Acotación de los ceros de un polinomio.

Aladar Peter Santha

§0. Introducción.

Si $C = \{a+bi \,/\, a,b \in R, i^2 = -1\}$ es el cuerpo de los números complejos, teniendo en cuenta la representación de los números complejos en el plano (Figura 0.1)

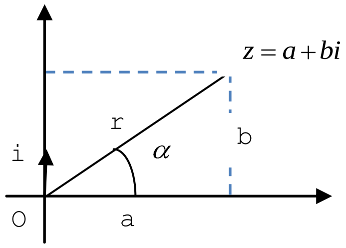

Figura 0.1

, resulta que $a = r\cos\alpha$, $b = r sen\alpha$. Así se llega a la forma trigonométrica:

$$z = r(\cos\alpha + i\,sen\,\alpha) \quad (r = \|z\| \geq 0, \quad -\pi + 2k\pi < \alpha \leq \pi + 2k\pi,\ k \in Z)$$

, donde r es el módulo y α es el argumento del número complejo z.
Si $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\,sen\,\alpha_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\,sen\,\alpha_2)$ entonces se tienen las fórmulas siguientes:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\,sen(\alpha_1 + \alpha_2)], \quad z^n = r^n(\cos n\alpha + i\,sen\,n\alpha),$$

$$\| z_1 \cdot z_2 \| = \| z_1 \| \cdot \| z_2 \|, \ \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2), \ \|z^n\| = \|z\|^n, \ \arg(z^n) = n \cdot \arg(z).$$

Lema 0.1: Cualesquiera que sean los números reales a_1, b_1, a_2, b_2

$$|a_1 a_2 + b_1 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \tag{01}$$

En efecto, para comparar dos números reales positivos es suficiente comparar sus cuadrados:

$$|a_1 a_2 + b_1 b_2|^2 = a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2$$

$$\left(\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2$$

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2|^2 - \left(\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right)^2 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \leq 0$$

Teorema 0.1: Si $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$ entonces

$$\| z_1 + z_2 \| \leq \| z_1 \| + \| z_2 \| \tag{0.2}$$

En efecto, para comparar los números reales positivos $\| z_1 + z_2 \|$ y $\| z_1 \| + \| z_2 \|$ hay que comparar sus cuadrados:

$$\| z_1 + z_2 \|^2 = (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = \| z_1 \|^2 + \| z_2 \|^2 + 2(a_1 a_2 + b_1 b_2)$$

$$(\|z_1\| + \|z_2\|)^2 = \| z_1 \|^2 + \| z_2 \|^2 + 2\| z_1 \| \| z_2 \|$$

Según el lema 0.1,

$$\| z_1 + z_2 \|^2 - (\|z_1\| + \|z_2\|)^2 = 2\left[(a_1 a_2 + b_1 b_2) - \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \right] \leq 2\left[|a_1 a_2 + b_1 b_2| - \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \right] \leq 0$$

, de donde resulta la desigualdad (02).

Observación 0.1: Por recurrencia se puede demostrar que

$$\| z_1 + z_2 + \cdots + z_n \| \leq \| z_1 \| + \| z_2 \| + \cdots + \| z_n \| \tag{0.3}$$

Teorema 0.2 $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$ entonces

$$\| z_1 + z_2 \| \geq \big| \| z_1 \| - \| z_2 \| \big| \tag{0.4}$$

Tal como en el teorema 0.1, para comparar dos números reales positivos es suficiente comparar sus cuadrados. Puesto que

$$\| z_1+z_2 \|^2 = (a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2 = a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+2(a_1a_2+b_1b_2)$$

$$\big|\, \|z_1\|-\|z_2\| \,\big|^2 = \|z_1\|^2+\|z_2\|^2-2\|z_1\|\|z_2\| = a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2}$$

, según el lema 0.1, resulta que

$$\| z_1+z_2 \|^2 - \big|\, \|z_1\|-\|z_2\| \,\big|^2 = 2\left(a_1a_2+b_1b_2+\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right) \geq 0$$

Observación 0.2: Puesto que $\big|\, \|z_1\|-\|z_2\| \,\big| \geq \|z_1\|-\|z_2\|$, del teorema 0.2 resulta que

$$\| z_1+z_2 \| \geq \|z_1\|-\|z_2\|$$

§1. Cotas de los módulos de los ceros de una función polinomio compleja.

Sea C el cuerpo de los números complejos y sea $f : C \to C$ una función polinomio con coeficientes complejos, definida por

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0)\,. \tag{1.1}$$

Definición 1.1: Se dice que $L \in R_+^*$ es una cota superior de los módulos de los ceros de f si $\|\alpha\| \leq L$, cualquiera que sea el cero no nulo α de f.

Definición 1.2: Se dice que $l \in R_+^*$ es una cota inferior de los módulos de los ceros de f si $\|\alpha\| \geq l$, cualquiera que sea el cero no nulo α de f.

Teorema 1.1: Si $a = \max(\|a_1\|, \ldots, \|a_n\|)$, entonces

$$\|x\| \geq 1+\frac{a}{\|a_0\|} \quad \Rightarrow \quad \|f(x)\| > 0$$

Demostración: Puesto que

$$\|x\| \geq 1+\frac{a}{\|a_0\|} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\|x\|-1} \leq \frac{\|a_0\|}{a}$$

, según las relaciones (0.4) y (0.2) resulta que

$$\begin{aligned}
\|f(x)\| &= \left\| a_0x^n + (a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) \right\| \\
&\geq \left\| a_0x^n \right\| - \left\| a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \right\| \\
&\geq \left\| a_0x^n \right\| - \left(\|a_1\|\|x\|^{n-1} + \cdots + \|a_{n-1}\|\|x\| + \|a_n\| \right) \\
&\geq \left\| a_0x^n \right\| - a\left(\|x\|^{n-1} + \cdots + \|x\| + 1 \right) \\
&\geq \left\| a_0x^n \right\| - a\,\frac{\|x\|^n-1}{\|x\|-1} \geq \|a_0\|\cdot\|x\|^n - a\,\frac{\|a_0\|}{a}\left(\|x\|^n-1\right) = \|a_0\| > 0
\end{aligned}$$

Observación 1.1: Si $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-k+1} = 0$ y $a_{n-k} \neq 0$ $(1 \leq k \leq n)$, resulta que

$$f(x) = x^k\left(a_0x^{n-k} + \cdots + a_{n-k}\right)$$

, y así los ceros de la función g, definida por

$$g(x) = a_0x^{n-k} + \cdots + a_{n-k} \quad (a_{n-k} \neq 0)$$

, son justamente los ceros no nulos de f. Así, el cálculo de L y l para la función f se reduce al mismo cálculo para la función g.

Teorema 1.2: Si $f: C \rightarrow C$ es una función polinomio compleja con coeficientes complejos, definida por (1.1), donde $a_n \neq 0$, entonces cualquiera que sea el cero α de f, tendremos

$$l < \|\alpha\| < L$$

, donde

$$L = 1 + \frac{a}{\|a_0\|} \quad y \quad a = \max\{\|a_1\|, \dots, \|a_n\|\} \tag{1.2}$$

$$l = \frac{\|a_n\|}{\|a_n\| + b} \quad y \quad b = \max\{\|a_0\|, \dots, \|a_{n-1}\|\} \tag{1.3}$$

Demostración: Si $\|x\| = L$, entonces según el teorema 1.1 resulta que $\|f(x)\| > 0$ y así x no puede ser un cero de f. Por tanto, L es una cota superior de los ceros de f.

Si x_i $(i = 1, \dots, n)$ son las raíces de f, $\frac{1}{x_i}$ $(i = 1, \dots, n)$ son los ceros de $f_1(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Si L' es una cota superior de los módulos de los ceros de $f_1(x)$, entonces

$$\left\|\frac{1}{x_i}\right\| = \frac{1}{\|x_i\|} \leq L' \quad \Rightarrow \quad \|x_i\| \geq \frac{1}{L'} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Por tanto $l = \frac{1}{L'}$ es una cota inferior de los módulos de los ceros de f. Luego, puesto que

$$f_1(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ ,$$

, según la fórmula (1.2),

$$L' = 1 + \frac{b}{\|a_n\|} \ \ donde\ b = \max\{\|a_0\|, \dots, \|a_{n-1}\|\} \ \ \text{y así} \qquad l = \frac{1}{L'} = \frac{\|a_n\|}{\|a_n\| + b}$$

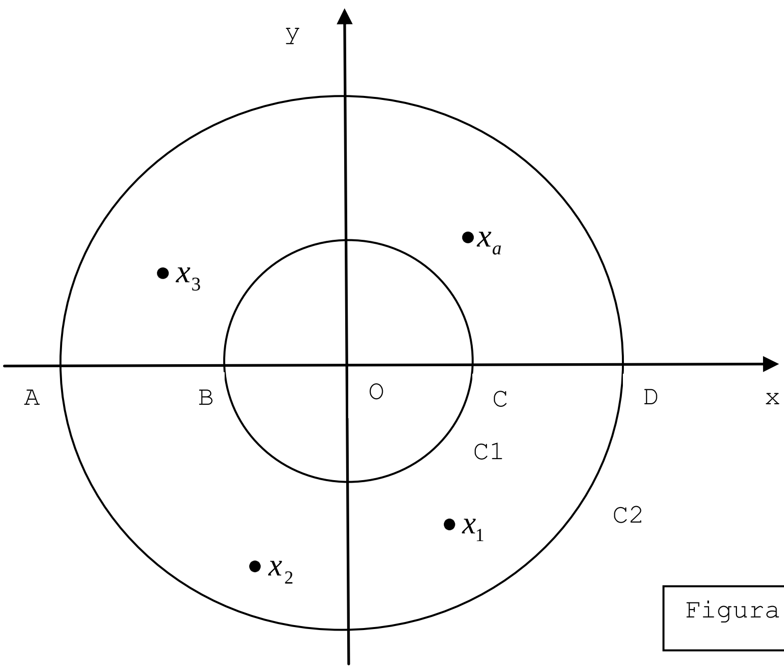

Figura 1.1

Observación 1.2: Intuitivamente, el teorema 1.2 tiene el significado siguiente: los ceros de la función f, definida por la relación (1.2) y que verifica la condición $a_n \neq 0$, están situados en la corona circular determinada por dos circunferencias C_1 y C_2 de centro O y de radios $l \ y \ L$, respectivamente, tal como se ve en la figura 1.1.

Observación 1.3: Puesto que $R \subset C$ las fórmulas (1.2) y (1.3) sirven también para calcular las cotas de los ceros complejos o reales de un polinomio con coeficientes reales. El código necesario para calcular las cotas (1.2) y (1.3) es el siguiente:

```
Public Function CotasCerosPC(ByRef p10() As Double, p20() As Double) As Variant
   Dim i As Integer, z As Integer, e As Integer, gq As Integer
   Dim a As Double, b As Double, r(2) As Double, md() As Double
   Dim p1() As Double, p2() As Double
   gp = UBound(p10())
   If p10(gp) = 0 And p20(gp) = 0 Then
      gp = CerosFinalesCD(p10(), p20())
      ReDim p1(gp), p2(gp)
      For i = 0 To gp: p1(i) = p10(i): Next i
      For i = 0 To gp: p2(i) = p20(i): Next i
   Else
   p1() = p10(): p2() = p20()
   End If
   ReDim md(gp) As Double
   For i = 0 To gp
      md(i) = Sqr(p1(i) * p1(i) + p2(i) * p2(i))
   Next i
   ' Método Anónimo
   ' r(1) cota superior de los módulos de lo ceros
   ' r(2) cota inferior de los módulos de los ceros
   'For i = 0 To gp
      a = md(1)
      For i = 2 To gp
         If md(i) > a Then a = md(i)
      Next i
   b = md(0)
   For i = 1 To gp - 1
      If md(i) > b Then b = md(i)
   Next i
   r(1) = 1 + a / md(0)
   r(2) = md(gp) / (b + md(gp))
   r(1) = (Int(r(1) * 100) + 1) / 100
   r(2) = (Int(r(2) * 100) - 1) / 100
   If r(2) < 0 Then r(2) = 0
   CotasCerosPC = r()
End Function
‘- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - --
Public Function CerosFinalesC(ByRef p1() As Double, ByRef p2() As Double) As Integer
   ' Contar los coeficientes nulos al final del polinomio
   Dim i As Integer, z As Integer, grado As Integer
   Dim q() As Double, gq As Integer
   grado = UBound(p1())
   If p1(grado) = 0 And p2(grado) = 0 Then
      i = grado: z = 0
      Do Until p1(i) <> 0 Or p2(i) <> 0 Or i = 0
         i = i - 1: z = z + 1
      Loop
   End If
   gq = grado - z
   CerosFinalesC = gq
```

Ejemplo 1.1: Utilizando la función *CotasCerosPC* en el caso del polinomio con coeficientes complejos:

$$P(Z) = (2-3i)Z^5 + (6+7i)Z^4 + (-1+4i)Z^3 + (6+7i)Z^2 + (-2-5i)Z - 4+3i$$

Resulta que 3.39 (0.26) es una cota superior (inferior) de los módulos de los ceros complejos.

Observación 1.4: En el caso de los polinomios duales (con coeficientes de la forma

$(a+b\varepsilon,\ a,b\in R, \varepsilon\neq 0\ y\ \varepsilon^2=0)$ no se puede establecer una cota superior de los módulos de sus ceros (tal como se ha hecho en el caso de los polinomios complejos). Para justificar esta afirmación basta con presentar un polinomio dual que tiene infinidad de ceros y cuyos módulos forman un conjunto que no está acotado superiormente. En efecto, si se considera el polinomio sencillo

$P(X)=(2X+1+\varepsilon)\cdot[X-(4-3\varepsilon)]\cdot[X-(4+3\varepsilon)]=(2X+1+\varepsilon)\cdot(X-4)^2=2X^3+(-15+\varepsilon)X^2+(24-8\varepsilon)X+16+16\varepsilon$

, entonces teniendo en cuenta que para todos los números duales de la forma $x_r=4+r\varepsilon,\ r\in R$

$(x_r-4)^2=(r\varepsilon)^2=r^2\varepsilon^2=r^2\cdot 0=0$, resulta que

$$P(x_r)=0,\ \text{y}\ \lim_{r\to+\infty}\|x_r\|=\lim_{r\to+\infty}\sqrt{16+r^2}=+\infty .$$

Evidentemente esto ocurre siempre cuando el polinomio tiene por lo menos un par de ceros duales conjugados.

Observación 1.5: El polinomio $P(X)$ de la observación 1.4 es de grado 3 y tiene infinidades de ceros. Por tanto para los polinomios con coeficientes duales el teorema de D'Alembert no es válido (es decir el número de los ceros duales de un polinomio dual no es siempre igual con su grado).

§.2. Cotas de los ceros reales de una función polinomio real.

Sea $f:R\to R$ la función polinomio real definida por

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \qquad (2.1)$$

Definición 2.1: $L_1\in R_+$ es una cota superior de los ceros estrictamente positivos de f si no hay ningún cero de este tipo mayor o igual que L_1.

Definición 2.2: $L_3\in R_+\cup\{+\infty\}$ es una cota inferior de los ceros estrictamente positivos de f si no hay ningún cero de éste tipo menor o igual que L_3.

Observación 2.1: Si L_1 es una cota superior de los ceros estrictamente positivos, entonces cualquier número real positivo mayor que L_1, es una cota superior de ellos. De manera análoga, cualquier número real positivo menor que L_3, es una cota inferior de los ceros estrictamente positivos de f. Obviamente nos interesa el menor valor posible de L_1 o bien el mayor valor posible de L_3.

Observación 2.2: Evidentemente, 0 es una cota superior de los ceros estrictamente positivos de f si, y solamente si, f no tiene ceros de este tipo. De manera análoga, $+\infty$ es una cota inferior de los ceros estrictamente positivos de f si, y solamente si, no hay ceros de este tipo.

Definición 2.3: $L_2\in R_-$ es una cota inferior de los ceros estrictamente negativos de f si no hay ningún cero de este tipo menor o igual que L_2.

Definición 2.4: $L_4\in R_-\cup\{-\infty\}$ es una cota superior de los ceros estrictamente negativos de f si no hay ningún cero de éste tipo mayor o igual que L_4.

Observación 2.3: Si L_2 es una cota inferior de los ceros estrictamente negativos, entonces cualquier número real negativo menor que L_2, es una cota inferior de ellos. De manera análoga, cualquier número real negativo mayor que L_4, es una cota superior de los ceros estrictamente negativos de f. Obviamente, en este caso también nos interesan el mayor y el menor valor posible de L_2 y L_4, respectivamente.

Observación 2.4: Obviamente, 0 es una cota inferior de los ceros estrictamente negativos de f si, y solamente si, f no tiene ceros de este tipo. De manera análoga, $-\infty$ es una cota superior de los ceros estrictamente negativos de f si, y solamente si, f no tiene ningún cero de este tipo.

Observación 2.5: Si en la definición (2.1) de f tenemos

$$a_n = \cdots = a_{n-k+1} = 0 \quad y \quad a_{n-k} \neq 0,$$

, entonces,

$$f(x) = x^k \left(a_0 x^{n-k} + \cdots + a_{n-k}\right),$$

, y sea $g : R \to R$ definida por

$$g(x) = a_0 x^{n-k} + \cdots + a_{n-k} \quad .$$

Puesto que el conjunto de los ceros no nulos de f coincide con el conjunto de los ceros de g, el cálculo de L_1, L_2 L_3 y L_4 para f se reduce al cálculo de las mismas cotas para g.

Teorema 2.1: Si la función polinomio f está definida por la relación (2.1) y $a_n \neq 0$, entonces

$$L_1 = 1 + \frac{a}{|a_0|},\ L_3 = \frac{|a_n|}{|a_n| + b},\ L_2 = -L_1 \quad y \quad L_4 = -L_3 \tag{2. 2}$$

, donde

$$a = \max\left\{|a_1|, \ldots, |a_n|\right\} y \quad b = \max\left\{|a_0|, \ldots, |a_{n-1}|\right\}$$

Demostración: Según el teorema 1.2, los ceros complejos no nulos de f (entre ellos los ceros reales) tienen que ser situados en el interior de la corona circular determinada por las circunferencias C_1 y C_2 de centro O y de radios L_3 y L_1, respectivamente (ver figura 1.1). Los puntos de corte de estas circunferencias con el eje Ox tienen las abscisas $x_A = -L_1, x_B = -L_3, x_C = L_3$ y $x_D = L_1$, respectivamente. Entonces es obvio que, fuera del intervalo $\left(C, D\right)$ no puede existir ningún cero estrictamente positivo, mientras que fuera del intervalo $\left(A, B\right)$ no pueden existir ceros estrictamente negativos. Así, quedan demostradas las fórmulas (2.2) y la codificación de los cálculos es la siguiente:

```
Public Function AnonimoPR(ByRef p0() As Double) As Variant
    ' MÉTODO ÁNÓNIMO
    Dim a As Double, b As Double, gp As Integer, y(4) As String
    Dim p() As Double, res(4) As String, xx(4) As Double
    p() = CerosFinalesR(p0)
    gp = UBound(p())
    a = Abs(p(1))
    For i = 2 To gp
        If Abs(p(i)) > a Then
            a = Abs(p(i))
        End If
    Next i
    b = Abs(p(0))
    For i = 1 To gp - 1
        If Abs(p(i)) > b Then
            b = Abs(p(i))
        End If
    Next i
    xx(1) = 1 + a / Abs(p(0)): xx(1) = Redondeo(xx(1), 1): xx(2) = -xx(1)
    xx(3) = Abs(p(gp) / (Abs(p(gp) + b))): xx(3) = Redondeo(xx(3), 3): xx(4) = -xx(3)
    For i = 1 To 4: y(i) = FormatoNumero(xx(i)): Next i
    res(4) = y(1)  ' Cota superior ceros positivos
    res(1) = y(2)  ' Cota inferior ceros  negativos
    res(3) = y(3)  ' Cota inferior ceros positivos
    res(2) = y(4)  ' Cota superior ceros negativos
    Anonimo = res()
End Function
‘ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -  -
```

```
Public Function CerosFinalesR(ByRef p() As Double) As Variant
    ' Supresión de ceros al final del polinomio
    Dim i As Integer, z As Integer, grado As Integer
    Dim q() As Double, gq As Integer
    grado = UBound(p())
    If p(grado) = 0 Then
        i = grado: z = 0
        Do Until p(i) <> 0 Or i = 0
            i = i - 1: z = z + 1
        Loop
    End If
    gq = grado - z
    ReDim q(gq)
    For i = 0 To gq: q(i) = p(i): Next i
    CerosFinalesR = q()
 End Function
' - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
Public Function Redondeo(ByVal ls As Double, ByVal k As Integer)
    ' REDONDEO DE LAS COTAS
    Dim valor As Double
    valor = ls * 100
    If valor <> Int(valor) Then ' hay más que 2 decimales
        If k = 2 Or k = 3 Then
            ls = (Int(valor) - 1) / 100
        Else
            ls = (Int(valor) + 1) / 100
        End If
    End If
    Redondeo = ls
End Function
```

Ejemplo 2.1: Si se considera el polinomio siguiente con coeficientes reales:

$$P(X) = 31X^5 - 123X^4 + 47X^3 - 84X^2 - 72X + 65$$

, según el código anterior resulta que si α es un cero real del polinomio entonces

$$\alpha \in (-4.97, -0.33) \cup (0.33, 4.97)$$

Los módulos de los ceros complejos pertenecen al intervalo: $(0.33\,,4.97)$

Teorema 2.2: Sea K_3 una cota superior de los ceros estrictamente positivos de la función polinomio

$$f_3 : x \to x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si $K_3 > 0$,$1/K_3$ es una cota inferior de los ceros estrictamente positivos de f . Si $K_3 = 0$, la cota inferior de los ceros estrictamente positivos de f es el $+\infty$, es decir, no hay tales ceros.

Demostración: Primero, si α es un cero estrictamente positivo de f , entonces $1/\alpha$ es un cero estrictamente positivo de f_3:

$$f_3\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha^n f(\alpha) = 0$$

Si $K_3 = 0$, f_3 no tiene ceros estrictamente positivos y así f tampoco tendrá ceros de este tipo. Por tanto, en este caso el $+\infty$ es una cota inferior de los ceros estrictamente positivos de f . Si $K_3 > 0$, entonces

$$x \geq K_3 \quad \Rightarrow \quad \left| f\left(\frac{1}{x}\right) \right| > 0 \qquad (2.3)$$

Puesto que

$$0 < y \le \frac{1}{K_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} \ge K_3$$

, según (2.3), resulta que

$$0 < y \le \frac{1}{K_3} \quad \Rightarrow \quad |f(y)| > 0 .$$

Así pues, f no tiene ceros estrictamente positivos menores o iguales que $1/K_3$. Por tanto, $1/K_3$ es una cota inferior de los ceros estrictamente positivos de f .

Teorema 2.3: Si K_2 es una cota superior de los ceros estrictamente positivos de la función polinomio

$$f_2 : x \to f(-x),$$

, entonces $-K_2$ es una cota inferior de los ceros estrictamente negativos de f .

Demostración: Dado que

$$x \ge K_2 \quad \Rightarrow \quad |f(-x)| > 0$$

, y que

$$y \le -K_2 \Rightarrow \quad -y \ge K_2$$

, resulta que

$$y \le -K_2 \quad \Rightarrow \quad |f(y)| > 0 .$$

De esta última implicación resulta que f no puede tener ningún cero estrictamente negativo, menor o igual que $-K_2$. Por tanto $-K_2$ es una cota inferior de los ceros estrictamente negativas de f .

Teorema 2.4: Sea K_4 una cota superior de los ceros estrictamente positivos de la función polinomio

$$f_4 : x \to x^n f\left(-\frac{1}{x}\right)$$

, entonces $-1/K_4$ *ó* $-\infty$ es una cota superior de los ceros estrictamente negativos de f , según que $K_4 > 0$ ó $K_4 = 0$, respectivamente.

Demostración: Si α es un cero estrictamente negativo de f , entonces $-1/\alpha$ es un cero estrictamente positivo de f_4 , puesto que

$$f_4\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n f(\alpha) = 0$$

Si $K_4 = 0$, entonces f_4 no tiene ceros estrictamente positivos y, por tanto, f tampoco tendrá raíces de este tipo, es decir, el $-\infty$ será una cota superior para los ceros estrictamente negativos de f .

Si $K_4 > 0$, teniendo en cuenta que

$$x \ge K_4 \quad \Rightarrow \quad \left| f\left(-\frac{1}{x}\right) > 0 \right|$$

, y que

$$-\frac{1}{K_4} \le y < 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} \ge K_4$$

, se obtiene que

$$-\frac{1}{K_4} \le y < 0 \quad \Rightarrow \quad |f(y)| > 0 .$$

Con otras palabras, f no tiene ceros estrictamente negativos mayores o iguales que $-1/K_4$ y así $-1/K_4$ es una cota superior para los ceros estrictamente negativos de f.

De los últimos tres teoremas resulta que es bastante hallar métodos para el cálculo de las cotas superiores de los ceros estrictamente positivos de una función polinomio, puesto que el cálculo de los otras cotas se reduce a esto.

Dado que en los tiempos anteriores a la aparición de los ordenadores las cotas calculadas con las fórmulas (2.2) no eran consideradas de las mejores, en el caso de los polinomios reales se han buscado otros métodos más satisfactorios.

Teorema 2.5 (de Lagrange): Si la función polinomio no nula f, definida por (2.1), cumple la condición

$$a_i \ge 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n) \tag{2.4}$$

, entonces 0 es una cota superior de los ceros estrictamente positivos de f puesto que para cualquier $x > 0$ resulta que $f(x) > 0$, es decir, f no tiene ceros estrictamente positivos.

Si $a_0 > 0$ y no todos los coeficientes restantes son mayores o iguales que 0, sea a_k el primer coeficiente negativo y sea A el mayor número entre los valores absolutos de los coeficientes negativos. Entonces

$$L = 1 + \sqrt[k]{\frac{A}{a_0}}$$

, es una cota superior de los ceros estrictamente positivas de f.

En efecto, en este último caso, sustituyendo en la expresión de $f(x)$ los coeficientes positivos $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ con ceros y los coeficientes $a_k, \dots a_n$ con A, $f(x)$ decrecerá, y así tendremos:

$$f(x) = a_0 x^n + \cdots + a_{k-1} x^{n-k+1} + a_k x^{n-k} + \cdots + a_n \ge a_0 x^n - A(x^{n-k} + \cdots + x + 1)$$

Por otra parte,

$$x \ge 1 + \sqrt[k]{\frac{A}{a_0}} \quad \Rightarrow \quad (x-1)^k \ge \frac{A}{a_0}$$

, y por tanto,

$$f(x) \ge a_0 x^n - \frac{A(x^{n-k+1} - 1)}{x-1} > a_0 x^n - \frac{A x^{n-k+1}}{x-1}$$

$$f(x) > \frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0 x^{k-1}(x-1) - A\right] > \frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0 (x-1)^k - A\right]$$

$$f(x) > \frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[\frac{a_0 A}{a_0} - A\right] = 0$$

Así pues, si $x \ge L$, $f(x)$ no puede anularse y por tanto, L es una cota superior de los ceros estrictamente positivos de f.

El procedimiento siguiente calcula las cotas de los ceros reales según el método basado en el teorema anterior.

```
Public Function Lagrange1(ByRef p0() As Double) As Variant
```

```
   '------ PRIMER MÉTODO DE LAGRANGE -------
   Dim i As Integer, j As Integer, k As Integer, sw As Integer, w As Integer
   Dim cs As Double, gp As Integer, ic(4) As Integer, t As Double
   Dim p() As Double, res(4) As String, ct() As Double, h() As Double
   ic(1) = 4: ic(2) = 1: ic(3) = 3: ic(4) = 2
   p() = CerosFinalesR(p0())
   gp = UBound(p())
   ct() = Transformaciones(p())
   For k = 1 To 4
      ReDim h(gp)
      j = 0: sw = 0
      For i = 1 To gp
         If ct(i, k) < 0 Then
            h(j) = Abs(ct(i, k))
            j = j + 1
            If sw = 0 Then
               w = i: sw = 1
            End If
         End If
      Next i
      t = h(0)
      For i = 1 To j - 1
         If h(i) > t Then t = h(i)
      Next i
      If sw = 0 Then
         cs = 0
      Else
         cs = 1 + Abs(t / ct(0, k)) ^ (1 / w)
      End If
      res(ic(k)) = RutinaCotas(cs, k)
   Next k
   Lagrange1 = res()
End Function
‘ ---------------------------------------
Public Function Transformaciones(ByRef p0() As Double) As Variant
   Dim gp As Integer, e As Integer, k As Integer
   Dim ct() As Double, p() As Double, i As Integer
   p() = CerosFinales(p0())
   gp = UBound(p())
   ReDim ct(gp, 4)
   For i = 0 To gp: ct(i, 1) = p(i): Next i
   ' TRANSFORMACIONES DEL POLINOMIO
   'Dim i As Integer, z As Integer, e As Integer
   ' Transformación de X en -X
   e = gp Mod 2
   For i = 0 To gp
      If e <> 0 Then
         ct(i, 2) = (-1) ^ (i + 1) * ct(i, 1)
      Else
         ct(i, 2) = (-1) ^ i * ct(i, 1)
      End If
   Next i
   ' Transformación de X en 1/X y de X en -1/X
   For i = 0 To gp
      ct(i, 3) = ct(gp - i, 1)
      ct(i, 4) = ct(gp - i, 2)
   Next i
   For k = 1 To 4
         If ct(0, k) < 0 Then
            For i = 0 To gp
               ct(i, k) = -ct(i, k)
            Next i
         End If
      Next k
   Transformaciones = ct()
End Function
‘ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
Public Function RutinaCotas(ByVal cs As Double, ByVal k As Integer) As String
   Dim res As String
    If k = 1 Then
         'Cota superior ceros positivos
         cs = Redondeo(cs, k): res = FormatoNumero(cs)
```

```
        End If
        If k = 2 Then
            'Cota inferior ceros negativos
            cs = Redondeo(-cs, k): res = FormatoNumero(cs)
        End If
        If k = 3 Then
            'Cota inferior ceros positivos
            If cs <> 0 Then
            cs = Redondeo(1 / cs, k): res = FormatoNumero(cs)
            Else
                res = "+infinito"
            End If
        End If
        If k = 4 Then
            'Cota superior ceros negativos
            If cs <> 0 Then
                cs = Redondeo(-1 / cs, k): res = FormatoNumero(cs)
            Else
                res = "-infinito"
            End If
        End If
        RutinaCotas = res
End Function
' - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
Public Function FormatoNumero(ByVal x As Double) As String
    Dim xx As String
    xx = Str$(x)
    If Abs(x) >= 1 Then
        FormatoNumero = Str$(x)
    Else
        If Left$(xx, 1) = "-" Then
            FormatoNumero = "-0" + Right$(xx, Len(xx) - 1)
        Else
            If x = 0 Then
                FormatoNumero = Str$(0)
            Else
                FormatoNumero = "0" + Right$(xx, Len(xx) - 1)
            End If
        End If
    End If
End Function
```

Ejemplo 2.2: Si

$$f(x) = -2x^{12} + 3x^{11} + 4x^{10} - 7x^{9} + 10x^{8} - 8x^{7} + 9x^{6} - 5x^{5} + 4x^{4} - 6x^{3} + 2x^{2} + 2x - 7$$

, y α es uno de sus ceros reales entonces $\alpha \in (-3.25, -0.45) \cup (0.4, 6)$

Teorema 2.6 (de Lagrange): Si f es la función polinomio definida por (2.1) y $a_0 > 0$, existe $c \in R_+^*$ tal que $f(c) > 0$ y en la sucesión de los coeficientes no nulos hay exactamente un par de números consecutivos de signos contrarios, entonces

$$x > c \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0,$$

, es decir, c es una cota superior de los ceros estrictamente positivos de f .

Demostración: Dado que

$$a_0 > 0 \quad y \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

, existirá $r \in R_+^*$ tal que $f(x)$ sea mayor que cero para x mayor que r. Por tanto c podría ser cualquier número real mayor que r. Luego, según las hipótesis, existirá en la sucesión de los coeficientes un término a_k tal que $a_k > 0$ y que este término separe los términos positivos de los negativos.

Si a_{k+t} es el primer término negativo no nulo, entonces

$$f(x) = a_0x^n + \cdots + a_kx^{n-k} - \left(|a_{k+1}|x^{n-k+1} + \cdots + |a_n|\right)$$
$$= x^{n-k}\left[\left(a_0x^k + \cdots + a_k\right) - \left(\frac{|a_{k+t}|}{x^t} + \cdots + \frac{|a_n|}{x^k}\right)\right] = x^{n-k}\left[g(x) - h(x)\right]$$

, donde

$$g(x) = a_0x^k + \cdots + a_k$$
$$h(x) = \frac{|a_{k+t}|}{x^t} + \cdots + \frac{|a_n|}{x^k}.$$

Teniendo ahora en cuenta que de $x > c > 0$ resultan las desigualdades:

$$x^{n-k} > c^{n-k}\ ,\ \ g(x) > g(c)\ \ y\ \ h(x) < h(c)\,,$$

, de $x > c > 0$ y de $f(c) > 0$ resultará que

$$f(x) = x^{n-k}\left[g(x) - h(x)\right] > c^{n-k}\left[g(c) - h(c) > 0\right].$$

Así, c es una cota superior de los ceros estrictamente positivos de f.

Si la función polinomio f está definida por la relación (2.1) y $a_0 > 0$ entonces se puede escribir a $f(x)$ de la manera siguiente:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x)\,,$$

, donde las funciones polinomios f_i $(i = 1, \cdots, m)$ o bien tienen todos los coeficientes positivos o bien verifican las condiciones del teorema (2.6). Por ejemplo, si

$$f(x) = 5x^9 - 9x^8 + 2x^6 + 4x^5 - 33x^4 - 2x^3 + 7x + 1$$

, entonces las funciones f_1, f_2, f_3 se definen de la manera siguiente:

$$f_1(x) = 5x^9 - 9x^8$$
$$f_2(x) = 2x^6 + 4x^5 - 33x^4 - 2x^3$$
$$f_3(x) = 7x + 1$$

, y obviamente,

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x).$$

Si $c_i \in R_+^*$ $(i = 1, \cdots, m)$ son tales que $f_i(c_i) > 0$ $(i = 1, \cdots, m)$, y $c = \max\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$,

$$x > c_i \quad \Rightarrow \quad f_i(x) > 0$$

, cualquiera que sea $i = 1, \cdots, m$. Por tanto, tendremos también

$$x > c \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0\,,$$

, y así c será una cota superior de los ceros estrictamente positivas de f.

Si en el ejemplo anterior se observa que

$$f_1(x) = x^8(5x - 9)$$

$$f_2(x) = x^3(2x^3 + 4x^2 - 33x - 2)$$
$$f_3(x) = 7x + 1$$

, entonces se verifica fácilmente que $c_1 = 2$, $c_2 = 4$ y $c_3 = 1$. Por tanto 4 es una cota superior de los ceros estrictamente positivos de f.

Observación 2.6: Si $a_0 < 0$, entonces teniendo en cuenta que f y $-f$ tienen los mismos ceros, para hallar una cota superior de los ceros estrictamente positivos de f, hay que aplicar

el mismo procedimiento que antes, pero para la función $-f$.
El método expuesto en el teorema 2.6 se puede codificar de la manera siguiente:

```
Public Function Lagrange2(ByRef p0() As Double) As Variant
  ' ----- SEGUNDO MÉTODO DE LAGRANGE -----
  Dim i As Integer, j As Integer, k As Integer, ic(4) As Integer
  Dim sg As Integer, ng As Integer, sw As Integer, gp As Integer
  Dim ps As Single, cs As Double, a As Double, fa As Double
  Dim i1() As Integer, f1() As Double, ct() As Double
  Dim p() As Double, res(4) As String
  ic(1) = 4: ic(2) = 1: ic(3) = 3: ic(4) = 2
  p() = CerosFinalesR(p0())
  gp = UBound(p())
  ct() = Transformaciones(p())
  For k = 1 To 4
    ' ==== NÚMERO DE LOS GRUPOS
    sg = 1: j = 0
    For i = 0 To gp
      If ct(i, k) < 0 Or sg <> 1 Then
        If ct(i, k) <= 0 Or sg <> -1 Then
          If sg = 1 Then sg = -1
        Else
          j = j + 1: sg = 1
        End If
      End If
    Next i
    ng = j + 1
    '==== FORMACIÓN DE LOS GRUPOS
    ReDim i1(ng + 1)
    ReDim f1(ng)
    sg = 1: i1(0) = -1: j = 0
    For i = 0 To gp
      If ct(i, k) < 0 Or sg <> 1 Then
        If ct(i, k) <= 0 Or sg <> -1 Then
          If sg = 1 Then sg = -1
        Else
          sg = 1: j = j + 1: i1(j) = i - 1
        End If
      End If
    Next i
    i1(j + 1) = gp
    ' ==== COTAS SUPERIORES DE LOS GRUPOS ====
    For j = 0 To ng - 1
      a = 0: ps = 5: sw = 0
      Do
        fa = ct(i1(j) + 1, k)
        For i = i1(j) + 2 To i1(j + 1)
          fa = fa * a + ct(i, k)
        Next i
        If fa <= 0 Then
          a = a + ps
        Else
          If ps <> 0.1 Then
            If a <> 0 Then
              a = a – ps: ps = 0.1: a = a + ps
            Else
              ps = 0.1
            End If
          Else
            sw = 1
          End If
        End If
      Loop Until sw = 1
      f1(j) = a: ps = 5
    Next j
    '====== COTA SUPERIOR
    cs = f1(0)
    For i = 1 To ng
      If f1(i) > cs Then  cs = f1(i)
    Next i
    res(ic(k)) = RutinaCotas(cs, k)
```

```
   Next k
   Lagrange2 = res()
End Function
```

Ejemplo 2.3: Si

$$f(x) = -3x^{12} + 26x^{11} - 9x^{10} + 3x^9 + 6x^8 - 10x^7 + 8x^6 - 9x^5 + 3x^4 + 16x^3 + 3x^2 - 6x + 7$$

, entonces $L = L_1 = -1$ y por tanto no hay ceros reales negativos. Luego si α es un cero real entonces $\alpha \in (-1.02\,,-0.83) \cup (0.75\,, 6.71)$.

Teorema 2.7 (de Newton): Si f es la función polinomio definida por la relación (2.1), $a_0 > 0$ y existe $c \in R_+^*$ tal que

$$f(c) > 0\,,\; f'(c) > 0\,,\ldots,\; f^{(n-1)}(c) \qquad (2.5)$$

, entonces c es una cota superior de los ceros estrictamente positivos de f.

Demostración: Según la fórmula de Taylor

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!} f'(c)(x-c) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x-c)^n \qquad (2.6)$$

Teniendo en cuenta las desigualdades (3.3.5) y que

$$f^{(n)}(c) = (n!)\,a_0 > 0\,,$$

, tendremos

$$x > c \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0\,.$$

Puesto que $f(c) > 0$ tendremos también la implicación:

$$x \geq c \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0\,.$$

Por tanto, c es una cota superior de los ceros estrictamente positivos de f y el teorema queda demostrado.

A continuación se comprobará que si $a_0 > 0$, existirá siempre $c \in R_+^*$ verificando las relaciones (2.5). En efecto, de $a_0 > 0$ resulta que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad y \quad \lim_{x\to+\infty} f^{(k)}(x) = +\infty \quad (k = 1,\ldots,n-1)$$

, y así existirán $c_1, c_2, \ldots, c_n$, verificando las desigualdades:

$$0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n$$

$$f^{(n-1)}(c_1) > 0\,,\ldots,\; f'(c_{n-1}) > 0\,,\; f(c_n) > 0$$

Dado que

$$f^{(n)}(x) = (n!)\,a_0 > 0\,,$$

$f^{(n-1)}$ es una función creciente y así

$$x \geq c_1 \quad \Rightarrow \quad f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(c_1) > 0 \qquad (2.7)$$

De (2.7) resulta que $f^{(n-2)}$ es creciente en $(c_1, +\infty)$ y así

$$x \geq c_2 \quad \Rightarrow \quad f^{(n-2)}(x) = f^{(n-2)}(c_2) > 0\,. \qquad (2.8)$$

Por tanto $f^{(n-3)}$ es creciente en $(c_2, +\infty)$. Repitiendo este mismo razonamiento $(n-4)$ *veces* más, se llega a la conclusión que f' es creciente en $(c_{n-2}, +\infty)$ y así

$$x \geq c_{n-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = f'(c_{n-1}) > 0\,. \qquad (2.9)$$

Si se pone $c = c_n$ se verifica que

$$f(c) = f(c_n) > 0\,.$$

Luego, poniendo $x \geq c$ en las implicaciones (2.7), (2.8) y (2.9) y teniendo en cuenta que

$c \geq c_i \quad (i = 1, \ldots, n-1)$ se obtiene que

$$f^{(n-1)}(c) > 0\,,\ f^{(n-2)}(c) > 0\,, \ldots, f^{'}(c) > 0\ .$$

El procedimiento siguiente utiliza el método anterior para calcular las cotas de los ceros reales de una función polinomio por el método de Newton.

```
Public Function Newton(ByRef p0() As Double) As Variant
   '---- MÉTODO DE NEWTON ----
   Dim i As Integer, j As Integer, k As Integer, d As Integer
   Dim w3 As Integer, w4 As Integer, sp() As Integer
   Dim sg As Integer, sw As Integer, ic(4) As Integer
   Dim ps As Single, cs As Double, gp As Integer
   Dim a1 As Double, a As Double, fa As Double, t() As Double
   Dim p() As Double, res(4) As String
   ic(1) = 4: ic(2) = 1: ic(3) = 3: ic(4) = 2
   For k = 1 To 4
      p() = CerosFinalesR(p0())
      gp = UBound(p())
      ct() = Transformaciones(p())
      d = (gp + 1) * (gp + 2) / 2
      ReDim t(d)
      ReDim sp(gp + 1)
      ' La matriz T contiene los coeficientes del
      ' polinomio y de sus derivadas.
      ' POSICIÓN DE LAS DERIVADAS EN LA MATRIZ T
      sp(0) = 0
      For i = 1 To gp
      sp(i) = sp(i - 1) + gp + 2 - i
      Next i
      ' Carga del polinomio en la matriz T
      For i = sp(0) To sp(1) - 1
         t(i) = ct(i, k)
      Next i
      ' Carga de las derivadas en la matriz T
      For i = 1 To gp
         w4 = sp(i) - sp(i - 1): w3 = w4
         For j = sp(i) To sp(i + 1) - 1
            t(j) = t(j - w3) * (w4 - 1)
            w4 = w4 - 1
         Next j
      Next i
      ' CÁLCULO DE LAS COTAS
      ps = 2: a = 0.1: a1 = a
      For i = gp - 1 To 0 Step -1
         Do Until sw = 1
            fa = t(sp(i))
            For j = sp(i) + 1 To sp(i + 1) - 1
               fa = fa * a + t(j)
            Next j
            If fa <= 0 Then
               a = a + ps
            Else
               If ps <> 0.1 Then
                  If a <> a1 Then
                     a = a - ps: ps = 0.1: a = a + ps
                  Else
                     ps = 0.1
                  End If
               Else
                  sw = 1
               End If
            End If
         Loop
         a1 = a: ps = 2: sw = 0
      Next i
      cs = a1
      res(ic(k)) = RutinaCotas(cs, k)
   Next k
   Newton = res()
End Function
```

Ejemplo 2.4: Si

$$f(x) = 3x^{12} + 16x^{11} - 9x^{10} + 3x^9 + 6x^8 - 10x^7 + 8x^6 + 4x^5 - 5x^4 + 8x^3 + 10x^2 - 7x + 12$$

, y entonces según la función Newton se obtiene que $L_1 = 031 < 1.98 = L_3$. Por tanto no hay ceros positivos. Si α es un cero real negativo del polinomio entonces $\alpha \in (-5.92, -0.99)$.

Observación 2.7: Si en el segundo método de Lagrange ó en el método de Newton el valor inicial del parámetro "ps" sería 0.01, entonces, cuando el polinomio tiene raíces grandes en valor absoluto, el tiempo de ejecución de estos programas podría ser algo más largo. Esto podría suceder incluso si se pone $ps = 1$. Para solucionar este problema, se podría combinar el primer método de Lagrange con el segundo método de Lagrange ó con el método de Newton. En efecto, el primer método de Lagrange permite calcular rápidamente una cota superior "cs" de los ceros positivos, luego, a partir de esta cota se podría deducir una cota menor por el segundo método de Lagrange (o por el método de Newton) invertido. En este caso hay que proceder de la manera siguiente: Eligiendo para "ps" un valor (por ejemplo 0.1) se calcula la diferencia $D = cs - ps$. Si D>0 y todos los polinomios $f_i(x)$ que se forman con el segundo método de Lagrange (o todas las derivadas en el caso del método de Newton) son positivos en el punto D, se repite el proceso anterior. El proceso se finaliza cuando algún polinomio $f_i(x)$ (o alguna derivada) tiene un valor negativo en el punto D. En este último caso, la cota superior de los ceros positivos será $D + ps$. Los procedimientos siguientes funcionan según lo descrito anteriormente.

```
Public Function LagrangeC(ByRef p0() As Double) As Variant
    '------- MÉTODO COMBINADO DE LAGRANGE
    Dim ps As Single, a As Double, fa As Double, i1() As Integer
    Dim i As Integer, j As Integer, k As Integer, w As Integer
    Dim sw As Integer, cs As Double, gp As Integer, ic(4) As Integer
    Dim ng As Integer, sg As Integer, ct() As Double
    Dim p() As Double, res(4) As String
    ic(1) = 4: ic(2) = 1: ic(3) = 3: ic(4) = 2
    p() = CerosFinalesR(p0())
    gp = UBound(p())
    ct() = Transformaciones(p())
    ReDim h(gp)
    For k = 1 To 4
        ' Método 1 de Lagrange
        j = 0: sw = 0
        For i = 1 To gp
            If ct(i, k) < 0 Then
                h(j) = Abs(ct(i, k))
                j = j + 1
                If sw = 0 Then
                    w = i: sw = 1
                End If
            End If
        Next i
        t = h(0)
        For i = 1 To j - 1
            If h(i) > t Then: t = h(i)
        Next i
        If sw = 0 Then
            cs = 0
        Else
            cs = 1 + Abs(t / ct(0, k)) ^ (1 / w)
        End If
        ' Método 2 de Lagrange, modificado
        ' --- Número de los grupos
        sg = 1: j = 0
        For i = 0 To gp
```

```
         If ct(i, k) < 0 Or sg <> 1 Then
            If ct(i, k) <= 0 Or sg <> -1 Then
               If sg = 1 Then sg = -1
            Else
               j = j + 1: sg = 1
            End If
         End If
      Next i
      ng = j + 1
      ' --- Formación de los grupos
      ReDim i1(ng + 1)
      sg = 1: i1(0) = -1: j = 0: ps = 5
      For i = 0 To gp
         If ct(i, k) < 0 Or sg <> 1 Then
            If ct(i, k) <= 0 Or sg <> -1 Then
               If sg = 1 Then: sg = -1
            Else
               sg = 1: j = j + 1: i1(j) = i - 1
            End If
         End If
      Next i
      i1(j + 1) = gp
       '---- Mejorar la cota obtenida por el primer método de Lagrange
      a = cs: ps = 0.01
      Do
         a = a - ps
         For i = 0 To ng - 1
            fa = ct(i1(i) + 1, k)
            For j = i1(i) + 2 To i1(i + 1)
               fa = fa * a + ct(j, k)
            Next j
            If fa < 0 Or a < 0 Then Exit Do
         Next i
      Loop
      cs = a + ps
      res(ic(k)) = RutinaCotas(cs, k)
   Next k
   LagrangeC = res()
End Function
‘ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
Public Function Lagrange1Newton(ByRef p0() As Double) As Variant
   ' MÉTODO DE NEWTON
   Dim i As Integer, j As Integer, k As Integer, w As Integer
   Dim w3 As Integer, w4 As Integer, d As Integer, ic(4) As Integer
   Dim sg As Integer, sw As Integer, tt As Double, gp As Integer
   Dim ps As Single, h() As Double, cota As Double, sp() As Integer
   Dim a As Double, fa As Double, t() As Double, cs As Double
   Dim p() As Double, res(4) As String
   ic(1) = 4: ic(2) = 1: ic(3) = 3: ic(4) = 2
   For k = 1 To 4
      p() = CerosFinalesR(p0())
      gp = UBound(p())
      ct() = Transformaciones(p())
      d = (gp + 1) * (gp + 2) / 2
      ReDim t(d)
      ReDim sp(gp + 1)
      ' La matriz T contiene los coeficientes del
      ' polinomio y de sus derivadas.
      ' POSICIÓN DE LAS DERIVADAS EN LA MATRIZ T
      sp(0) = 0
      For i = 1 To gp
      sp(i) = sp(i - 1) + gp + 2 - i
      Next i
      ' Carga del polinomio en la matriz T
      For i = sp(0) To sp(1) - 1
         t(i) = ct(i, k)
      Next i
      ' Carga de las derivadas en la matriz T
      For i = 1 To gp
         w4 = sp(i) - sp(i - 1): w3 = w4
         For j = sp(i) To sp(i + 1) - 1
            t(j) = t(j - w3) * (w4 - 1)
            w4 = w4 - 1
```

```
      Next j
    Next i
    '-----------------------------------------
    ' ===== MÉTODO 1 DE LAGRANGE  =============
    ReDim h(gp)
    j = 0: sw = 0
    For i = 1 To gp
      If ct(i, k) < 0 Then
        h(j) = Abs(ct(i, k))
        j = j + 1
        If sw = 0 Then
          w = i: sw = 1
        End If
      End If
    Next i
    tt = h(0)
    For i = 1 To j - 1
      If h(i) > tt Then tt = h(i)
    Next i
    If sw = 0 Then
      cota = 0
    Else
      cota = 1 + Abs(tt / ct(0, k)) ^ (1 / w)
      '-----------------------------------------
      ' Mejorar la cota cs por el método de Newton
      ps = 0.01: a = cota
       Do
        a = a - ps
        For i = gp - 1 To 0 Step -1
          fa = t(sp(i))
          For j = sp(i) + 1 To sp(i + 1) - 1
            fa = fa * a + t(j)
          Next j
          If fa <= 0 Or a < 0 Then
            Exit Do
          End If
        Next i
      Loop
    End If
    cs = a + ps
    res(ic(k)) = RutinaCotas(cs, k)
  Next k
  Lagrange1Newton = res()
End Function
```

Ejemplo 2.5: Para comprobar la eficacia de todos los métodos presentados para los polinomios reales se considera el polinomio:

$$P(X) = (X-11)(3X+7)(X^2+9)(X+5) = 6X^5 - 22X^4 - 387X^3 - 869X^2 - 1863X - 3465$$

Aplicando las funciones establecidas en este trabajo, se obtienen los resultados siguientes:

Método	Anónimo	1º Lagrange	2º Lagrange	Newton	Lagrange combinado	Lagrange--Newton
Cota inf. ceros < 0	-578.5	-18.64	-6.52	-5.02	-6.43	-5.02
Cota sup. ceros < 0	-2.15	-0.65	-1.66	-1.99	-1.85	-2.28
Cota inf. ceros > 0	2.15	0.77	9.98	10	9.95	9.95
Cota sup. Ceros > 0	578.5	578.5	11.01	11.01	11.01	11.01

Se observa que en el caso de este polinomio el método Anónimo y el primer método de Lagrange no son idóneos para el cálculo de las cotas de los ceros reales. Comparando todos los métodos resulta que si α es un cero real del polinomio entonces

$$\alpha \in (-5.02, -2.28) \cup (0, 11.01)$$

La cota superior de los ceros, calculado por el primer método de Lagrange, es poco satisfactorio puesto que el segundo coeficiente del polinomio ya es negativo. El resultado es tanto mejor cuanto más atrás se encuentra el primer coeficiente negativo.

Ejemplo 2.6: En el caso del polinomio

$$P(X) = X^9 + 2X^8 + 7X^7 - 39X^6 - 85X^5 + 371X^4 - 313X^3 - 423X^2 + 1974X - 2961$$

, Se obtienen los resultados siguientes:

Método	Anónimo	1º Lagrange	2º Lagrange	Newton	Lagrange combinado	Lagrange--Newton
Cota inf. ceros < 0	-2962	-372	-3.52	--2.92	-3.48	-2.89
Cota sup. ceros < 0	-3	-0.66	-1.66	-1.99	-1.81	-2.08
Cota inf. ceros > 0	3	0.59	1.41	1.98	1.48	2.17
Cota sup. Ceros > 0	2962	15.36	3.11	2.31	3.03	2.22

Observación 2.8: Cualquiera que sea el método de los cálculos, si una cota inferior de los ceros reales negativos es mayor o igual a una cota superior de los mismos, esto quiere decir que no hay ceros reales negativos. Da manera análoga, si una cota inferior de los ceros reales positivos es mayor o igual a una cota superior de los mismos, no habrán ceros reales positivos

Ejemplo 2.7: Considerando el polinomio

$$P(X) = 5X^{10} + 7X^9 + 8X^8 - 12X^7 - 7X^6 + 4X^5 + X^4 + 23X^3 - 4X^2 + 5X + 6$$

, los métodos anteriores conducen al resultado siguiente:

Método	Anónimo	1º Lagrange	2º Lagrange	Newton	Lagrange combinado	Lagrange--Newton
Cota inf. ceros < 0	-5.6	-5.6	--23.22	--1.32	-5.6	-1.23
Cota sup. ceros < 0	-0.19	-0.2	-0.18	-0.47	-0.2	-0.48
Cota inf. ceros > 0	0.19	0.4	1.1	1.98	1.1	2.01
Cota sup. Ceros > 0	5.6	2.34	1.01	0.51	0.98	0.46

Se observa que en el caso de las tres últimas columnas la cota inferior de los ceros positivos es superior a la cota superior de los mismos. Por tanto, el polinomio no tiene ceros positivos

Observación 2.9: El cálculo de las cotas de los ceros reales y de las cotas de los módulos de los ceros complejos tiene su importancia a la hora de detectarles por el método del rastreo.

Bibliografia:

[1] Prof. Dr. Gheoghe Pic, Algebră Superioară, Editura Didactică ș i Pedagogică, Bucureș ti-1966.

[2] А. Г. Курош, Курс Высщей Алгебры, Издательво "НАУКА", МОСКВА 1968.

[3] B. DÉMIDOVITCH et I. MARON, ÉLÉMENTS DE CALCUL NUMÉRIQUE, ÉDITIONS MIR MOSCOU, 1973