x^2 + 2xy + y^2) + [-x^2 + y^2] \\ & = x^2 + y^2 - x^2 - 2xy - y^2 - x^2 + y^2 \\ & = -x^2 - 2xy + y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad & 2x + 3y - (4x + 3y) \\ & = 2x + 3y - 4x - 3y \\ & = -2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \quad & (-5m + 6) + (-m + 5) - 6 \\ & = -5m + 6 - m + 5 - 6 \\ & = -6m + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \quad & \overline{a + a - b} + \overline{-a + b} \quad (\text{vínculo o barra}) \\ & = a + a - b - a + b = 2a - a = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12. \quad & \overline{a - a - b} - \overline{-a - b} \quad (\text{vínculo o barra}) \\ & = a - a + b + a + b = 2a - a + 2b = a + 2b \end{aligned}$$

Cuando unos signos de agrupación están incluidos dentro de otros :

1) Simplificar la expresión :

$$2a + [a - (a + b)]$$

Primero suprimo (elimino) el signo de agrupación que esté incluido dentro de otro (los más interiores), en este caso se puede observar que existe un paréntesis dentro de un corchete.

Como el paréntesis está precedido de un signo negativo, se cambian los signos de los términos que estén dentro de él :

$$= 2a + [a - a - b]$$

Posteriormente se procede a suprimir el otro signo de agrupación (corchete):

Como el corchete está precedido por un signo positivo, no se alteran los signos de los términos que estén dentro de los referidos corchetes

$$= 2a + a - a - b$$

Una vez que no hayan signos de agrupación se reducen los términos semejantes :

Trabajando con las "a": $+ 2a + a - a = 2a$

Trabajando con las "b": $- b = - b$

El resultado es : **$2a - b$**

2) Simplificar la expresión:

$$- [-3a - \{ b + [-a + (2a - b) - (-a + b)] + 3b \} + 4a]$$

Empezando por los más interiores que son los paréntesis; si el signo anterior al paréntesis es positivo, le dejo los signos iguales a los que estén dentro del paréntesis; si el signo anterior al paréntesis es negativo, le cambio los signos a los que estén dentro del paréntesis:

$$- [-3a - \{ b + [-a + 2a - b + a - b] + 3b \} + 4a]$$

Después el corchete que está entre las llaves (como en este caso el corchete está precedido por un signo positivo se mantienen los signos iguales):

$$- [-3a - \{ b - a + 2a - b + a - b \} + 3b] + 4a]$$

Después las llaves que están dentro de los corchetes (como en este caso las llaves están precedidas por un signo negativo, se cambian todos los signos que estén dentro de ellas):

$$- [-3a - b + a - 2a + b - a + b - 3b + 4a]$$

Por último se suprimen los corchetes exteriores, y como en este caso está precedido por un signo negativo, se le cambiarán todos los signos que están dentro de él:

$$+ 3a + b - a + 2a - b + a - b + 3b - 4a$$

Una vez que no hayan signos de agrupación se reducen los términos semejantes:

$$\text{Trabajando con las "a": } +3a - a + 2a + a - 4a = 6a - 5a = a$$

$$\text{Trabajando con las "b": } +b - b - b + 3b = 4b - 2b = 2b$$

El resultado es: **a + 2b**

3) Simplificar la expresión:

$$\begin{aligned} & 2m - [(m - n) - (m + n)] \\ &= 2m - [m - n - m - n] \\ &= 2m - m + n + m + n \\ &= 2m + 2n \end{aligned}$$

4) Simplificar la expresión:

$$\begin{aligned} & 7m^2 - \{ - [m^2 + 3n - (5 - n) - (-3 + m^2)] \} - (2n + 3) \\ &= 7m^2 - \{ - [m^2 + 3n - 5 + n + 3 - m^2] \} - 2n - 3 \\ &= 7m^2 - \{ - m^2 - 3n + 5 - n - 3 + m^2 \} - 2n - 3 \\ &= 7m^2 + m^2 + 3n - 5 + n + 3 - m^2 - 2n - 3 \\ &= 7m^2 + 2n - 5 \end{aligned}$$

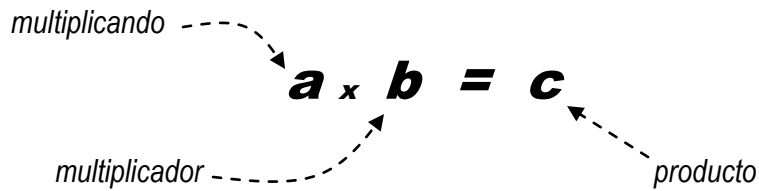
5) Simplificar la expresión:

$$\begin{aligned} & - (3m + n) - [2m + \{ - m + (2m - (2n - 5)) \}] - (n + 6) \\ &= -3m - n - [2m + \{ - m + (2m - 2n + 5) \}] - n - 6 \\ &= -3m - n - [2m + \{ - m + 2m - 2n + 5 \}] - n - 6 \\ &= -3m - n - [2m - m + 2m - 2n + 5 - n - 6] \\ &= -3m - n - 2m + m - 2m + 2n - 5 + n + 6 \\ &= -6m + 2n + 1 \end{aligned}$$

6) Simplificar la expresión:

$$\begin{aligned} & - [-3x + (-x - (2y - 3))] + \{ - (2x + y) + (-x - 3) + 2 - (x + y) \} \\ &= - [-3x + (-x - 2y + 3)] + \{ -2x - y - x - 3 + 2 - x - y \} \\ &= - [-3x - x - 2y + 3] - 2x - y - x - 3 + 2 - x - y \\ &= 3x + x + 2y - 3 - 4x - 2y - 1 \\ &= -4 \end{aligned}$$

◀MULTIPLICACIÓN: La multiplicación es una operación que tiene por objeto, dadas dos cantidades llamadas multiplicando y multiplicador, hallar una tercera cantidad, llamada producto.



El multiplicando y el multiplicador son llamados factores del producto.

En nuestras clases de aritmética nos enseñaron que esta operación es representada a través del signo "x" (por).

En álgebra para evitar confusiones (por utilizar la "x" como una variable o incógnita) se ha convenido representarla de otras maneras :

Es así cómo la operación " a por b" puede ser indicada de alguna de las siguientes maneras :

- 1) $a . b$
- 2) ab
- 3) $a*b$
- 4) $(a).(b)$
- 5) $(a)(b)$

En álgebra para evitar confusiones en la multiplicación de cantidades conocidas (números) se acostumbra a encerrar los mismos entre paréntesis. Así, la multiplicación "12 por 20" suele indicarse como $(12)*(20)$ o como $(12).(20)$ o como $(12)(20)$

El orden de los factores no altera el producto. Así, el producto ab puede escribirse ba ; el producto abc puede escribirse también bac o acb (**Ley Conmutativa** de la multiplicación)

Los factores de un producto pueden agruparse de cualquier modo.

Así, en el producto $abcd$, tenemos: $abcd = a(bcd) = (ab)(cd) = (abc)d$ (**Ley Asociativa** de la multiplicación).

Ley de los signos :

- 1) $(+ a).(+ b) = + ab$
- 2) $(- a).(- b) = + ab$
- 3) $(+ a).(- b) = - ab$
- 4) $(- a).(+ b) = - ab$

Lo anterior podemos resumirlo diciendo que :

- 1) **+ por + da +**
- 2) **- por - da +**
- 3) **+ por - da -**
- 4) **- por + da -**

El signo del producto de varios factores es positivo cuando tiene un número par de factores negativos o ninguno :

$$(- a).(- b).(- c).(- d) = abcd$$

$$(+ a).(+ b).(+ c).(+ d) = abcd$$

El signo del producto de varios factores es negativo cuando tiene un número impar de factores negativos :

$$(- a).(- b).(- c) = - abc$$

Ley de los exponentes : Para multiplicar potencias de la misma base se escribe la misma base y se le pone por exponente la suma de los exponentes de los factores.

Ejemplos:

- 1) $(X^m) (X^n) = X^{m+n}$
- 2) $(X^m Y^n) (X^s Y^t) = X^{m+s} Y^{n+t}$
- 3) $(X^2) (X) = X^{2+1} = X^3$
- 4) $(X^2 Y^2) (X Y^3) = (X^{2+1}) (Y^{2+3}) = X^3 Y^5$

Ley de los coeficientes : El coeficiente del producto de dos factores es el producto de los coeficientes de los factores.

$$(3a).(4b) = 12ab$$

◀MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS : Se multiplican los coeficientes y a continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores. El signo del producto vendrá dado por la Ley de los signos.

Ejemplo 1: Multiplicar 3a por -4b

Primero se multiplican los coeficientes cumpliendo con la Ley de los signos : $(3).(-4) = -12$

A continuación se escriben las letras en orden alfabético : $-12ab$

$$(3a).(-4b) = -12ab$$

Ejemplo 2: Multiplicar $2b^2$ por $3b^3$

Primero se multiplican los coeficientes cumpliendo con la Ley de los signos : $(2).(3) = 6$

A continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores : $6(b^{2+3}) = 6b^5$

$$(2b^2)(3b^3) = (2)(3)(b^{2+3}) = 6b^5$$

Ejemplo 3: Multiplicar 2b por -3b

$$(2b)(-3b) = (2)(-3)(b^{1+1}) = -6b^2$$

Ejemplo 4: Multiplicar $-2b^2$ por $-3b^3$

$$(-2b^2)(-3b^3) = (-2)(-3)(b^{2+3}) = +6b^5$$

Ejemplo 5: Multiplicar $-4X^2Y^2$ por $5XY^3$

Primero se multiplican los coeficientes cumpliendo con la Ley de los signos : $(-4).(5) = -20$

A continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores : $-20(X^{2+1})(Y^{2+3})$

$$(-4X^2Y^2)(5XY^3) = -20(X^{2+1})(Y^{2+3}) = -20X^3Y^5$$

Ejemplo 6: Multiplicar 3a por -4b por 2c

Primero se multiplican los coeficientes cumpliendo con la Ley de los signos : $(3).(-4).(2) = -24$

A continuación se escriben las letras en orden alfabético : $-24abc$

$$(3a).(-4b).(2c) = -24abc$$

Ejemplo 7: Multiplicar $-4X^2Y^2$ por $5XY^3$ por $-XYZ$

Primero se multiplican los coeficientes cumpliendo con la Ley de los signos : $(-4).(5).(-1) = 20$

A continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores : $20(X^{2+1+1})(Y^{2+3+1})Z$

$$(-4X^2Y^2)(5XY^3)(-XYZ) = 20(X^{2+1+1})(Y^{2+3+1})Z = 20X^4Y^6Z$$

Ejemplo 8: Multiplicar $-4XY^2Z$ por $-5XY^2$ por $-2XYZ$

Primero se multiplican los coeficientes cumpliendo con la Ley de los signos : $(-4).(-5).(-2) = -40$

A continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores : $-40(X^{1+1+1})(Y^{2+2+1})(Z^{1+1})$

$$(-4XY^2Z)(-5XY^2)(-2XYZ) = -40(X^{1+1+1})(Y^{2+2+1})(Z^{1+1}) = -40X^3Y^5Z^2$$

Ejemplo 9: Multiplicar $-2X^{2m+n}Y^{n-1}$ por $3X^{m+1}Y^n$

Primero se multiplican los coeficientes cumpliendo con la Ley de los signos: $(-2).(3) = -6$

A continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores: $-6(X^{2m+n+m+1})(Y^{n-1+n})$

$$\begin{aligned} (-2X^{2m+n}Y^{n-1})(3X^{m+1}Y^n) &= -6(X^{2m+n+m+1})(Y^{n-1+n}) \\ &= -6X^{3m+n+1}Y^{2n-1} \end{aligned}$$

◀MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS POR

MONOMIOS: Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta en cada caso la regla de los signos, y se separan los productos parciales con sus propios signos (**Ley Distributiva** de la multiplicación).

Ejemplo 1: Multiplicar $2b$ por $3X^2 - 2X + 5$

La multiplicación se indica como: $(2b).(3X^2 - 2X + 5) =$

Se multiplica el monomio $(2b)$ por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta en cada caso la regla de los signos:

$$\begin{aligned} (2b).(3X^2 - 2X + 5) &= 6bX^2 \\ (2b).(3X^2 - 2X + 5) &= 6bX^2 - 4bX \\ (2b).(3X^2 - 2X + 5) &= 6bX^2 - 4bX + 10b \end{aligned}$$

$$(2b).(3X^2 - 2X + 5) = 6bX^2 - 4bX + 10b$$

Ejemplo 2: Multiplicar $3X^2 - 2X + 5$ por $2X^2$

La multiplicación se indica como: $(2X^2).(3X^2 - 2X + 5) =$

Se multiplica el monomio $(2X^2)$ por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta en cada caso la regla de los signos:

$$\begin{aligned} (2X^2).(3X^2 - 2X + 5) &= 6X^{2+2} \\ (2X^2).(3X^2 - 2X + 5) &= 6X^4 - 4X^{2+1} \\ (2X^2).(3X^2 - 2X + 5) &= 6X^4 - 4X^3 + 10X^2 \end{aligned}$$

$$(2X^2).(3X^2 - 2X + 5) = 6X^4 - 4X^3 + 10X^2$$

La ecuación también puede disponerse en forma similar a lo aprendido en nuestras clases de aritmética:

$$\begin{array}{r} 3X^2 \quad -2X \quad + 5 \\ 2X^2 \\ \hline \end{array}$$

A continuación multiplicamos el monomio $(2X^2)$ por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta en cada caso la regla de los signos y colocando el resultado en la parte de abajo.

$$\begin{array}{r} 3X^2 \quad -2X \quad + 5 \\ 2X^2 \\ \hline 6X^4 \quad - 4X^3 \quad + 10X^2 \end{array}$$

Por cualquiera de los dos métodos el resultado será el mismo.

Ejercicios :

$$\begin{array}{r} 1. \quad 3x^3 - x^2 \\ - 2x \\ \hline -6x^4 + 2x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2. \quad 8x^2y - 3y^2 \\ 2ax^3 \\ \hline 16ax^5y - 6ax^3y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3. \quad x^2 - 4x + 3 \\ - 2x \\ \hline -2x^3 + 8x^2 - 6x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4. \quad a^3 - 4a^2 + 6a \\ 3ab \\ \hline 3a^4b - 12a^3b + 18a^2b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5. \quad a^2 - 2ab + b^2 \\ - ab \\ \hline -a^3b + 2a^2b^2 - ab^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6. \quad x^5 - 6x^3 - 8x \\ 3a^2x^2 \\ \hline 3a^2x^7 - 18a^2x^5 - 24a^2x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7. \quad m^4 - 3m^2n^2 + 7n^4 \\ - 4m^3x \\ \hline -4m^7x + 12m^5n^2x - 28m^3n^4x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8. \quad x^3 - 4x^2y + 6xy^2 \\ ax^3y \\ \hline ax^6y - 4ax^5y^2 + 6ax^4y^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9. \quad a^3 - 5a^2b - 8ab^2 \\ - 4a^4m^2 \\ \hline -4a^7m^2 + 20a^6bm^2 + 32a^5b^2m^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10. \quad a^m - a^{m-1} + a^{m-2} \\ - 2a \\ \hline -2a^{m+1} + 2a^{m-1+1} - 2a^{m-2+1} \\ = -2a^{m+1} + 2a^m - 2a^{m-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11. \quad x^{m+1} + 3x^m - x^{m-1} \\ 3x^{2m} \\ \hline 3x^{3m+1} + 9x^{3m} - 3x^{3m-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12. \quad a^m b^n + a^{m-1} b^{n+1} - a^{m-2} b^{n+2} \\ 3a^2 b \\ \hline 3a^{m+2} b^{n+1} + 3a^{m+1} b^{n+2} - 3a^m b^{n+3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13. \quad x^3 - 3x^2 + 5x - 6 \\ - 4x^2 \\ \hline -4x^5 + 12x^4 - 20x^3 + 24x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14. \quad a^4 - 6a^3x + 9a^2x^2 - 8 \\ 3bx^3 \\ \hline 3a^4bx^3 - 18a^3bx^4 + 27a^2bx^5 - 24bx^8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15. \quad a^{n+3} - 3a^{n+2} - 4a^{n+1} - a^n \\ - a^n x^2 \\ \hline -a^{2n+3}x^2 + 3a^{2n+2}x^2 + 4a^{2n+1}x^2 + a^{2n}x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16. \quad x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 7x + 5 \\ - 3a^2x^3 \\ \hline -3a^2x^7 + 18a^2x^6 - 24a^2x^5 + 21a^2x^4 - 15a^2x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17. \quad -3x^3 + 5x^2y - 7xy^2 - 4y^3 \\ 5a^2xy^2 \\ \hline -15a^2x^4y^2 + 25a^2x^3y^3 - 35a^2x^2y^4 - 20a^2xy^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18. \quad x^{a+5} - 3x^{a+4} + x^{a+3} - 5x^{a+1} \\ - 2x^2 \\ \hline -2x^{a+7} + 6x^{a+6} - 2x^{a+5} + 10x^{a+3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19. \quad a^8 - 3a^6b^2 + a^4b^4 - 3a^2b^6 + b^8 \\ - 5a^3y^2 \\ \hline -5a^{11}y^2 + 15a^9b^2y^2 - 5a^7b^4y^2 + 15a^5b^6y^2 - 5a^3b^8y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20. \quad a^m b^n + 3a^{m-1} b^{n-2} - a^{m-2} b^{n-4} + a^{m-3} b^{n-6} \\ 4a^m b^3 \\ \hline 4a^{2m} b^{n-3} + 12a^{2m-1} b^{n-5} - 4a^{2m-2} b^{n-7} + 4a^{2m-3} b^{n-9} \end{array}$$

◀MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS : Se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la Ley de los signos, y se reducen los términos semejantes.

Ejemplo 1 : Multiplicar $X + 3$ por $X - 2$

La multiplicación se indica como : $(X + 3).(X - 2) =$

Se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la Ley de los signos

$$(X + 3).(X - 2) = X^2$$

$$(X + 3).(X - 2) = X^2 - 2X$$

$$(X + 3).(X - 2) = X^2 - 2X + 3X$$

$$(X + 3).(X - 2) = X^2 - 2X + 3X - 6$$

Una vez efectuada la operación se reducen los términos semejantes del polinomio resultante (producto) :

$$(X + 3).(X - 2) = X^2 - 2X + 3X - 6 = X^2 + X - 6$$

La operación también puede disponerse en forma similar a lo aprendido en la multiplicación de un polinomio por un monomio (pág. 12):

Los dos factores deben ordenarse con relación a una misma letra y colocarse uno debajo del otro:

$$\begin{array}{r} X + 3 \\ X - 2 \\ \hline \end{array}$$

Primero se multiplica el primer término del multiplicador (X) por los dos términos del multiplicando ($X+3$) :

$$\begin{array}{r} X + 3 \\ X - 2 \\ \hline X^2 + 3X \end{array}$$

Posteriormente se multiplica el segundo término del multiplicador (-2) por los dos términos del multiplicando ($X+3$), escribiendo los productos parciales de modo que los términos semejantes queden en columna :

$$\begin{array}{r} X + 3 \\ X - 2 \\ \hline X^2 + 3X \\ -2X - 6 \\ \hline \end{array}$$

Por último se reducen los términos semejantes :

$$\begin{array}{r} X + 3 \\ X - 2 \\ \hline X^2 + 3X \\ -2X - 6 \\ \hline X^2 + X - 6 \end{array}$$

El resultado es el mismo que con el método anterior.

Ejemplo 1 : Multiplicar $2X + 3$ por $3X^2 - 2$

La multiplicación se indica como : $(2X + 3).(3X^2 - 2) =$

Se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la Ley de los signos

$$(2X + 3).(3X^2 - 2) = 6X^3$$

$$(2X+3) \cdot (3X^2-2) = 6X^3 - 4X$$

$$(2X+3) \cdot (3X^2-2) = 6X^3 - 4X + 9X^2$$

$$(2X+3) \cdot (3X^2-2) = 6X^3 - 4X + 9X^2 - 6$$

Una vez efectuada la operación se debe ordenar el polinomio resultante (producto):

$$(2X+3) \cdot (3X^2-2) = 6X^3 - 4X + 9X^2 - 6 = \mathbf{6X^3 + 9X^2 - 4X - 6}$$

Ejercicios:

1. $a+3$

$$\frac{a-1}{a^2+3a}$$

$$\frac{-a-3}{a^2+2a-3}$$

$$\frac{-a-3}{a^2+2a-3}$$

3. $x+5$

$$\frac{x-4}{x^2+5x}$$

$$\frac{-4x-20}{x^2+x-20}$$

$$\frac{-4x-20}{x^2+x-20}$$

2. $a-3$

$$\frac{a+1}{a^2-3a}$$

$$\frac{a-3}{a^2-2a-3}$$

$$\frac{a-3}{a^2-2a-3}$$

4. $m-6$

$$\frac{m-5}{m^2-6m}$$

$$\frac{-5m+30}{m^2-11m+30}$$

$$\frac{-5m+30}{m^2-11m+30}$$

5. $-x+3$

$$\frac{-x+5}{x^2-3x}$$

$$\frac{-5x+15}{x^2-8x+15}$$

$$\frac{-5x+15}{x^2-8x+15}$$

$$\frac{-5x+15}{x^2-8x+15}$$

7. $3x-2y$

$$\frac{2x+y}{6x^2-4xy}$$

$$\frac{+3xy-2y^2}{6x^2-xy-2y^2}$$

$$\frac{+3xy-2y^2}{6x^2-xy-2y^2}$$

$$\frac{+3xy-2y^2}{6x^2-xy-2y^2}$$

6. $-a-2$

$$\frac{-a-3}{a^2+2a}$$

$$\frac{+3a+6}{a^2+5a+6}$$

$$\frac{+3a+6}{a^2+5a+6}$$

$$\frac{+3a+6}{a^2+5a+6}$$

8. $5x-4y$

$$\frac{-3x+2y}{-15x^2+12xy}$$

$$\frac{+10xy-8y^2}{-15x^2+22xy-8y^2}$$

$$\frac{+10xy-8y^2}{-15x^2+22xy-8y^2}$$

$$\frac{+10xy-8y^2}{-15x^2+22xy-8y^2}$$

9. $5a-7b$

$$\frac{a+3b}{5a^2-7ab}$$

$$\frac{+15ab-21b^2}{5a^2+8ab-21b^2}$$

$$\frac{+15ab-21b^2}{5a^2+8ab-21b^2}$$

$$\frac{+15ab-21b^2}{5a^2+8ab-21b^2}$$

11. $-a+b$

$$\frac{8a-4b}{-8a^2+8ab}$$

$$\frac{+4ab-4b^2}{-8a^2+12ab-4b^2}$$

$$\frac{+4ab-4b^2}{-8a^2+12ab-4b^2}$$

$$\frac{+4ab-4b^2}{-8a^2+12ab-4b^2}$$

10. $7x-3$

$$\frac{2x+4}{14x^2-6x}$$

$$\frac{+28x-12}{14x^2+22x-12}$$

$$\frac{+28x-12}{14x^2+22x-12}$$

$$\frac{+28x-12}{14x^2+22x-12}$$

12. $6m-5n$

$$\frac{m-n}{6m^2-5mn}$$

$$\frac{-6mn+5n^2}{6m^2-11mn+5n^2}$$

$$\frac{-6mn+5n^2}{6m^2-11mn+5n^2}$$

$$\frac{-6mn+5n^2}{6m^2-11mn+5n^2}$$

$$\begin{array}{r}
 13. \quad x^3 + 2x^2 - x \\
 \underline{x^2 - 2x + 5} \\
 x^5 + 2x^4 - x^3 \\
 \quad - 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 \\
 \quad \quad + 5x^3 + 10x^2 - 5x \\
 \hline
 x^5 \quad \quad + 12x^2 - 5x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 14. \quad m^3 - 3m^2n + 2mn^2 \\
 \underline{m^2 - 2mn - 8n^2} \\
 m^5 - 3m^4n + 2m^3n^2 \\
 \quad - 2m^4n + 6m^3n^2 - 4m^2n^3 \\
 \quad \quad - 8m^3n^2 + 24m^2n^3 - 16mn^4 \\
 \hline
 m^5 - 5m^4n \quad \quad + 20m^2n^3 - 16mn^4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 15. \quad x^2 + x + 1 \\
 \underline{x^2 - x - 1} \\
 x^4 + x^3 + x^2 \\
 \quad - x^3 - x^2 - x \\
 \quad \quad - x^2 - x - 1 \\
 \hline
 x^4 \quad - x^2 - 2x - 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 16. \quad x^4 - 3x^2 + 2 \\
 \underline{x^2 - 2x + 3} \\
 x^6 \quad - 3x^4 \quad + 2x^2 \\
 \quad - 2x^5 \quad + 6x^3 \quad - 4x \\
 \quad \quad + 3x^4 \quad - 9x^2 \quad + 6 \\
 \hline
 x^6 - 2x^5 \quad + 6x^3 - 7x^2 - 4x + 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 17. \quad m^3 + m^2 - 4m - 1 \\
 \underline{m^3 + 1} \\
 m^6 + m^5 - 4m^4 - m^3 \\
 \quad \quad \quad + m^3 + m^2 - 4m - 1 \\
 \hline
 m^6 + m^5 - 4m^4 \quad + m^2 - 4m - 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 18. \quad a^3 - 5a + 2 \\
 \underline{a^2 - a + 5} \\
 a^5 \quad - 5a^3 + 2a^2 \\
 \quad - a^4 \quad + 5a^2 - 2a \\
 \quad \quad + 5a^3 \quad - 25a + 10 \\
 \hline
 a^5 - a^4 \quad + 7a^2 - 27a + 10
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 19. \quad x^2 - 2xy + y^2 \\
 \underline{-x^2 + xy + 3y^2} \\
 -x^4 + 2x^3y - x^2y^2 \\
 \quad + x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 \\
 \quad \quad + 3x^2y^2 - 6xy^3 + 3y^4 \\
 \hline
 -x^4 + 3x^3y \quad - 5xy^3 + 3y^4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 20. \quad n^2 - 2n + 1 \\
 \underline{n^2 - 1} \\
 n^4 - 2n^3 + n^2 \\
 \quad \quad - n^2 + 2n - 1 \\
 \hline
 n^4 - 2n^3 \quad + 2n - 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 21. \quad a^3 - 3a^2b + 4ab^2 \\
 \quad a^2b - 2ab^2 - 10b^3 \\
 \hline
 \quad a^5b - 3a^4b^2 + 4a^3b^3 \\
 \quad \quad - 2a^4b^2 + 6a^3b^3 - 8a^2b^4 \\
 \quad \quad \quad - 10a^3b^3 + 30a^2b^4 - 40ab^5 \\
 \hline
 \quad a^5b - 5a^4b^2 \quad \quad + 22a^2b^4 - 40ab^5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 22. \quad 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - 9y^3 \\
 \quad 2x + 3y \\
 \hline
 \quad 16x^4 - 24x^3y + 12x^2y^2 - 18xy^3 \\
 \quad \quad + 24x^3y - 36x^2y^2 + 18xy^3 - 27y^4 \\
 \hline
 \quad 16x^4 \quad \quad - 24x^2y^2 \quad \quad - 27y^4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 23. \quad 2y^3 - 3y^2 + y - 4 \\
 \quad 2y + 5 \\
 \hline
 \quad 4y^4 - 6y^3 + 2y^2 - 8y \\
 \quad \quad + 10y^3 - 15y^2 + 5y - 20 \\
 \hline
 \quad 4y^4 + 4y^3 - 13y^2 - 3y - 20
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 24. \quad -a^3 + 2ax^2 + 3x^3 \\
 \quad 2a^2 - 3ax - x^2 \\
 \hline
 \quad -2a^5 \quad \quad + 4a^3x^2 + 6a^2x^3 \\
 \quad \quad + 3a^4x \quad \quad - 6a^2x^3 - 9ax^4 \\
 \quad \quad \quad + a^3x^2 \quad \quad - 2ax^4 - 3x^5 \\
 \hline
 \quad -2a^5 + 3a^4x + 5a^3x^2 \quad \quad - 11ax^4 - 3x^5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 25. \quad x^4 - 3x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 \\
 \quad - x^2 - xy - y^2 \\
 \hline
 \quad -x^6 + 3x^5y - 2x^4y^2 - x^2y^3 \\
 \quad \quad - x^5y + 3x^4y^2 - 2x^3y^3 - x^2y^4 \\
 \quad \quad \quad - x^4y^2 + 3x^3y^3 - 2x^2y^4 - xy^5 \\
 \hline
 \quad -x^6 + 2x^5y \quad \quad - 3x^2y^4 - xy^5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 26. \quad a^3 - 5a^2 + 2a - 3 \\
 \quad a^3 - 2a - 7 \\
 \hline
 \quad a^6 - 5a^5 + 2a^4 - 3a^3 \\
 \quad \quad - 2a^4 + 10a^3 - 4a^2 + 6a \\
 \quad \quad \quad - 7a^3 + 35a^2 - 14a + 21 \\
 \hline
 \quad a^6 - 5a^5 \quad \quad + 31a^2 - 8a + 21
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 27. \quad m^4 + m^3 - m^2 + 3 \\
 \quad m^2 - 2m + 3 \\
 \hline
 \quad m^6 + m^5 - m^4 \quad \quad + 3m^2 \\
 \quad \quad - 2m^5 - 2m^4 + 2m^3 \quad \quad - 6m \\
 \quad \quad \quad + 3m^4 + 3m^3 - 3m^2 \quad \quad + 9 \\
 \hline
 \quad m^6 - m^5 \quad \quad + 5m^3 \quad \quad - 6m + 9
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 28. \quad a^4 + a^3b - 3a^2b^2 - ab^3 + b^4 \\
 \quad a^2 - 2ab + b^2 \\
 \hline
 \quad a^6 + a^5b - 3a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 \\
 \quad \quad - 2a^5b - 2a^4b^2 + 6a^3b^3 + 2a^2b^4 - 2ab^5 \\
 \quad \quad \quad + a^4b^2 + a^3b^3 - 3a^2b^4 - ab^5 + b^6 \\
 \hline
 \quad a^6 - a^5b - 4a^4b^2 + 6a^3b^3 \quad \quad - 3ab^5 + b^6
 \end{array}$$

Ejercicios con exponentes literales :

$$1. \frac{a^{x+2} - a^{x+1} + a^x}{a+1} \\ \frac{a^{x+3} - a^{x+2} + a^{x+1} + a^{x+2} - a^{x+1} + a^x}{a^{x+3} + a^x}$$

$$2. \frac{-x^{n+3} + 2x^{n+2} + x^{n+1}}{x^2 + x} \\ \frac{-x^{n+5} + 2x^{n+4} + x^{n+3} - x^{n+4} + 2x^{n+3} + x^{n+2}}{-x^{n+5} + x^{n+4} + 3x^{n+3} + x^{n+2}}$$

$$3. \frac{m^{a+2} + m^{a+1} - m^a + m^{a-1}}{m^2 - 2m + 3} \\ \frac{m^{a+4} + m^{a+3} - m^{a+2} + m^{a+1} - 2m^{a+3} - 2m^{a+2} + 2m^{a+1} - 2m^a + 3m^{a+2} + 3m^{a+1} - 3m^a + 3m^{a-1}}{m^{a+4} - m^{a+3} + 6m^{a+1} - 5m^a + 3m^{a-1}}$$

$$4. \frac{a^{n+2} + 3a^{n+1} - 2a^n}{a^{n+1} + a^n} \\ \frac{a^{2n+3} + 3a^{2n+2} - 2a^{2n+1} + a^{2n+2} + 3a^{2n+1} - 2a^{2n}}{a^{2n+3} + 4a^{2n+2} + a^{2n+1} - 2a^{2n}}$$

$$5. \frac{x^{a+2} + 2x^{a+1} - x^a}{x^{a+3} - 2x^{a+1}} \\ \frac{x^{2a+5} + 2x^{2a+4} - x^{2a+3} - 2x^{2a+3} - 4x^{2a+2} + 2x^{2a+1}}{x^{2a+5} + 2x^{2a+4} - 3x^{2a+3} - 4x^{2a+2} + 2x^{2a+1}}$$

$$6. \frac{a^x - 2a^{x-1} + 3a^{x-2}}{a^2 + 2a - 1} \\ \frac{a^{x+2} - 2a^{x+1} + 3a^x + 2a^{x+1} - 4a^x + 6a^{x-1} - a^x + 2a^{x-1} - 3a^{x-2}}{a^{x+2} - 2a^x + 8a^{x-1} - 3a^{x-2}}$$

$$7. \frac{a^x + 3a^{x-1} - 2a^{x-2}}{a^x - a^{x-1} + a^{x-2}} \\ \frac{a^{2x} + 3a^{2x-1} - 2a^{2x-2} - a^{2x-1} - 3a^{2x-2} + 2a^{2x-3} + a^{2x-2} + 3a^{2x-3} - 2a^{2x-4}}{a^{2x} + 2a^{2x-1} - 4a^{2x-2} + 5a^{2x-3} - 2a^{2x-4}}$$

$$8. \frac{m^{a+4} - m^{a+3} - 2m^{a+2} + m^{a+1}}{-m^{a-1} + m^{a-2} + m^{a-3}} \\ \frac{-m^{2a+3} + m^{2a+2} + 2m^{2a+1} - m^{2a} + m^{2a+2} - m^{2a+1} - 2m^{2a} + m^{2a-1} + m^{2a+1} - m^{2a} - 2m^{2a-1} + m^{2a-2}}{-m^{2a+3} + 2m^{2a+2} + 2m^{2a+1} - 4m^{2a} - m^{2a-1} + m^{2a-2}}$$

PRODUCTO CONTINUADO DE POLINOMIOS :

Quando se presente la multiplicación de tres o más polinomios, la operación se desarrolla efectuando el producto de dos factores (polinomios) cualesquiera; este producto se multiplica por el tercer factor (polinomio) y así sucesivamente hasta incluirlos a todos en la operación:

Ejemplo 1 : Efectuar $4.(a + 5).(a - 3)$

Primero multiplico "4 por $a + 5$ " y el resultado obtenido lo multiplico por " $a - 3$ " obteniendo el producto definitivo.

$$\begin{array}{r}
 4(a+5)(a-3) \\
 4a+20 \quad \leftarrow \\
 \underline{a-3} \\
 4a^2+20a \\
 \quad -12a-60 \\
 \hline
 4a^2+8a-60
 \end{array}$$

Ejemplo 2 : Efectuar $3a^2.(X + 1).(X - 1)$

Primero multiplico " $3a^2$ por $X + 1$ " y el resultado obtenido lo multiplico por " $X - 1$ " obteniendo el producto definitivo.

$$\begin{array}{r}
 3a^2(x+1)(x-1) \\
 3a^2x+3a^2 \quad \leftarrow \\
 \underline{x-1} \\
 3a^2x^2+3a^2x \\
 \quad -3a^2x-3a^2 \\
 \hline
 3a^2x^2 \quad -3a^2
 \end{array}$$

Ejemplo 3 : Efectuar $2.(a - 3).(a - 1).(a + 4)$

Primero multiplico "2 por $a - 3$ ", el resultado obtenido lo multiplico por " $a - 1$ " y ese nuevo producto lo multiplico por " $a + 4$ " obteniendo el producto definitivo.

$$\begin{array}{r}
 2(a-3)(a-1)(a+4) \\
 2a-6 \quad \leftarrow \\
 \underline{a-1} \\
 2a^2-6a \\
 \quad -2a+6 \\
 \hline
 2a^2-8a+6 \\
 \underline{a+4} \quad \leftarrow \\
 2a^3-8a^2+6a \\
 \quad +8a^2-32a+24 \\
 \hline
 2a^3 \quad -26a+24
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4.(x^2+1)(x^2-1)(x^2+1) \\
 x^2+1 \quad \leftarrow \\
 \underline{x^2+1} \\
 x^4+x^2 \\
 \quad +x^2+1 \\
 \hline
 x^4+2x^2+1 \\
 \underline{x^2-1} \quad \leftarrow \\
 x^6+2x^4+x^2 \\
 \quad -x^4-2x^2-1 \\
 \hline
 x^6+x^4-x^2-1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5. \quad m(m-4)(m-6)(3m+2) \\
 \quad m^2 - 4m \\
 \quad m-6 \\
 \hline
 \quad m^3 - 4m^2 \\
 \quad - 6m^2 + 24m \\
 \hline
 \quad m^3 - 10m^2 + 24m \\
 \quad 3m+2 \\
 \hline
 \quad 3m^4 - 30m^3 + 72m^2 \\
 \quad + 2m^3 - 20m^2 + 48m \\
 \hline
 \quad 3m^4 - 28m^3 + 52m^2 + 48m
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6. \quad (a-b)(a^2-2ab+b^2)(a+b) \\
 \quad a^2 - 2ab + b^2 \\
 \quad a+b \\
 \hline
 \quad a^3 - 2a^2b + ab^2 \\
 \quad + a^2b - 2ab^2 + b^3 \\
 \hline
 \quad a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 \\
 \quad a-b \\
 \hline
 \quad a^4 - a^3b - a^2b^2 + ab^3 \\
 \quad - a^3b + a^2b^2 + ab^3 - b^4 \\
 \hline
 \quad a^4 - 2a^3b \quad + 2ab^3 - b^4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7. \quad 3x(x^2-2x+1)(x-1)(x+1) \\
 \quad 3x^3 - 6x^2 + 3x \\
 \quad x-1 \\
 \hline
 \quad 3x^4 - 6x^3 + 3x^2 \\
 \quad - 3x^3 + 6x^2 - 3x \\
 \hline
 \quad 3x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 3x \\
 \quad x+1 \\
 \hline
 \quad 3x^5 - 9x^4 + 9x^3 - 3x^2 \\
 \quad + 3x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 3x \\
 \hline
 \quad 3x^5 - 6x^4 \quad + 6x^2 - 3x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8. \quad (x^2-x+1)(x^2+x-1)(x-2) \\
 \quad x^2 - x + 1 \\
 \quad x^2 + x - 1 \\
 \hline
 \quad x^4 - x^3 + x^2 \\
 \quad + x^3 - x^2 + x \\
 \quad - x^2 + x - 1 \\
 \hline
 \quad x^4 \quad - x^2 + 2x - 1 \\
 \quad x-2 \\
 \hline
 \quad x^5 \quad - x^3 + 2x^2 - x \\
 \quad - 2x^4 \quad + 2x^2 - 4x + 2 \\
 \hline
 \quad x^5 - 2x^4 - x^3 + 4x^2 - 5x + 2
 \end{array}$$

◀MULTIPLICACIÓN COMBINADA CON SUMA Y RESTA:

Ejemplo 1: Simplificar $(X + 3).(X - 4) + 3.(X - 1).(X + 2)$

Se efectúa la primera multiplicación o producto " $(X + 3).(X - 4)$ "; después la segunda multiplicación " $3.(X - 1).(X + 2)$ " y por último se suman los dos productos obtenidos.

Efectuando el primer producto (recordando lo estudiado en Multiplicación de Polinomios pág. 14):

$$(X + 3).(X - 4) = X^2 - X - 12$$

Efectuando el segundo producto (recordando lo estudiado en Producto Continuo de Polinomios pág. 19):

$$3.(X - 1).(X + 2) = 3X^2 + 3X - 6$$

Sumando los dos productos (Suma de Polinomios pág. 4):

$$\begin{aligned}(X^2 - X - 12) + (3X^2 + 3X - 6) &= X^2 - X - 12 + 3X^2 + 3X - 6 \\ &= 4X^2 + 2X - 18\end{aligned}$$

Ejercicios:

$$\begin{aligned}1. & 4(x + 3) + 5(x + 2) \\ &= 4x + 12 + 5x + 10 \\ &= 9x + 22\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. & 6(x^2 + 4) - 3(x^2 + 1) + 5(x^2 + 2) \\ &= 6x^2 + 24 - 3x^2 - 3 + 5x^2 + 10 \\ &= 8x^2 + 31\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3. & a(a - x) + 3a(x + 2a) - a(x - 3a) \\ &= a^2 - ax + 3ax + 6a^2 - ax + 3a^2 \\ &= 10a^2 + ax\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4. & x^2(y^2 + 1) + y^2(x^2 + 1) - 3x^2y^2 \\ &= x^2y^2 + x^2 + x^2y^2 + y^2 - 3x^2y^2 \\ &= -x^2y^2 + x^2 + y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5. & 4m^3 - 5mn^2 + 3m^2(m^2 + n^2) - 3m(m^2 - n^2) \\ &= 4m^3 - 5mn^2 + 3m^4 + 3m^2n^2 - 3m^3 + 3mn^2 \\ &= 3m^4 + m^3 + 3m^2n^2 - 2mn^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6. & y^2 + x^2y^3 - y^3(x^2 + 1) + y^2(x^2 + 1) - y^2(x^2 - 1) \\ &= y^2 + x^2y^3 - x^2y^3 - y^3 + x^2y^2 + y^2 - x^2y^2 + y^2 \\ &= -y^3 + 3y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7. & 5(x + 2) - (x + 1)(x + 4) - 6x \\ &= 5x + 10 - (x^2 + 4x + x + 4) - 6x \\ &= -x + 10 - x^2 - 4x - x - 4 \\ &= -x^2 - 6x + 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8. & (a + 5)(a - 5) - 3(a + 2)(a - 2) + 5(a + 4) \\ &= a^2 - 5a + 5a - 25 - 3(a^2 - 2a + 2a - 4) + 5a + 20 \\ &= a^2 + 5a - 5 - 3(a^2 - 4) \\ &= a^2 + 5a - 5 - 3a^2 + 12 \\ &= -2a^2 + 5a + 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}9. & (a + b)(4a - 3b) - (5a - 2b)(3a + b) - (a + b)(3a - 6b) \\ &= 4a^2 + ab - 3b^2 - (15a^2 - ab - 2b^2) - (3a^2 - 3ab - 6b^2) \\ &= 4a^2 + ab - 3b^2 - 15a^2 + ab + 2b^2 - 3a^2 + 3ab + 6b^2 \\ &= -14a^2 + 5ab + 5b^2\end{aligned}$$

◀SUPRESIÓN DE SIGNOS DE AGRUPACIÓN CON PRODUCTOS INDICADOS:

Ejercicio 1 : Simplificar la siguiente expresión

$$x - [3a + 2(-x + 1)]$$

Un coeficiente colocado junto a un signo de agrupación nos indica que hay que multiplicarlo por cada uno de los términos encerrados en el signo de agrupación. Así en este caso multiplicaremos "+2" por $(-x + 1)$ y tendremos :

$$= x - [3a - 2x + 2]$$

Ahora observamos que antes del corchete aparece un signo negativo, lo que nos indica que debemos cambiarle los signos a todos los términos que estén dentro de él.

$$= x - 3a + 2x - 2$$

Por último se reducen los términos semejantes y el resultado será :

$$= 3x - 3a - 2$$

$$\begin{aligned} 2. & -(a+b) - 3[2a+b(-a+2)] \\ & = -a-b - 3[2a-ab+2b] \\ & = -a-b - 6a+3ab-6b \\ & = -7a-7b+3ab \Rightarrow -7a+3ab-7b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. & -[3x-2y+(x-2y)] - 2(x+y) - 3(2x+1) \\ & = -[3x-2y+x-2y-2x-2y-6x-3] \\ & = -[-4x-6y-3] \\ & = 4x+6y+3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. & 4x^2 - \{-3x+5-[-x+x(2-x)]\} \\ & = 4x^2 - \{-3x+5-[-x+2x-x^2]\} \\ & = 4x^2 - \{-3x+5+x-2x+x^2\} \\ & = 4x^2 - \{-4x+5+x^2\} \\ & = 4x^2+4x-5-x^2 \\ & = 3x^2+4x-5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. & 2a - \{-3x+2[-a+3x-2(-a+b-(2+a))]\} \\ & = 2a - \{-3x+2[-a+3x-2(-a+b-2-a)]\} \\ & = 2a - \{-3x+2[-a+3x+2a-2b+4+2a]\} \\ & = 2a - \{-3x+2[3a+3x-2b+4]\} \\ & = 2a - \{-3x+6a+6x-4b+8\} \\ & = 2a+3x-6a-6x+4b-8 \\ & = -4a-3x+4b-8 \Rightarrow -4a+4b-3x-8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. & a - (x+y) - 3(x-y) + 2[-(x-2y) - 2(-x-y)] \\ & = a - x - y - 3x + 3y + 2[-x+2y+2x+2y] \\ & = a - 4x + 2y + 2[x+4y] \\ & = a - 4x + 2y + 2x + 8y \\ & = a - 2x + 10y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. & -3\{-[+(-a+b)]\} - 4\{-[-(-a-b)]\} \\ & = -3\{-[-a+b]\} - 4\{-[a+b]\} \\ & = -3\{a-b\} - 4\{-a-b\} \\ & = -3a+3b+4a+4b \\ & = a+7b \end{aligned}$$

◀DIVISIÓN : Es una operación que tiene por objeto, dado el producto de dos factores (dividendo) y uno de los factores (divisor), hallar el otro factor (cociente).

$$\frac{a}{b} = c$$

De esta definición se deduce que el cociente multiplicado por el divisor reproduce el dividendo.

Así, la operación de dividir $6a^2$ entre $3a$, que se indica $6a^2 \div 3a$ ó $6a^2 / 3a$ ó $\frac{6a^2}{3a}$ consiste en hallar una cantidad que multiplicada por $3a$ dé $6a^2$. Esa cantidad (cociente) es $2a$.

Es evidente que $\frac{6a^2}{2a} = 3a$, donde vemos que si el dividendo se divide entre el cociente nos da de cociente lo que antes era divisor.

Ley de los signos :

La Ley de los signos en la división es la misma que en la multiplicación.

Signos iguales dan positivo y signos diferentes dan negativo.

$$1) \frac{+ab}{+a} = +b$$

$$2) \frac{-ab}{-a} = +b$$

$$3) \frac{+ab}{-a} = -b$$

$$4) \frac{-ab}{+a} = -b$$

Lo anterior podemos resumirlo diciendo que :

- 1) + entre + da +
- 2) - entre - da +
- 3) + entre - da -
- 4) - entre + da -

Ley de los exponentes : Para dividir potencias de la misma base se escribe la misma base y se le pone de exponente la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.

Ejemplos:

$$1) (X^m) \div (X^n) = \frac{X^m}{X^n} = X^{m-n}$$

$$2) (X^5) \div (X^2) = \frac{X^5}{X^2} = X^{5-2} = X^3$$

$$3) (X^3Y^6) \div (X^2Y^4) = \frac{X^3Y^6}{X^2Y^4} = (X^{3-2})(Y^{6-4}) = XY^2$$

Ley de los coeficientes : El coeficiente del cociente es el cociente de dividir el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor.

$$\frac{6a^2}{2a} = 3a$$

$3a$ es el cociente porque $3a$ por $2a = 6a^2$. Y vemos que el coeficiente del cociente 3, es el cociente de dividir 6 entre 2.

En otras palabras : divido el coeficiente del término del numerador (6) entre el coeficiente del término del denominador (2)

$$6/2 = 3$$

A continuación realizo la división de las partes literales, siguiendo los pasos mostrados en esta misma página en la Ley de los exponentes :

$$a^2/a = a$$

Y después se multiplican los dos resultados = $3a$

◀DIVISIÓN DE DOS MONOMIOS : Se divide el coeficiente del dividendo (numerador) entre el coeficiente del divisor (denominador) y a continuación se escriben en orden alfabético las letras, poniéndole a cada letra un exponente igual a la diferencia entre el exponente que tiene en el dividendo (numerador) y el exponente que tiene en el divisor (denominador). El signo lo da la Ley de los signos.

Ejemplos :

$$1) (10X^m) \div (5X^n) =$$

Esta expresión también puede indicarse como $(10X^m) / (5X^n)$ ó como $\frac{10X^m}{5X^n}$, en donde $10X^m$ recibe el nombre de dividendo (numerador) y $5X^n$ recibe el nombre de divisor (denominador).

Se divide el coeficiente del dividendo (numerador) entre el coeficiente del divisor (denominador). El signo lo da la Ley de los signos

$$\frac{10}{5} = 2$$

A continuación se escriben en orden alfabético las letras, poniéndole a cada letra un exponente igual a la diferencia entre el exponente que tiene en el dividendo (numerador) y el exponente que tiene en el divisor (denominador).

$$2X^{m-n}$$

La operación quedará expresada :

$$(10X^m) \div (5X^n) = \frac{10X^m}{5X^n} = 2X^{m-n}$$

$$2) (6X^5) \div (-2X^2) = \frac{6X^5}{-2X^2} = -3X^{5-2} = -3X^3$$

$$3) (-6X^5) \div (-2X^2) = \frac{-6X^5}{-2X^2} = 3X^{5-2} = 3X^3$$

$$4) (10X^3Y^6) \div (-5X^2Y^4) =$$

Se divide el coeficiente del dividendo o numerador ($10X^3Y^6$) entre el coeficiente del divisor o denominador ($-5X^2Y^4$). El signo lo da la Ley de los signos.

$$\frac{10}{-5} = -2$$

A continuación se escriben en orden alfabético las letras, poniéndole a cada letra un exponente igual a la diferencia entre el exponente que tiene en el dividendo (numerador) y el exponente que tiene en el divisor (denominador).

$$-2(X^{3-2})(Y^{6-4})$$

La operación quedará expresada :

$$(10X^3Y^6) \div (-5X^2Y^4) = \frac{10X^3Y^6}{-5X^2Y^4} = -2(X^{3-2})(Y^{6-4}) = -2XY^2$$

$$5. -a^3b^4c / a^3b^4 = -a^{3-3}b^{4-4}c = -c$$

$$6. -a^2b / -ab = a^{2-1}b^{1-1} = a$$

$$7. 54x^2y^2z^3 / -6xy^2z^3 = -9x^{2-1}y^{2-2}z^{3-3} = -9x$$

$$8. -5m^2n / m^2n = -5m^{2-2}n^{1-1} = -5$$

$$9. -8a^2x^3 / -8a^2x^3 = a^{2-2}x^{3-3} = 1$$

$$10. -xy^2 / 2y = -\frac{xy^{2-1}}{2} = -\frac{xy}{2}$$

$$11. 5x^4y^5 / -6x^4y = -\frac{5}{6}x^{4-4}y^{5-1} = -\frac{5}{6}y^4$$

◀DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN

MONOMIO : Se divide cada uno de los términos del polinomio por el monomio separando los coeficientes parciales con sus propios signos.

Esta es la Ley Distributiva de la división.

Ejemplo 1 :

$$\frac{a^2 - ab}{a} = \frac{a^2}{a} - \frac{ab}{a} = a - b$$

Ejemplo 2 :

$$\frac{3x^2y^3 - 5a^2x^4}{-3x^2} = \frac{3x^2y^3}{-3x^2} - \frac{5a^2x^4}{-3x^2} = -y^3 + \frac{5}{3}a^2x^2$$

$$\begin{aligned} 3. \frac{3a^3 - 5ab^2 - 6a^2b^3}{-2a} \\ = \frac{3a^3}{-2a} - \frac{5ab^2}{-2a} - \frac{6a^2b^3}{-2a} = -\frac{3}{2}a^2 + \frac{5}{2}b^2 + 3ab^3 \end{aligned}$$

$$4. \frac{x^3 - 4x^2 + x}{x} = \frac{x^3}{x} - \frac{4x^2}{x} + \frac{x}{x} = x^2 - 4x + 1$$

$$\begin{aligned} 5. \frac{4x^8 - 10x^6 - 5x^4}{2x^3} \\ = \frac{4x^8}{2x^3} - \frac{10x^6}{2x^3} - \frac{5x^4}{2x^3} = 2x^5 - 5x^3 - \frac{5}{2}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \frac{6m^3 - 8m^2n + 20mn^2}{-2m} \\ = \frac{6m^3}{-2m} - \frac{8m^2n}{-2m} + \frac{20mn^2}{-2m} = -3m^2 + 4mn - 10n^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \frac{6a^8b^8 - 3a^6b^6 - a^2b^3}{3a^2b^3} \\ = \frac{6a^8b^8}{3a^2b^3} - \frac{3a^6b^6}{3a^2b^3} - \frac{a^2b^3}{3a^2b^3} = 2a^6b^5 - a^4b^3 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \frac{x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 15x}{-5x} \\ = \frac{x^4}{-5x} - \frac{5x^3}{-5x} - \frac{10x^2}{-5x} + \frac{15x}{-5x} = -\frac{1}{5}x^3 + x^2 + 2x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \frac{8m^9n^2 - 10m^7n^4 - 20m^5n^6 + 12m^3n^8}{2m^2} \\ = \frac{8m^9n^2}{2m^2} - \frac{10m^7n^4}{2m^2} - \frac{20m^5n^6}{2m^2} + \frac{12m^3n^8}{2m^2} \\ = 4m^7n^2 - 5m^5n^4 - 10m^3n^6 + 6mn^8 \end{aligned}$$

$$10. \frac{a^x + a^{m-1}}{a^2} = \frac{a^x}{a^2} + \frac{a^{m-1}}{a^2} = a^{x-2} + a^{m-3}$$

$$\begin{aligned} 11. \frac{2a^m - 3a^{m+2} + 6a^{m+4}}{-3a^3} \\ = \frac{2a^m}{-3a^3} - \frac{3a^{m+2}}{-3a^3} + \frac{6a^{m+4}}{-3a^3} = -\frac{2}{3}a^{m-3} + a^{m-1} - 2a^{m+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12. \frac{a^m b^n + a^{m-1} b^{n+2} - a^{m-2} b^{n+4}}{a^2 b^3} \\ = \frac{a^m b^n}{a^2 b^3} + \frac{a^{m-1} b^{n+2}}{a^2 b^3} - \frac{a^{m-2} b^{n+4}}{a^2 b^3} \\ = a^{m-2} b^{n-3} + a^{m-3} b^{n-1} - a^{m-4} b^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13. \frac{x^{m+2} - 5x^m + 6x^{m+1} - x^{m-1}}{x^{m-2}} \\ = \frac{x^{m+2}}{x^{m-2}} - \frac{5x^m}{x^{m-2}} + \frac{6x^{m+1}}{x^{m-2}} - \frac{x^{m-1}}{x^{m-2}} \\ = x^4 - 5x^2 + 6x^3 - x \Rightarrow x^4 + 6x^3 - 5x^2 - x \end{aligned}$$

◀DIVISIÓN DE DOS POLINOMIOS:

Para facilitar la comprensión de los procedimientos recomendados en este trabajo, colocaremos a continuación una división de dos polinomios donde se identificará cada una de las partes que la conforman:

$$\begin{array}{r}
 \text{Dividendo} \quad \begin{array}{r} X^2 - X - 6 \\ -X^2 - 3X \\ \hline -4X - 6 \\ 4X + 12 \\ \hline 6 \end{array} \\
 \text{Residuo o Resto} \quad \begin{array}{c} 6 \end{array} \\
 \text{Divisor} \quad \begin{array}{r} X + 3 \\ \hline X - 4 \\ \hline \end{array} \\
 \text{Cociente} \quad \begin{array}{c} X + 3 \\ \hline X - 4 \end{array}
 \end{array}$$

En las divisiones exactas :

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{Cociente}$$

En las divisiones donde el residuo es distinto de cero:

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Residuo}}{\text{Divisor}}$$

Dividir $-11X^2 + X^4 - 18X - 8$ entre $X + 1$

Primero se debe **ordenar y completar** el dividendo ($-11X^2 + X^4 - 18X - 8$) con relación a una misma letra. En aquellos casos donde falte un término se colocará cero para garantizar que el polinomio esté completo.

Dividir $X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8$ entre $X + 1$

Se colocan los dos polinomios de manera similar a como lo hacemos para realizar la división en aritmética:

$$\begin{array}{r}
 X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \quad | \quad X + 1 \\
 \hline
 \end{array}$$

Se divide el primer término del dividendo (X^4) entre el primer término del divisor (X) y tendremos el primer término del cociente (X^3).

$$\begin{array}{r}
 X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \quad | \quad X + 1 \\
 \hline
 X^3
 \end{array}$$

Este primer término del cociente se multiplica por todo el divisor y al producto se le cambia el signo, escribiendo cada término debajo de su semejante.

X^3 por $X = X^4$ y al cambiarle el signo queda $-X^4$ y lo coloco debajo del dividendo.

$$\begin{array}{r}
 X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \quad | \quad X + 1 \\
 \hline
 -X^4
 \end{array}$$

X^3 por 1 = X^3 y al cambiarle el signo queda $-X^3$ y lo coloco debajo del dividendo

$$\begin{array}{r} X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\ -X^4 - X^3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} X+1 \\ \hline X^3 \end{array}$$

Ahora efectuamos la operación :

$$\begin{array}{r} X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\ -X^4 - X^3 \\ \hline -X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} X+1 \\ \hline X^3 \end{array}$$

Se divide el primer término del resto ($-X^3$) entre el primer término del divisor (X) y tendremos el segundo término del cociente ($-X^2$).

$$\begin{array}{r} X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\ -X^4 - X^3 \\ \hline -X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} X+1 \\ \hline X^3 - X^2 \end{array}$$

Este segundo término del cociente ($-X^2$). se multiplica por todo el divisor y al producto se le cambia el signo.

$-X^2$ por $X = -X^3$ y al cambiarle el signo queda X^3 y lo coloco debajo del dividendo

$$\begin{array}{r} X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\ -X^4 - X^3 \\ \hline -X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\ X^3 \end{array} \quad \begin{array}{r} X+1 \\ \hline X^3 - X^2 \end{array}$$

$-X^2$ por 1 = $-X^2$ y al cambiarle el signo queda X^2 y lo coloco debajo del dividendo

$$\begin{array}{r} X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\ -X^4 - X^3 \\ \hline -X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\ X^3 + X^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} X+1 \\ \hline X^3 - X^2 \end{array}$$

Al efectuar la operación (restarlo) :

$$\begin{array}{r} X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\ -X^4 - X^3 \\ \hline -X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\ X^3 + X^2 \\ \hline -10X^2 - 18X - 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} X+1 \\ \hline X^3 - X^2 \end{array}$$

Se divide el primer término del resto ($-10X^2$) entre el primer término del divisor (X) y tendremos el tercer término del cociente ($-10X$).

$$\begin{array}{r} X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\ -X^4 - X^3 \\ \hline -X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\ X^3 + X^2 \\ \hline -10X^2 - 18X - 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} X+1 \\ \hline X^3 - X^2 - 10X \end{array}$$

Este tercer término del cociente ($-10X$). se multiplica por todo el divisor y al producto se le cambian los signos.

$$\begin{array}{r}
 X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\
 \underline{-X^4 - X^3} \\
 -X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\
 \underline{X^3 + X^2} \\
 -10X^2 - 18X - 8 \\
 \underline{+10X^2 + 10X} \\
 -8X - 8
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} X+1 \\ X^3 - X^2 - 10X - 8 \end{array} \right.$$

Al efectuar la operación (restarlo) :

$$\begin{array}{r}
 X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\
 \underline{-X^4 - X^3} \\
 -X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\
 \underline{X^3 + X^2} \\
 -10X^2 - 18X - 8 \\
 \underline{+10X^2 + 10X} \\
 -8X - 8
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} X+1 \\ X^3 - X^2 - 10X - 8 \end{array} \right.$$

Se divide el primer término del resto ($-8X$) entre el primer término del divisor (X) y tendremos el cuarto término del cociente (-8).

$$\begin{array}{r}
 X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\
 \underline{-X^4 - X^3} \\
 -X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\
 \underline{X^3 + X^2} \\
 -10X^2 - 18X - 8 \\
 \underline{+10X^2 + 10X} \\
 -8X - 8
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} X+1 \\ X^3 - X^2 - 10X - 8 \end{array} \right.$$

Este cuarto término del cociente (-8), se multiplica por todo el divisor y al producto se le cambian los signos.

$$\begin{array}{r}
 X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\
 \underline{-X^4 - X^3} \\
 -X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\
 \underline{X^3 + X^2} \\
 -10X^2 - 18X - 8 \\
 \underline{+10X^2 + 10X} \\
 -8X - 8 \\
 \underline{+8X + 8} \\
 0
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} X+1 \\ X^3 - X^2 - 10X - 8 \end{array} \right.$$

Al efectuar la operación (restarlo) :

$$\begin{array}{r}
 X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\
 \underline{-X^4 - X^3} \\
 -X^3 - 11X^2 - 18X - 8 \\
 \underline{X^3 + X^2} \\
 -10X^2 - 18X - 8 \\
 \underline{+10X^2 + 10X} \\
 -8X - 8 \\
 \underline{+8X + 8} \\
 0
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} X+1 \\ X^3 - X^2 - 10X - 8 \end{array} \right.$$

Como el residuo es igual a cero, la división es exacta y el resultado es:

$$\frac{X^4 - 11X^2 - 18X - 8}{X + 1} = X^3 - X^2 - 10X - 8$$

EJEMPLO: Dividir $3X^2 + 2X - 8$ entre $X + 2$

Se colocan los dos polinomios de manera similar a como lo hacemos para realizar la división en aritmética:

Se divide el primer término del dividendo ($3X^2$) entre el primer término del divisor (X) y tendremos el primer término del cociente.

$$3X^2 + 2X - 8 \quad \left| \begin{array}{l} X + 2 \\ \hline 3X \end{array} \right.$$

Este primer término del cociente se multiplica por todo el divisor y al producto se le cambia el signo, escribiendo cada término debajo de su semejante y se efectúa la operación :

$$\begin{array}{r} 3X^2 + 2X - 8 \\ -3X^2 - 6X \\ \hline -4X - 8 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} X + 2 \\ \hline 3X \end{array} \right.$$

Se divide el primer término del resto ($-4X$) entre el primer término del divisor (X) y tendremos el segundo término del cociente.

$$\begin{array}{r} 3X^2 + 2X - 8 \\ -3X^2 - 6X \\ \hline -4X - 8 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} X + 2 \\ \hline 3X - 4 \end{array} \right.$$

Este segundo término del cociente (-4) se multiplica por todo el divisor y al producto se le cambian los signos y se efectúa la operación :

$$\begin{array}{r} 3X^2 + 2X - 8 \\ -3X^2 - 6X \\ \hline -4X - 8 \\ 4X + 8 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} X + 2 \\ \hline 3X - 4 \end{array} \right.$$

Como el residuo es igual a cero, la división es exacta y el resultado es:

$3X^2 + 2X - 8 \text{ entre } X + 2 = 3X - 4$

Ejercicios :

$$1. \begin{array}{r} a^2 + 2a - 3 \\ -a^2 - 3a \\ \hline -a - 3 \\ + a + 3 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} a + 3 \\ \hline a - 1 \end{array} \right.$$

$$6. \begin{array}{r} a^2 + 5a + 6 \\ -a^2 - 2a \\ \hline 3a + 6 \\ -3a - 6 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} a + 2 \\ \hline a + 3 \end{array} \right.$$

$$2. \begin{array}{r} a^2 - 2a - 3 \\ -a^2 - a \\ \hline -3a - 3 \\ + 3a + 3 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} a + 1 \\ \hline a - 3 \end{array} \right.$$

$$7. \begin{array}{r} 6x^2 - xy - 2y^2 \\ -6x^2 - 3xy \\ \hline -4xy - 2y^2 \\ +4xy + 2y^2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2x + y \\ \hline 3x - 2y \end{array} \right.$$

$$3. \begin{array}{r} x^2 + x - 20 \\ -x^2 - 5x \\ \hline -4x - 20 \\ +4x + 20 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x + 5 \\ \hline x - 4 \end{array} \right.$$

$$8. \begin{array}{r} -15x^2 + 22xy - 8y^2 \\ +15x^2 - 10xy \\ \hline 12xy - 8y^2 \\ -12xy + 8y^2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} -3x + 2y \\ \hline 5x - 4y \end{array} \right.$$

$$4. \begin{array}{r} m^2 - 11m + 30 \\ -m^2 + 6m \\ \hline -5m + 30 \\ +5m - 30 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} m - 6 \\ \hline m - 5 \end{array} \right.$$

$$9. \begin{array}{r} 5a^2 + 8ab - 21b^2 \\ -5a^2 - 15ab \\ \hline -7ab - 21b^2 \\ +7ab + 21b^2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} a + 3b \\ \hline a - 7b \end{array} \right.$$

$$5. \begin{array}{r} x^2 - 8x + 15 \\ -x^2 + 3x \\ \hline -5x + 15 \\ +5x - 15 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} -x + 3 \\ \hline -x + 5 \end{array} \right.$$

$$10. \begin{array}{r} 14x^2 - 22x - 12 \\ -14x^2 - 6x \\ \hline 28x - 12 \\ -28x - 12 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 7x - 3 \\ \hline 2x - 4 \end{array} \right.$$

$$11. \begin{array}{r} -8a^2 + 12ab - 4b^2 \\ +8a^2 - 8ab \\ \hline 4ab - 4b^2 \\ -4ab + 4b^2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} -a + b \\ \hline 8a - 4b \end{array} \right.$$

Mas Ejercicios :

$$\begin{array}{r}
 1. \quad a^4 \quad -a^2 - 2a - 1 \quad \left| \begin{array}{l} a^2 + a + 1 \\ a^2 - a - 1 \end{array} \right. \\
 \underline{-a^4 - a^3 - a^2} \\
 -a^3 - 2a^2 - 2a \\
 \underline{+a^3 + a^2 + a} \\
 -a^2 - a - 1 \\
 \underline{+a^2 + a + 1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2. \quad x^5 \quad \quad \quad + 12x^2 - 5x \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 2x + 5 \\ x^3 + 2x^2 - x \end{array} \right. \\
 \underline{-x^5 + 2x^4 - 5x^3} \\
 2x^4 - 5x^3 + 12x^2 \\
 \underline{-2x^4 + 4x^3 - 10x^2} \\
 -x^3 + 2x^2 - 5x \\
 \underline{+x^3 - 2x^2 + 5x}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3. \quad m^5 - 5m^4n \quad \quad \quad + 20m^2n^3 - 16mn^4 \quad \left| \begin{array}{l} m^2 - 2mn - 8n^2 \\ m^3 - 3m^2n + 2mn^2 \end{array} \right. \\
 \underline{-m^5 + 2m^4n + 8m^3n^2} \\
 -3m^4n + 8m^3n^2 + 20m^2n^3 \\
 \underline{+ 3m^4n - 6m^3n^2 - 24m^2n^3} \\
 2m^3n^2 - 4m^2n^3 - 16mn^4 \\
 \underline{-2m^3n^2 + 4m^2n^3 + 16mn^4}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4. \quad x^4 \quad -x^2 - 2x - 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - x - 1 \\ x^2 + x + 1 \end{array} \right. \\
 \underline{-x^4 + x^3 + x^2} \\
 +x^3 - 2x \\
 \underline{-x^3 + x^2 + x} \\
 x^2 - x - 1 \\
 \underline{-x^2 + x + 1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5. \quad x^6 - 2x^5 \quad \quad \quad + 6x^3 - 7x^2 - 4x + 6 \quad \left| \begin{array}{l} x^4 - 3x^2 + 2 \\ x^2 - 2x + 3 \end{array} \right. \\
 \underline{-x^6 \quad \quad \quad + 3x^4 \quad \quad \quad - 2x^2} \\
 -2x^5 + 3x^4 + 6x^3 - 9x^2 - 4x \\
 \underline{+ 2x^5 \quad \quad \quad - 6x^3 \quad \quad \quad + 4x} \\
 3x^4 - 9x^2 + 6 \\
 \underline{-3x^4 \quad \quad \quad + 9x^2 \quad \quad \quad - 6}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6. \quad m^6 + m^5 - 4m^4 \quad \quad \quad + m^2 - 4m - 1 \quad \left| \begin{array}{l} m^3 + m^2 - 4m - 1 \\ m^3 + 1 \end{array} \right. \\
 \underline{-m^6 - m^5 + 4m^4 + m^3} \\
 m^3 + m^2 - 4m - 1 \\
 \underline{-m^3 - m^2 + 4m + 1}
 \end{array}$$

NOTA IMPORTANTE: En la división de polinomios, el exponente del término de mayor grado del cociente es igual a la diferencia del exponente del término de mayor grado del dividendo menos el exponente del término de mayor grado del divisor.

COCIENTE MIXTO

En los casos de división estudiados anteriormente el dividendo era divisible exactamente por el divisor (el residuo final era igual a cero). Cuando el dividendo no es divisible exactamente por el divisor, la división no es exacta, nos da un residuo y esto origina los **cocientes mixtos**, así llamados porque constan de entero y quebrado.

En las divisiones donde el residuo es distinto de cero:

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Residuo}}{\text{Divisor}}$$

EJEMPLO: Dividir $X^2 - X - 6$ entre $X + 3$

$$\begin{array}{r} X^2 - X - 6 \\ -X^2 - 3X \\ \hline -4X - 6 \\ 4X + 12 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} X+3 \\ X-4 \end{array}$$

$$\frac{X^2 - X - 6}{X + 3} = X - 4 + \frac{6}{X + 3}$$

EJEMPLO: Dividir $4X^3 + 3X$ entre $2X - 3$

$$\begin{array}{r} 4X^3 + 0X^2 + 3X + 0 \\ -4X^3 + 6X^2 \\ \hline +6X^2 + 3X + 0 \\ -6X^2 + 9X \\ \hline 12X + 0 \\ -12X + 18 \\ \hline 18 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2X-3 \\ 2X^2+3X+6 \end{array}$$

$$\frac{4X^3 + 3X}{2X - 3} = 2X^2 + 3X + 6 + \frac{18}{2X - 3}$$

EJEMPLO: Dividir $6X^2 + 7X + 2$ entre $2X + 3$

$$\begin{array}{r} 6X^2 + 7X + 2 \\ -6X^2 - 9X \\ \hline -2X + 2 \\ 2X + 3 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2X+3 \\ 3X-1 \end{array}$$

$$\frac{6X^2 + 7X + 2}{2X + 3} = 3X - 1 + \frac{5}{2X + 3}$$

◀ DIVISIÓN DE POLINOMIOS UTILIZANDO LA REGLA DE RUFFINI :

Esta regla solo puede ser utilizada cuando el divisor es un binomio del tipo $(X + a)$ o del tipo $(X - a)$.

Ejemplo 1 : Dividir $X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12$ entre $X - 1$

Para aplicar la REGLA DE RUFFINI en la división de dos polinomios se deben seguir los siguientes pasos :

Primero los polinomios deben estar ordenados en forma descendente (decreciente). Cuando sea necesario se debe **completar** el dividendo.

Luego se copian los coeficientes del polinomio "dividendo" en una tabla similar a la siguiente:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
	1	-4	-1	16	-12

Se coloca el segundo término del divisor en la parte izquierda pero con el signo cambiado $(X - 1)$. Este valor recibe el nombre de **raíz** del polinomio :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
1	1	-4	-1	16	-12
	1				

Se copia el primer coeficiente del dividendo debajo de él mismo :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
	1	-4	-1	16	-12
	1				

Se multiplica la raíz con el primer coeficiente que se bajó y el producto se copia debajo del segundo coeficiente :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
	1	-4	-1	16	-12
1		1			

Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en la columna donde se colocó el producto:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
	1	-4	-1	16	-12
1		1			
	1	-3			

Se multiplica la raíz por el resultado de la suma algebraica realizada y este producto se copia debajo del tercer coeficiente :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
	1	-4	-1	16	-12
1		1	-3		
	1	-3			

Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en la columna donde se colocó el producto:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
	1	-4	-1	16	-12
1		1	-3		
	1	-3	-4		

Se multiplica la raíz por el resultado de la suma algebraica realizada y este producto se copia debajo del cuarto coeficiente :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
	1	-4	-1	16	-12
1		1	-3	-4	
	1	-3	-4		

Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en la columna donde se colocó el producto:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
	1	-4	-1	16	-12
1		1	-3	-4	
	1	-3	-4	12	

Se multiplica la raíz por el resultado de la suma algebraica realizada y este producto se copia debajo del quinto coeficiente :

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
	1	-4	-1	16	-12
1		1	-3	-4	12
	1	-3	-4	12	

Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en la columna donde se colocó el producto:

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
	1	-4	-1	16	-12
1		1	-3	-4	12
	1	-3	-4	12	0

Como el resultado final es cero (0), esto nos indica que la división es exacta (no hay resto),

La información que queda en la última fila representa el polinomio "cociente" (el resultado de dividir $X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12$ entre $X - 1$)

Para llegar a esa deducción debo tener presente que en la división de polinomios, el exponente del término de mayor grado del cociente es igual

a la diferencia del exponente del término de mayor grado del dividendo (X^4) menos el exponente del término de mayor grado del divisor (X).

	X^4	$-4X^3$	$-X^2$	$+16X$	-12
	1	-4	-1	16	-12
1		1	-3	-4	12
	1	-3	-4	12	0

Con esta información se deduce que:

$$(X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12) \div (X - 1) = X^3 - 3X^2 - 4X + 12$$

Ejemplo 2: Dividir $X^4 - 11X^2 - 18X - 8$ entre $X + 1$

Para aplicar la REGLA DE RUFFINI en aquellos polinomios donde falta un término debemos colocar el mismo acompañado del coeficiente cero (Completar el dividendo).

En este caso en particular notamos que el dividendo no tiene el término de grado tres, se conformará de la siguiente manera:

$$X^4 + 0X^3 - 11X^2 - 18X - 8$$

	X^4	$+0X^3$	$-11X^2$	$-18X$	-8
	1	0	-11	-18	-8
-1		-1	1	10	8
	1	-1	-10	-8	0

$$(X^4 - 11X^2 - 18X - 8) \div (X + 1) = X^3 - X^2 - 10X - 8$$

Ejemplo 3: Dividir $X^3 - 3X^2 - 4X + 12$ entre $X - 1$

Recuerde que hay que cambiarle el signo a

	X^3	$-3X^2$	$-4X$	$+12$
	1	-3	-4	12
1		1	-2	-6
	1	-2	-6	6

Como el resultado final es distinto de cero (6 en este caso), significa que la división no es exacta. Este 6 representa el residuo de la división.

Con esta información se deduce que el cociente de dicha división es $X^2 - 2X - 6$ y el resto o residuo es 6.

Ejemplo 4: Dividir $X^3 - 3X^2 - 4X + 12$ entre $X + 1$

Recuerde que hay que cambiarle el signo a

	X^3	$-3X^2$	$-4X$	$+12$
	1	-3	-4	12
-1		-1	4	0
	1	-4	0	12

Como el resultado final es distinto de cero (12 en este caso), significa que la división no es exacta. Este 12 representa el residuo de la división.

Con esta información se deduce que el cociente de dicha división es $X^2 - 4X$ y el resto o residuo es 12.