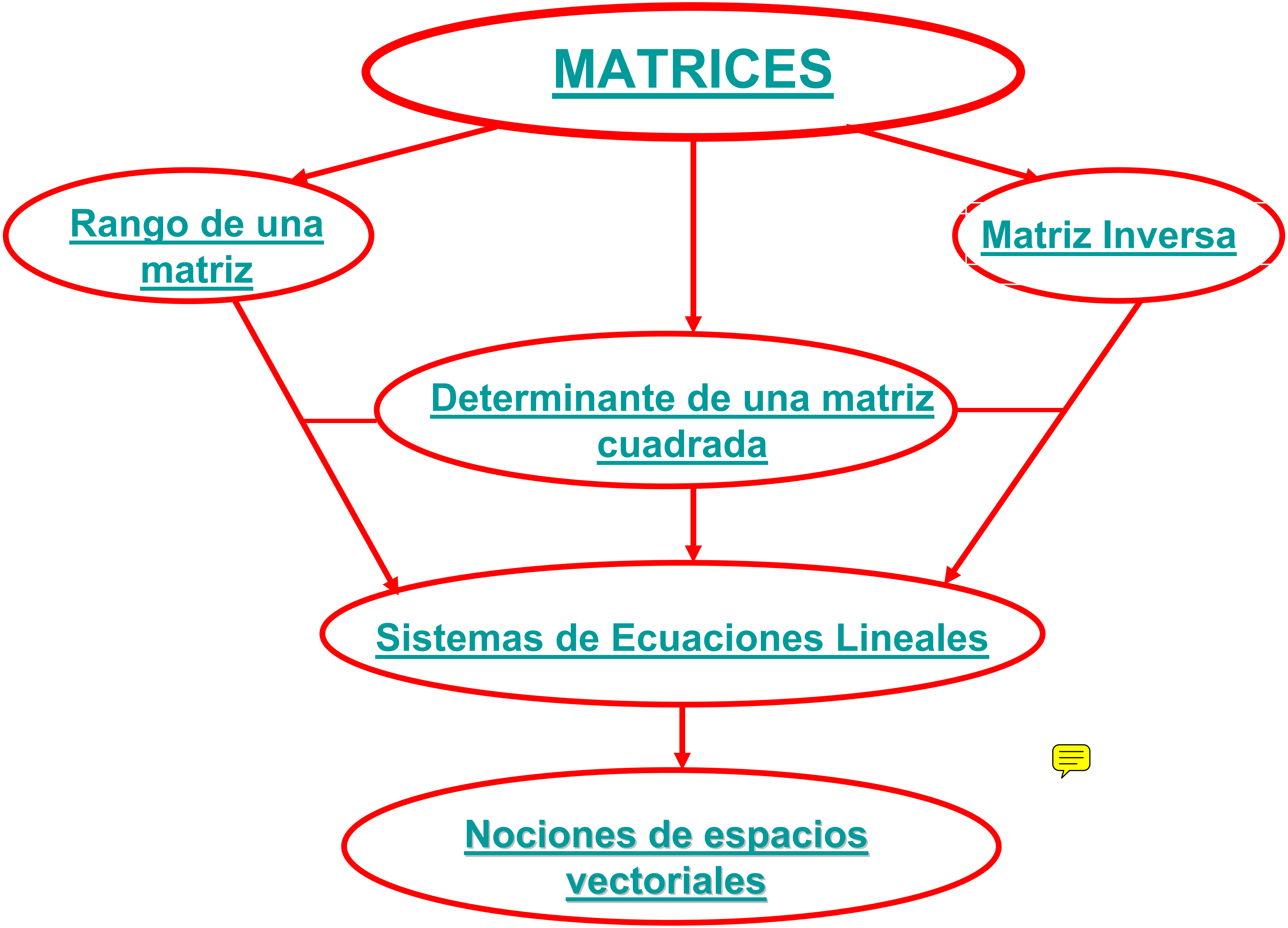

MATRICES
Rango de una matriz
Matriz Inversa
Determinante de una matriz cuadrada
Sistemas de Ecuaciones Lineales
Nociones de espacios vectoriales

MATRICES

-DEFINICIÓN DE MATRIZ.

-ALGUNOS TIPOS DE MATRICES.

-IGUALDAD DE MATRICES.

-OPERACIONES CON MATRICES.

-APLICACIONES A LA INFORMÁTICA.

-RANGO DE UNA MATRIZ.

DEFINICIÓN DE MATRIZ

Una tabla rectangular del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se denomina MATRIZ

ORDEN DE UNA MATRIZ

El número de filas (m) y el número de columnas (n) definen el orden de una matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

El orden de la matriz A es 4 x 3.

Si m = n, se dice que la matriz es CUADRADA

TIPOS DE MATRICES

- **Matriz FILA: Es una matriz que consta de una sola fila.**

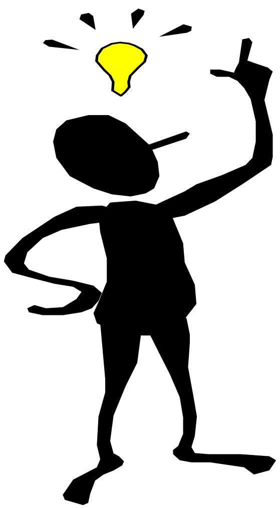
TIPOS DE MATRICES

•Matriz FILA: Es una matriz que consta de una <u>sola fila</u>.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

El orden de la matriz B es

1 x 4



Luego, el orden de toda matriz FILA es 1 x n

TIPOS DE MATRICES

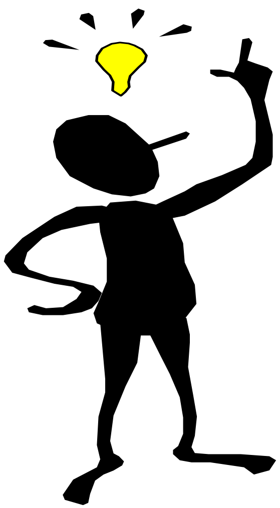
- **Matriz COLUMNA: Es una matriz que consta de una sola columna.**

TIPOS DE MATRICES

- **Matriz COLUMNA: Es una matriz que consta de una <u>sola columna</u>.**

$$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

El orden de la matriz C es
3 x 1



Luego, el orden de toda matriz COLUMNA es m x 1

TIPOS DE MATRICES

- **Matriz NULA: Es una matriz de cualquier orden en que todos sus elementos son iguales a cero.**

TIPOS DE MATRICES

- **Matriz NULA: Es una matriz de <u>cualquier orden</u> en que todos sus elementos son iguales a cero.**

TIPOS DE MATRICES

- **Matriz NULA: Es una matriz de cualquier orden en que todos sus elementos son iguales a cero.**

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

TIPOS DE MATRICES

- **Matriz DIAGONAL: Es una matriz cuadrada en que todos los elementos que no están en la diagonal principal son iguales a cero.**

TIPOS DE MATRICES

- **Matriz DIAGONAL: Es una matriz cuadrada en que todos los elementos que no están en la diagonal principal son iguales a cero.**

TIPOS DE MATRICES

• Matriz DIAGONAL: Es una **matriz cuadrada** en que **todos los elementos que no están en la diagonal principal son iguales a cero**.

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

TIPOS DE MATRICES

- **Matriz UNITARIA o IDENTIDAD: Es una matriz diagonal en que todos los elementos de la diagonal principal son iguales a uno.**

TIPOS DE MATRICES

- **Matriz UNITARIA o IDENTIDAD: Es una matriz diagonal en que todos los elementos de la diagonal principal son iguales a uno y los restantes iguales a cero.**

TIPOS DE MATRICES

- **Matriz UNITARIA o IDENTIDAD:** Es una **matriz diagonal** en que **todos los elementos de la diagonal principal son iguales a uno** y los restantes iguales a cero

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TIPOS DE MATRICES

- **Matriz TRIANGULAR: Es toda matriz cuadrada donde todos los elementos que están por debajo (por encima) de la diagonal principal son iguales a cero.**

TIPOS DE MATRICES

- **Matriz TRIANGULAR: Es toda matriz cuadrada donde todos los elementos que están por debajo (por encima) de la diagonal principal son iguales a cero.**

TIPOS DE MATRICES

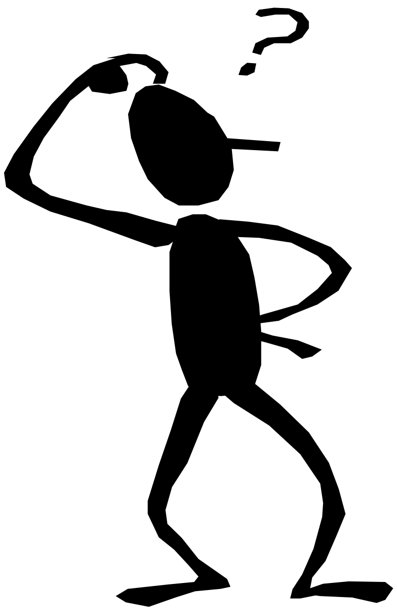
- **Matriz TRIANGULAR: Es toda matriz cuadrada donde todos los elementos que están por debajo (por encima) de la diagonal principal son iguales a cero.**

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz TRIANGULAR SUPERIOR

TIPOS DE MATRICES

- **Matriz TRIANGULAR: Es toda matriz cuadrada donde todos los elementos que están por debajo (por encima) de la diagonal principal son iguales a cero.**



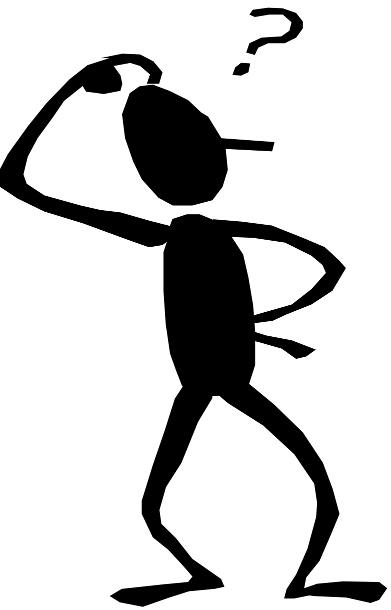
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz TRIANGULAR INFERIOR

IGUALDAD DE MATRICES

Dos matrices "A" y "B" del mismo orden son iguales si sus elementos correspondientes son iguales.

$$A = B \quad \text{si y solo si} \quad a_{ij} = b_{ij} \quad \text{para todo } i, j.$$



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0.5 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0.5 & -4 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$a_{23} \neq b_{23} \qquad \text{Luego } A \neq B$$

OPERACIONES CON MATRICES

- **Adición y Sustracción de matrices.**

OPERACIONES CON MATRICES

- **Adición y Sustracción de matrices.**

- **Producto de un número real por una matriz.**

OPERACIONES CON MATRICES

- **Adición y Sustracción de matrices.**

- **Producto de un número real por una matriz.**

- **Producto de matrices.**

OPERACIONES CON MATRICES

- **Adición y Sustracción de matrices.**

- **Producto de un número real por una matriz.**

- **Producto de matrices.**

OPERACIONES CON MATRICES.

Suma de Matrices

Dos matrices pueden sumarse cuando son del mismo orden (tienen el mismo número de filas y de columnas) y esta operación se realiza elemento a elemento.

Por ejemplo : esta matriz de orden dos, solo puede ser sumada con matrices de igual orden que ella.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ -\mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}_{\mathbf{2}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}_2$$

$$\cancel{D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_2$$

$$\cancel{C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Suma de Matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}_2 \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_2$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 + 2 & \\ & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Suma de matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}_2 \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_2$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 + 2 & \\ & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Suma de Matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}_2 \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_2$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 + 2 & 4 + 5 \\ & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Suma de Matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}_2 \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_2$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 4+5 \\ & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Suma de Matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}_2 \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_2$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 4+5 \\ -3+1 & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Suma de Matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}_2 \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_2$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 4+5 \\ -3+1 & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Suma de Matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}_2 \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_2$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 4+5 \\ -3+1 & 2+3 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Suma de Matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}_2 \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_2$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}_2$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de un escalar cualquiera por una matriz.

Se puede efectuar siempre y se realiza multiplicando cada elemento de la matriz por el escalar.

Multipliquemos esta matriz por el escalar $\dfrac{1}{2}$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de un escalar cualquiera por una matriz

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1) & & \\ & & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de un escalar cualquiera por una matriz.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1) & & \\ & & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de un escalar cualquiera por una matriz.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1) & \frac{1}{2}.0 & \\ & & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de un escalar cualquiera por una matriz.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1) & \frac{1}{2}.0 & \\ & & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de un escalar cualquiera por una matriz.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1) & \frac{1}{2}.0 & \frac{1}{2}.4 \\ & & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de un escalar cualquiera por una matriz.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1) & \frac{1}{2}.0 & \frac{1}{2}.4 \\ & & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de un escalar cualquiera por una matriz.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1) & \frac{1}{2}.0 & \frac{1}{2}.4 \\ \frac{1}{2}.3 & & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de un escalar cualquiera por una matriz.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1) & \frac{1}{2}.0 & \frac{1}{2}.4 \\ \frac{1}{2}.3 & & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de un escalar cualquiera por una matriz.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1) & \frac{1}{2}.0 & \frac{1}{2}.4 \\ \frac{1}{2}.3 & \frac{1}{2}(-2) & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de un escalar cualquiera por una matriz.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1) & \frac{1}{2}.0 & \frac{1}{2}.4 \\ \frac{1}{2}.3 & \frac{1}{2}(-2) & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de un escalar cualquiera por una matriz.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1) & \frac{1}{2}.0 & \frac{1}{2}.4 \\ \frac{1}{2}.3 & \frac{1}{2}(-2) & \frac{1}{2}.0 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de un escalar cualquiera por una matriz.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x\mathbf{3}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de matrices

Puede efectuarse cuando el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda matriz. (En este caso se dice que las matrices son conformes para el producto).

Veamos con cual de las siguientes matrices podemos multiplicar a la matriz "C" dada

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$3 \neq 2$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$\cancel{A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de matrices

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 . 1 & \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de matrices

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$M = \begin{pmatrix} -1.1+0.0 & \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de matrices

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad D=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$M=\begin{pmatrix} -1.1+0.0+4.(-1) & \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de matrices

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$M = \begin{pmatrix} -1.1+0.0+4.(-1) & \\ 3.1 & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de matrices

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad D=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$M=\begin{pmatrix} -1.1+0.0+4.(-1) & \\ 3.1+(-2).0 & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de matrices

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$M = \begin{pmatrix} -1.1+0.0+4.(-1) \\ 3.1+(-2).0+0(-1) \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de matrices

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$M = \begin{pmatrix} -1.1+0.0+4.(-1) & -1.3 \\ 3.1+(-2).0+0.(-1) & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de matrices

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad D=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$M=\begin{pmatrix} -1.1+0.0+4.(-1) & -1.3+0.5 \\ 3.1+(-2).0+0.(-1) & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de matrices

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$M = \begin{pmatrix} -1.1+0.0+4.(-1) & -1.3+0.5+4.2 \\ 3.1+(-2).0+0.(-1) & \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de matrices

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$M = \begin{pmatrix} -1.1+0.0+4.(-1) & -1.3+0.5+4.2 \\ 3.1+(-2).0+0.(-1) & 3.3 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de matrices

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad D=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$M=\begin{pmatrix} -1.1+0.0+4.(-1) & -1.3+0.5+4.2 \\ 3.1+(-2).0+0.(-1) & 3.3-2.5 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Producto de matrices

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad D=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$M=\begin{pmatrix} -1.1+0.0+4.(-1) & -1.3+0.5+4.2 \\ 3.1+(-2).0+0.(-1) & 3.3-2.5+0.2 \end{pmatrix}_2$$

OPERACIONES CON MATRICES.

Producto de matrices

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad D=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

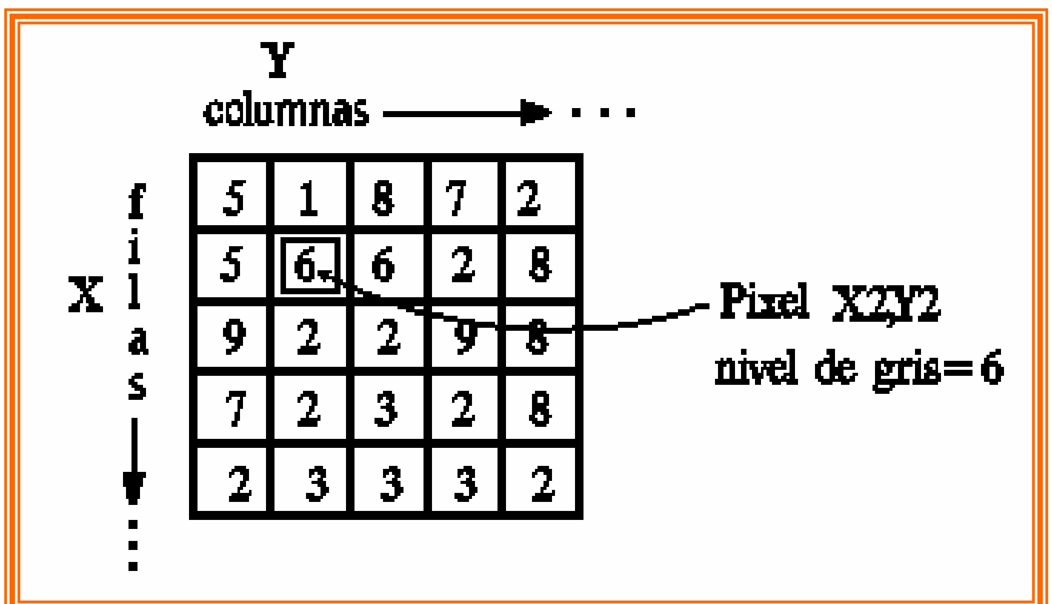
$$M=\begin{pmatrix} -1.1+0.0+4.(-1) & -1.3+0.5+4.2 \\ 3.1+(-2).0+0.(-1) & 3.3-2.5+0.2 \end{pmatrix}_2$$

$$\boxed{M=\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}_2}$$

EMPLEO DE LAS MATRICES EN EL PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMÁGENES.

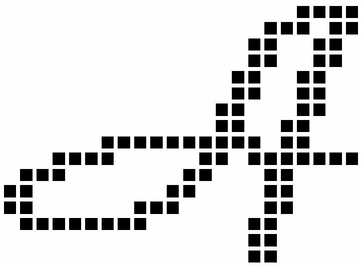
IMAGEN DIGITAL

ES UNA MATRIZ DE FILAS Y COLUMNAS, DONDE CADA ELEMENTO DE ESA MATRIZ ES UN PIXEL (PICTURE ELEMENT) Y CADA PIXEL POSEE UN NIVEL DE GRIS DETERMINADO (ENTRE 0 Y 255).



PIXEL

Píxel, en informática, abreviatura fonética del concepto inglés *picture element*. Se trata de un punto en una rejilla rectilínea de miles de puntos tratados individualmente, para formar una imagen en la pantalla de la computadora o en la impresora. Igual que un bit es la unidad de información más pequeña que puede procesar un ordenador o computadora, un píxel es el elemento más pequeño que el *hardware* y el *software* de pantalla e impresora pueden manipular al crear cartas, números o gráficos. Por ejemplo, la letra A está compuesta realmente por un conjunto de píxeles dentro de una rejilla, como la que se muestra a continuación:



Una imagen también se puede representar con más de dos colores. Si un píxel tiene sólo dos valores de color (normalmente blanco y negro), se puede codificar con un solo bit de información. Cuando se utilizan más de dos bits para representar un píxel, es posible representar un rango mayor de colores y niveles de gris. Con dos bits se representan cuatro colores o niveles de gris, con cuatro bits se representan dieciséis colores, y así sucesivamente.

LAS IMÁGENES DIGITALES POSEEN UN CONJUNTO DE AFECTACIONES TALES COMO:

- **RUIDOS (INTERFERENCIAS)**
- **EMBORRONAMIENTOS**
- **OSCURECIMIENTOS**
- **ETC.**

PARA ELIMINAR O ATENUAR ESTAS AFECTACIONES, ES NECESARIO FILTRAR DICHAS IMÁGENES.

CARACTERÍSTICAS GENERALES DE UN FILTRO ESPACIAL

1.- ***Los filtros espaciales son matrices cuadradas de (3x3, 5x5, 7x7, etc.) generalmente impares para posibilitar tener siempre un píxel central en el filtro que se posicione sobre el píxel de la imagen que se está filtrando.***

0	10	0
1	2	1
0	1	1

(3 x 3)

EJEMPLOS DE FILTROS

-1	0	1	0	0
-1	0	1	0	0
-1	0	1	0	0
-1	0	1	0	0
-1	0	1	0	0

(5 x 5)

CARACTERÍSTICAS GENERALES DE UN FILTRO ESPACIAL

2- Los filtros espaciales comúnmente aplicados son simétricos.

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

-1	2	1
2	0	-1
1	-1	1

Existe un tipo de filtrado, que se denomina FILTRADO LINEAL, el cual:

Se reduce a recorrer toda la imagen con una ventana o máscara centrada en cada píxel, la cual presenta un conjunto de valores o pesos que forman el llamado núcleo de **convolución**. El nuevo valor para el píxel donde está centrada la máscara es calculado mediante la suma de todos los píxeles que son cubiertos por la máscara, los cuales previamente se multiplican por los valores correspondientes del núcleo.

FILTRADO LINEAL

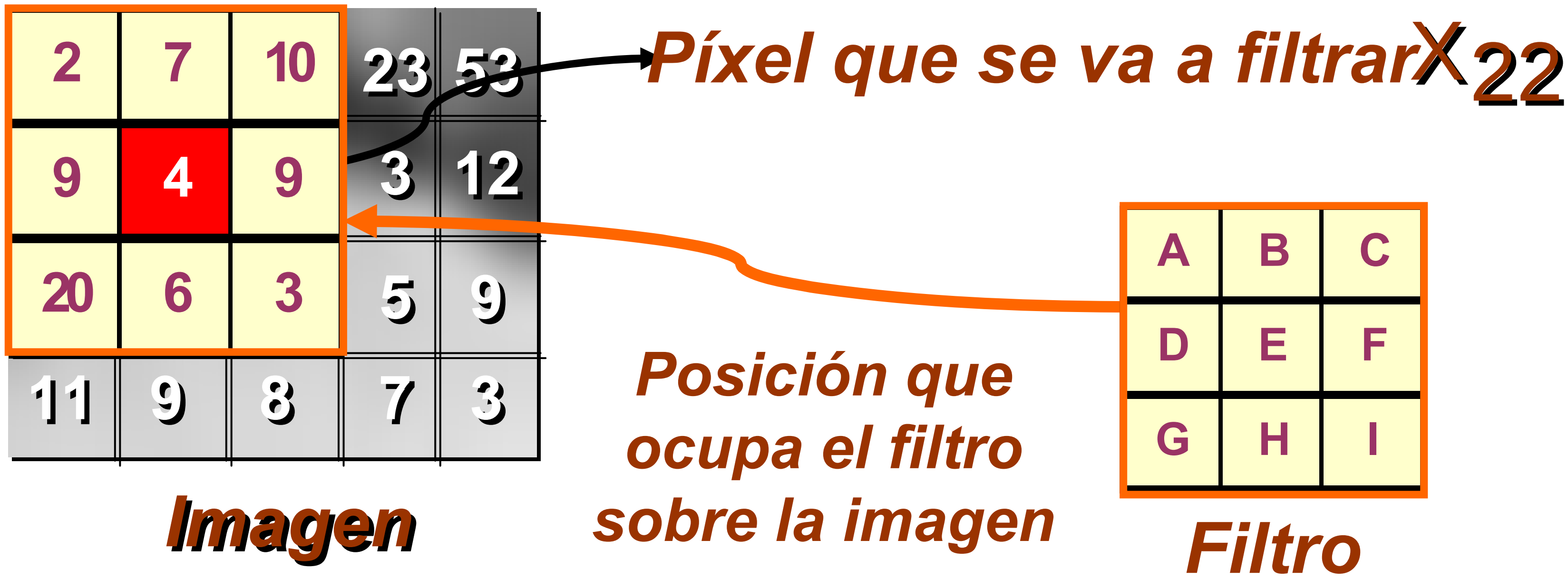
EJEMPLO DE CONVOLUCIÓN ESPACIAL

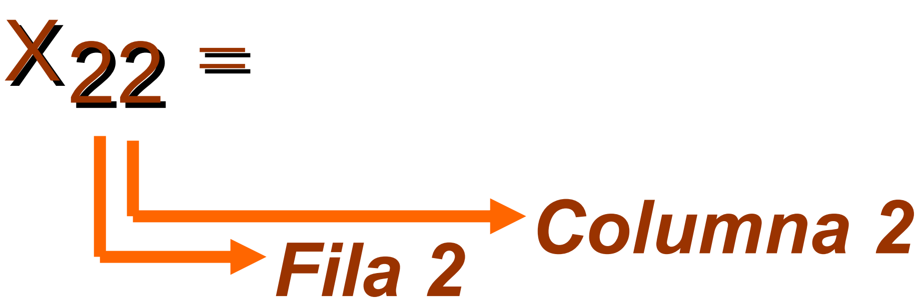
2	7	10	23	53
9	4	9	3	12
20	6	3	5	9
11	9	8	7	3

Imagen

FILTRADO LINEAL

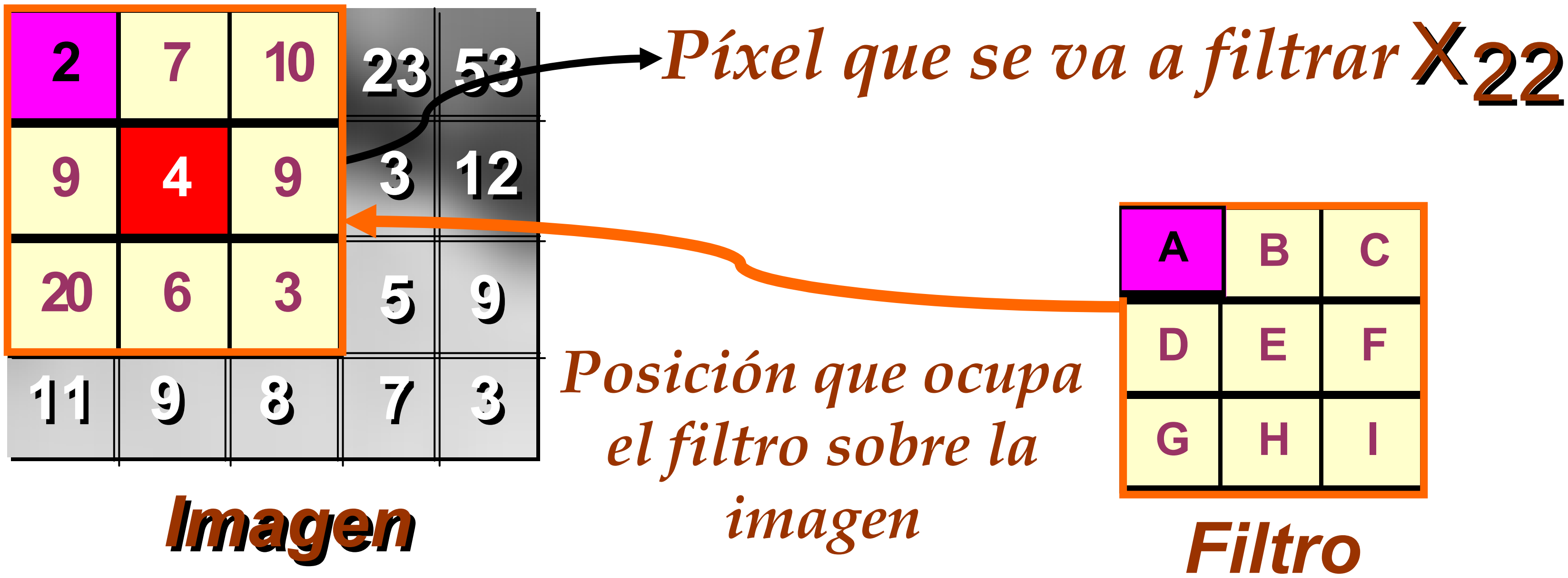
EJEMPLO DE CONVOLUCIÓN ESPACIAL





FILTRADO LINEAL

EJEMPLO DE CONVOLUCIÓN ESPACIAL



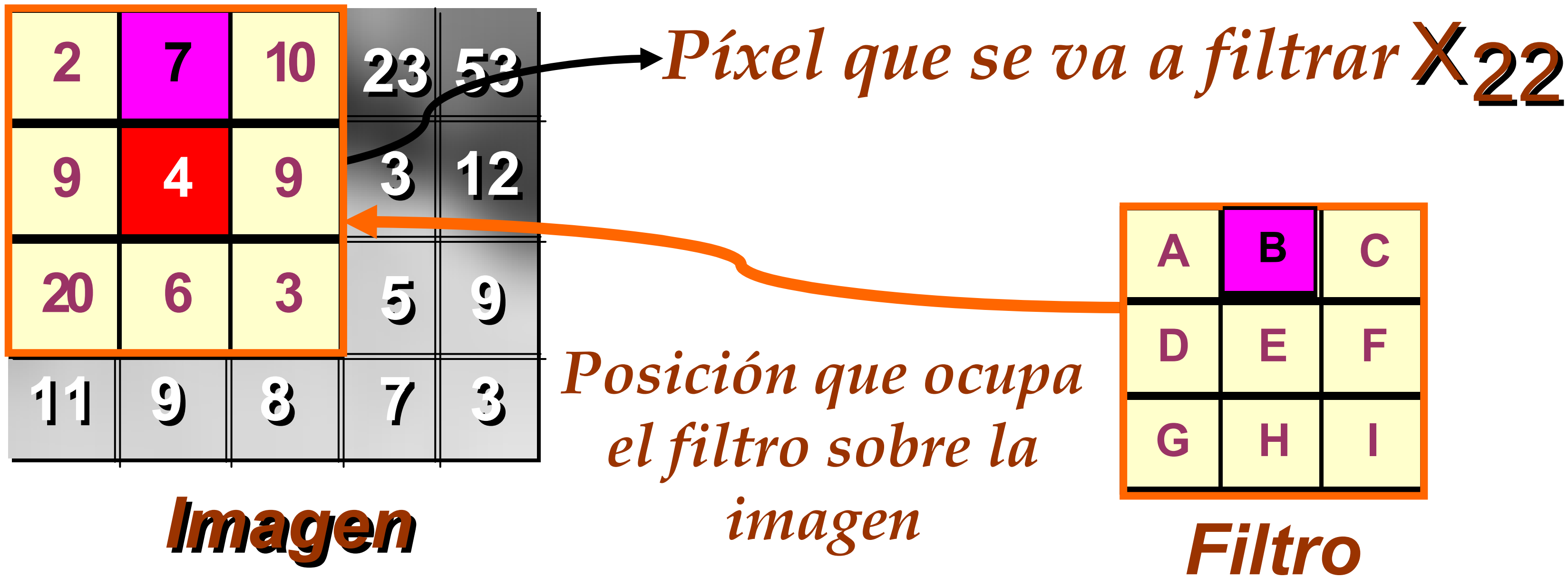
$$X_{22} = 2 \cdot A$$

Columna 2

Fila 2

FILTRADO LINEAL

EJEMPLO DE CONVOLUCIÓN ESPACIAL



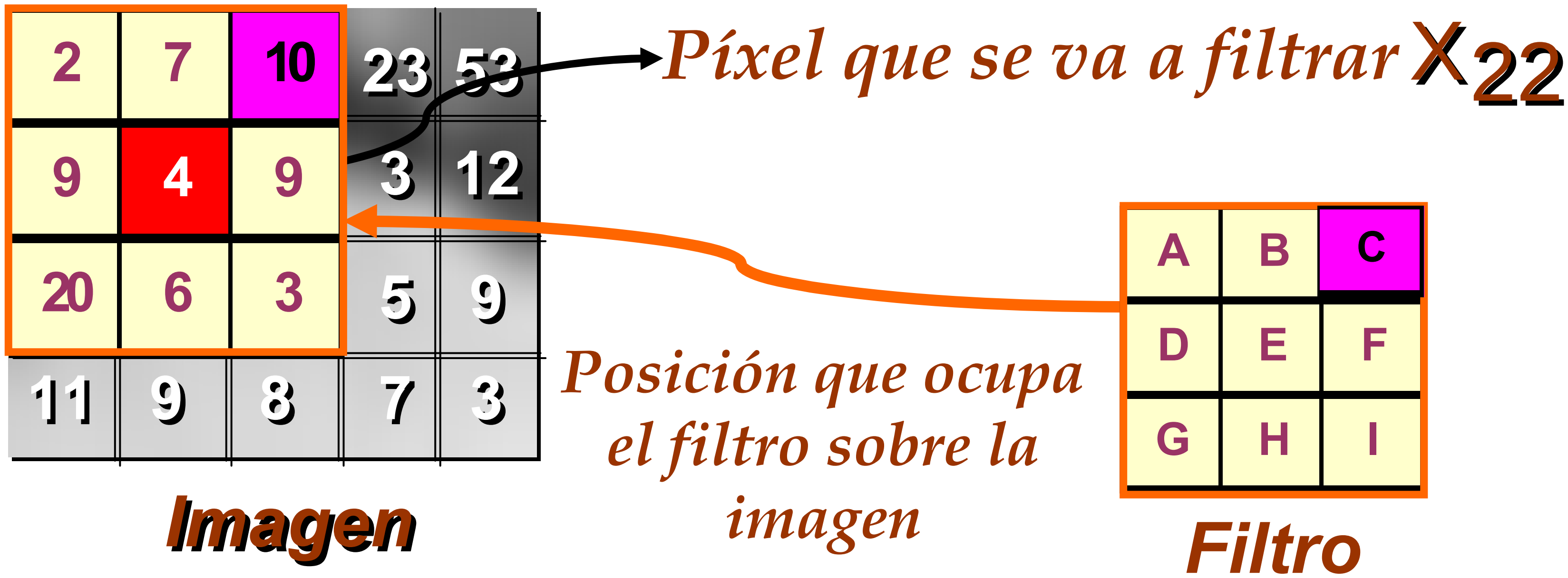
$$X_{22} = 2 \cdot A + 7 \cdot B$$

Columna 2

Fila 2

FILTRADO LINEAL

EJEMPLO DE CONVOLUCIÓN ESPACIAL



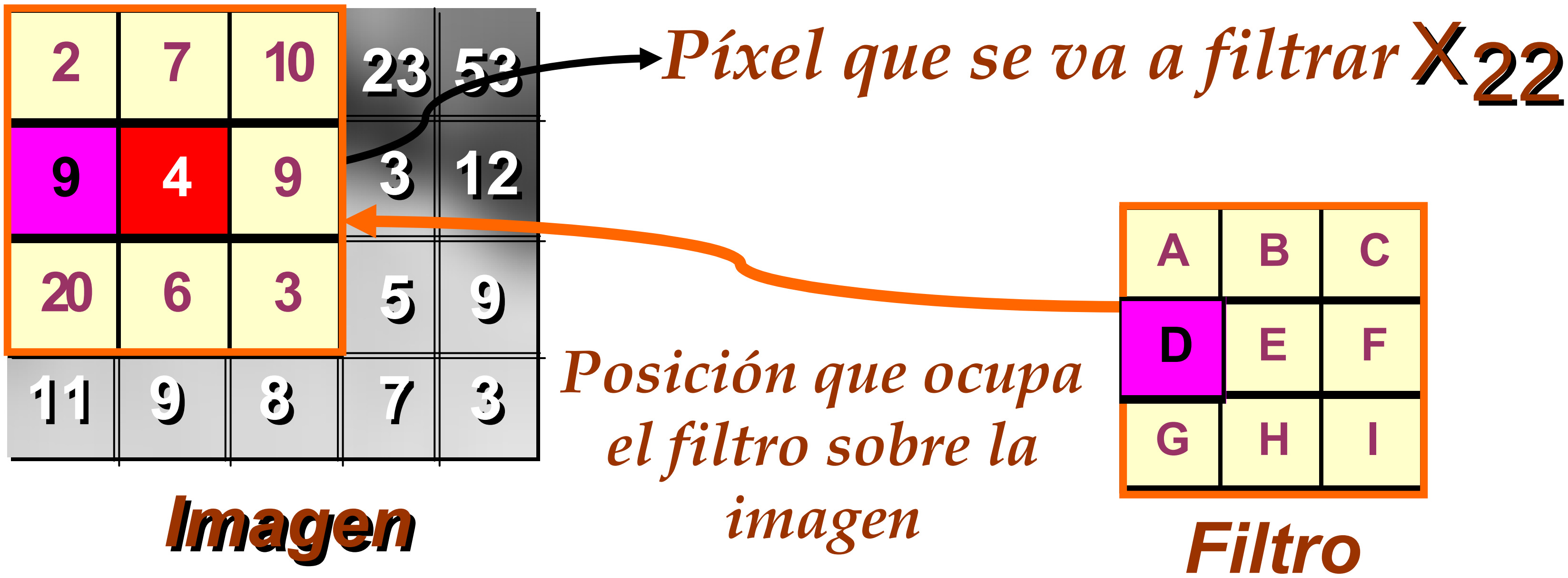
$$X_{22} = 2 \cdot A + 7 \cdot B + 10 \cdot C$$

Fila 2

Columna 2

FILTRADO LINEAL

EJEMPLO DE CONVOLUCIÓN ESPACIAL



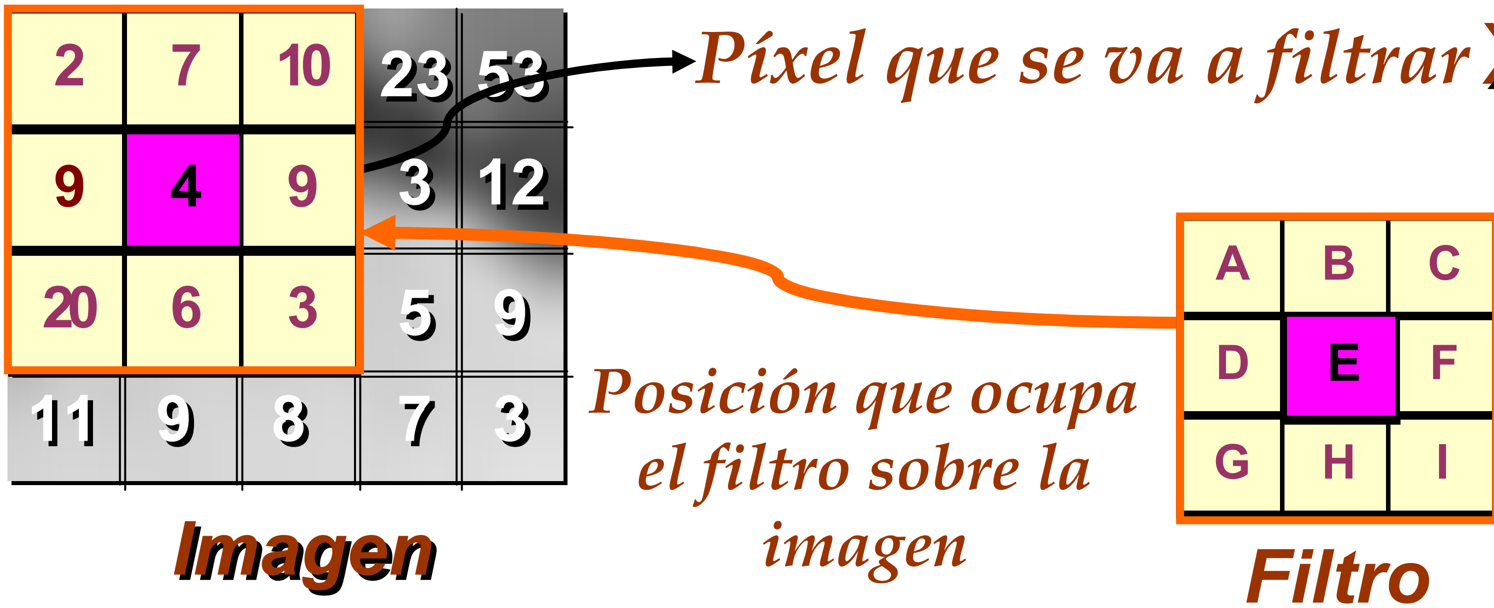
$$X_{22} = 2\cdot A + 7\cdot B + 10\cdot C + 9\cdot D$$

Columna 2

Fila 2

FILTRADO LINEAL

EJEMPLO DE CONVOLUCIÓN ESPACIAL



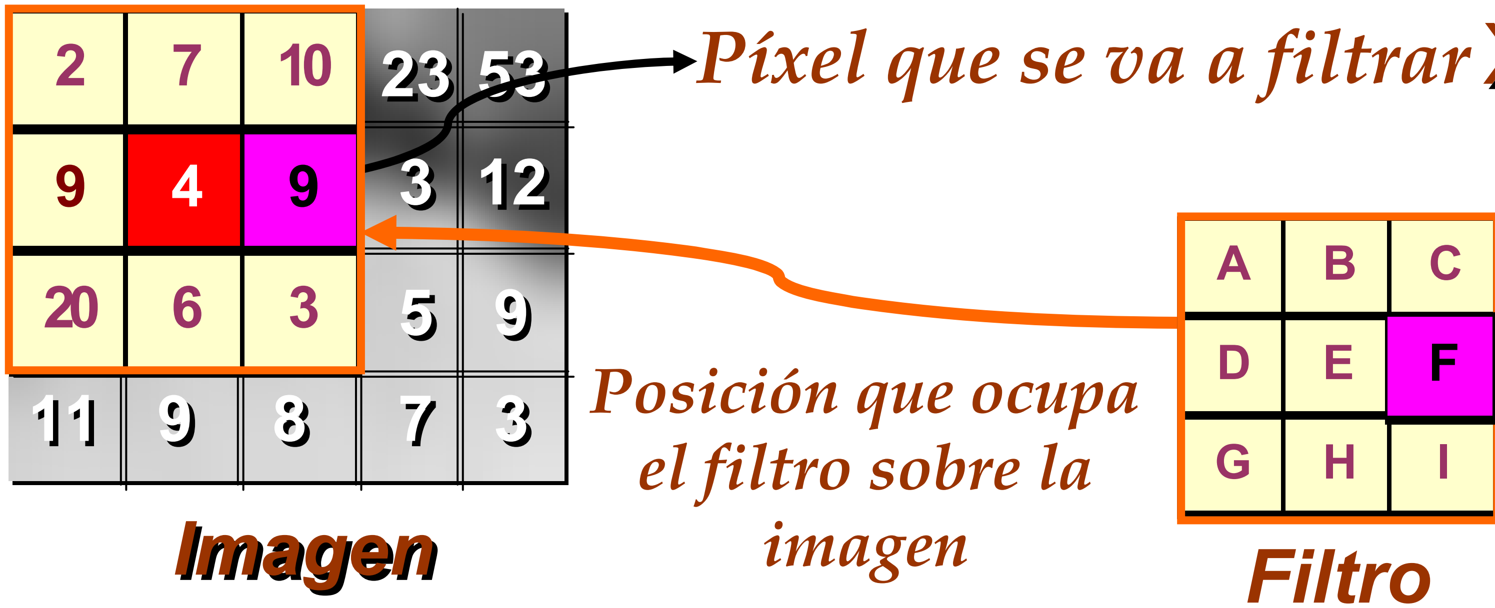
$$X_{22} = 2\cdot A + 7\cdot B + 10\cdot C + 9\cdot D + 4\cdot E$$

Columna 2

Fila 2

FILTRADO LINEAL

EJEMPLO DE CONVOLUCIÓN ESPACIAL



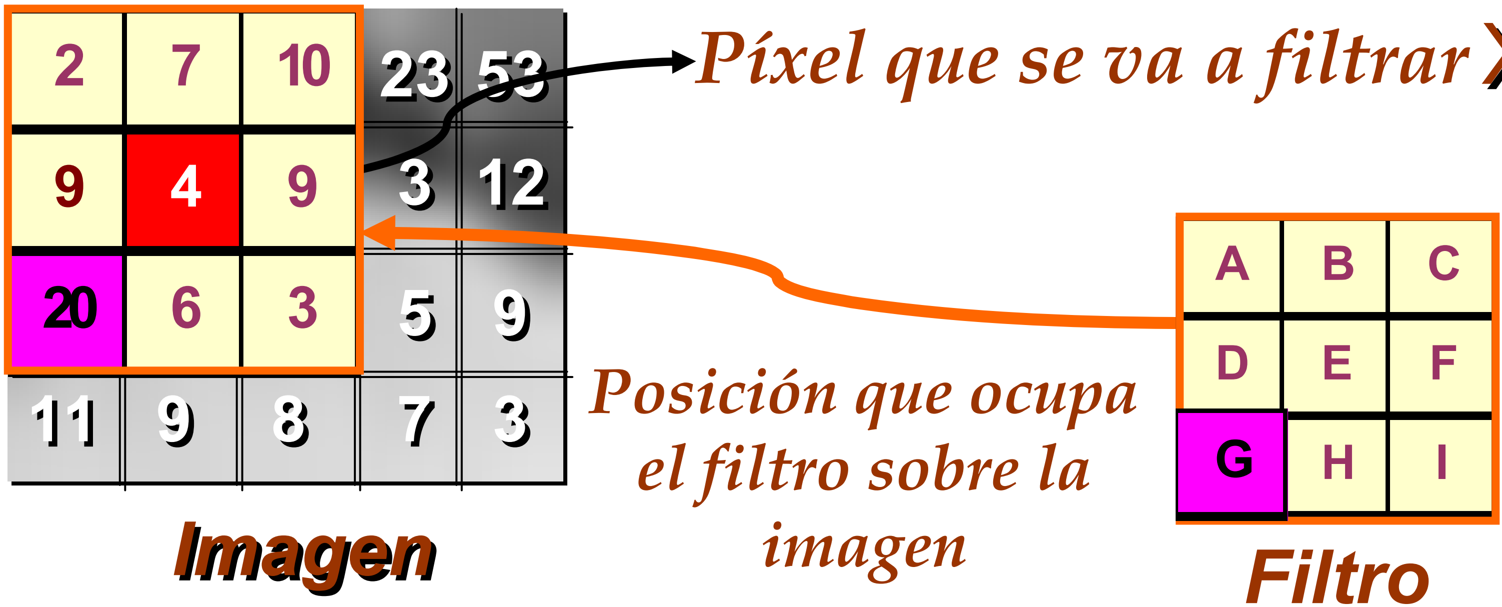
$$X_{22} = 2\cdot A + 7\cdot B + 10\cdot C + 9\cdot D + 4\cdot E + 9\cdot F$$

Columna 2

Fila 2

FILTRADO LINEAL

EJEMPLO DE CONVOLUCIÓN ESPACIAL



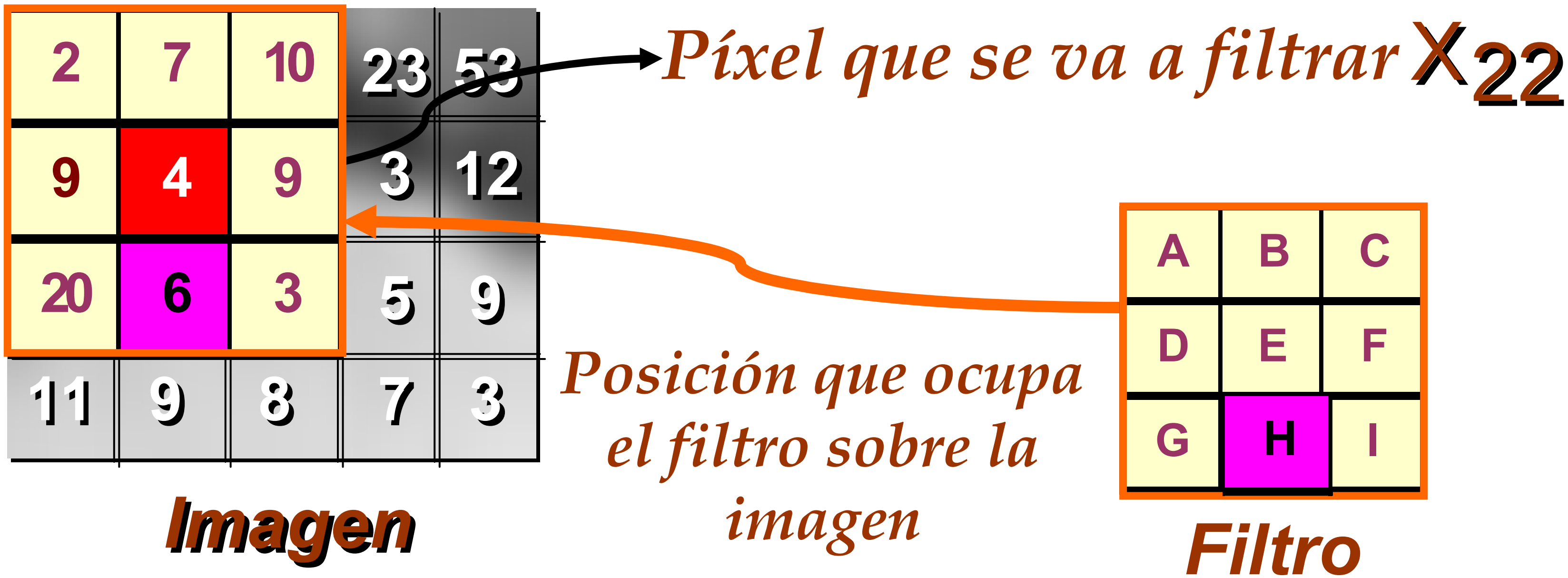
$$X_{22} = 2\cdot A + 7\cdot B + 10\cdot C + 9\cdot D + 4\cdot E + 9\cdot F + 20\cdot G$$

Columna 2

Fila 2

FILTRADO LINEAL

EJEMPLO DE CONVOLUCIÓN ESPACIAL



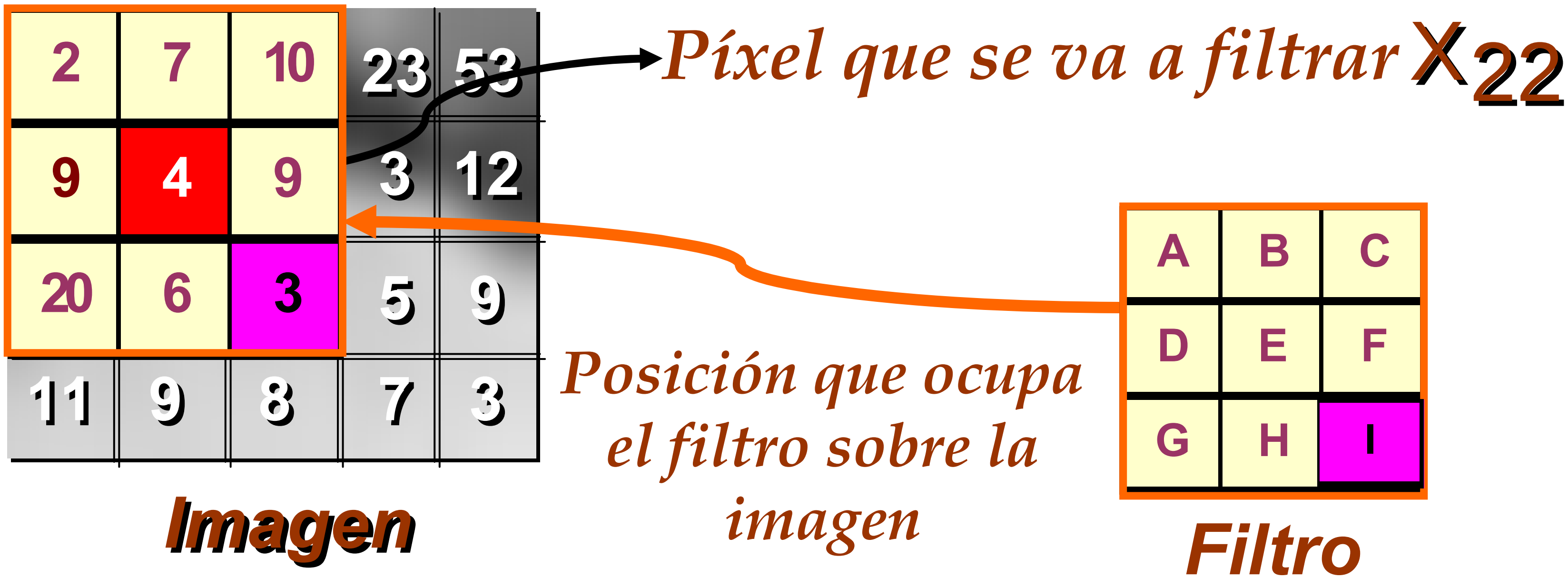
$$X_{22} = 2\cdot A + 7\cdot B + 10\cdot C + 9\cdot D + 4\cdot E + 9\cdot F + 20\cdot G + 6\cdot H$$

Columna 2

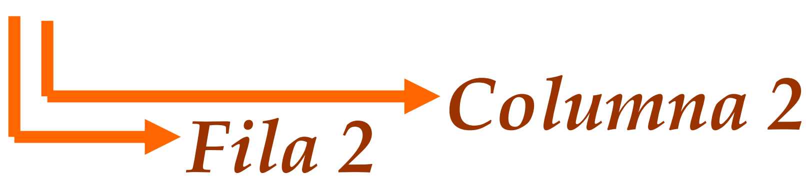
Fila 2

FILTRADO LINEAL

EJEMPLO DE CONVOLUCIÓN ESPACIAL

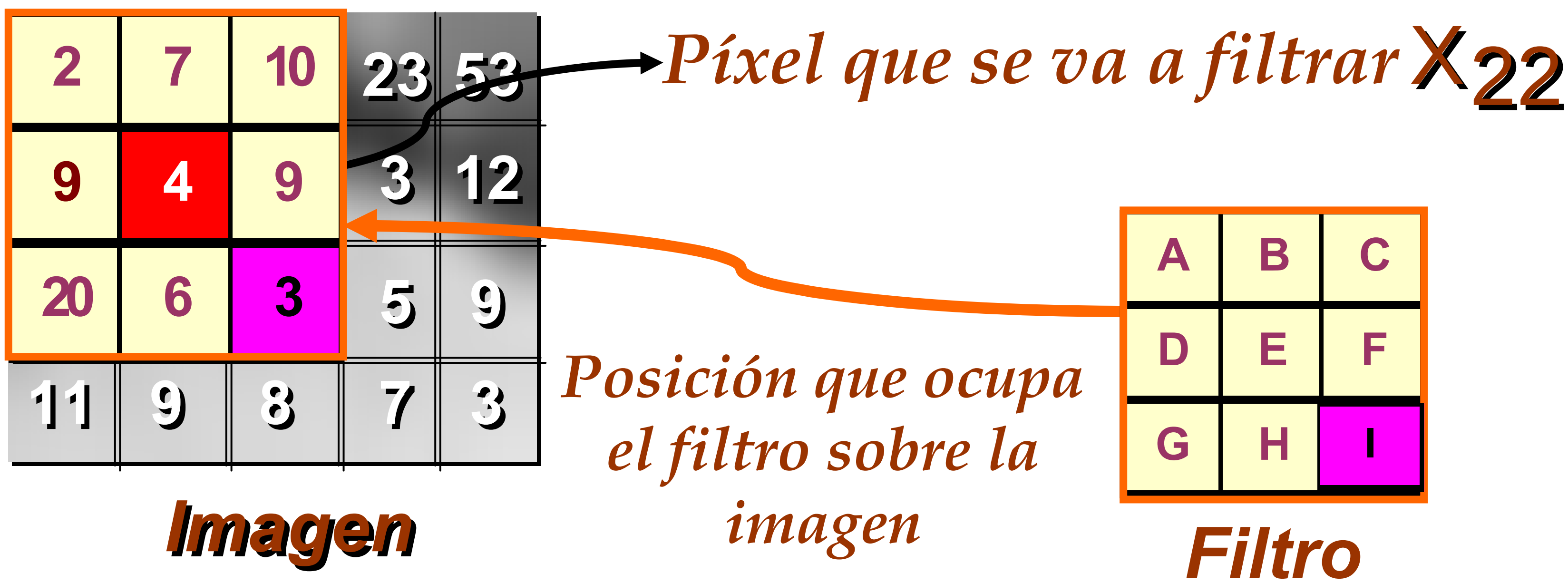


$$X_{22} = 2 \cdot A + 7 \cdot B + 10 \cdot C + 9 \cdot D + 4 \cdot E + 9 \cdot F + 20 \cdot G + 6 \cdot H + 3 \cdot I$$



FILTRADO LINEAL

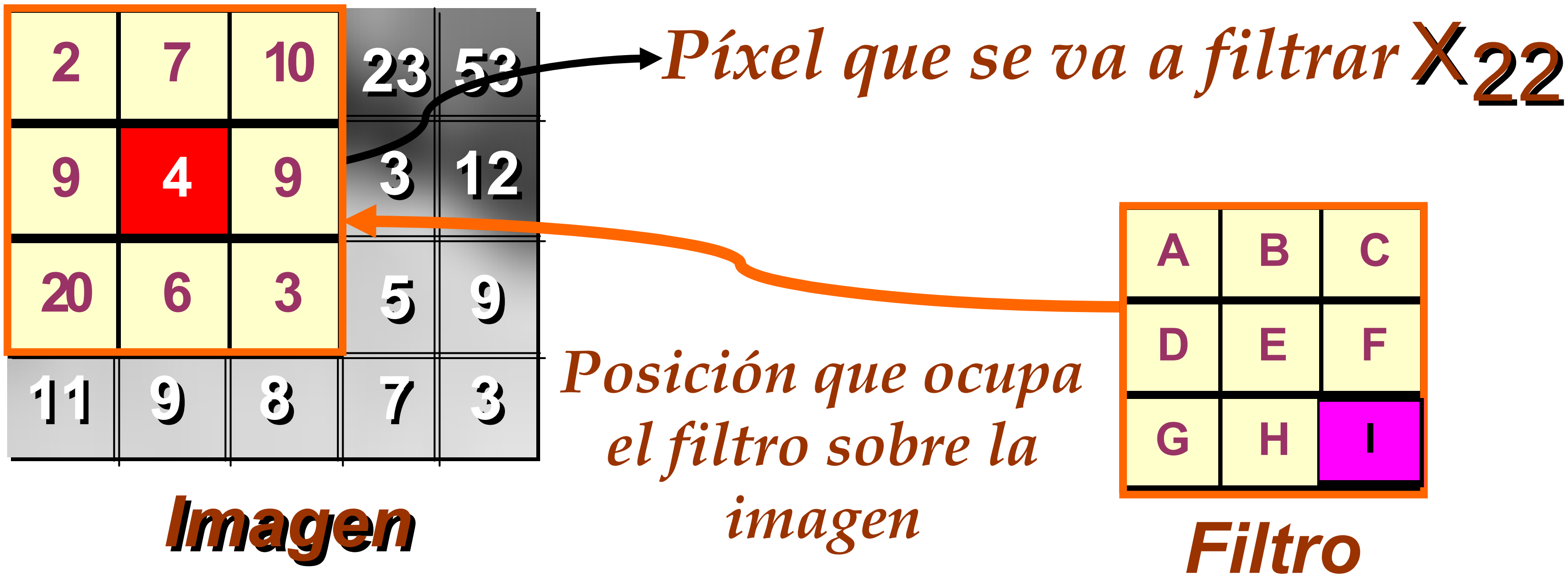
EJEMPLO DE CONVOLUCIÓN ESPACIAL



$$X_{22} = 2 \cdot A + 7 \cdot B + 10 \cdot C + 9 \cdot D + 4 \cdot E + 9 \cdot F + 20 \cdot G + 6 \cdot H + 3 \cdot I$$

FILTRADO LINEAL

EJEMPLO DE CONVOLUCIÓN ESPACIAL



$$X_{22} = 2 \cdot A + 7 \cdot B + 10 \cdot C + 9 \cdot D + 4 \cdot E + 9 \cdot F + 20 \cdot G + 6 \cdot H + 3 \cdot I$$

Nuevo valor que adopta el píxel

Rango de una matriz

RANGO DE UNA MATRIZ.

-TRANSFORMACIONES ELEMENTALES.

-RANGO DE UNA MATRIZ.

TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

Intercambiar filas o columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 \leftrightarrow f_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c_2 \leftrightarrow c_3$$

TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

Intercambiar filas o columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 \leftrightarrow f_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c_2 \leftrightarrow c_3$$

TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

Multiplicar una fila o columna por un número diferente de cero.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad f_1 \to 3\,f_1 \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ -1 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad c_1 \to 2\,c_1 \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

Sustituir una fila (columna) por una combinación lineal de ella con otra fila (columna)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 5 & 5 & 10 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 \rightarrow 3\,f_1 + f_2$$

MATRICES EQUIVALENTES

Sean "A" y "B" dos matrices del mismo orden. Decimos que la matriz "A" es equivalente a la matriz "B", si "B" se puede obtener de "A" por una sucesión finita de transformaciones elementales.

$$A \sim B$$

PROPIEDADES DE LA EQUIVALENCIA DE MATRICES

- **Reflexiva:** $A \sim A$
- **Simétrica:** $A \sim B \rightarrow B \sim A$
- **Transitiva:**

$$A \sim B \wedge B \sim C \rightarrow A \sim C$$

RANGO DE UNA MATRIZ

El rango de una matriz A es el número máximo de filas, o de columnas, linealmente independientes de A.

Notación:

rag (A) r (A)

RANGO DE UNA MATRIZ

- **Las transformaciones elementales no alteran ni el orden, ni el rango de una matriz.**
- **Dos matrices equivalentes tienen el mismo orden y el mismo rango.**

MATRIZ ESCALÓN

•**Matriz ESCALÓN: Es toda matriz en la que el número de ceros anteriores a la primera componente distinta de cero, aumenta al pasar de una fila a la siguiente.**

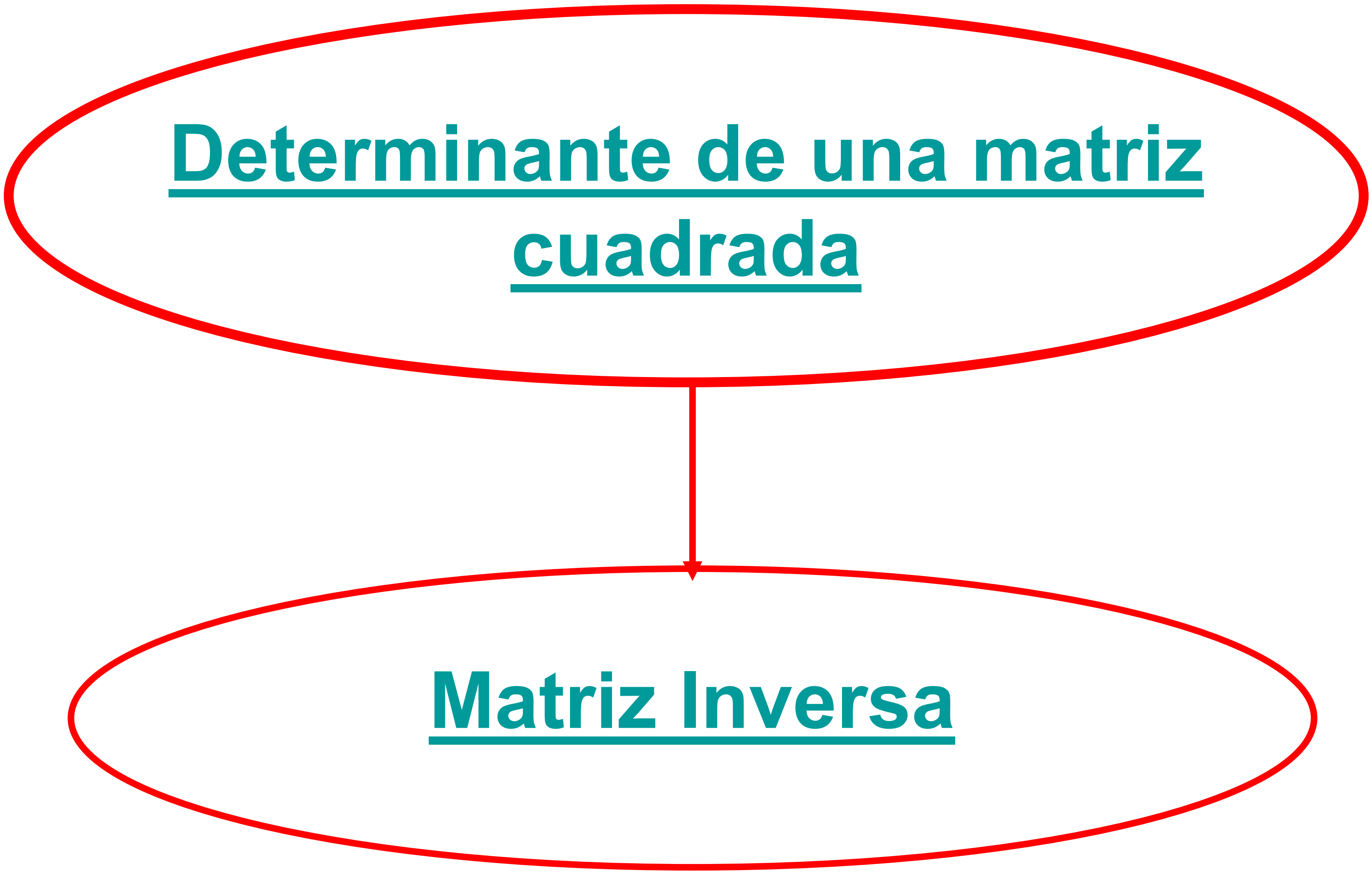
$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• **El rango de una matriz escalón es igual al número de filas con elementos no todos nulos.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f_1 \to f_2} \qquad 3f_1 - 2f_3 \to f_3 \qquad f_2 + f_3 \to f_3$$

rag (A) = 2


Determinante de una matriz cuadrada
Matriz Inversa

MATRIZ INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA.

-CONCEPTO DE MATRIZ INVERSA.

-CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA ADJUNTA.

- MÉTODO DE JORDAN.

DETERMINANTE

-Regla de Sarrus.

-Método de Menores.

MATRIZ INVERSA

Una matriz cuadrada A es inversible, si existe otra matriz cuadrada B que conmuta con A y que cumple que:

$$A \times B = B \times A = I$$

La matriz A= $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ es inversible porque

existe la matriz B = $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ tal que:

AxB = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

BxA = $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

MATRIZ INVERSA

Si la matriz inversa existe, es única

- Una condición necesaria y suficiente para que una matriz A sea inversible es que el determinante de A sea diferente de A^{-1} cero (A sea no sea singular).

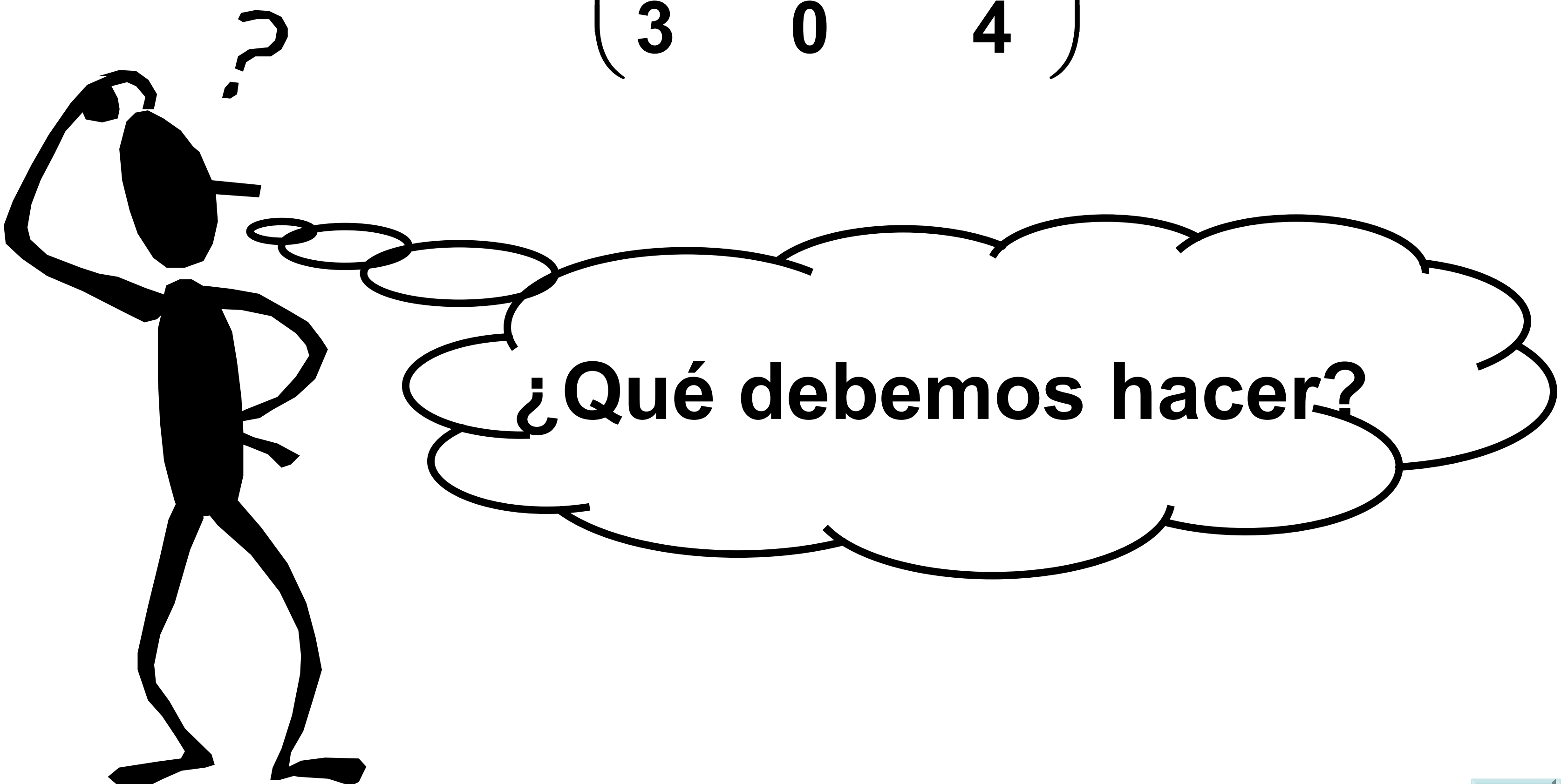
- La matriz inversa de una matriz A inversible, es una matriz que cumple:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- Si una matriz cuadrada A de orden n es inversible, entonces el rango de A es n.

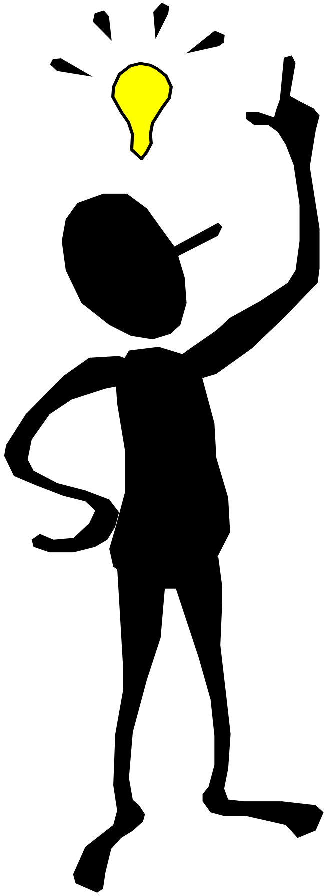
CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$



CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

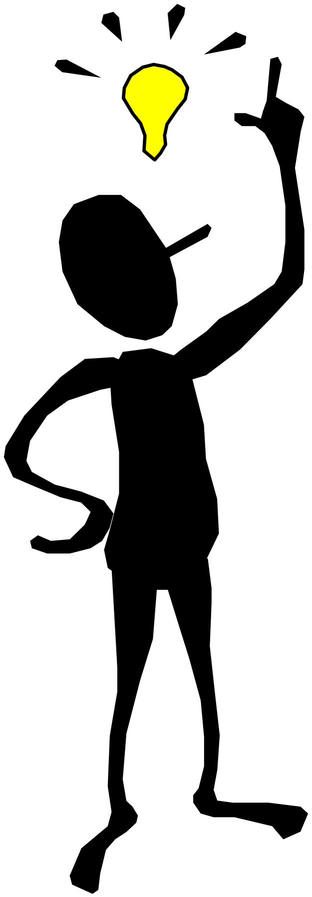


Primer paso: Calcular el determinante de la matriz dada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 23$$

CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

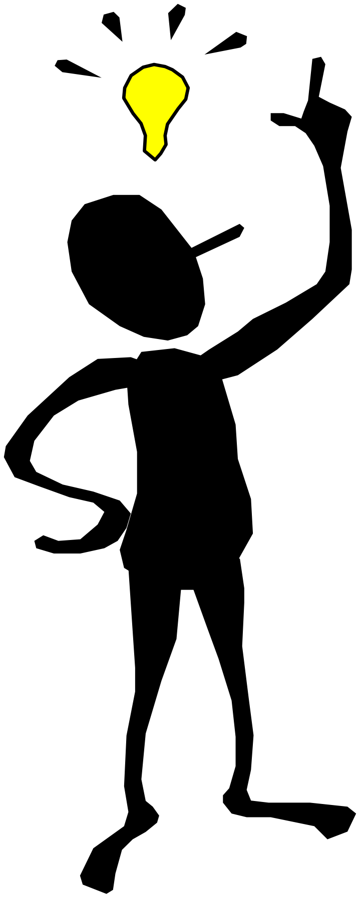


Primer paso: Calcular el determinante de la matriz dada.

$$|A| \neq 0$$

CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$



Segundo paso: Calcular la matriz de los cofactores.

CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA

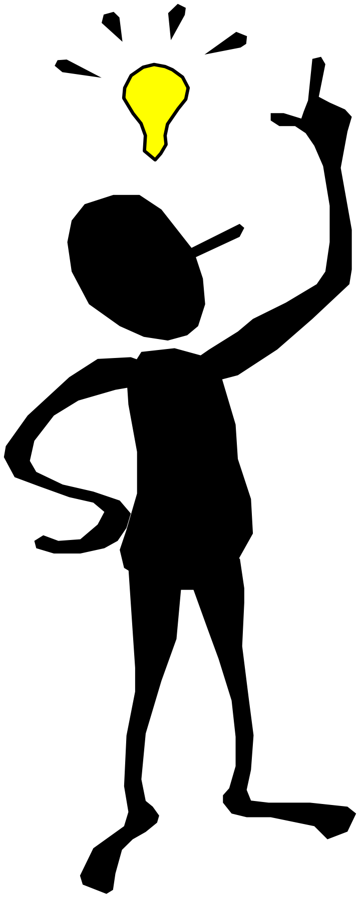
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Segundo paso: Calcular la matriz de los cofactores.

¿Cómo obtener la matriz de los cofactores?

CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

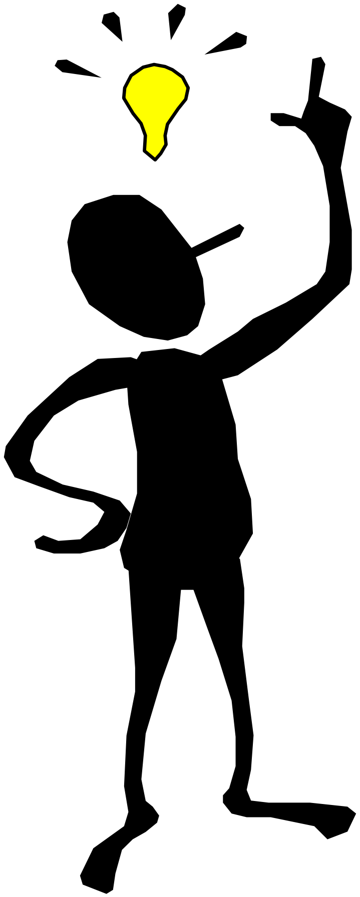


Segundo paso: Calcular la matriz de los cofactores.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

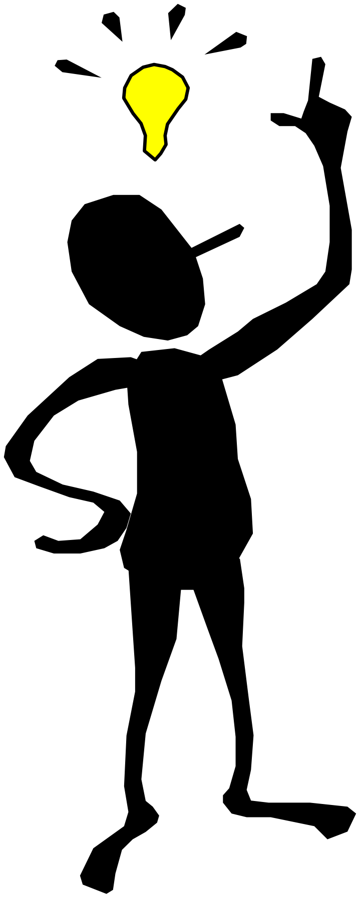


Segundo paso: Calcular la matriz de los cofactores.

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12$$

CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

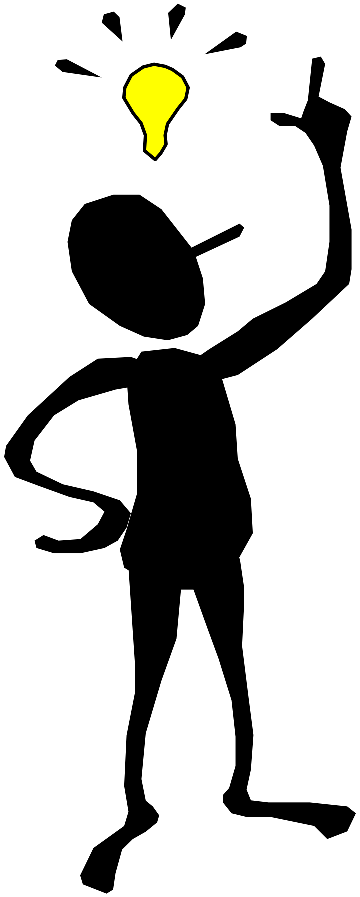


Segundo paso: Calcular la matriz de los cofactores.

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

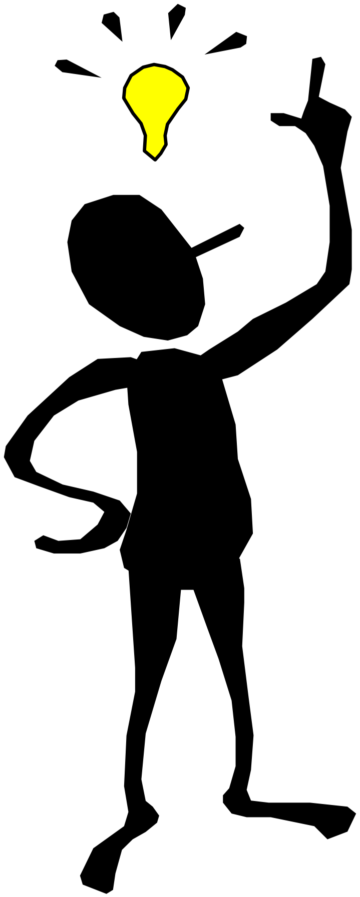


Segundo paso: Calcular la matriz de los cofactores.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA

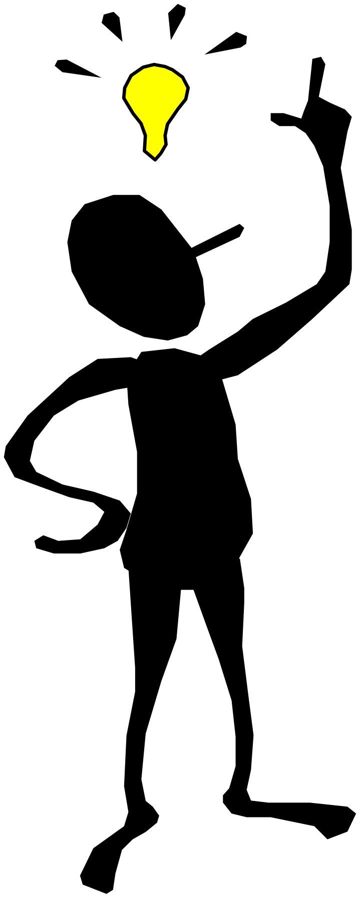
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$



Segundo paso: Calcular la matriz de los cofactores.

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA

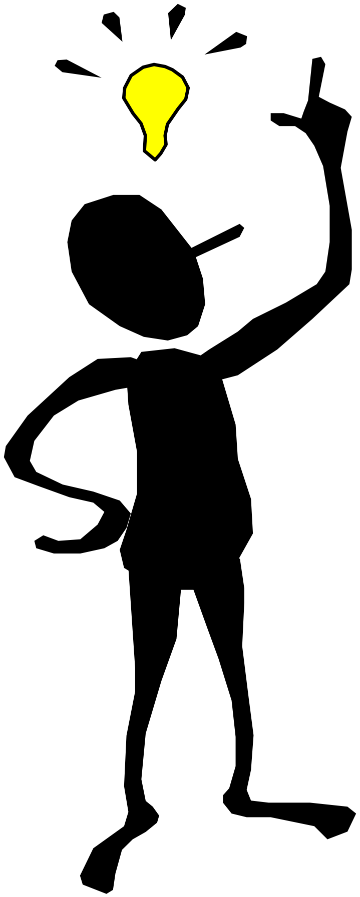


$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Segundo paso: Calcular la matriz de los cofactores.

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA



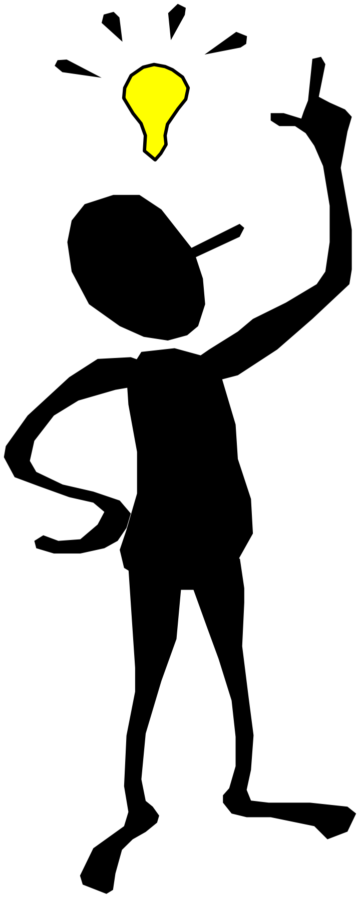
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Segundo paso: Calcular la matriz de los cofactores.

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA

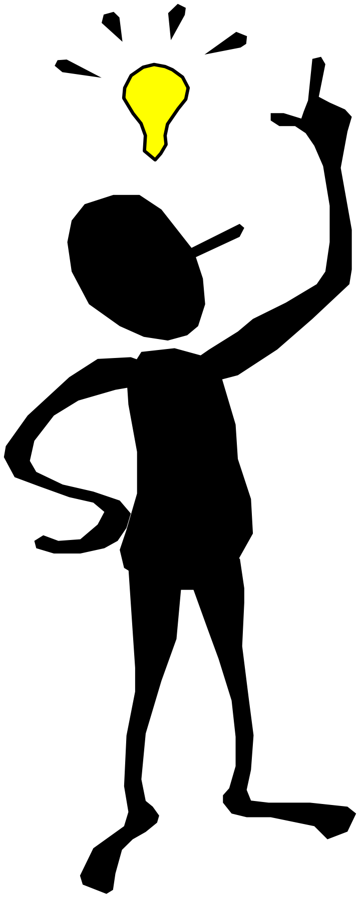
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$



Segundo paso: Calcular la matriz de los cofactores.

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA

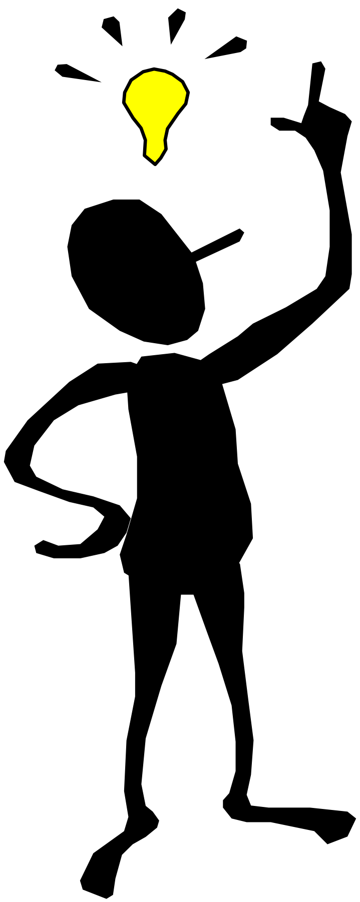


$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Segundo paso: Calcular la matriz de los cofactores.

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz de los cofactores:.

$$A_c = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -6 \\ -12 & 7 & 9 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

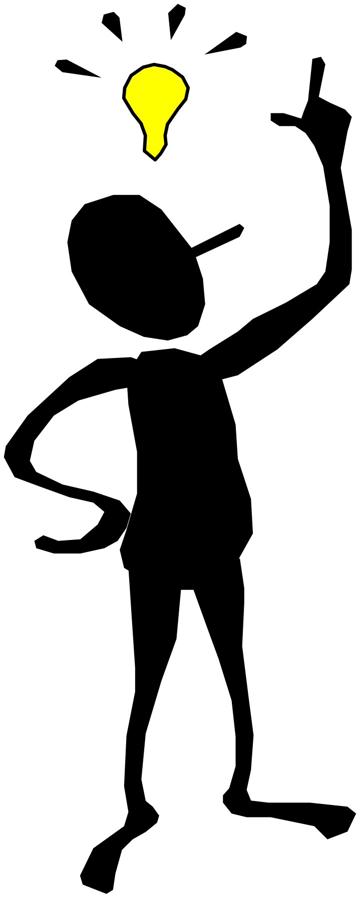
CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA

$$A_c = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -6 \\ -12 & 7 & 9 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tercer paso: Hallar la matriz adjunta.

Intercambiando en la matriz de los cofactores cada fila con la columna correspondiente

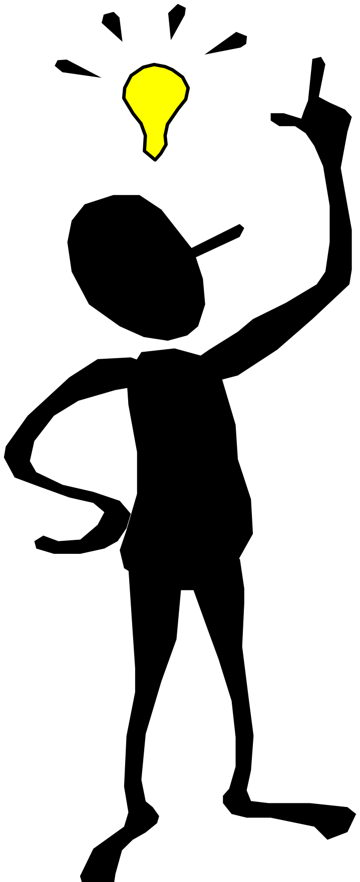
CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA



$$A_c = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -6 \\ -12 & 7 & 9 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{+} = \begin{pmatrix} 8 & & \\ 3 & & \\ -6 & & \end{pmatrix}$$

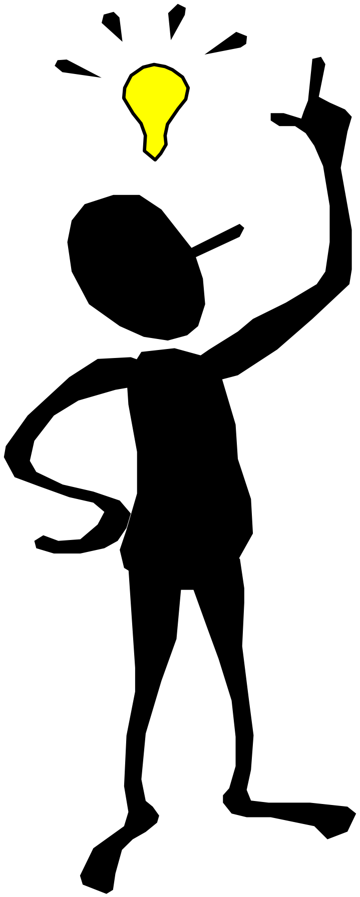
CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA



$$A_c = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -6 \\ -12 & 7 & 9 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{+} = \begin{pmatrix} 8 & -12 & \\ 3 & 7 & \\ -6 & 9 & \end{pmatrix}$$

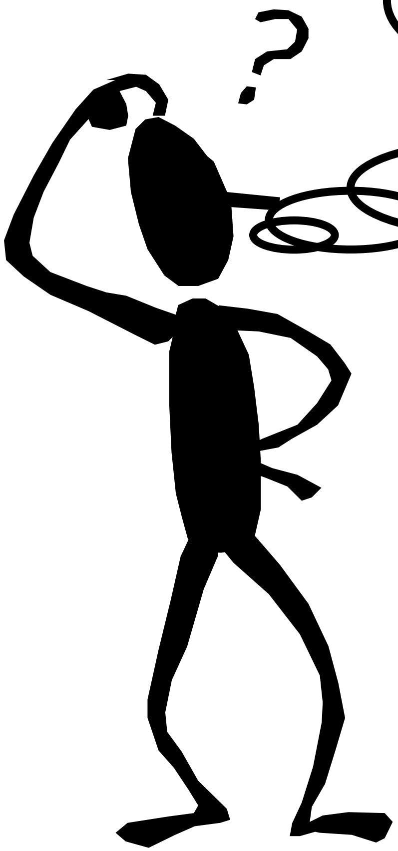
CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA



$$A_c = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -6 \\ -12 & 7 & 9 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

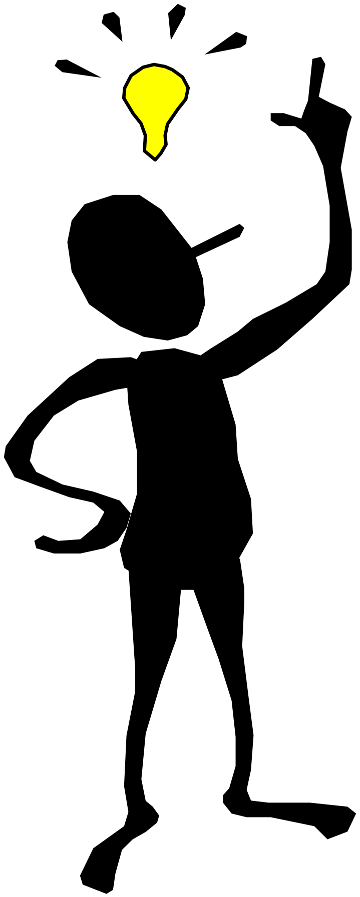
$$A^{+} = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 5 \\ 3 & 7 & -1 \\ -6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA



Cuarto paso: Hallar la matriz inversa.

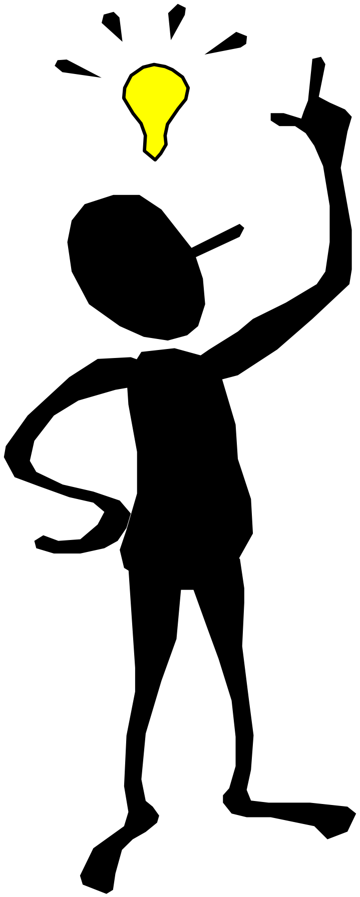
CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA



Cuarto paso: Hallar la matriz inversa.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{+}$$

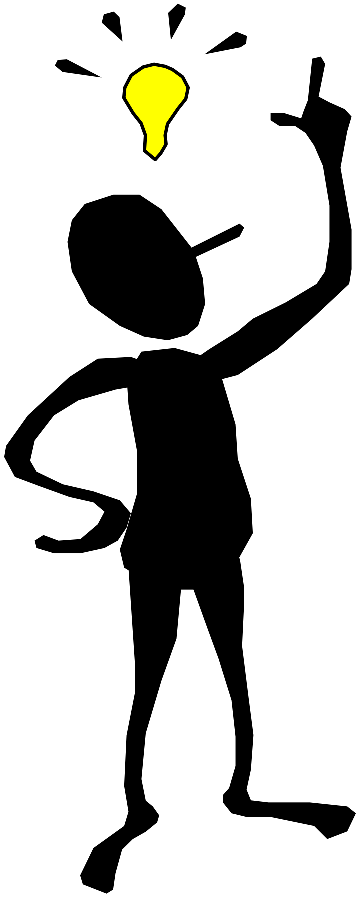
POR LA MATRIZ ADJUNTA



Cuarto paso: Hallar la matriz inversa.

$$A^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 8 & -12 & 5 \\ 3 & 7 & -1 \\ -6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA



Cuarto paso: Hallar la matriz inversa.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{23} & -\frac{12}{23} & \frac{5}{23} \\ \frac{3}{23} & \frac{7}{23} & -\frac{1}{23} \\ -\frac{6}{23} & \frac{9}{23} & \frac{2}{23} \end{pmatrix}$$

CÁLCULO DE LA INVERSA POR LA MATRIZ ADJUNTA

Quinto Paso: Comprobación

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{23} & -\frac{12}{23} & \frac{5}{23} \\ \frac{3}{23} & \frac{7}{23} & -\frac{1}{23} \\ -\frac{6}{23} & \frac{9}{23} & \frac{2}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

POR TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

(MÉTODO DE JORDÁN)

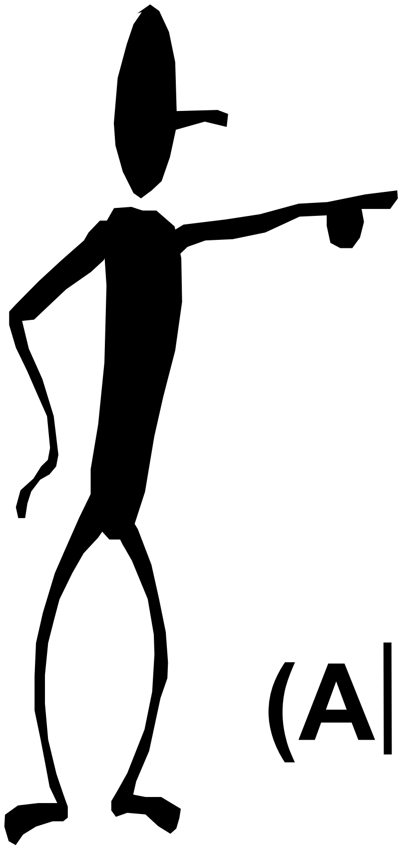
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

¿Cómo proceder?

POR TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

(MÉTODO DE JORDÁN)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$



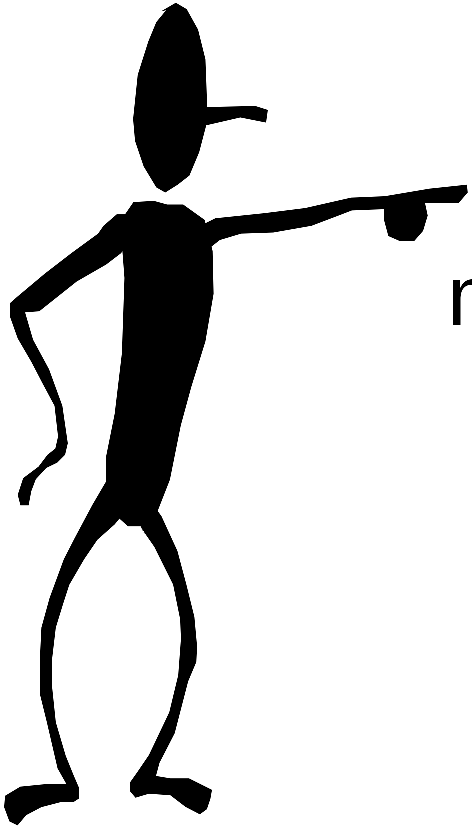
Primer paso: Formemos la matriz bloque colocando la matriz dada A, y al lado la idéntica del mismo orden.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

POR TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

(MÉTODO DE JORDÁN)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$



Segundo paso: Apliquemos las mismas transformaciones a ambas matrices.

POR TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

(MÉTODO DE JORDÁN)

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$f_3 \rightarrow -3\,f_1 + f_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

POR TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

(MÉTODO DE JORDÁN)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$f_3 \rightarrow 9\, f_2 + 2\, f_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 23 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim$$

POR TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

(MÉTODO DE JORDÁN)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 23 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$f_2 \rightarrow -23\, f_2 + f_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -46 & 0 & -6 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 23 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim$$

POR TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

(MÉTODO DE JORDÁN)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -46 & 0 & -6 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 23 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$f_1 \rightarrow 23\, f_1 + f_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 23 & 69 & 0 & 17 & 9 & 2 \\ 0 & -46 & 0 & -6 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 23 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim$$

POR TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

(MÉTODO DE JORDÁN)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 23 & 69 & 0 & 17 & 9 & 2 \\ 0 & -46 & 0 & -6 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 23 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$f_1 \rightarrow 2f_1 + 3f_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 46 & 0 & 0 & 16 & -24 & 10 \\ 0 & -46 & 0 & -6 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 23 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim$$

POR TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

(MÉTODO DE JORDÁN)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 46 & 0 & 0 & 16 & -24 & 10 \\ 0 & -46 & 0 & -6 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 23 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$f_1 \to \frac{1}{46} f_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{23} & -\frac{12}{23} & \frac{5}{23} \\ 0 & -46 & 0 & -6 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 23 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim$$

POR TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

(MÉTODO DE JORDÁN)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{23} & -\frac{12}{23} & \frac{5}{23} \\ 0 & -46 & 0 & -6 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 23 & -6 & 9 & 2 \end{array} \right) \sim$$

$$f_2 \rightarrow -\frac{1}{46} f_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{23} & -\frac{12}{23} & \frac{5}{23} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{23} & \frac{7}{23} & -\frac{1}{23} \\ 0 & 0 & 23 & -6 & 9 & 2 \end{array} \right) \sim$$

POR TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

(MÉTODO DE JORDÁN)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{23} & -\frac{12}{23} & \frac{5}{23} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{23} & \frac{7}{23} & -\frac{1}{23} \\ 0 & 0 & 23 & -6 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$f_3 \rightarrow \frac{1}{23} f_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{23} & -\frac{12}{23} & \frac{5}{23} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{23} & \frac{7}{23} & -\frac{1}{23} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{23} & \frac{9}{23} & \frac{2}{23} \end{array}\right)$$

POR TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

(MÉTODO DE JORDÁN)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{23} & -\frac{12}{23} & \frac{5}{23} \\ \frac{3}{23} & \frac{7}{23} & -\frac{1}{23} \\ -\frac{6}{23} & \frac{9}{23} & \frac{2}{23} \end{pmatrix}$$

POR TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

(MÉTODO DE JORDÁN)

Quinto Paso: Comprobación

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{23} & -\frac{12}{23} & \frac{5}{23} \\ \frac{3}{23} & \frac{7}{23} & -\frac{1}{23} \\ -\frac{6}{23} & \frac{9}{23} & \frac{2}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

Se llama DETERMINANTE de una matriz, a un número que se le asocia a dicha matriz.

Sólo se calcula determinante a las matrices

CUADRADAS.

El determinante de la matriz se denota con la misma letra que la matriz pero encerrada entre barras, es decir, si la matriz se llama A, el determinante se denota: det (A) ó / A /

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}_2$$

Si la matriz es de orden dos

$$/A/ = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1.2$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}_2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1.2 - (-3).4 = 14$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

Si la matriz es de orden tres, se aplica la llamada **REGLA DE SARRUS**.

Esta regla consiste en que a la matriz dada **se le adicionan al final las dos primeras filas** (quedando con cinco filas) y se calculan los productos de sus elementos en diagonal (de manera que abarque dicho producto a tres elementos) y a los productos hacia abajo se le mantiene el signo y a los productos hacia arriba se les cambia el signo.

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

Veamos un ejemplo de trabajo con la REGLA DE SARRUS.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}_3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix}$$

Regla de Sarrus

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}_3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2.0.5$$

$$\begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix}$$

Regla de Sarrus

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}_3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2.0.5 + 1.(-2).0$$

$$\begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix}$$

Regla de Sarrus

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}_3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2.0.5 + 1.(-2).0 + 4.(-1).3$$

$$\begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix}$$

Regla de Sarrus

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}_3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2.0.5 + 1.(-2).0 + 4.(-1).3$$

$$\begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix}$$

$$- (\, 4.0.0$$

Regla de Sarrus

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}_3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix}$$

$= 2.0.5 + 1.(-2).0 + 4.(-1).3$

$- (4.0.0 + 2.(-2).3$

Regla de Sarrus

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}_3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ = 2.0.5 + 1.(-2).0 + 4.(-1).3 \\ \\ - (\,4.0.0 + 2.(-2).3 + 1.(-1).5\,) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix} \qquad = -12 - (-17) = \boxed{5}$$

Regla de Sarrus

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

¿Podremos aplicar la REGLA DE SARRUS si la matriz tiene orden superior a tres?

La respuesta es NO, pues al agregar filas al final de la matriz se obtendrían más de cinco filas y por lo tanto los productos incluirían a más de tres elementos cada uno.

Para las matrices de orden superior a tres se usa el llamado MÉTODO DE MENORES.

Este método consiste en calcular el determinante de cualquier matriz reduciéndolo al cálculo de determinantes de orden inferior.

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

Para empezar debemos definir que entendemos por MENOR ASOCIADO A UN ELEMENTO cualquiera de una matriz.

El menor asociado a un elemento dado de una matriz, es el determinante que queda al eliminar de la matriz, la fila y la columna correspondiente al elemento dado.

En este caso el menor asociado al elemento que se encuentra en la fila dos y columna tres será el determinante que queda al eliminar dicha fila y columna.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

Para empezar debemos definir que entendemos por MENOR ASOCIADO A UN ELEMENTO cualquiera de una matriz.

El menor asociado a un elemento dado de una matriz, es el determinante que queda al eliminar de la matriz, la fila y la columna correspondiente al elemento dado.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

El menor asociado viene dado por :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

Ahora que ya sabemos lo que llamamos MENOR ASOCIADO A UN ELEMENTO, podemos definir el **MÉTODO DE MENORES** para calcular un determinante como la suma de los productos de los elementos de una fila cualquiera (o columna) de la matriz por los menores asociados a dichos elementos. Dichos productos mantienen el signo si la suma del orden de la fila y la columna es un número par, sino, se le cambia el signo al producto.

$$|A| = \sum_{1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij}$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}_3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

Método de Menores

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+2}(0)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Método de Menores

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(0)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 5$$

Método de Menores

Sistemas de Ecuaciones Lineales

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

FORMA GENERAL DE UN SISTEMA DE p ECUACIONES CON n INCÓGNITAS.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

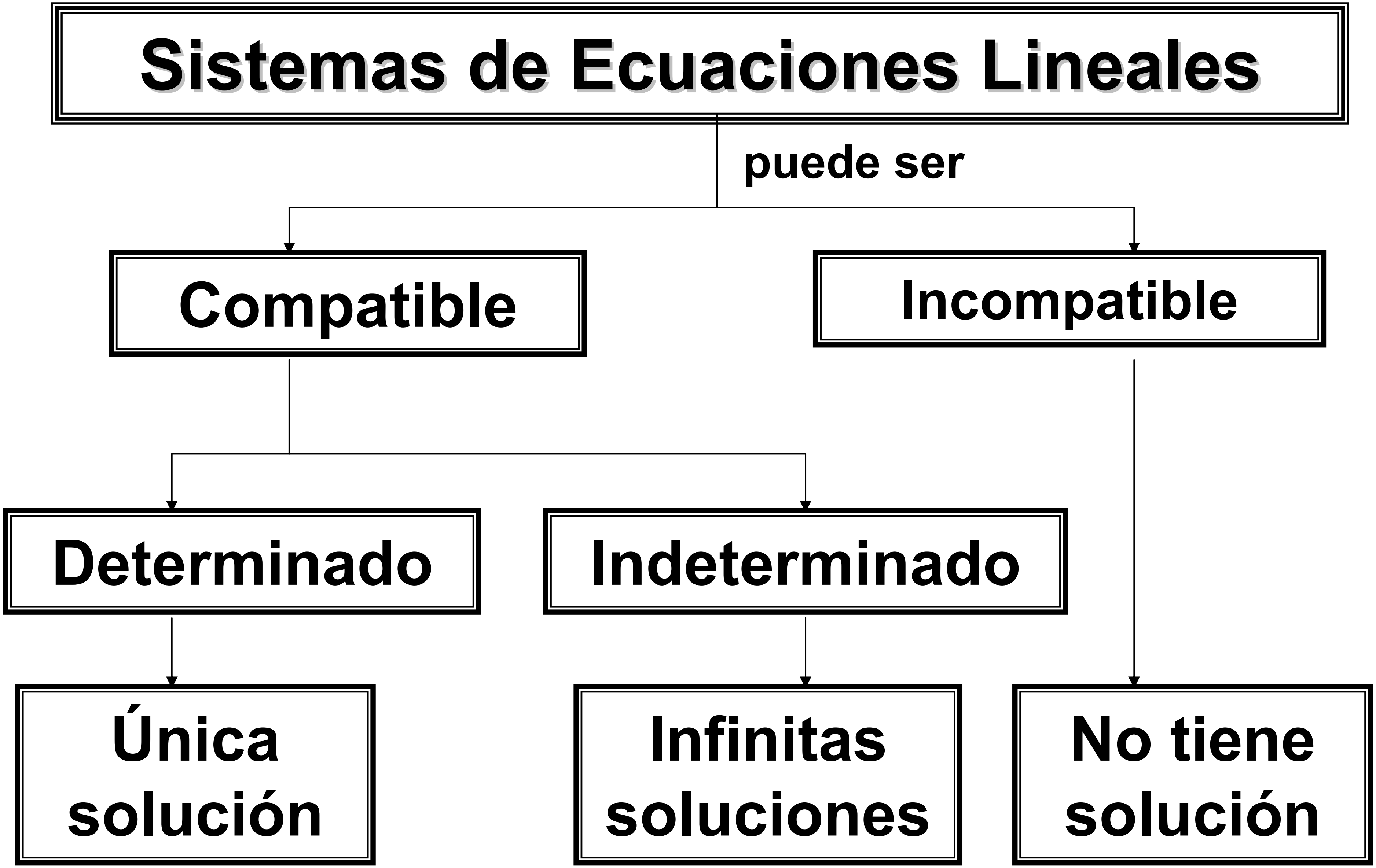
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3$$

....

....

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p$$


Sistemas de Ecuaciones Lineales
puede ser
Compatible
Incompatible
Determinado
Indeterminado
Única solución
Infinitas soluciones
No tiene solución

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN FORMA MATRICIAL

Matriz (A) del sistema formada por los coeficientes de las incógnitas del sistema dado.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN FORMA MATRICIAL

Matriz Ampliada (A, B) formada por los elementos de la matriz A del sistema y la columna de términos independientes.

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \cdots & a_{pn} & b_p \end{array}\right)$$

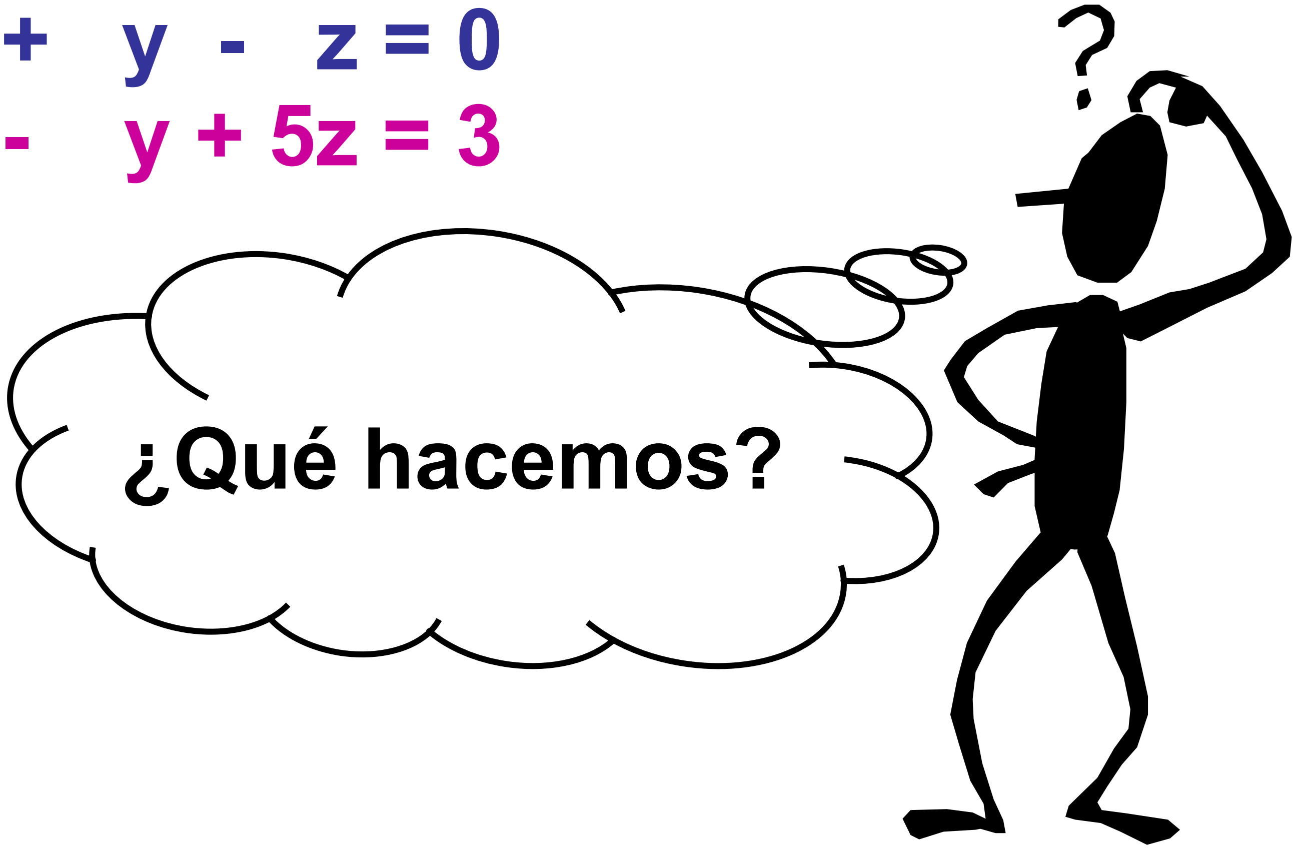
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN FORMA MATRICIAL

Al efectuar el producto matricial AX = B en el cual A es la matriz del sistema, X es la matriz columna de las incógnitas y B es la matriz columna de los términos independientes; se obtiene el sistema de ecuaciones lineales inicial.

- **Si B ≠ 0, la ecuación representa un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo.**
- **Si B = 0, la ecuación matricial AX = 0 representa un sistema de ecuaciones lineales homogéneo en el que X = 0 es siempre solución de dicho sistema.**

Método de Gauss en forma matricial

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases}$$



Método de Gauss en forma matricial

- **Escribir la matriz ampliada (A, B) formada por los elementos de la matriz A del sistema y la columna de términos independientes.**

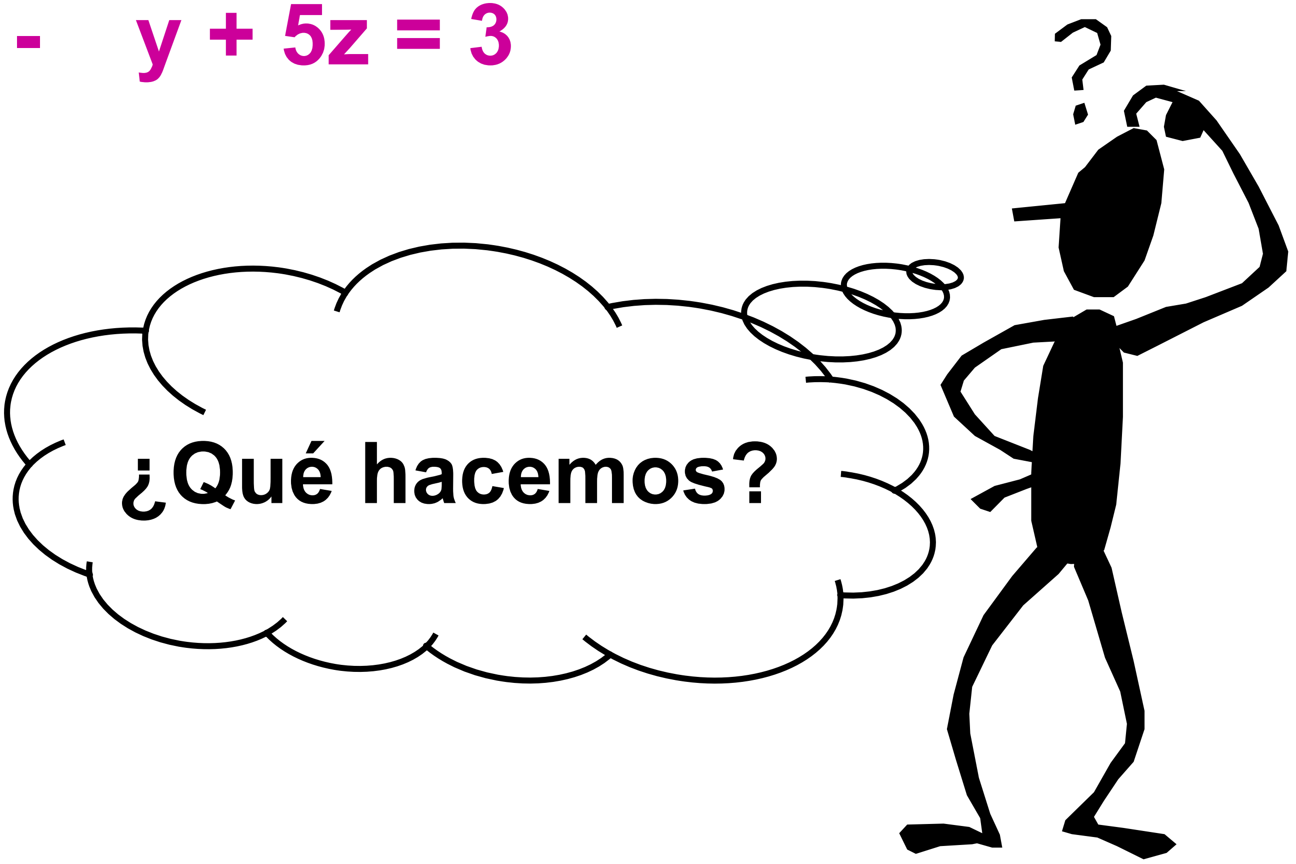
- Mediante transformaciones elementales, transformar la matriz ampliada del sistema en una matriz escalón equivalente a ella.

- A partir de la matriz escalón escribir con dichos coeficientes el sistema equivalente al dado inicialmente.

- En caso que el sistema tenga solución, en la última ecuación hallamos el valor de una de las incógnitas y vamos sustituyendo en las ecuaciones anteriores.

Método de Gauss en forma matricial

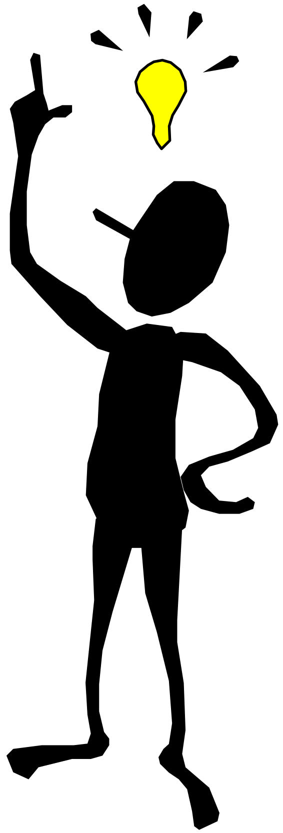
$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3 \end{array}\right.$$



Método de Gauss en forma matricial

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases}$$

Primer Paso: Escribimos la matriz ampliada correspondiente al sistema.

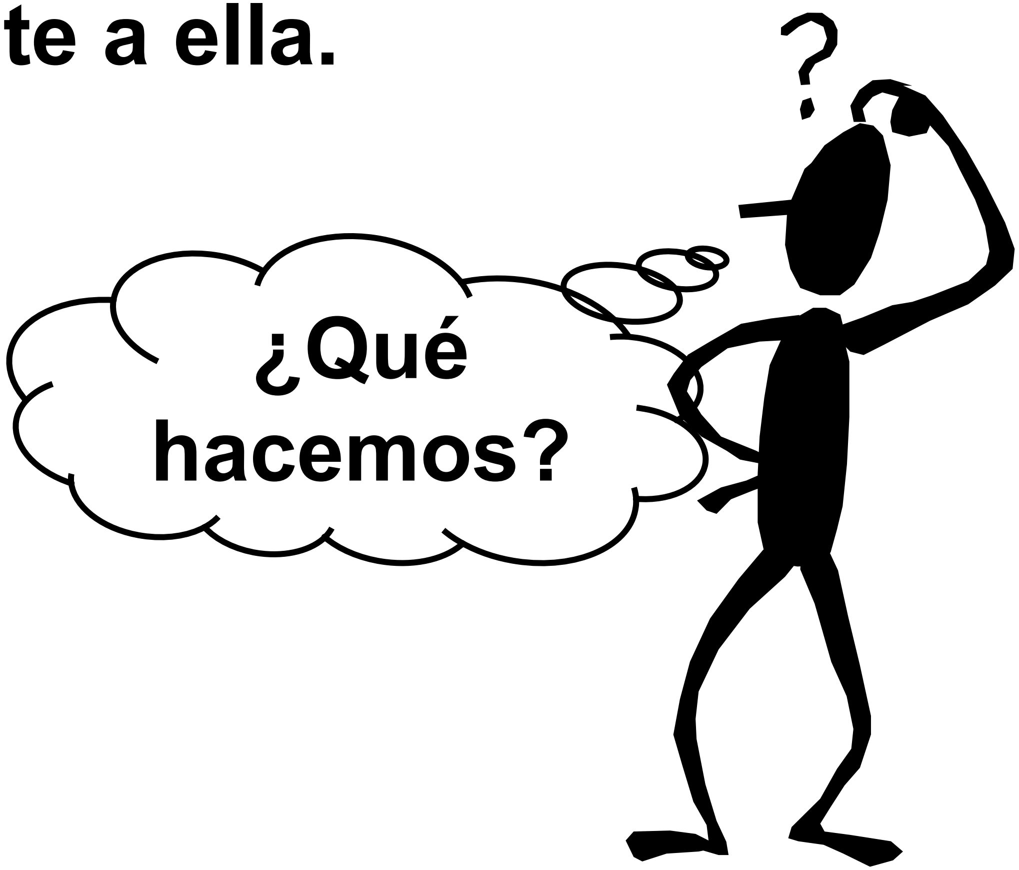


$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

Método de Gauss en forma matricial

Segundo Paso: Transformamos la matriz ampliada en una matriz escalón equivalente a ella.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$



Método de Gauss en forma matricial

Segundo Paso: Transformamos la matriz ampliada en una matriz escalón equivalente a ella.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 11 & -11 & 11 \end{array}\right) \sim$$

$$f_2 \rightarrow f_1 - 3f_2$$

$$f_3 \rightarrow 4f_1 - 3f_3$$

Método de Gauss en forma matricial

Segundo Paso: Transformamos la matriz ampliada en una matriz escalón equivalente a ella.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 11 & -11 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 33 & 66 \end{array}\right)$$

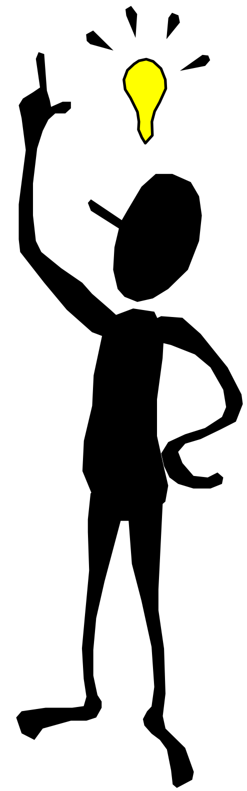
$$f_3 \rightarrow 11f_2 + f_3$$

Método de Gauss en forma matricial

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 33 & 66 \end{array}\right)$$

Tercer Paso: Escribimos el sistema correspondiente a la matriz anterior.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & + & z & = & 5 \qquad (1) \\ & & -y & + & 4z & = & 5 \qquad (2) \\ & & & & 33z & = & 66 \qquad (3) \end{array}\right.$$



Método de Gauss en forma matricial

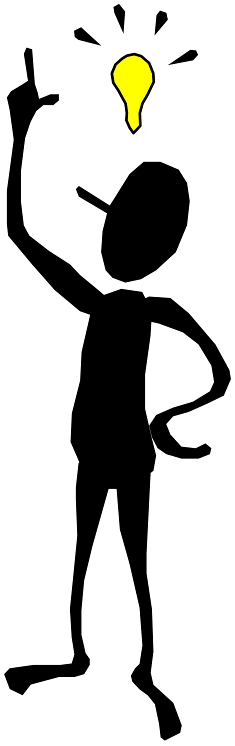
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 & (1) \\ -y + 4z = 5 & (2) \\ 33z = 66 & (3) \end{cases}$$

Cuarto Paso: Despejamos la variable "z" en la ecuación (3).

$$z = \frac{66}{33} \Longrightarrow Z = 2$$

Método de Gauss en forma matricial

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 & (1) \\ -y + 4z = 5 & (2) \\ 33z = 66 & (3) \end{cases}$$



Quinto Paso: Sustituimos el valor de "z" en la ecuación (2).

$$-y + 4(2) = 5 \qquad (2)$$

$$y = 3$$

Método de Gauss en forma matricial

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 & (1) \\ -y + 4z = 5 & (2) \\ 33z = 66 & (3) \end{cases}$$

Sexto Paso: Sustituimos los valores de "y" y "z" en la ecuación (1).

$$3x + 2(3) + 2 = 5 \qquad (1)$$

$$x = -1$$

Método de Gauss en forma matricial

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 & (1) \\ -y + 4z = 5 & (2) \\ 33z = 66 & (3) \end{cases}$$

Séptimo Paso: Comunicar el resultado

$$S = \{(-1;\ 3;\ 2)\}$$

TEOREMA DE CRONEKER - CAPELLI

Un sistema de ecuaciones es:

•**Compatible** si y solo si el rango de la matriz asociada es igual al rango de la matriz ampliada del sistema.

•Compatible determinado si el rango común es igual al número de incógnitas.

•Compatible indeterminado si el rango común es menor que el número de incógnitas.

MÉTODO DE CRAMER

Se basa en la resolución de determinantes.

Sólo es aplicable a sistemas de ecuaciones lineales que tienen igual número de ecuaciones que de incógnitas.

Sea el sistema de ecuaciones lineales AX=B, de *n* ecuaciones y *n* incógnitas, compatible determinado, luego, la matriz *A* es cuadrada y no singular y por tanto, existe la matriz inversa A^{-1}

Premultiplicando a la izquierda ambos miembros de la ecuación matricial AX = B por la matriz inversa se obtiene:

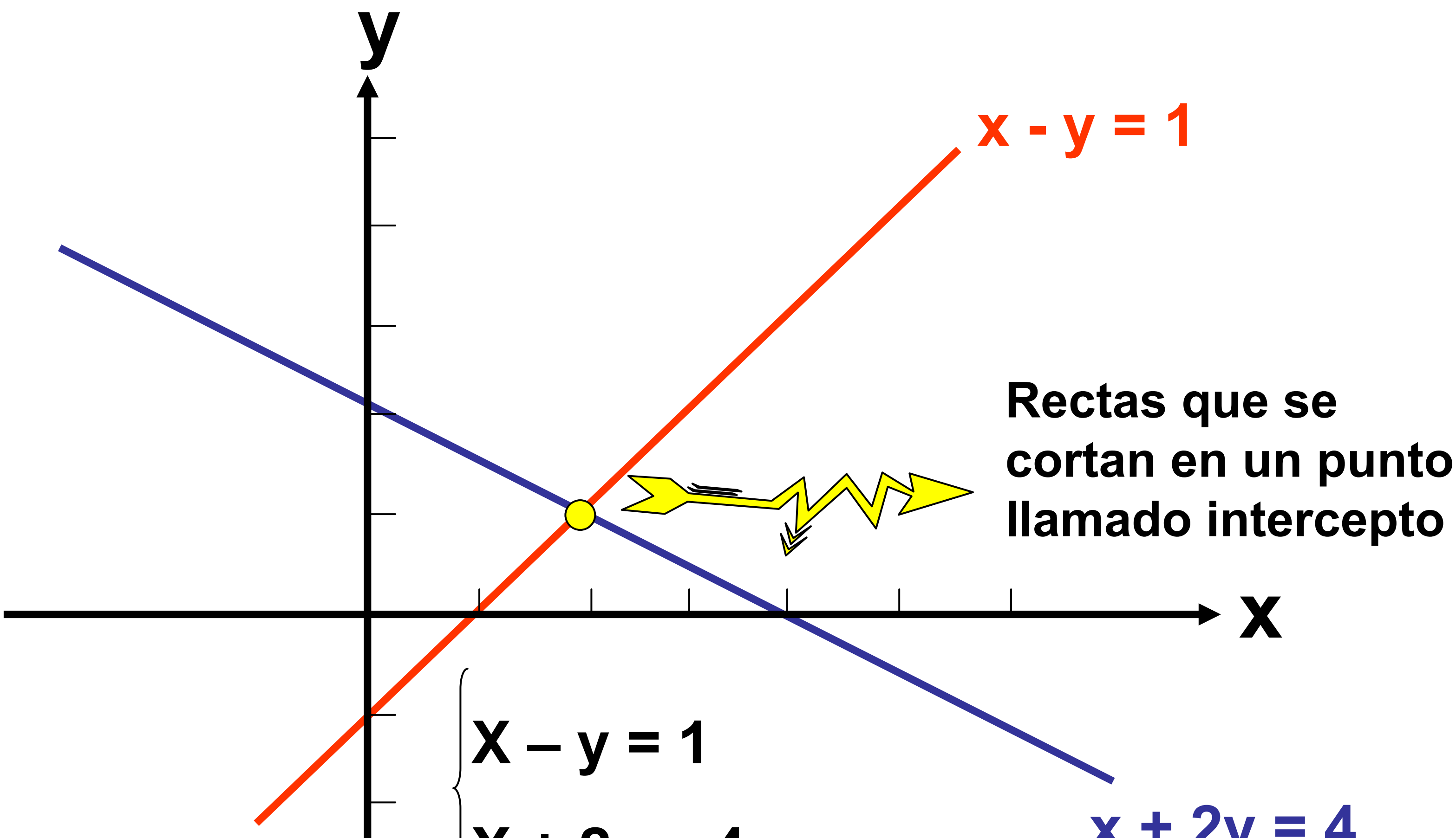
A^{-1} **AX =** A^{-1} **B**

Pero como A^{-1} **A = I, se obtiene:**

IX = A^{-1} **B**

X = A^{-1} **B**

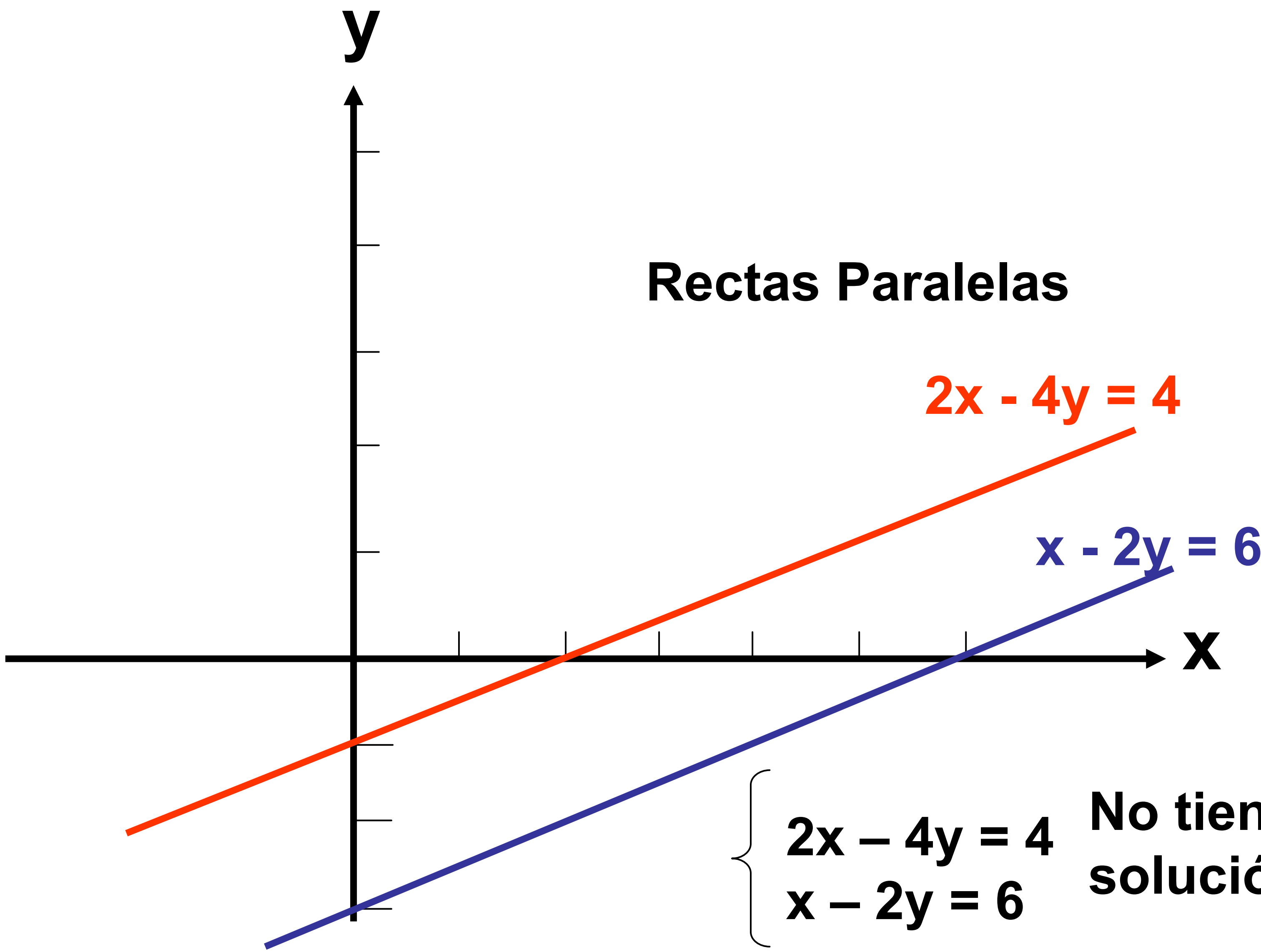
Interpretación Geométrica de la solución de un Sistema de dos Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.



$$\begin{cases} X - y = 1 \\ X + 2y = 4 \end{cases}$$

Tiene solución única S $\{(2,1)\}$

Interpretación Geométrica de la solución de un Sistema de dos Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.



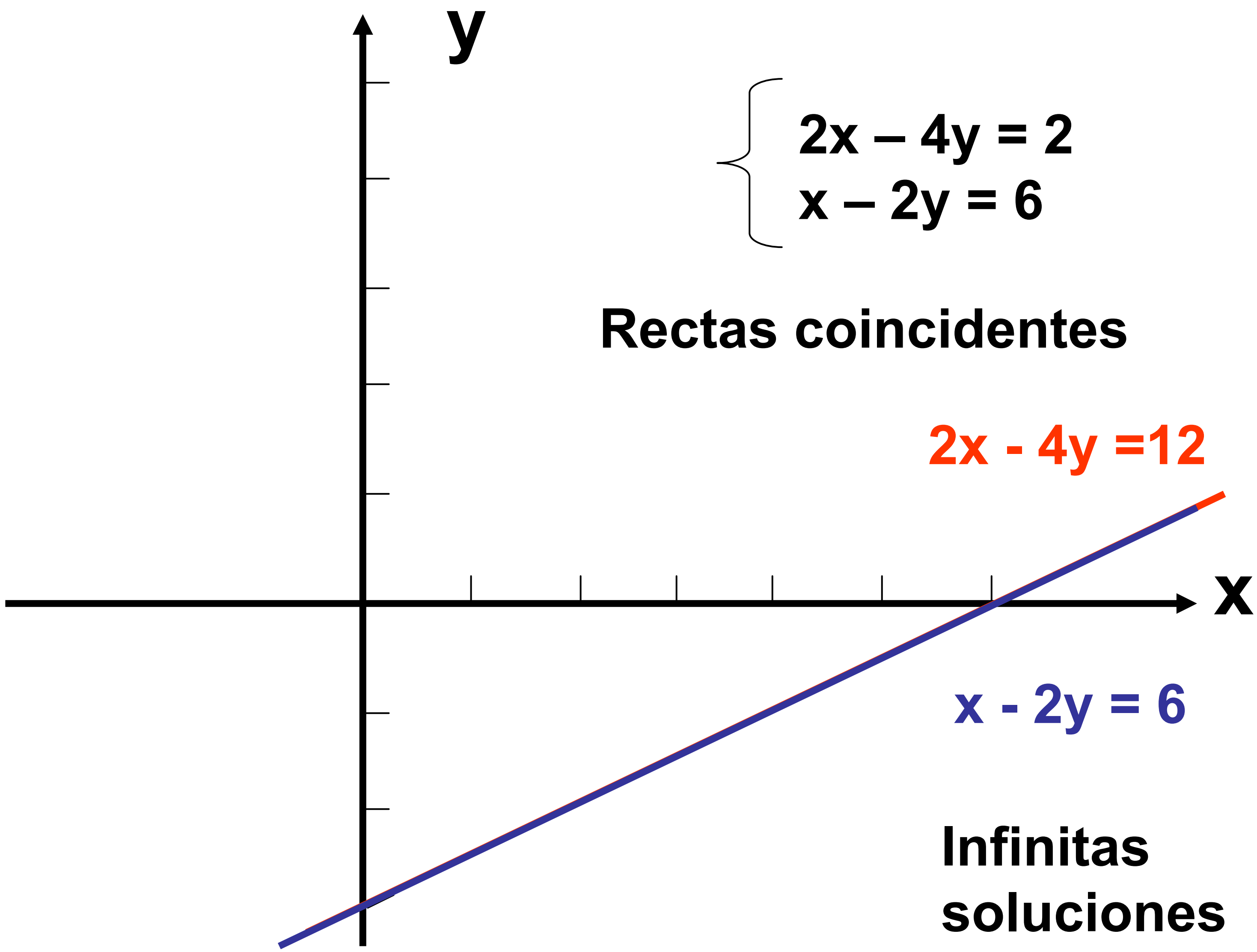
$$\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

No tiene solución

Interpretación Geométrica de la solución de un Sistema de las Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

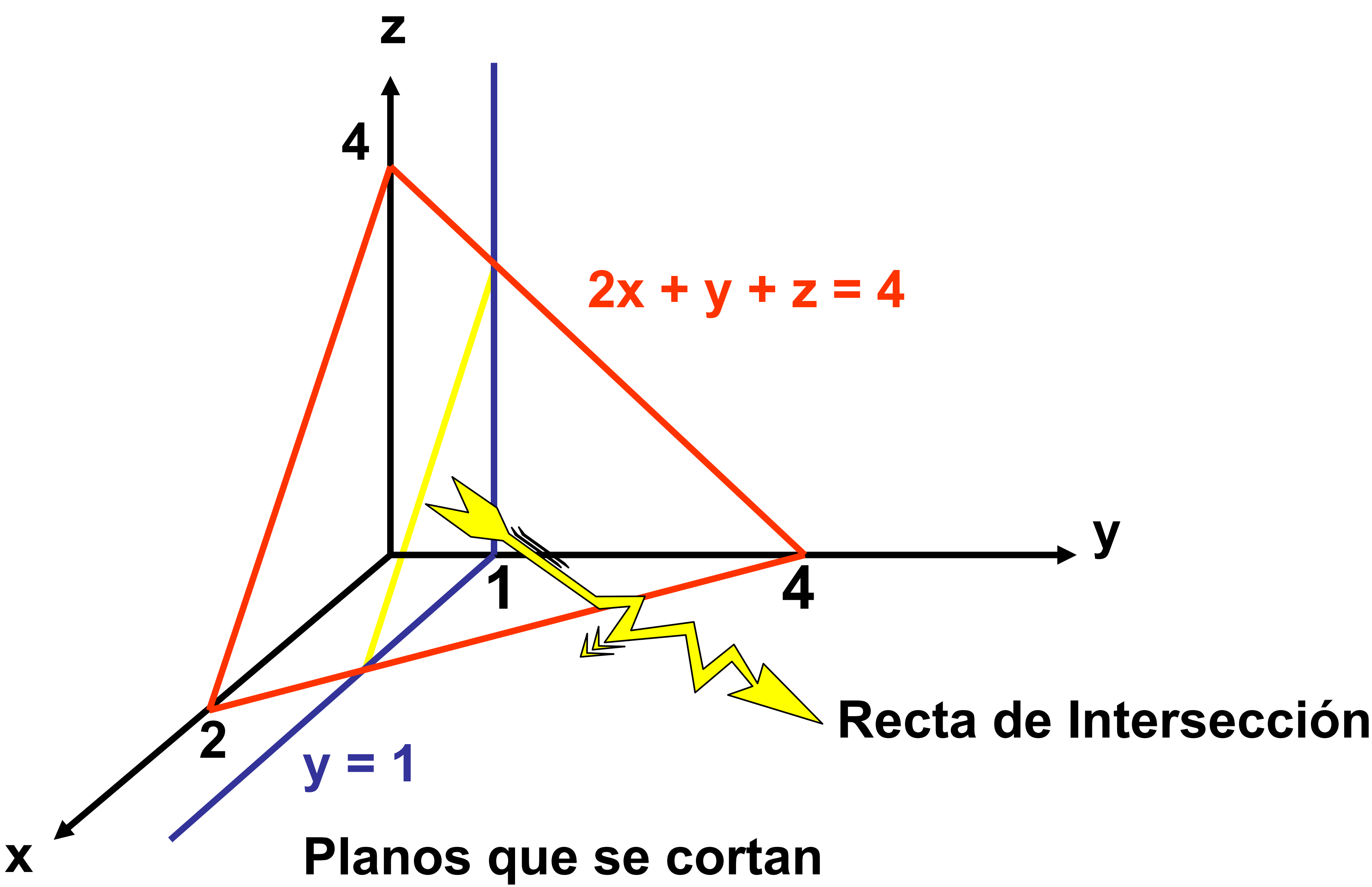
$$\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

Rectas coincidentes

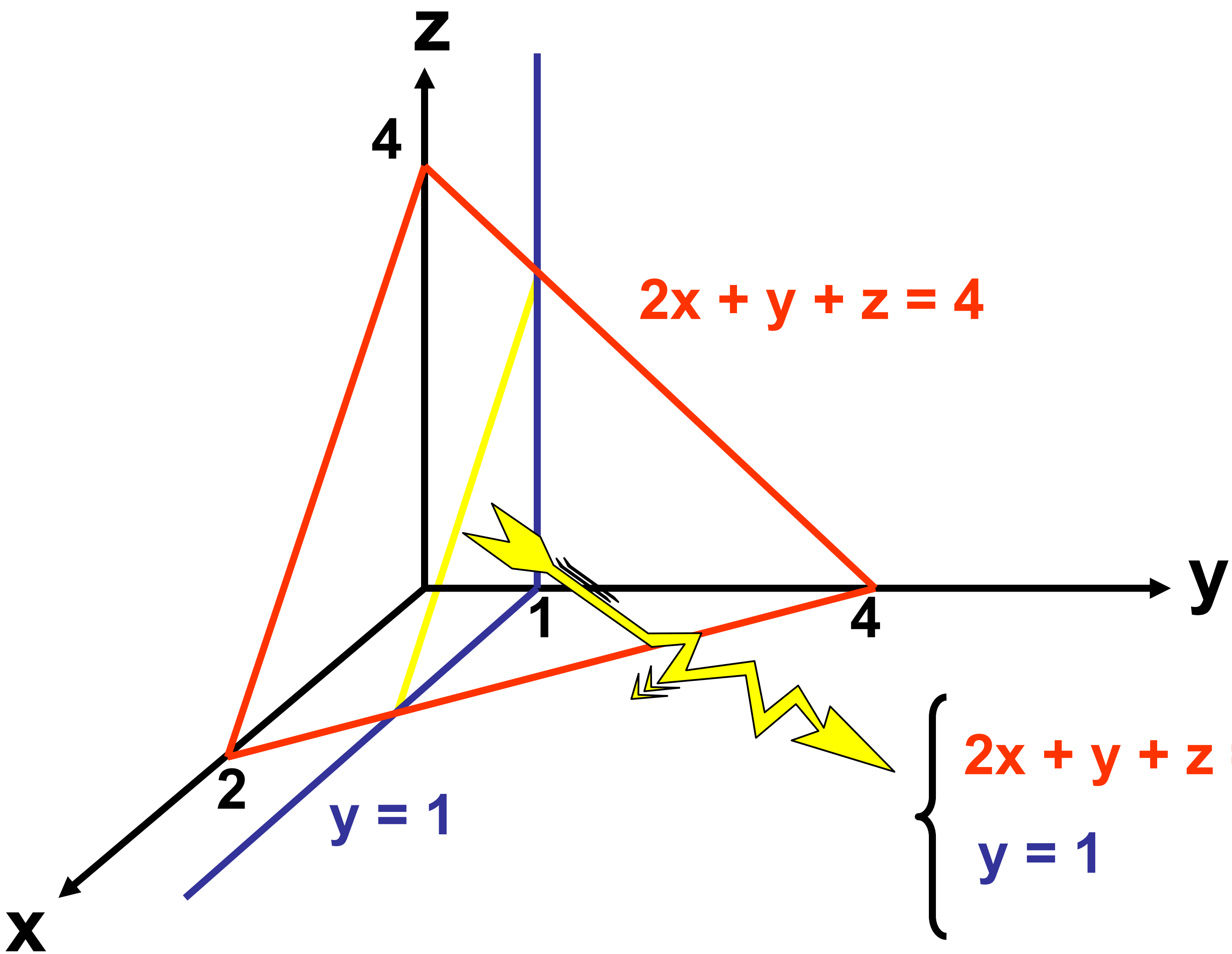


Infinitas soluciones

Interpretación Geométrica de la solución de un Sistema de dos Ecuaciones Lineales con tres incógnitas.

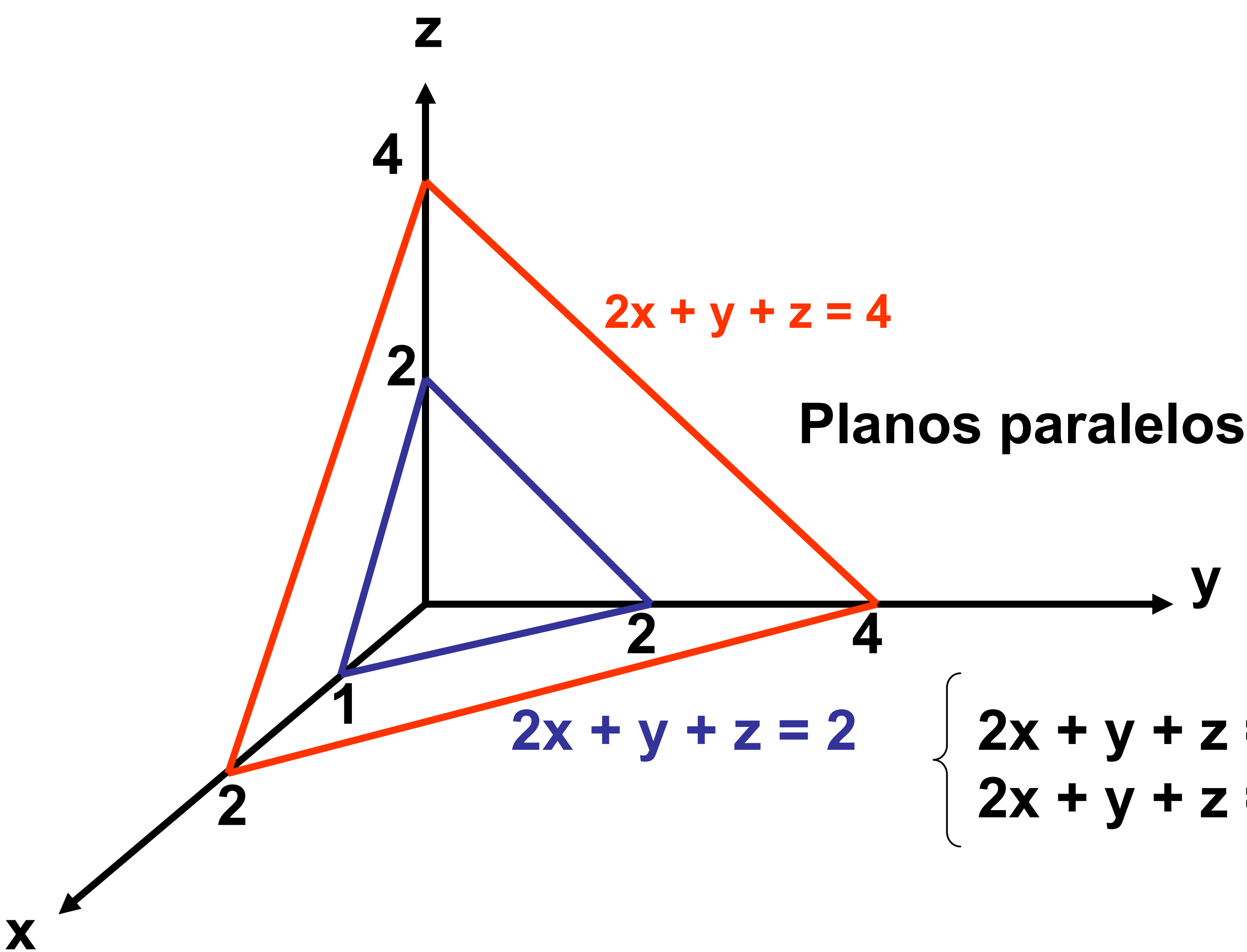


Interpretación Geométrica de la solución de un Sistema de dos Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.



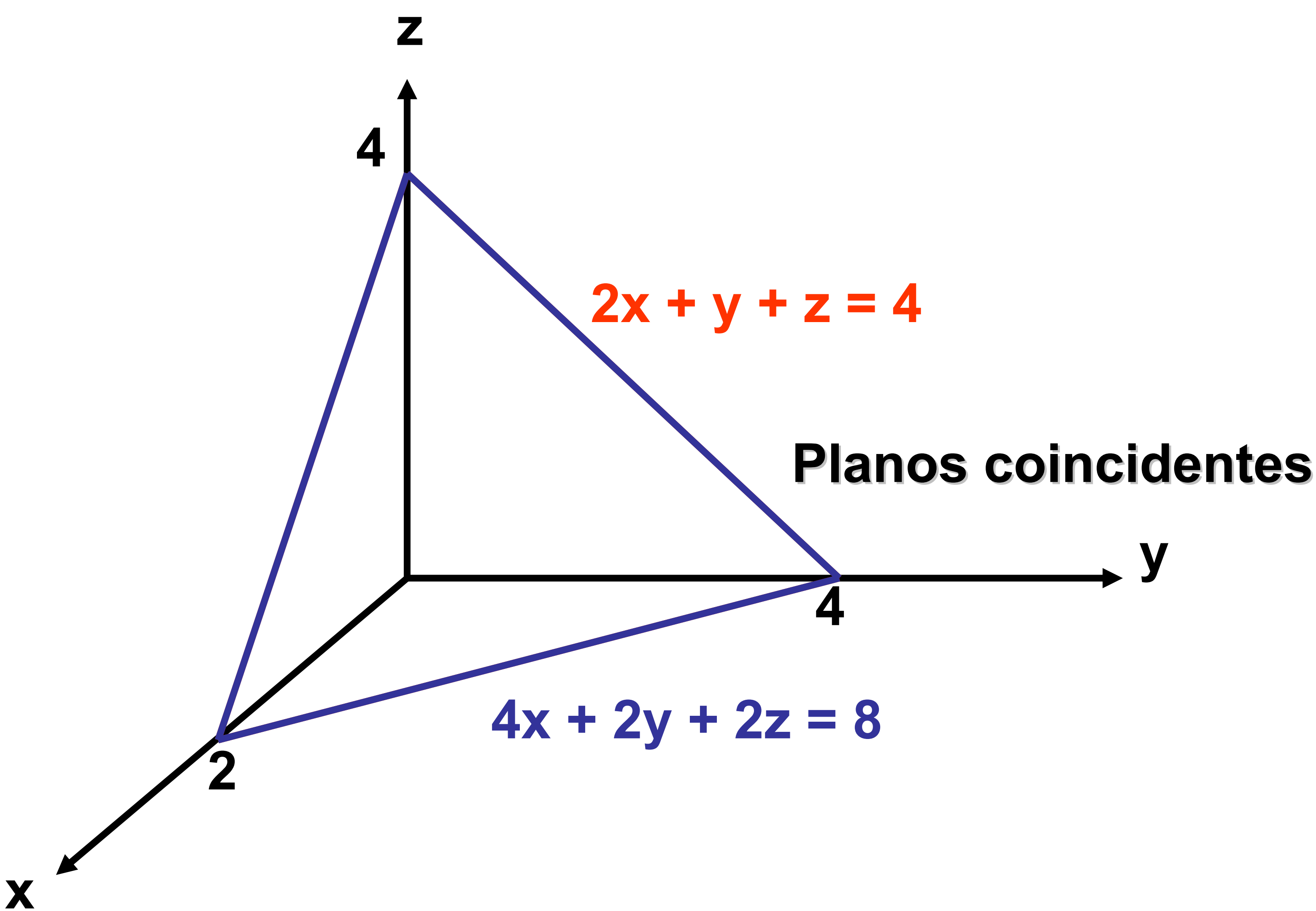
$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Interpretación Geométrica de la solución de un Sistema de dos Ecuaciones Lineales con tres incógnitas.



$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

Interpretación Geométrica de la solución de un Sistema de dos Ecuaciones Lineales con tres incógnitas.



Nociones sobre espacios vectoriales

Vectores.

Espacios vectoriales (E .V.)

Vectores

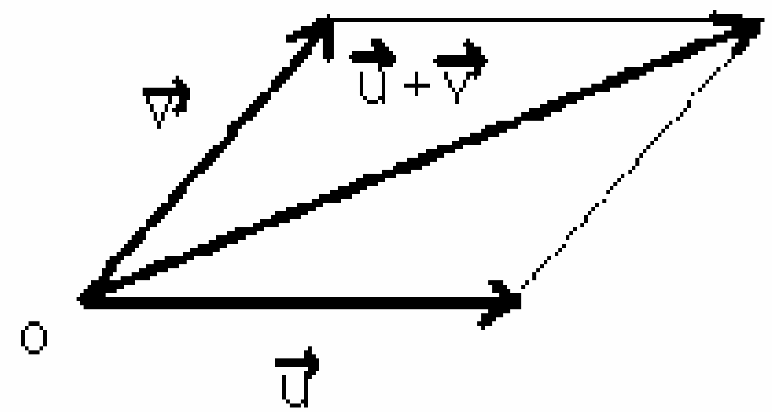
- Concepto de vector
- Operaciones con vectores
- Propiedades de las operaciones con vectores
- Interpretación geométrica en dos variables
- Módulo de un vector. Producto escalar

VECTORES

Un vector es un segmento dirigido desde el punto A (punto origen o punto inicial) hasta el punto B (punto extremo o punto final); y se representa por medio de una flecha que tiene longitud, dirección y sentido.

OPERACIONES CON VECTORES

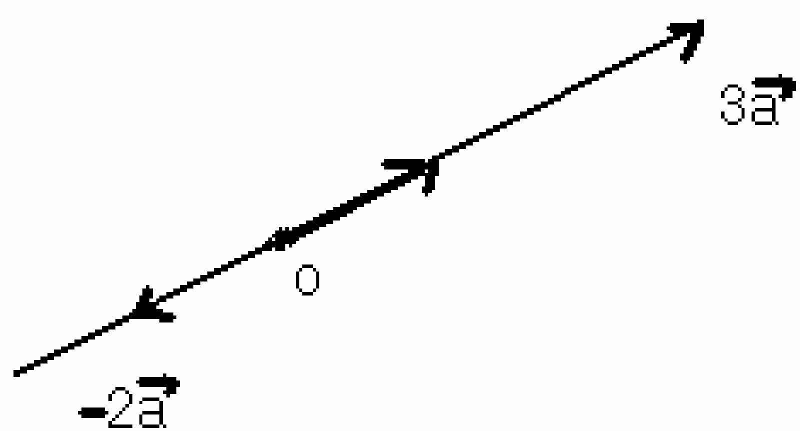
Adición: La resultante $\vec{u}+\vec{v}$ de dos vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ se obtiene por la llamada Ley del paralelogramo, esto es ($\vec{u}+\vec{v}$) es la diagonal del paralelogramo:



OPERACIONES CON VECTORES

Multiplicación por un escalar:

El producto $k\vec{a}$ de un número real *k* por un vector $\vec{a}$ se obtiene multiplicando la magnitud de $\vec{a}$ por *k* y conservando la misma dirección si *k ≥ 0 ó* la dirección puesta si *k* < 0.



PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON VECTORES

Adición de vectores: Cualesquiera que sean los vectores $\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{z}$ y $\vec{v}_1$ se cumplen:

1- $\vec{u} + \vec{v}$ **=** $\vec{v} + \vec{u}$ **2-** $\left(\vec{v} + \vec{u}\right) + \vec{z}$ **=** $\vec{v} + \left(\vec{u} + \vec{z}\right)$

3- $\vec{v} + \vec{0}$ **=** $\vec{v}$

4- Para todo $\vec{v}$ existe un $\vec{v}_1$ tal que $\vec{v} + \vec{v}_1$ =$\vec{0}$ ($\vec{v}_1$= - $\vec{v}$,se llama opuesto de $\vec{v}$)

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON VECTORES

Multiplicación de un vector por un escalar:

Cualesquiera que sean los vectores $\vec{v}$, $\vec{u}$ y λ, μ, números reales se cumple que:

1- $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$

2- $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$

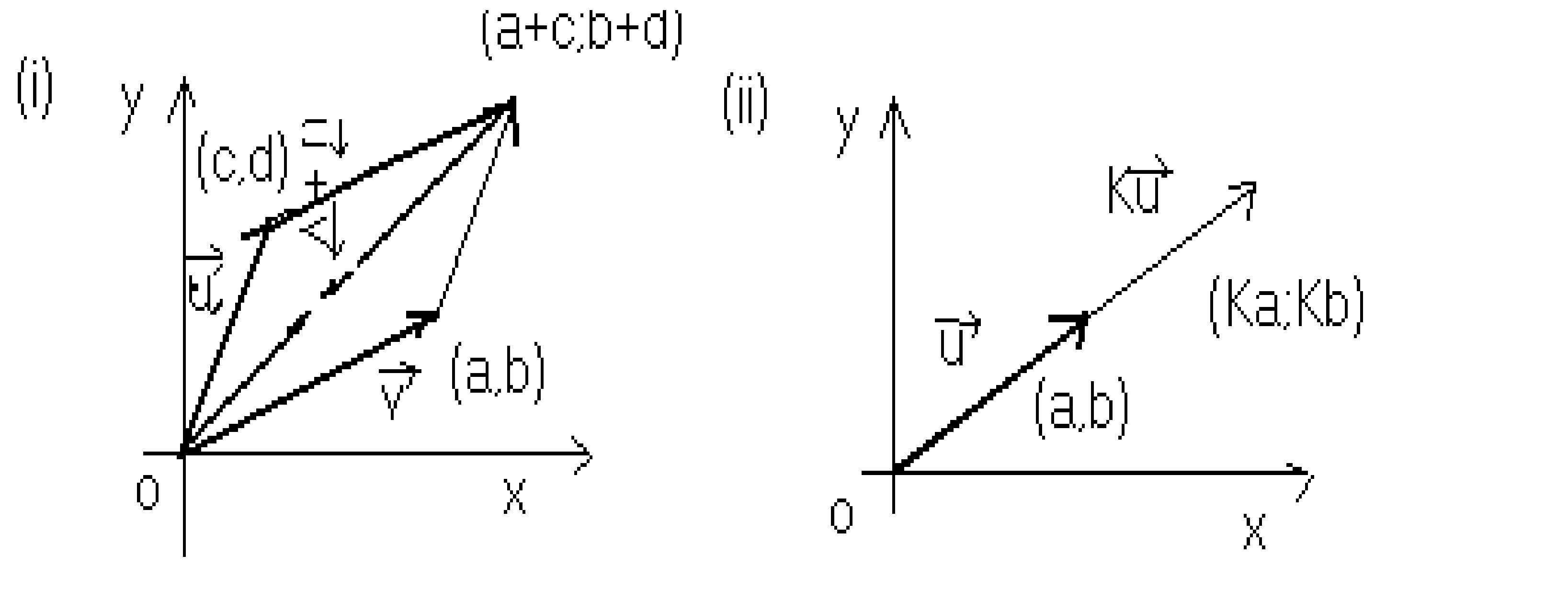
3- $\lambda(\vec{v}+\vec{u}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{u}$

4- $1\vec{v} = \vec{v}$

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON VECTORES

Interpretación geométrica en dos variables:

Si en un sistema de coordenadas cartesiano, hacemos coincidir el origen de coordenadas con el punto de referencia O de las figuras anteriores, la relación entre las operaciones definidas y los puntos finales queda:



Matemáticamente, identificamos un vector con su punto final, es decir, el par ordenado (a,b) a, b números reales es un vector. Sin embargo, conocemos vectores de más de dos componentes.

Generalizando esta noción, llamamos vector a una

n-upla ordenada de números reales $(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$ y mediante una nueva generalización podemos considerar que las coordenadas de las n-uplas sean otros objetos matemáticos.

El conjunto de todas las n-uplas $(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$ de números reales denotada por R^n, se llama un <u>n espacio</u> .

Los a_i , i = 1,2,...,n se llaman componentes o coordenadas.

Espacios vectoriales (E .V.)

- Generalización del concepto de vector como todo elemento de un espacio vectorial
- El espacio vectorial $\Re^n$
- Producto escalar en $\Re^n$. Espacios vectoriales euclídeos.
- Norma de un vector de $\Re^n$. Espacios vectoriales normados.
- Producto vectorial de dos vectores de $\Re^3$.
- Sistemas de vectores de $\Re^n$ l. i. y l. d.

Espacios vectoriales (E .V.)

Aquí se generaliza el concepto de vector como todo elemento de un espacio vectorial.

Hemos estudiado otros con juntos de objetos matemáticos en los que están definidas las operaciones anteriores y que tienen propiedades análogas a las que enunciamos anteriormente.

Veamos a continuación algunos ejemplos:

- **El conjunto de matrices de un mismo orden, con las operaciones usuales de adición de matrices y multiplicación de un número real por una matriz.**

- **El conjunto de vectores del plano con origen O, con las operaciones usuales de adición de vectores y multiplicación de un número real por un vector.**

- **El conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales con las operaciones usuales de adición de polinomios y multiplicación de un número real por un polinomio.**

- **El conjunto de funciones en una variable real, con las operaciones usuales de adición de funciones y multiplicación de un número real por una función.**

- **El conjunto de funciones en una variable real, con las operaciones usuales de adición de funciones y multiplicación de un número real por una función.**

El espacio vectorial $\Re^n$.

Cada uno de los números reales que forman una eneada, se denomina componente de la eneada.

Sean $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ **e** $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ **de** $\Re^n$

1- $\vec{x} = \vec{y}$ **si y sólo si** $x_1 = y_1$; $x_2 = y_2$; $x_3 = y_3$; .... ; $x_n = yn$

2- $\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$

$= (x_1 + y_1 ; x_2 + y_2 ; x_3 + y_3 ; x_n + y_n)$

3- $\lambda \vec{x} = \lambda (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots, \lambda x_n)$

<u>El conjunto $\Re^n$ con las operaciones definidas es un espacio vectorial real.</u>

Algunos elementos del Espacio Vectorial $\Re^n$.

• El vector nulo de $\Re^n$ es la eneada (0, 0, 0, ..., 0).

• El opuesto de cualquier vector (x_1 , x_2 , x_3, ..., x_n) de $\Re^n$ es el vector ($-x_1$, $-x_2$, $-x_3$, ..., $-x_n$)

• Los vectores de la forma

(1, 0, ..., 0); (0, 1, 0, ..., 0); (0, 0, 1, ..., 0);… ; (0, 0, ..., 1)

se denominan vectores canónicos de $\Re^n$ y se denotan

$\vec{e}_1$; $\vec{e}_2$; $\vec{e}_3$;.... ; $\vec{e}_n$.

• Ejemplo: $\Re^2$ $\vec{e}_1 = (1, 0)$; $\vec{e}_2 = (0, 1)$

$\Re^3$ $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$; $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$; $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$, etc.

• Otros vectores de $\Re^n$ son $\vec{u} = (3 ,0 , 4)$ de $\Re^3$,

$\vec{x} =(-1, 4, 2, 1, 0)$ de $\Re^5$, etc.

Algunos elementos del Espacio Vectorial $\Re^n$.

•Los conjuntos solución de los sistemas de ecuaciones lineales (S.E.L) son subconjuntos del espacio vectorial real $\Re^n$.

•Si el S.E.L es homogéneo el conjunto solución también es un espacio vectorial real.

•Si el S.E.L es no homogéneo el conjunto solución no es un espacio vectorial real. En efecto, el conjunto solución de los S.E.L. incompatibles es el conjunto vacío, la suma de soluciones no es solución de un SEL no homogéneos, y además, la solución trivial, no es solución de dicho sistema.

Producto escalar en los espacios vectoriales $\Re^n$

El producto escalar $\vec{x} \cdot \vec{y}$ de dos vectores

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$ de $\Re^n$

es por definición:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + ... + x_n y_n$$

Ejemplo: El producto escalar de los vectores

$\vec{x} = (-1, 4, 2, 1, 0)$ e $\vec{y} = (4, 1, 0, -1, 5)$ de $\Re^5$ es

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (-1)(4) + (4)(1) + (2)(0) + (1)(-1) + (0)(5) = -1$$

Definición de espacio vectorial euclídeo

Un espacio vectorial euclídeo, es un espacio vectorial, en el que se haya definido un producto escalar.

Norma de un vector de $\Re^n$

A partir de la definición de producto escalar en $\Re^n$, es posible definir una norma en $\Re^n$ de la siguiente manera :

$$\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

Ejemplo:

La norma del vector $\vec{x}$ =(3,0, 4) de $\Re^3$ es $\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}$

= $\sqrt{25} = 5$

Los vectores cuya norma es uno ($\|x\| = 1$) se denominan vectores unitarios. Ejemplo: Los vectores canónicos de $\Re^n$ son vectores unitarios.

Definición de espacio vectorial normado

Un espacio vectorial normado, es un espacio vectorial, en el que se haya definido una norma.

Note que en un espacio vectorial euclídeo siempre es posible definir una norma mediante la relación

$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$**, de donde se deduce que todo espacio vectorial euclídeo es un espacio vectorial normado.**

Producto vectorial de dos vectores de $\Re^3$

En muchas ocasiones dados dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de R^3, es necesario encontrar un tercer vector que sea ortogonal simultáneamente a $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Para ello se define un producto de vectores en R^3 conocido con el nombre de producto vectorial.

Definición de producto vectorial.

Si $\boxed{\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}}$ y $\boxed{\vec{y} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}}$ son dos vectores de R^3, llamaremos producto vectorial de $\vec{x}$ con $\vec{y}$ al vector $\vec{x}$ x $\vec{y}$ definido por:

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$$

ó $$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

Sistemas de vectores L.I. y L.D.

- Combinación lineal de un sistema de vectores
- Dependencia e independencia lineal de un sistema finito de vectores.
- Número máximo de vectores l.i. en un sistema de vectores.
- Dimensión de un espacio vectorial.

Sistema de vectores

Un sistema de vectores es todo conjunto ordenado de vectores. Esto significa que, por ejemplo, no son iguales los sistemas de vectores $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$; $\{\vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_1\}$ y $\{\vec{e}_3; \vec{e}_2; \vec{e}_1\}$.

Combinación lineal de un sistema de vectores.

Se denomina combinación lineal de un sistema $\{\vec{X}_1; \vec{X}_2; \vec{X}_3; \ldots; \vec{X}_n\}$ de n vectores de un espacio vectorial E con λ_1, λ_2, ... λ_n escalares a la expresión $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$.

Expresión de un vector cualquiera como combinación lineal de los vectores de un sistema.

Ejemplo 1

Expresar el vector $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n)$ **de** $\Re^n$ **como combinación lineal del sistema** $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \ldots; \vec{e}_n\}$ **de vectores canónicos de** $\Re^n$

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 + \ldots\ldots + \lambda_n \vec{e}_n$$

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 + \ldots\ldots + \lambda_n \vec{e}_n$$

$$(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n) = \lambda_1(1, 0, \ldots, 0) + \lambda_2 (0, 1, 0, \ldots, 0) +$$

$$\lambda_3 (0, 0, 1, \ldots, 0) + \ldots\ldots + \lambda_n (0, 0, \ldots, 1)$$

$$= (\lambda_1, 0, \ldots, 0) + (0, \lambda_2, 0, \ldots, 0) + (0, 0, \lambda_3, \ldots, 0) + \ldots\ldots + (0, 0, \ldots, \lambda_n)$$

$$= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n)$$

De donde

$$x_1 = \lambda_1; \; x_2 = \lambda_2; \; x_3 = \lambda_3; \; \ldots\ldots\ldots; \; x_n = \lambda_n$$

Luego

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + \ldots + x_n\vec{e}_n$$

Asi que, siempre es posible expresar un vector cualquiera como combinación lineal de los vectores del sistema del sistema $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \ldots; \vec{e}_n\}$ de vectores canónicos de $\Re^n$ y que los coeficientes de la combinación lineal son precisamente, las componentes del vector $\vec{x}$.

Ejemplo 2

Expresar el vector $\vec{x}$ = (0, 2, -1) como combinación lineal del sistema de vectores

A={ (1, 3, 0); (2, 4, 1)} $\subset \Re^3$.

Si es posible hallar los coeficientes de λ_1, λ_2 se podrá escribir la combinación lineal de los vectores de A:

$$\vec{x} = (0,2,-1) = \lambda_1(1,3,0) + \lambda_2(2,4,1)$$

$$(0,2,-1) = (1\lambda_1, 3\lambda_1, 0) + (2\lambda_2, 4\lambda_2, 1\lambda_2)$$

Pero la igualdad anterior significa que:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$

$$3\lambda_1 + 4\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_2 = -1$$

a) $\vec{x}$ **= (0, 2, 1)** $\vec{b}$ **= (1,4,1) ; (-3,2,1)}** $\subset \Re 3$

Resp: NO

DEPENDENCIA LINEAL DE UN SISTEMA FINITO DE VECTORES

Dado un espacio vectorial real E, un sistema A = $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ de k vectores de E es linealmente dependiente, si al menos un vector a_i de A se puede expresar como combinación lineal de los restantes vectores de A.

Sea E un espacio vectorial y A = $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ un sistema de vectores de E. Entonces A es linealmente dependiente, si y solo si, existe una relación de dependencia no trivial entre los vectores de A.

Para determinar si el sistema de vectores B = {(1,3,1), (0,2,1), (1,1,0)} $\subset \Re^3$ es linealmente independiente o linealmente dependiente, planteamos la relación de dependencia lineal:

$$\lambda_1(1,3,1)+\lambda_2(0,2,1)+\lambda_3(1,1,0)=(0,0,0)$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$(\lambda_1+\lambda_3+3\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2)=(0,0,0)$$

de donde:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \quad\quad + \lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 \quad\quad &= 0 \end{aligned}$$

Resolvamos este sistema de ecuaciones lineales homogéneo; para ello transformaremos en escalón, la matriz *M* del mismo:

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como r(M) = 2 y n = 3 (r(M) < n) este sistema de ecuaciones es indeterminado

El sistema de ecuaciones equivalentes es:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \qquad\qquad + \lambda_3 &= 0 \\ -2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ -2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

y su solución:

$$\lambda_1 = -\lambda_3, \lambda_2 = \lambda_3$$

Lo anterior permite afirmar que además de la relación trivial, existe una relación no trivial entre los vectores del sistema dado y por tanto es L.D.

Una relación de dependencia lineal entre los vectores del sistema anterior es

$$(1, 3, 1) - (0, 2, 1) - (1, 1, 0) = (0, 0, 0) .$$

En resumen,

la relación de dependencia lineal, conduce a un sistema de ecuaciones lineales homogéneos, por lo tanto:

si $r(A) = k = n$ (número de incógnitas) el sistema de vectores dado es L.I.

si $r(A) < n$ el sistema de vectores dado es L.D.

Número máximo de vectores l.i. en un sistema de vectores.

Para determinar si un sistema de vectores de $\Re^n$ es linealmente independiente o linealmente dependiente, basta con calcular el rango r(A) de la matriz del sistema que se obtiene al plantear la relación de dependencia lineal y compararlo con el número de incógnitas del sistema de ecuaciones. Pero al calcular el r(A), como sabemos, estamos hallando el número máximo de vectores l.i. de la matriz A, y como dichas columnas están formadas por las componentes de los vectores del sistema de vectores dado, al calcular r(A) estamos hallando el número máximo de vectores l.i. del sistema de vectores dado.

Ejemplo:

Determinar el número máximo de vectores l.i del sistema de vectores

D={***(1,0, 2, 1) ; (1, 1, 0, -1) ; (2, 1, 2, 0) ; (2 ,0, 4, 2) }*** **de $\Re^4$. Consideremos la matriz A cuyas columnas están formadas** por las componentes de los vectores del sistema de vectores dado.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como r(A) = 2,

el número máximo de vectores l.i. del sistema de vectores D es 2.

Dimensión de un espacio vectorial.

La dimensión de un espacio vectorial E, es igual al número máximo de vectores linealmente independientes de E.

El número máximo de vectores linealmente independientes de $\Re^n$ es n.