TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN EL PLANO

Llamaremos transformación geométrica a una operación u operaciones geométricas que permiten deducir una nueva figura de la primitivamente dada. El transformado se llama Homólogo del original.

Tenemos un primera clasificación inicial de las transformaciones:
- Directa, cuando conservan el sentido en el plano orientado,
- Inversa, cuando los sentidos del original y homólogo son contrarios.

Tenemos otra clasificación en función del aspecto de figura homóloga respecto a la original:
- Isométricas, cuando conservan las dimensiones y ángulos; se denominan también movimientos, y veremos las simetrías axial y central, la traslación y el giro.
- Isomórficas, cuando conservan la forma de la figura original (los ángulos). Existe proporcionalidad entre las dimensiones de la figura original y homóloga; veremos la homotecia.
- Anamórficas, cuando cambia la forma de la figura original; veremos la inversión.

Los Elementos Característicos son los que definen las correspondencias entre las figuras original y homóloga en una transformación.

Denominaremos Elementos Dobles a los homólogos de sí mismos en una transformación.

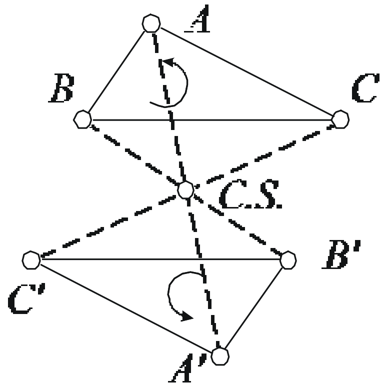
Llamaremos producto de transformaciones a la que se obtiene por la aplicación sucesiva de dos o más transformaciones parciales en un determinado orden.

Las transformaciones son herramientas que se utilizan para resolver ejercicios que originalmente por su disposición eran de resolución complicada.

1.- TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS ---> MOVIMIENTOS

Estas transformaciones se suponen conocidas por los alumnos, aunque se va a hacer un repaso muy breve de sus características principales.

1.1.- Simetría Central.



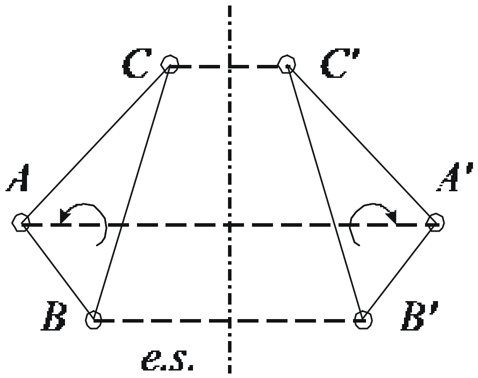
Como podemos ver en la figura, para obtener el homólogo de un punto en Simetría Central, trazaremos el segmento que une dicho punto con el Centro de Simetría (*C.S.*), y a continuación lo prolongaremos una longitud igual a la existente entre dicho punto y el *C.S.*

El elemento característico de esta transformación es el Centro de Simetría (*C.S.*).

Tiene como propiedades ser involutivo (la aplicación sucesiva de dos simetrías con el mismo centro de simetría obtiene el elemento original) y ser directo (conserva la relación de ordenación en el plano como puede verse en la figura de ejemplo)

Los elementos dobles son: el propio Centro de Simetría, las rectas que pasan por él, y las circunferencias que tienen como centro el Centro de Simetría (en este último caso es doble la entidad, pero no los puntos de la misma).

1.2.- Simetría Axial.



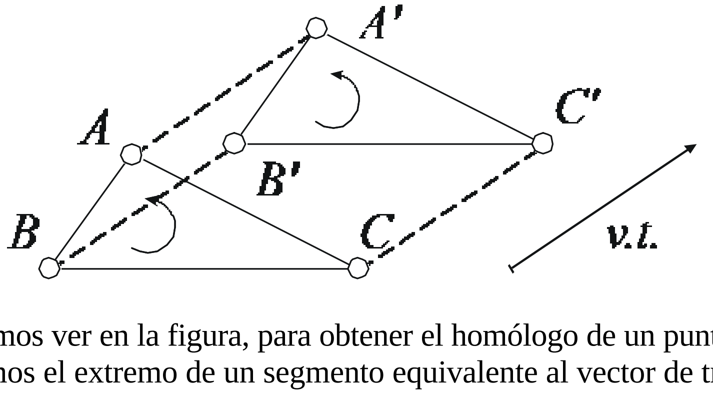
Como podemos ver en la figura, para obtener el homólogo de un punto en la Simetría Axial, se traza una perpendicular desde dicho punto al eje de simetría (*e.s.*), y a continuación se prolonga la misma distancia que existe desde dicho punto al eje.

El elemento característico de esta transformación es el eje de simetría.

Tiene com propiedades ser involutivo, y es inverso (no conserva la relación de ordenación del plano, como puede verse en la figura de ejemplo).

Los elementos dobles son: el propio eje de simetría, las rectas perpendiculares al eje, y las circunferencias cuyo centro están situadas en el eje de simetría (en estos dos últimos casos es doble la entidad, pero no los puntos de que está compuesta).

1.3.- Traslación.



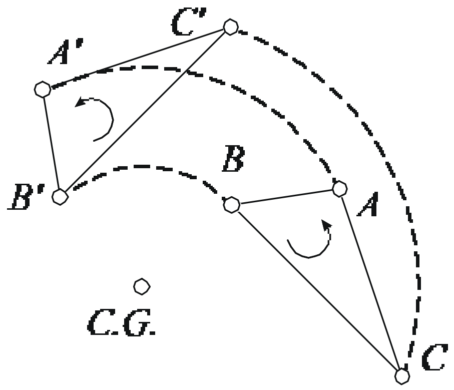
Como podemos ver en la figura, para obtener el homólogo de un punto en la Traslación, situaremos el extremo de un segmento equivalente al vector de traslación (*v.t.*) sobre el punto, y el homólogo estará situado en el otro extremo.

Su elemento característico es un vector que nos define una dirección, un módulo y un sentido.

Es una transformación directa (como puede verse en la figura de ejemplo) pero no involutiva. Si existe por el contrario la traslación recíproca definida por el vector opuesto.

Sólo podemos considerar como elementos dobles las rectas cuya dirección sea la de traslación, teniendo en cuenta que no son dobles los puntos de que están compuestas.

1.4.- Giro.



Como podemos ver en la figura, para obtener el homólogo de un punto en el Giro, trazaremos por el punto un arco con centro en el Centro de Giro (*C.G.*) que abarque el ángulo de giro indicado.

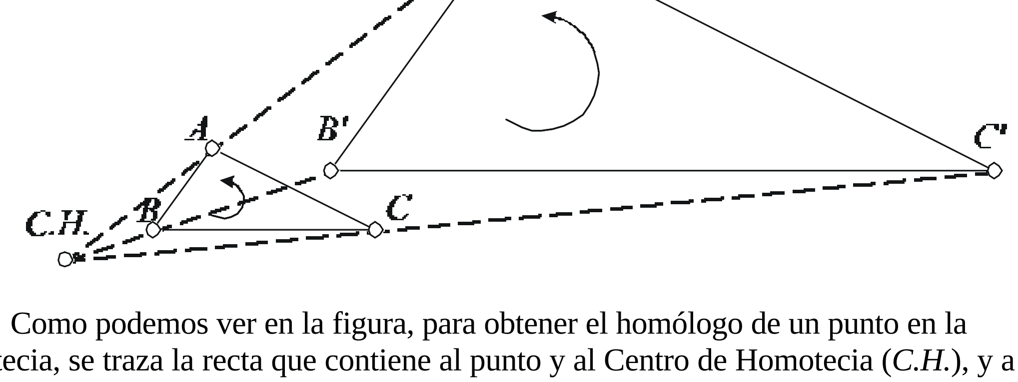
Sus elementos característicos son el Centro de Giro y el Ángulo de Giro. Se considera positivo el sentido contrario a las agujas del reloj.

Es una transformación directa (como puede verse en la figura de ejemplo)

.

Los elementos dobles serían el Centro de Giro y las circunferencias cuyo centro es el Centro de Giro (en este último caso es doble la entidad, aunque no los puntos de que está compuesta).

2.- TRANSFORMACIONES ISOMÓRFICAS ---> HOMOTECIA



Como podemos ver en la figura, para obtener el homólogo de un punto en la Homotecia, se traza la recta que contiene al punto y al Centro de Homotecia (*C.H.*), y a continuación se lleva sobre dicha recta, y a partir del Centro de Homotecia, la distancia correspondiente de multiplicar la Razón de Homotecia por la longitud que hay entre el Centro de Homotecia y el punto original.

A la vista del ejemplo anterior, podemos comprobar que los elementos característicos de la Homotecia serán su Centro de Homotecia y la Razón de Homotecia, que cumplirá:

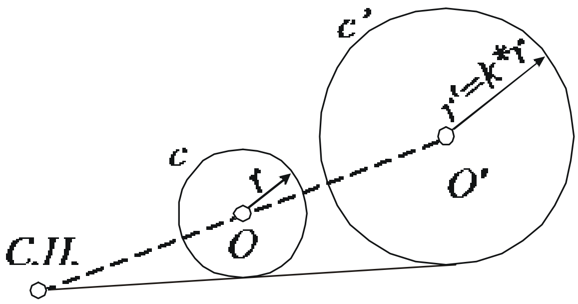
$$k = \frac{CH\,A'}{CH\,A}$$

Para aquellos valores de $k>0$, los elementos homotéticos estarán a un mismo lado del Centro de Homotecia, mientras que para valores inferiores a 0 estarán a distinto lado. Si $*k*>1$ la figura homóloga será mayor, mientras que si es inferior a 1 será de menor tamaño.

Como vimos en la definición de Transformación Isomórfica, se conservan los ángulos, y las distancias serán proporcionales a k. Es una transformación directa.

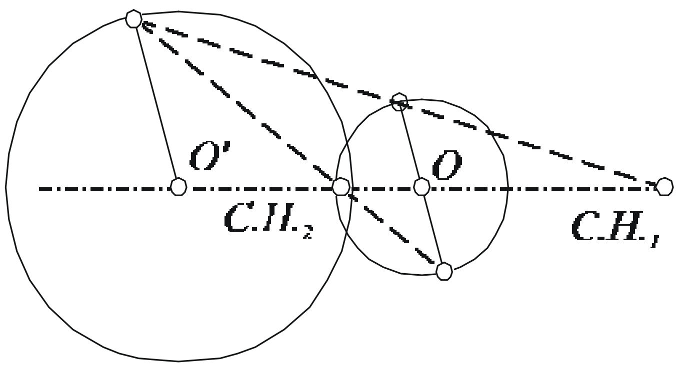
Los elementos dobles serán el Centro de Homotecia y las rectas que pasen por él, teniendo en cuenta en este último caso que no son dobles los puntos de dichas rectas.

2.1.- Homotecia entre circunferencias.



Para hallar la circunferencia homotética a una dada, determinaremos el homólogo del centro de la circunferencia, y con centro en él trazaremos una circunferencia de radio $k \times r$. Las tangentes trazadas desde el Centro de Homotecia son comunes a ambas circunferencias.

De igual forma, dadas dos circunferencias siempre podemos establecer dos homotecias en las que una sea homóloga de la otra. Una de las homotecias tendrá valor positivo, y la otra valor negativo.



Para determinar los Centros de Homotecia hay que seguir los siguientes pasos:

- en primer lugar, como los centros de las circunferencias deben ser homólogos entre sí, los Centros de Homotecia estarán en la recta que une los centros (que por cierto será una recta doble);

- por otro lado, como en la homotecia se conservan los ángulos, si por el centro de cada circunferencia trazamos segmentos que formen el mismo ángulo con la recta que une los centros éstos deberán ser homotéticos, y por tanto lo serán también los puntos de corte con las circunferencias;
- por último, si unimos estos centros y los prolongamos hasta que corten a la recta que unía los centros encontraremos los Centros de Homotecia.

La Razón de Homotecia será la relación existente entre los radios de las circunferencias.

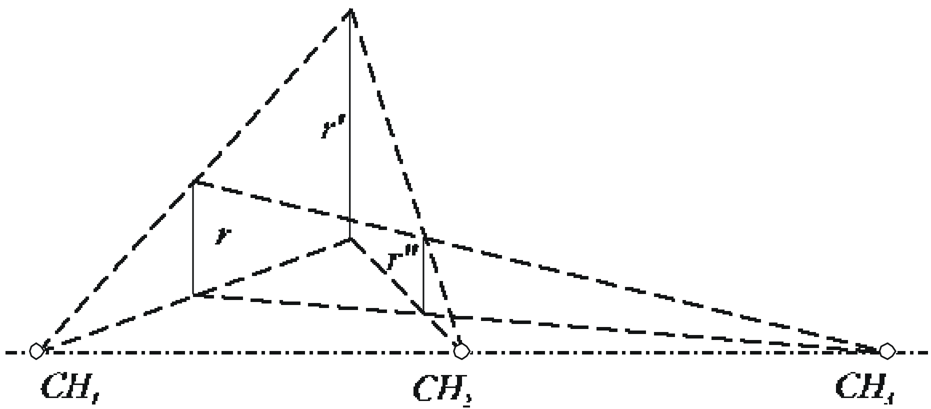
A la vista de lo anterior se cumplirá:

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{CH_1O'}{CH_1O} \\ -k &= \frac{CH_2O'}{CH_2O} \end{aligned}\right\} \quad \therefore \quad \frac{CH_1O'}{CH_1O} \div \frac{CH_2O'}{CH_2O} = -1 = (CH_1CH_2O'O)$$

es decir, que los Centros de Homotecia con los centros de las circunferencias homotéticas determinan una cuaterna armónica.

2.2.- Producto de Homotecias.

El producto de dos Homotecias, una de Centro de Homotecia CH_1 y Razón k_1 y otra de Centro CH_2 y Razón k_2, es otra Homotecia de Centro CH_3 alineado con los otros dos y Razón $k_3=k_1\times k_2$.



En efecto, tal y como puede verse en la figura, la recta que une los Centros de Homotecia *1* y *2* es doble tanto en la primera como en la segunda Homotecia, y por lo tanto tiene que permanecer siéndolo en la Homotecia resultante de ambas, por lo que el Centro de la Homotecia resultante estará situado en ella.

En cuanto a lo referente a las razones, se cumplirá que:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{\bar{r}'}{\bar{r}} \\ k_2 &= \frac{\bar{r}''}{\bar{r}'} \end{aligned}\right\} \quad \therefore \quad k_3 = \frac{\bar{r}''}{r} = \frac{\bar{r}''}{\bar{r}'} \times \frac{\bar{r}'}{r} = k_1 \times k_2$$

como ya habíamos indicado.

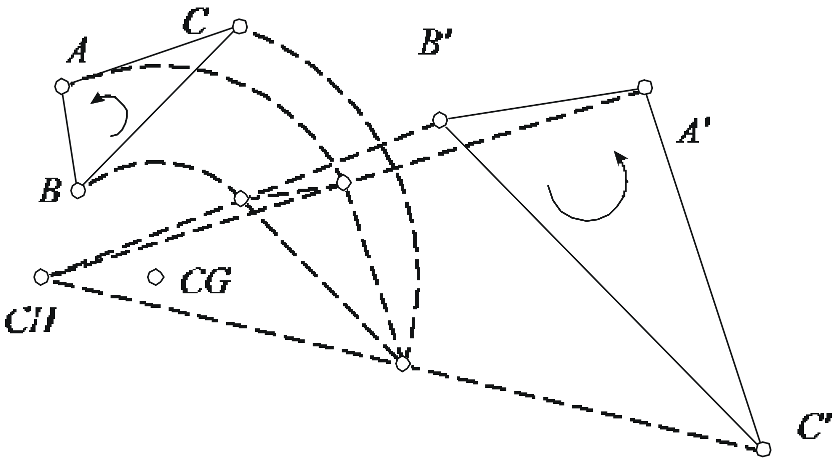
2.3.- Centro de Semejanza Directa.

El producto de una Homotecia por un Movimiento (Transformación Isométrica) directo (inverso) es una Semejanza directa (inversa).

Toda semejanza quedará determinada dando dos vectores homólogos y la clase de semejanza (directa o inversa).

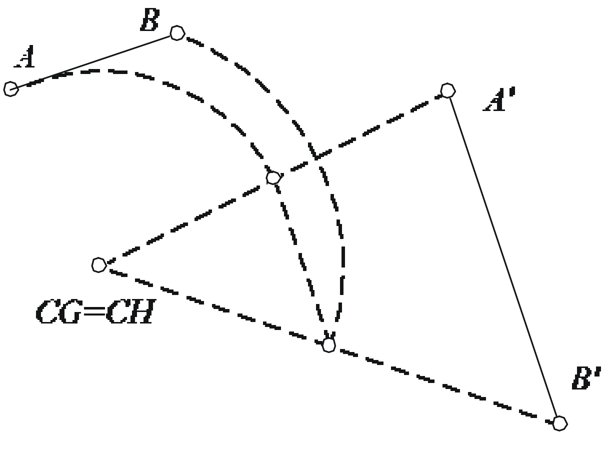
En el caso de que la Semejanza sea inversa la única posibilidad es aplicar una Homotecia y una Simetría Axial, pero en el caso de que sea directa existen dos posibilidades:

- que los vectores homólogos sean paralelos, en cuyo caso podemos reducirlo a una solo Transformación Geométrica, a una Homotecia, cuyo centro estará situado donde concurran las rectas de parejas de puntos homólogos;



- que los vectores homólogos no sean paralelos, caso en el que son necesarias dos transformaciones, un Giro (hasta poner los vectores paralelos) y una Homotecia (la figura del ejemplo se corresponde con este caso, y en ella hemos realizado primero un Giro y después una Homotecia para llegar del triángulo *ABC* al *A'B'C'*).

En este último caso se plantean dos posibilidades, elegir un Centro de Giro, y posteriormente un Centro de Homotecia, o hallar un único Centro que sirva a las dos transformaciones, y que denominaremos Centro de Semejanza Directa.

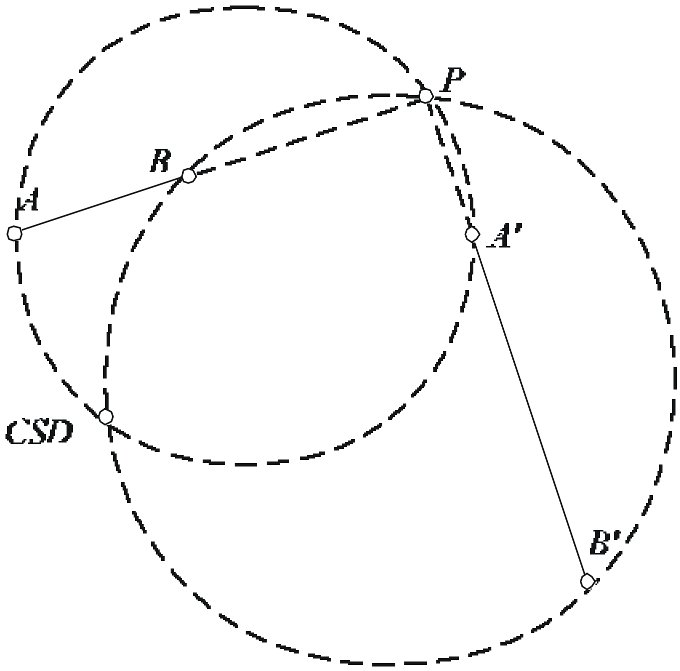


Si observamos la figura, para que el punto elegido sirva tanto de Centro de Homotecia como de Giro debe cumplir algunas condiciones:

$$O\hat{A}B = O\hat{A}'B' \qquad \& \qquad O\hat{B}A = O\hat{B}'A'$$

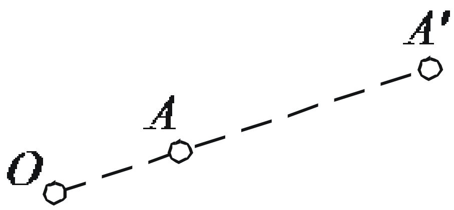
Para obtener un centro que cumpla estas condiciones la construcción que realizaremos será la siguiente:

- en primer lugar prolongaremos los lados *AB* y *A'B'* hasta que se corten en un punto *P*;
- a continuación construiremos las circunferencias que pasen por *A*, *A'* y *P*, y por *B*, *B'* y *P*;
- por último, el punto que nos va a servir como Centro de Semejanza Directa será la intersección de ambas circunferencias.



Podemos comprobar como se cumplen en la figura las propiedades antes indicadas considerando que las circunferencias son arcos capaces del segmento *CSD P*.

3.- TRANSFORMACIONES ANAMÓRFICAS ---> INVERSIÓN



Como podemos ver en la figura, para obtener el homólogo de un punto en la Inversión, se traza la recta que contiene al punto y al Centro o Polo de Inversión (*O*), y a continuación se lleva sobre dicha recta, y a partir del Polo de Inversión, la distancia correspondiente a dividir la Potencia de Inversión por la longitud que hay entre el Polo de Inversión y el punto original.

A la vista del ejemplo anterior, podemos comprobar que los elementos característicos de la Inversión serán su Polo de Inversión y la Potencia de Inversión, que cumplirá:

$$k = OA \times OA'$$

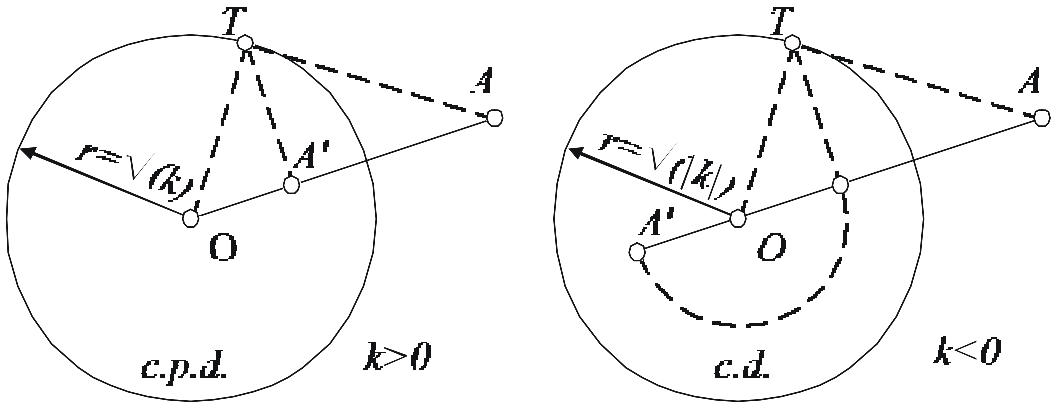
Para aquellos valores de $k>0$, los elementos homotéticos estarán a un mismo lado del Polo de Inversión, mientras que para valores inferiores a 0 estarán a distinto lado.

En la inversión se conservan los ángulos (es conforme, como comprobaremos más adelante) aunque no las formas, y es una transformación inversa. Es involutiva, es decir, que si *A'* es el inverso de *A*, para la misma inversión, *A* lo es de *A'*.

Los elementos dobles serán las rectas que pasen por el Polo de Inversión, las circunferencias cuyo centro sea el Polo de Inversión y su radio valga √|*k*|, y por último, como veremos más adelante, las circunferencias que contengan a una pareja de puntos homólogos. De todas estas figuras dobles, sólo la circunferencia que tiene centro en el Polo de Inversión, cuando $k>0$, tiene sus puntos dobles.

3.1.- Transformada de puntos.

A la hora de determinar el inverso de un punto dado necesitamos elementos suficientes que nos definan la inversión. Un elemento fundamental es siempre el Polo de Inversión, y luego pueden darnos bien la Potencia de Inversión o bien una pareja de puntos homólogos en dicha inversión.

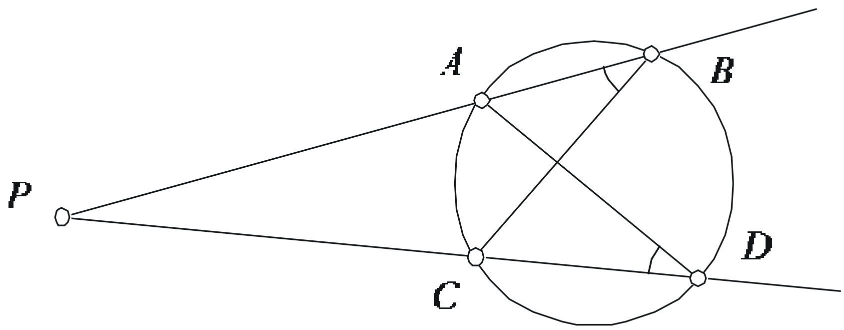


En el primer caso, tal y como podemos ver en la figura, van a ser semejantes los triángulos TOA’ y TOA; esto significa que se cumplirá:

$$\frac{OA}{OT} = \frac{OT}{OA'} \quad \Rightarrow \quad OA \times OA' = OT^2 = k$$

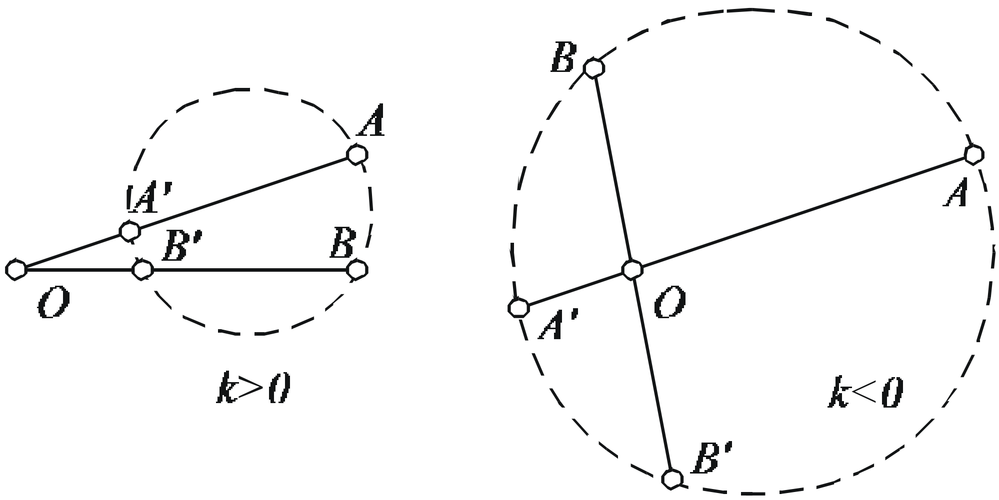
Por tanto la construcción que realizaríamos sería:

- primero determinaríamos el círculo de puntos dobles (*c.p.d.*) (o en el caso de ser $k<0$ el círculo doble) trazando una circunferencia de centro en el Polo de Inversión y radio √|*k*|;
- en segundo lugar trazaremos desde el punto *A* una tangente a dicha circunferencia, y luego desde ese punto de tangencia (*T*) una perpendicular al segmento que une *A* con el Polo de Inversión;
- en caso de ser $k>0$ el punto hallado será *A*’, si $k<0$ el punto *A*’ se hallará a igual distancia pero al otro lado de *O*.



Para resolver el segundo caso deberemos recordar lo que vimos de rectas antiparalelas y su aplicación en el caso de potencia de un punto respecto a circunferencias. Allí vimos, recordando lo que tenemos en nuestra figura, que, cuando trazábamos dos secantes a una circunferencia desde un mismo punto, el valor de la potencia no variaba. Esto significaba que:

$$PA \times PB = PC \times PD$$



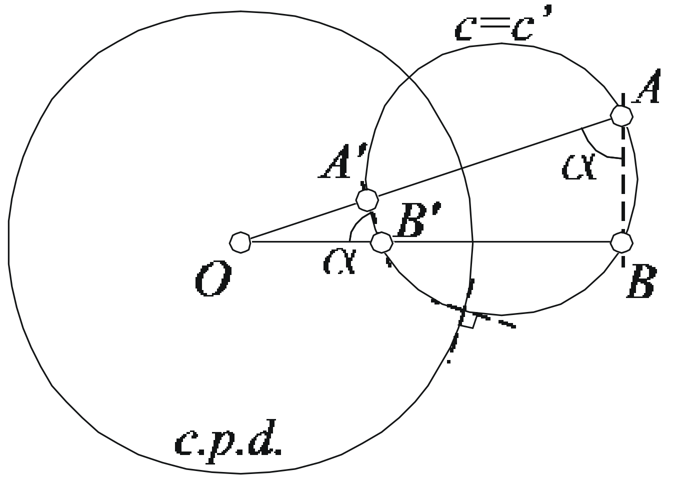
Aplicado a nuestro caso tendremos que si se cumple que:

$$OA \times OA' = OB \times OB' = k$$

significará que los puntos A, A’, B y B’ están contenidos en una circunferencia. Por lo tanto, dados una pareja de puntos homólogos en una inversión y otro punto del que queremos encontrar el inverso, nos bastará con trazar una circunferencia que contenga a los tres puntos y una recta que una el punto problema con el Polo de Inversión. Donde corte dicha recta a la circunferencia tendremos el inverso del punto dado.

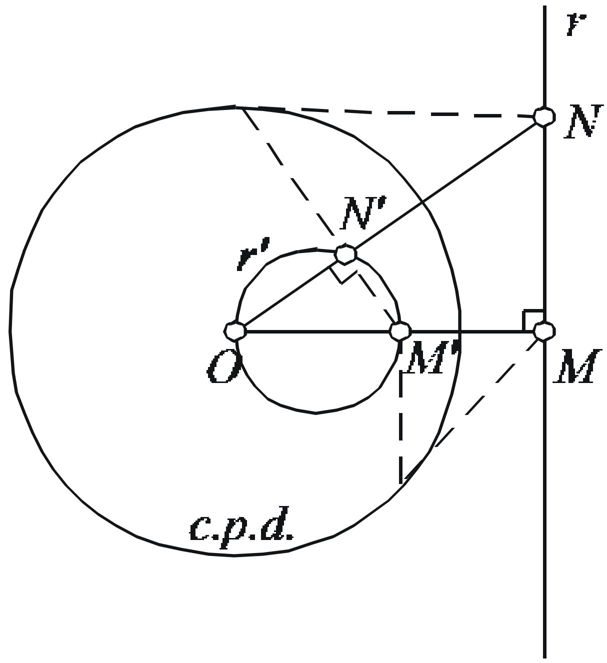
Esta forma de determinar puntos homólogos en la inversión nos lleva a dos conclusiones que son muy interesantes:

- toda circunferencia que pasa por una pareja de puntos homólogos es doble, la potencia del Polo de Inversión respecto a ella es la Potencia de Inversión, y por tanto, en el caso de *k>0*, estas circunferencias son ortogonales a la circunferencia de puntos dobles;
- las rectas que unen puntos y sus homólogos son antiparalelas respecto a las que unen cada pareja con el Polo de Inversión (siempre y cuando no sean puntos alineados).



3.2.- Transformadas de una recta.

Tendremos dos casos, que la recta pase por el Polo de Inversión o que no pase. En el primer caso la solución es inmediata, ya que hemos dicho que esas rectas eran dobles. Vamos a estudiar lo que ocurre en el segundo caso.



Tracemos desde el Polo de Inversión una perpendicular a dicha recta y hallemos el inverso del punto encontrado (*M* y *M'*). Elijamos ahora otro punto cualquiera de la recta, *N*, y determinemos su homólogo en la inversión, *N'*. Si observamos la figura, por lo dicho anteriormente las rectas que pasen por las dos parejas de puntos determinaran rectas antiparalelas, es decir, que el ángulo en *N'* ha de ser siempre de 90°. Esto significa que para cualquier punto de la recta, el homólogo debe estar contenido en el arco capaz de 90° para el segmento *OM'*; en definitiva, el homólogo de cualquier punto debe estar contenido en una circunferencia cuyo diámetro es *OM'*.

Como conclusión podemos afirmar que la figura inversa de una recta que no pase por el Polo de Inversión es una circunferencia que si pasa (el Polo de inversión sería el homólogo del punto impropio de la recta).

Hemos supuesto que la recta es exterior para que el dibujo quede más claro, pero el razonamiento es idéntico en el caso de que sea secante, con la facilidad de que la circunferencia tiene que pasar por los puntos de corte de la recta con la circunferencia de puntos dobles.

Todo este razonamiento lo hemos realizado para $k>0$. Si $k<0$, la circunferencia homóloga de dicha recta nos quedaría al otro lado del Polo de Inversión.

A la vista de lo anterior, para determinar la figura inversa de una recta que no pasa por el Polo de Inversión seguiremos los siguientes pasos:

- trazaremos una perpendicular a dicha recta desde el Polo de inversión,
- determinaremos el homólogo del pié de dicha perpendicular,
- la figura homóloga será la circunferencia de diámetro definido por el Polo de Inversión y el punto inverso determinado.

3.3.- Transformadas de una circunferencia.

Al igual que en el caso anterior aquí podemos plantearnos dos posibilidades: que la circunferencia pase por el Polo de Inversión, y que no pase por dicho Polo.

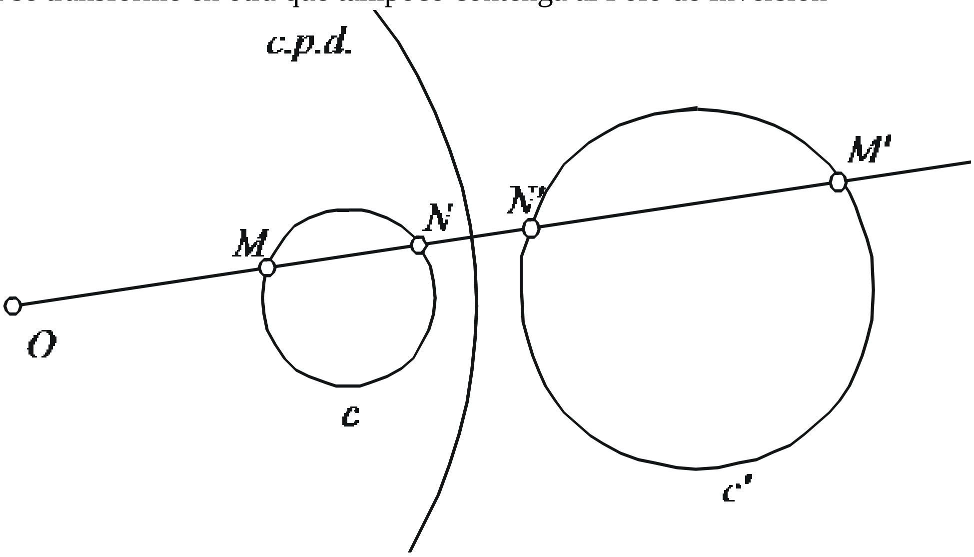
El primer caso, al ser la inversión una transformación involutiva, sabemos que la figura inversa corresponderá con una circunferencia que no contenga el Polo de Inversión. Para determinar dicha recta seguiremos los pasos siguientes:

- primero trazaremos desde el Polo de Inversión una recta que pase por el centro de la circunferencia y la prolongaremos hasta el contorno de ella, determinando así un diámetro,
- a continuación hallaremos el inverso del extremo de ese diámentro,
- por último, la recta homóloga será la perpendicular que tracemos, por el punto homólogo hallado, a la recta que une el Polo de Inversión y dicho punto.

A la vista de esto y de lo indicado en el apartado anterior podemos decir que dadas una recta y una circunferencia siempre podemos determinar una inversión que nos relacionen dichos elementos entre sí (puede plantearse un ejemplo para $k>0$ y decirles que ellos se planteen el caso en que $k<0$).

Del segundo caso hemos de comentar un caso particular, que serían aquellas circunferencias que contienen a una pareja de puntos homólogos. Como ya hemos indicado anteriormente estas circunferencias serían dobles, y por tanto no necesitamos realizar ninguna operación para determinar su figura inversa.

El caso más general sería aquel en el que una circunferencia que no pase por el Polo de Inversión se transforme en otra que tampoco contenga al Polo de Inversión



En este caso, tal y como puede verse en la figura, deberá cumplirse que:

$$OM \times OM' = ON \times ON' = k$$

si dividimos este valor entre la potencia del Polo de inversión respecto a c nos quedará:

$$\frac{OM \times OM'}{OM \times ON} = \frac{ON \times ON'}{OM \times ON} = \frac{k}{Pot_{O \to c}}$$

$$\frac{OM'}{ON} = \frac{ON'}{OM} = \frac{k}{Pot_{O \to c}}$$

Es decir, que las circunferencias que se corresponden en una inversión definida por el Polo de Inversión O y la Potencia de Inversión k, se corresponden también en una homotecia (fijarse en que los puntos M' y N' serían los homotéticos de N y M respectivamente) con Centro de Homotecia el punto O y Razón de Homotecia k/Pot_{O6c}.

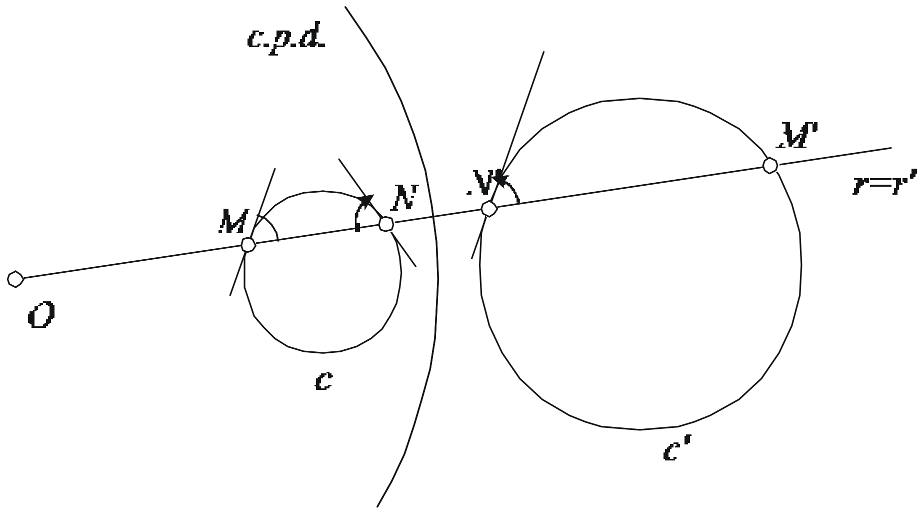
Con respecto a como determinar la circunferencia inversa de una dada, básicamente podemos obtenerla aplicando varios métodos:

- elegir tres puntos cualesquiera y encontrar los homólogos, que nos definen una única circunferencia;
- elegir un primer punto, hallar su inverso, y posteriormente aplicar homotecia para hallar donde estaría situado el centro de la nueva circunferencia;
- puede ser más corto trazar el diámetro de dicha circunferencia cuya prolongación pasa por el Polo de Inversión, y determinar los homólogos de los extremos de dicho diámetro, estos definirán un diámetro de la circunferencia inversa.

Si es importante que recordemos que el inverso del centro de la circunferencia original NO es el centro de la circunferencia inversa.

3.4.- La inversión conserva los ángulos (es conforme).

Para comprobar que eso es así, vamos a partir de la construcción vista en el apartado anterior.



Como puede verse, al ser *c* y *c'* homotéticas como se indicó previamente, los ángulos entre la recta *r* y *c* en *M* y entre *r'* y *c'* en *N'* son iguales. Por último, los ángulos de las tangentes a una circunferencia con la cuerda que delimitan son siempre iguales.

Como consecuencia de lo anterior, el ángulo que forma *r* con *c* en *N* y el que forma *r'* con *c'* en *N'* son iguales, como queríamos comprobar. Si que es de destacar que puede comprobarse que dichos ángulos van en sentido contrario, como corresponde a una transformación que ya indicamos entre sus propiedades que era inversa, y que por tanto modificaba el orden en el plano.