FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA INVERSA

Por Julia Ángela Ramón Ortiz

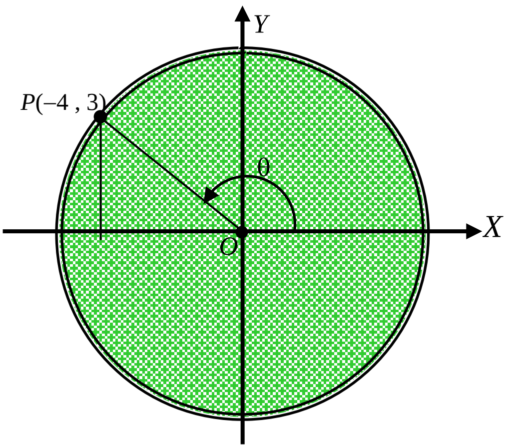
Desde que Descartes y Newton idearon el sistema de coordenadas cartesianas para relacionar expresiones algebraícas y geométricas, la trigonometría ha adoptado esta herramienta para enfocar ade manera más asequible su teoría a partir de puntos en la circunferencia unitaria en el plano cartesiano. Siendo el método de coordenadas desarrollado por **Descartes** **(*1596-1650*)** *para ubicar un punto del plano fue fundamental para la evolución del concepto de función trigonométrica, que se sonstituye en una de las bases para que Isaac Newton inventara el cálculo diferencial e integral, sustentada en la representación de muchas funciones matemáticas utilizando series infinitas de potencias de la variable x. Desarrollando series para el* $\mathrm{sen}(x)$, $\cos(x)$ *y la* $\tan(x)$*; que hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.*

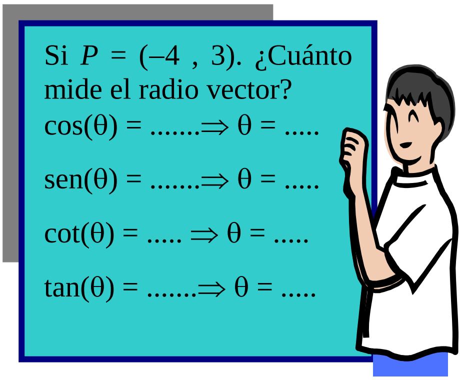
En el siglo XVIII, el físico y matemático suizo Leonhard Euler, explicó que las propiedades de la trigonometría eran consecuencia de la aritmética de los números complejos. Estudió además la notación actual de las funciones trigonométricas y se le atribuye el descubrimiento de la letra e como base del logaritmo natural, así como la unidad imaginaria que generalmente se denota con la letra i. Euler también popularizó el número pi (π).

Durante el siglo XX la trigonometría ha realizado muchos aportes en el estudio de los fenómenos de onda y oscilatorio, así como el comportamiento periódico, el cual se relaciona con las propiedades analíticas de las funciones trigonométricas. En astronomía se utiliza para medir distancias a estrellas próximas, para la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación satelital; así como el desarrollo de la informática, las telecomunicaciones y la comprensión de diversos fenómenos periódicos.

De lo mencionado líneas arriba, en este estudio se hace un breve resumen de las funciones trigonométricas inversas apartir de las respectivas funciones trigonométricas que por su esencia períodica se hace necesario algunas restricciones de sus dominios para un estudio pertinente de sus funciones inversas.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS





OBJETIVO:

Al término del estudio de esta unidad estará en condiciones de:

DETERMINAR LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS, IDENTIFICANDO SUS DOMINIOS Y RANGOS, GRÁFICOS Y SUS APLICACIONES EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.

REQUISITOS

¡*Para abordar el estudio de esta unidad es preciso que conozcas*!

1. *Funciones trigonométricas seno, coseno y tangente*.
2. *Gráfica y algunas propiedades de las funciones seno, coseno y tangente*.
3. *Funciones inyectivas y crecientes.*
4. *Inversa de funciones reales de variable real*.
5. *Composición de funciones reales de variable real inversas*.
6. *Gráfica de las funciones inversas*.

OBJETIVOS

¿*Qué lograremos en esta unidad*?

1. *Identificar gráficamente funciones invertibles.*
2. *Definir la función arco coseno, trazar su gráfica e identificar propiedades*.
3. *Definir la función arco seno, trazar su gráfica e identificar propiedades*.
4. *Definir la función arco tangente, trazar su gráfica e identificar propiedades*.
5. *Identificar las inversas de las funciones cotangente, secante y cosecante, trazando sus gráficas correspondientes*.

CONTENIDOS

¿*Qué aprenderemos a través de esta unidad*?

4.1. *Función inversa*
4.2. *Función inversa del Seno*
4.3. *Función inversa del Coseno*
4.4. *Función inversa de la Tangente*
4.5. *Función inversa de la cotangente, secante y cosecante.*

DESARROLLO

EXPLORACIÓN-MOTIVACIÓN-PROBLEMATIZACIÓN

TEMA 1: Despejar la variable independiente en función de la dependiente.

1) Dado la función $y = 3x + 1$, para despejar x en términos de y, se transponen al primer miembro el término independiente 1, luego el factor 3; es decir de $y = 3x + 1$, se tiene $y - 1 = 3x$, luego: $\frac{y-1}{3} = x$, o sea: $x = \frac{y}{3} - \frac{1}{3}$. Aquí resulta que x es función de y, dado por $x = g(y) = \frac{y}{3} - \frac{1}{3}$ para $y \in \mathbf{R}$, luego $y = 3x + 1$ equivale a $x = \frac{y}{3} - \frac{1}{3}$. Además $y = 3x + 1$, para $x \in \mathbf{R}$ es una función inyectiva.

Gráficamente:

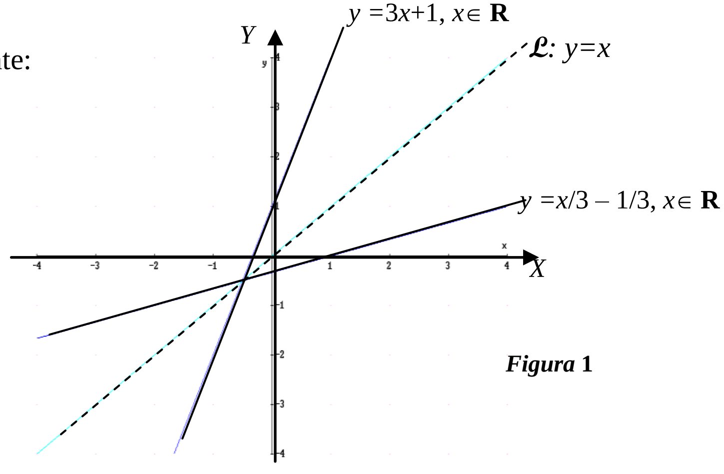


***Figura* 1**

2) Dado la función $y = x^2 + 1$, al despejar x en términos de y, se tiene:
De $y = x^2 + 1$, $y - 1 = x^2$ o sea $|x| = \sqrt{y-1}$, que está definido para $y - 1 \geq 0$, o sea $y \geq 1$. Por definición de valor absoluto, resulta: $x = \sqrt{y-1}$ ó $x = -\sqrt{y-1}$; que definen dos funciones: $x = \sqrt{y-1} = g(y)$ y $x = -\sqrt{y-1} = h(y)$, como $x \in \mathbf{R}$, la función $y = x^2 + 1$, no es inyectiva.

Pero si consideramos $x \geq 0$: la función $y = x^2 + 1$, equivale a $x = \sqrt{y-1}$ y es inyectiva.
Análogamente, si $x \leq 0$, la función $y = x^2 + 1$, equivale a $x = -\sqrt{y-1}$ y es inyectiva.

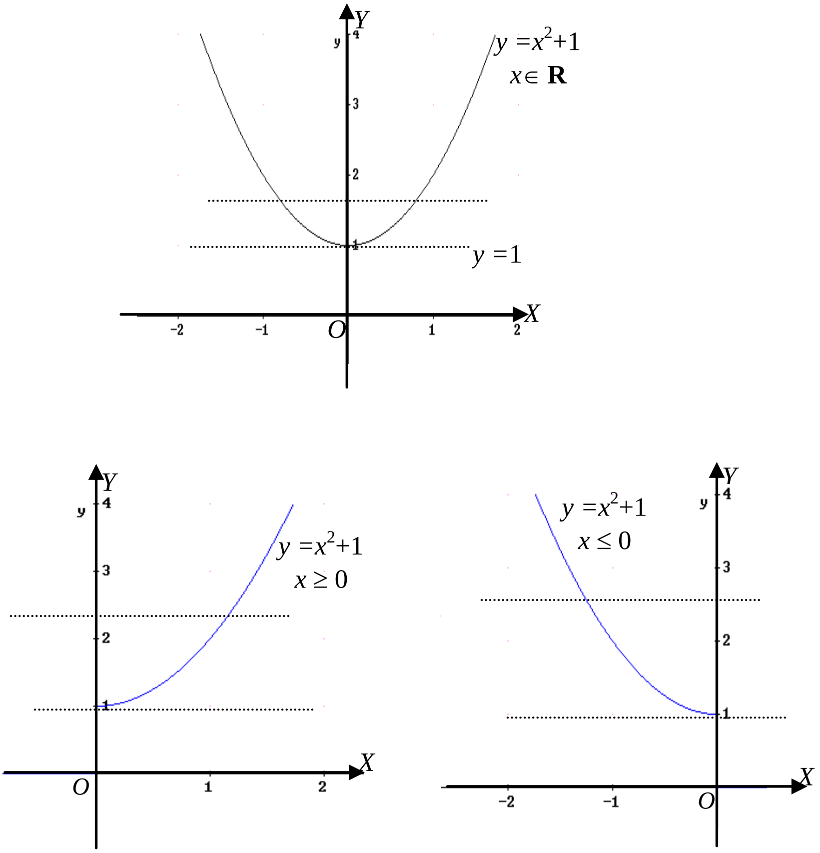


***Figura* 2**

1. FUNCIÓN INVERSA

Dada la función $y = f(x)$, con dominio $\mathbf{A} \subset \mathbf{R}$ y rango $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}$, e inyectiva al despejar x de $y = f(x)$ resulta $x = g(y)$, intercambiando x e y, se tiene: $y = g(x)$ para $x \in \mathbf{B}$ e $y \in \mathbf{A}$, se llama función inversa de f y se denota por f^{-1}. Luego: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ o $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$.

EJEMPLOS

1) Si $y = 2x - 3/2$ es una función, cuya gráfica es una recta; la función inversa $x = (2y+3)/4$ ó $f^{-1}(x) = (2x+3)/4$ también tiene por gráfico una recta. Las gráficas de estas funciones, son simétricas respecto a la bisectriz $y = x$ de los ángulos del primer y tercer cuadrante.

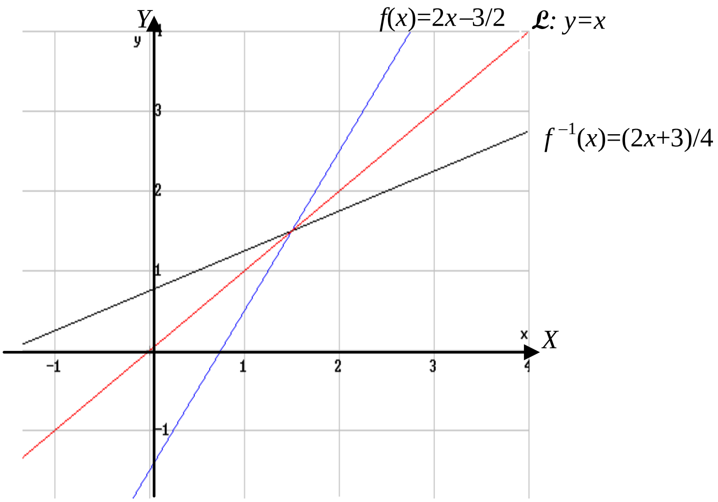


***Figura* 3**

2) Dado $y = f(x) = x^2$ (función directa), cuyo gráfico es una parábola que se abre hacia arriba.

La recta $y = 2$, intercepta a la gráfica en dos puntos.

La función $y = f(x) = x^2$ no es inyectiva en todo su dominio.

Restringiendo el dominio a $[0\ ,+\infty\ [$, al despejar x en términos de y, se obtiene: $x = \sqrt{y}$ y resulta $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, las gráficas de estas funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$, se exhibe en la figura 4.

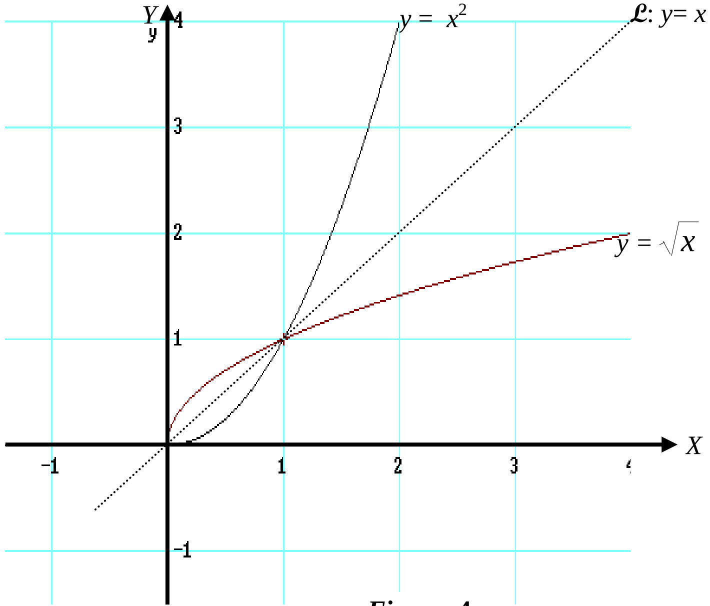


Figura 4

¡RECUERDE!:

Para proceder a estudiar las funciones trigonométricas inversas es preciso recordar que la función $y = f(x)$, con dominio A y rango B, sea inyectiva:

1. De $y = f(x)$ se tiene $x = g(y)$, o sea $x = f^{-1}(y)$ con $y = f(x)$, y en el dominio de f^{-1}.
2. Intercambiando x e y: $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$
3. dominio de f^{-1} = rango de f.
4. rango de f^{-1} = dominio f.
5. $f(f^{-1}(x)) = x$, para todo x en el dominio de f^{-1}.
6. $f^{-1}(f(y)) = y$, para toda y en el dominio de f.
7. Las gráficas de f^{-1} y f son simétricas respecto a la recta $y = x$.

EJERCICIOS

1) Analice si la función $y = \dfrac{x-1}{x+3}$, admite inversa en su dominio:

a) despeje *x* en términos de *y*, en caso fuera posible.

b) grafique la curva correspondiente

c) Identifique un intervalo donde la función es inyectiva

2) Con ayuda de la circunferencia unitaria, desarrolle según el caso amerite:

a) si $\text{sen}(\alpha) = 1/3$, entonces $\alpha =$ ....

b) si $\text{sen}(\alpha) = -1/2$ y $\cos(\propto) < 0$, entonces $\alpha =$ ....

c) si $\tan(\alpha) = -4/3$ y $\alpha \in \,]\pi/2\,,\,\pi[$, entonces $\alpha =$ ....

d) si $\cot(\alpha) = -1$ y $\text{sen}(\alpha) < 0$, entonces $\alpha =$ ....

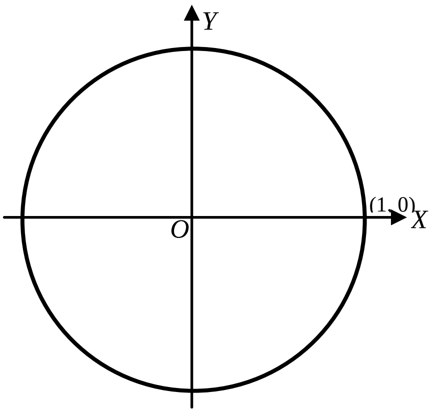


***Figura* 5**

e) si $\text{sen}(\alpha) = 0$, entonces $\alpha =$ ....

f) si $\cos(\alpha) = 0$, entonces $\alpha =$ ....

f) si $\propto = -7\pi/4$, entonces $\cot(\alpha) =$ ....

3) De las gráficas estudiadas en la unidad 3, ¿las funciones trigonométricas son inyectivas?................... ¿admiten inversa en todo su dominio? .... Al analizar las propiedades y gráficas de cada una de ellas, nos encontramos con la dificultad de que ninguna de las funciones trigonométricas es inyectiva, puesto que son periódicos. Pero podemos restringir adecuadamente el dominio de las funciones; de tal manera que estas funciones sean inyectivas, por lo que a las inversas de estas funciones inyectivas la llamaremos función inversa de la función trigonométrica en referencia, así tenemos:

2. FUNCIÓN INVERSA DEL SENO

Recordando la expresión: y = sen (x).

Dado $x \in$ **R**, obtendremos el valor de sen(x) = y, como una regla de correspondencia.

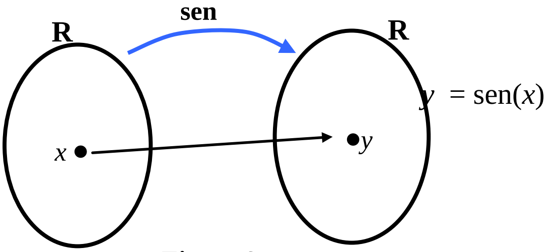


***Figura* 6**

Dado que el rango del seno es [–1 , 1], para $c \in$ [–1 , 1], resulta que sen(x) = c, para algún $x \in$ **R**, es decir, dado el valor del sen(x) obtener número real "x".

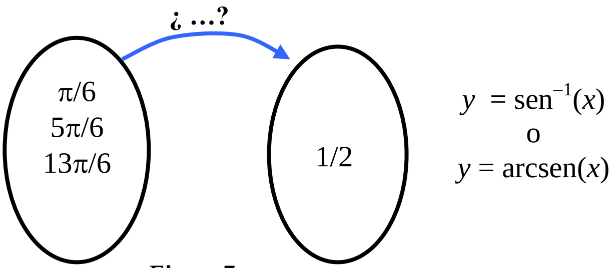


***Figura* 7**

Por ejemplo, para $x = \pi/6, 5\pi/6, 13\pi/6, 17\pi/6$, etc. se tiene sen($x$) = 1/2, es decir: sen($\pi$/6) = sen(5$\pi$/6) = sen(13$\pi$/6) = ...= 1/2; que asegura que la función seno, no es inyectiva.

Para despejar x de y = sen(x) y resulte $x = g(y)$, necesitamos considerar un dominio adecuado en donde la función seno sea inyectiva y admita función inversa.

¿Cómo tener el dominio de la función seno a partir de su gráfica para que sea inyectiva?

Para los intervalos: [–3π/2 , –π/2], [–π/2 , π/2], etc., como dominio la función resulta inyectiva. Sea el intervalo [–π/2 , π/2] donde los valores de la función varía desde .... hasta 1, si x varía desde ...... hasta .... Esta función restringida (como se muestra en la figura 4-8) usaremos para definir la **función inversa del seno.**

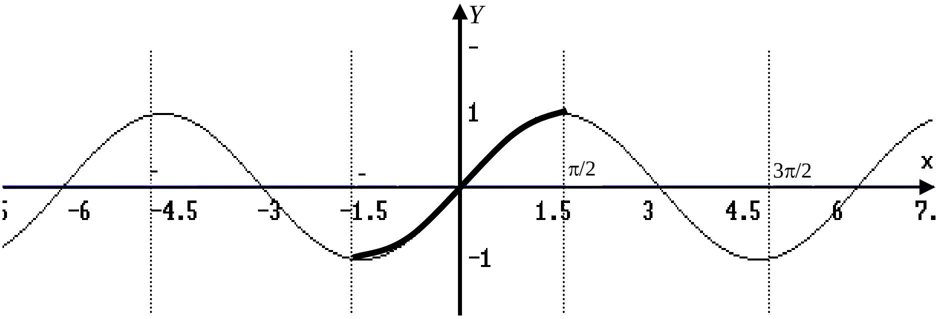


***Figura* 8**

DEFINICIÓN: La función inversa de la función seno a la función: sen^{-1} o Arcsen, cuyo dominio es el intervalo: $[-1\ ,\ 1]$ y el rango $[\ -\pi/2\ ,\ \ \pi/2]$, definida por:

$$\text{Arcsen}(x) = \text{sen}^{-1}(x) = \ y \quad \Leftrightarrow \quad \text{sen}(y) = x.$$

Así, si $y = \text{sen}(x)$, tendremos que $x = \text{Arcsen}(y)$**.** De aquí: $y = \text{Arc sen}(x)$ es la función inversa de la función seno, donde para todo $y \in [-\pi/2\ ,\ \pi/2]$ existe un único $x \in [-1\ ,\ 1]$ tal que $\text{arcsen}(x) = y$.

OBSERVACIÓN: A la expresión: $\text{Arcsen}(x) = y$ se lee "*y* es el **arco** cuyo **seno** es *x*"

De la propiedad $y = \text{arcsen}(x) \Leftrightarrow \text{sen}(y) = x,\quad y \in [-\pi/2\ ,\ \pi/2],\ \ x \in [-1\ ,\ 1]$, se tiene:

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1}(y)) = \text{sen}(\text{arcsen}(y)) = y, \qquad \text{para } -1 \le y \le\ 1,$$
$$\text{sen}^{-1}(\text{sen}(x)) = \text{arcsen}(\text{sen}(x)) = x, \qquad \text{para } -\pi/2 \le\ x \le \pi/2$$

EJEMPLOS:

1) $\text{sen}(\text{arcsen}(1/2)) =\ 1/2$ o $\text{arcsen}(1/2) = y \Leftrightarrow \text{sen}(y) = 1/2$, para $y \in [-\pi/2\ ,\ \pi/2]$. Se cumple para $y = \pi/6$.

2) $\text{arcsen}[\text{sen}(-\pi/3)] =\ -\pi/3$ como $-\pi/3 \in [-\pi/2\ ,\ \pi/2]$, $\text{arcsen}(-\pi) = y \Leftrightarrow -\pi/3\ = \text{sen}(y)$; se cumple para el único valor $y = -\sqrt{3}/2$, pues $\text{sen}(-\pi/3) = -\sqrt{3}/2$

3) Sin embargo, $\text{arcsen}(\text{sen}(3\pi/4)) \neq 3\pi/4$; pues $3\pi/4 \notin [-\pi/2\ ,\ \pi/2]$. Realizando cálculos $\text{sen}(3\pi/4) = \text{sen}(\pi - \pi/4) = \text{sen}(\pi/4)$, y luego, $\text{arcsen}(\text{sen}(3\pi/4)) = \pi/4$

4) En la gráfica de $y = \text{arcsen}(x)$; ubique los valores de: $\text{arcsen}(1/2)$, $\text{arcsen}(2)$ y $\text{arcsen}(-1/3)$, en caso de que sea posibles hallarlos.

5) arcsen(π/3) + sen($-\pi$/6) = $\sqrt{3}/2 - 1/2 = (\sqrt{3} - 1)/2$.

6) Probar que arcsen($1/\sqrt{5}$) + arcsen($2/\sqrt{5}$) = π/2.

Para esto, sea α = arcsen($1/\sqrt{5}$) y β = arcsen($2/\sqrt{5}$), entonces: sen(α) = $1/\sqrt{5}$ y sen(β) = $2/\sqrt{5}$ con E(α) y E(β) en el I-C. Hay que probar que $\alpha + \beta$ = π/2, o que sen($\alpha+\beta$) = sen(π/2), ya que los senos de ángulos iguales son iguales.

Para resolver esto, veremos más adelantes ciertas propiedades:

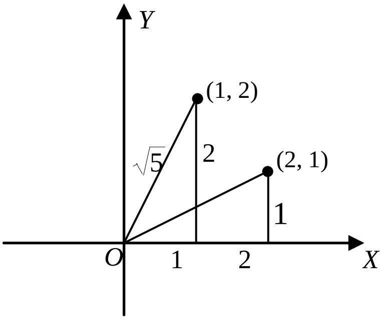


***Figura* 9**

EJERCICIOS

1. ***Encuentre los valores que corresponden a:***

a) Arcsen(3/5) = ...…….. d) Arcsen(–12/13) = ...

b) $\text{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$ = …………. e) $\text{sen}^{-1}(\sqrt{2}/2)$ = …………….

c) Arcsen (–1/2) = ……….. f) Arcsen (–1) = ………………..

3. Halle $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, tal que sen($2x$) = $-1/2$ ....

4. Halle $x \in [-\pi, 2\pi]$, tal que sen(x/2) = $\sqrt{3}/2$ ....

5. Determine el rango de la función $f(x)$ = 2arcsen[$(4-6x)/11$].

<u>GRÁFICA DE LA FUNCIÓN *y* = arcsen(*x*):</u> Para graficar la curva y = arcsen(x), tomar los puntos: (π/2 , 1), (0 , 0), ($-\pi$/2 , -1) de la gráfica y = sen(x), con $-\pi/2 \le x \le \pi/2$; cuyas coordenadas intercambiadas: (1, π/2), (0, 0) y (-1,$-\pi$/2) están en la curva y = arcsen(x). En la figura 4-10, trace las gráficas de la función seno y de arco seno en los ejes de coordenadas, figuras 10-(a) y 10-(b), respectivamente. A partir de los puntos descritos y haciendo un giro alrededor de la recta $y = x$, se obtiene la gráfica de y = Arc sen(x):

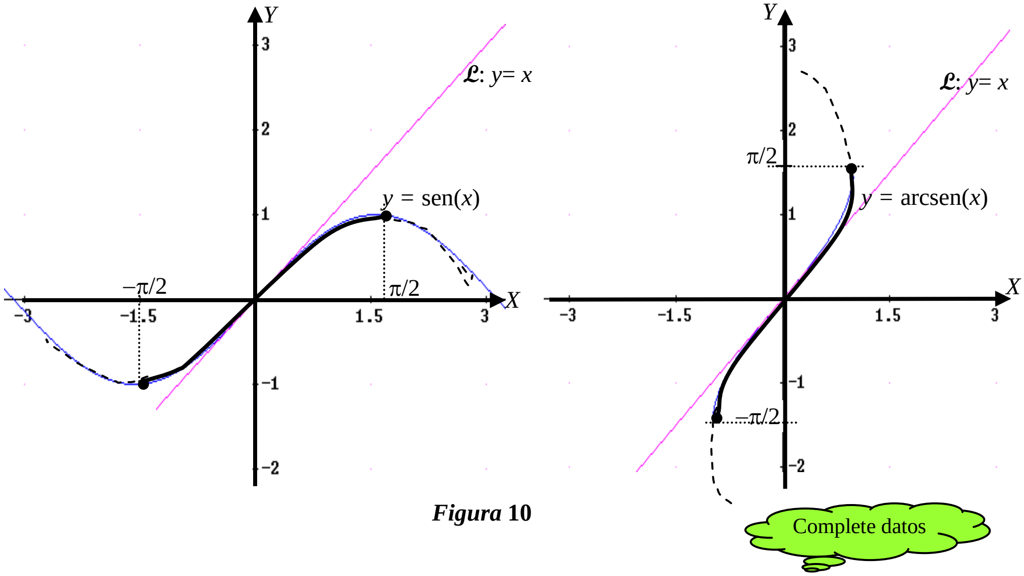


***Figura* 10**

(a)

x	$-\pi/2$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$
y=sen(x)	-1		$-1/2$	0	1/2		1

..

(b)

x	-1	1	$-1/2$	0			1
y =$\text{sen}^{-1}(x)$	$-\pi/2$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$

Recuerda que el gráfico de la función y = arcsen(x) que se construya en la ***figura 4-10***, deben satisfacer las siguientes propiedades:

- El dominio es el intervalo $[-1 , 1]$.
- El rango de arcsen es el intervalo $[-\pi/2 , \pi/2]$, es decir, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.
- La función y = arcsen(x) se hace nula cuando $x = 0$.
- Los intervalos de signo constante son:
  Arcsen(x) > 0, para $x \in\ ]0 , 1]$; arcsen(x) < 0, para $x \in [-1 , 0[$.
- La función y = srcsen(x) es creciente sobre el intervalo $[-1 , 1]$, obteniendo su valor mínimo, igual a $-\pi/2$ en el extremo izquierdo del intervalo; y, el valor máximo igual a $\pi/2$ en el extremo derecho del intervalo $[-1 , 1]$.

- La gráfica de la función y = arcsen(x) es simétrico respecto al origen de coordenadas, así los puntos (π/2 , 1) y (–1 , –π/2), pertenecen a la gráfica.

RECUERDE: se escoge el valor de y en el rango [–π/2 , π/2] del arcsen.

Función	**Expresión equivalente**	**solución**
.y = arcsen(1/2)	sen(y) = 1/2 y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$	$y = \pi/6$
.y = arcsen(–1/2)	.... y	....
.y = arcsen(–1)	.... y	....
.y = arcsen($-\sqrt{2}/2$)	.... y	....
	.... y	....
.y = arcsen($-\sqrt{3}/2$)	.... y	....
.y = arcsen(0)	…………… y ……………	……………………

3. FUNCIÓN INVERSA DEL COSENO

¿Cómo restringir el dominio de la función coseno de modo que resulte inyectiva?

Al trazar una horizontal en y = 1/2, en la curva y = cos(x), se observa que

cos(–2π) =cos(0) = cos(2π) = 1, por tanto la función coseno **no** es inyectiva.

Se observa que la función es inyectiva en los intervalos: [–2π , –π], [–π , 0], [0 , π], [π , 2π], etc. De estos consideremos el intervalo [0 , π] donde los valores de la función varía desde ...... hasta –1, si x varía desde .... hasta ..... Esta función restringida sirve para definir la **función inversa del coseno.**

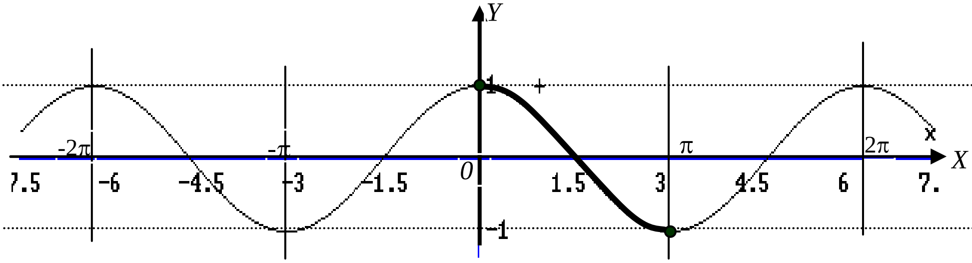


***Figura* 11**

DEFINICIÓN: La función inversa de la función coseno es la función: $\cos^{-1}$ o arccos, cuyo dominio es el intervalo: [–1 , 1] y el rango [0 , π], donde:

$$\text{Arccos}(x) = \cos^{-1}(x) = y \iff \cos(y) = x.$$

Así, si $y = \cos(x)$ se tiene $x = \text{Arccos}(y)$. De donde: $y = \text{Arccos}(x)$ es la función inversa de $y = \cos(x)$. De esta manera para $y \in [0, \pi]$ existe un único $x \in [-1, 1]$ tal que $\arccos(x) = y$.

OBSERVACIÓN: $\arccos(x) = y$ se lee "*y* es el **arco** cuyo **coseno** es *x*"

De la propiedad $y = \arccos(x) \Leftrightarrow \cos(y) = x$, $y \in [0, \pi]$, $x \in [-1, 1]$, se tiene:

$$\cos(\cos^{-1}(y)) = \cos(\arccos(y)) = y, \quad \text{para } -1 \leq y \leq 1,$$

$$\cos^{-1}(\cos(x)) = \arccos(\cos(x)) = x, \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi,$$

EJEMPLOS:

1) $\cos[\arccos(3/5)] = 3/5$, puesto que $3/5 \in [-1, 1]$.

2) $\text{Arccos}[\cos(\pi/4)] = \arccos(\sqrt{2}/2)$, puesto que $\pi/4 \in [0, \pi]$ y $\sqrt{2}/2 \in [-1, 1]$.

3) $\text{Arccos}[\cos(-\pi/3)] \neq -\pi/3$. Pues:

$\cos(-\pi/3) = \cos(\pi - 2\pi/3) = \cos(\pi/3)$, del cual, $\arccos(\cos(-\pi/3)) = \pi/3$

4) En la gráfica de $y = \arccos(x)$, determine: $\arccos(1/2)$, $\arccos(2)$ y $\arccos(-1/3)$, en caso de que sean posibles.

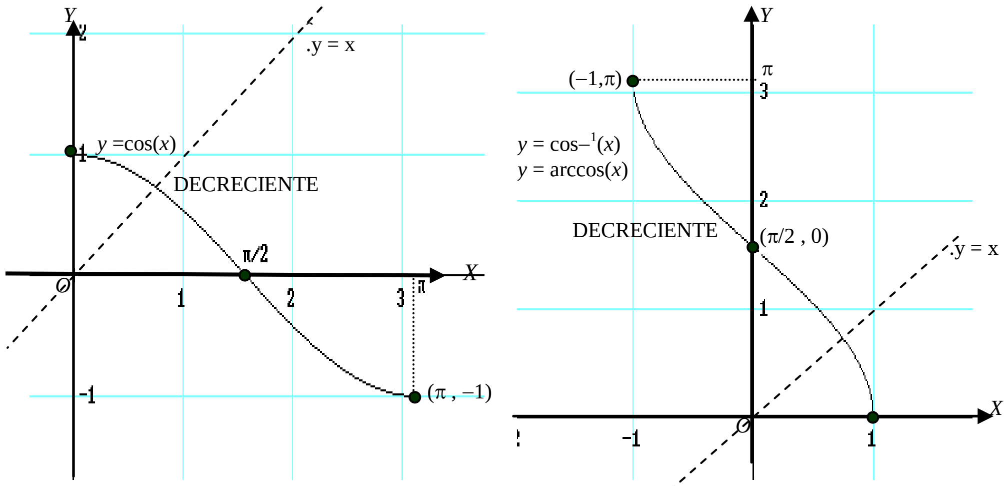
5) Para evaluar $\cos[\text{arcsen}(3/5)]$. Sea $\theta = \text{arcsen}(3/5)$, entonces $\text{sen}(\theta) = 3/5$, como θ está en el I-cuadrante, se tiene que $\cos(\theta) = 4/5$.

RECUERDE: que es esencial escoger el valor de *y* en el rango $[0, \pi]$ de arccos.

Función	Expresión equivalente	solución
$.y = \arccos(1/2)$	$\cos(y) = 1/2$ y $0 \leq y \leq \pi$	$. y = \pi/3$
$.y = \arccos(-1/2)$	.... y	....
$.y = \arccos(1)$	.... y	....
$.y = \arccos(-\sqrt{2}/2)$	.... y	....
$.y = \arccos(-\sqrt{3}/2)$	.... y	....
$.y = \arccos(0)$	.... y	....

<u>**GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $y = \arccos(x)$:**</u> Para dibujar la curva $y = \arccos(x)$, tomaremos las coordenadas de cada punto de la curva $y = \cos(x)$, sobre $0 \leq x \leq \pi$, intercambiando de posición las coordenadas: $(0, 1)$, $(\pi/2, 0)$, $(\pi, -1)$ pertenecen a la gráfica de $y = \cos(x)$, se tiene que $(1, 0)$, $(0, \pi/2)$, $(-1, \pi)$

pertenecen a la gráfica de y = arccos(x). Estando la gráfica de y = cos(x) en los intervalos establecidos, se tiene la gráfica de y = Arccos(x), haciendo un giro alrededor de la recta $y = x$. (figura 12).



(a) Gráfica de la función coseno, restringida

Figura **12**

(b) Gráfica de la función inversa del seno.

Complete datos

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	3π/4	5π/6
y=cos(x)	1				0		

…

x	−1	...	…	0	…	…
y= arccos(x)	0			π/2		

Desde el gráfico, podemos anotar las siguientes propiedades de la función y = arccos(x):

- El dominio es el intervalo [.. , ..].
- El conjunto de valores o rango es el intervalo [... , π].
- La función arccos(x) toma valor cero: arccos(x) = 0, para x = ...
- El valor de la función : arcscos(x) ≥ ......, para todo x ∈[−1 , 1].
- La función arccos(x) es decreciente en el intervalo [−1 , 1], siendo su valor máximo igual a π, en el extremo .... del intervalo; y, el valor mínimo igual a ......, en el extremo derecho del intervalo [−1 , 1].
- La curva y = arccos(x) no es simétrica respecto al origen de coordenadas ni a los ejes coordenados.

EJERCICIOS

1. **Encuentre los valores que corresponden a:**

a)arccos(–4/5) = ... d) sen[arcsen(1/2)] +cos[arccos(1/3)] = ...

b) arccos(–5/13) = ... e) arcsen[sen(30º)] + arcos[cos(10º)] = ...

c) arccos(–1/2) = ... f) arcsen[sen(60º)] + arcos[cos(53º)] = ...

2. ¿Existe respuesta para $\text{Cos}^{-1}(2{,}5)$? .... ¿Por qué? ....

3. Evalúe el valor de sen[arccos(–2/3)]

4. Calcule: $5\tan[\tfrac{1}{2}\operatorname{arcsen}(41/41)]$

4.4. FUNCIÓN INVERSA DE LA TANGENTE

¿Cuál es un intervalo sobre el cual la función y = tan(x) es inyectiva? Observe la gráfica y = tan(x) (**figura 4-13**), la función está definida por tramos:]–3π/2 , –π/2[,]–π/2 , π/2[,]π/2 , 3π/2[, etc. y tomamos el intervalo]–π/2 , π/2[para definir la **función inversa de la tangente.**

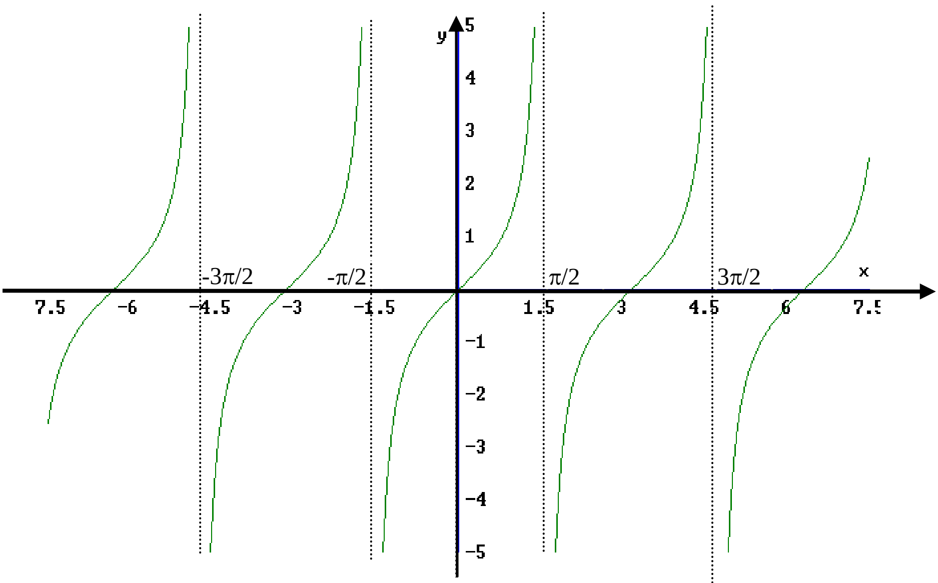


Figura **13**

La función inversa de la tangente, denotado por $\mathbf{tan}^{-1}$ o **arctan** se llama arco tangente y se define mediante:

arctan : R ⟶] –π/2 , π/2[, donde arctan(*x*) = *y* ⇔ tan(*y*) = *x*

Así, si y = tan(x) se tiene x = arctan(y). De esto y = Arctan(x) es la función inversa de y = tan(x). De y = arctan(x) ⇔ x = tan(y), resulta:

$\tan(\tan^{-1}(\boldsymbol{x})) = \tan(\arctan(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$, ($\boldsymbol{x}$ es un número real cualquiera),

$\tan^{-1}(\tan(\boldsymbol{y})) = \arctan(\tan(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{y}$, para $-\pi/2 < \boldsymbol{y} < \pi/2$,

EJEMPLOS:

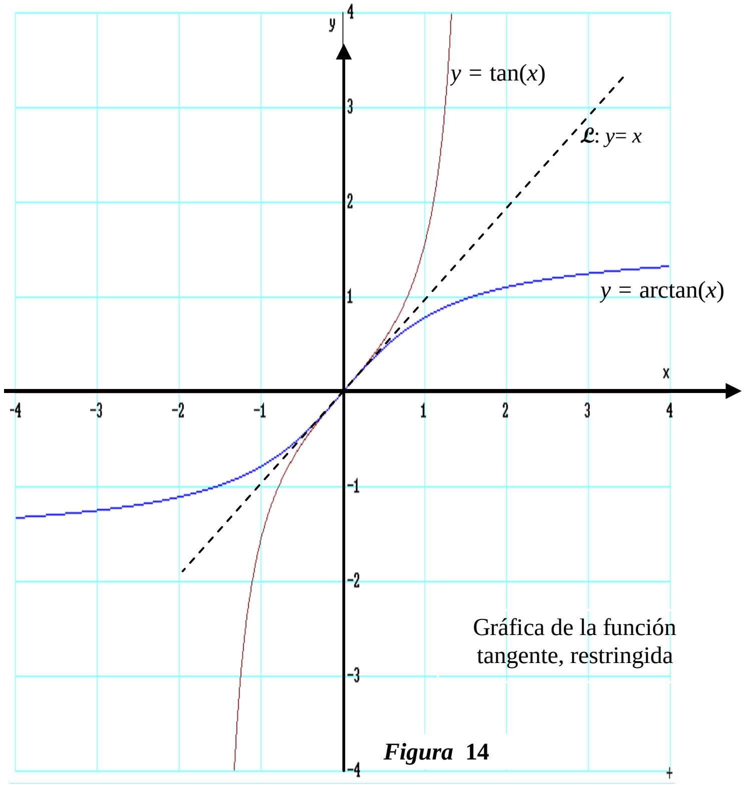
1) tan(arctan(1)) = tan(π/4) = 1

2) arctan(tan(π/3)) = arctan($\sqrt{3}$) = π/3

3) $\arctan\left(\tan(-3\pi/4)\right) \neq -3\pi/4$, puesto que el ángulo –3π/4 sale de los límites del intervalo]–π/2 , π/2[. Pero arctan[tan(–3π/4)] = arctan(tan(π –3π/4)) = arctan(1) = π/4, de donde arctan(tan(–3π/4) = π/4.

4) En la gráfica de la función *y* = arctan(*x*), determine: arctan(2), arctan(7) y arctan(–3), en caso de que sean posibles.

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN *y* = arctan(*x*): La curva *y* = arctan(*x*), coincide con la curva de la función *x* = arctan(*y*), cuando la variable *y* varía en el intervalo]–π/2 , π/2[, como se muestra a continuación (figura 14).



Gráfica de la función tangente, restringida

***Figura* 14**

IMPORTANTE
Trace la gráfica de arco tangente reflejando la curva tangente dada respecto a la recta *y*=*x*, guíate en los puntos (–π/4 , –1), (0 , 0) y (π/4 , 1), pertenecen a la tangente, y sus correspondientes simétricos respecto a *y* = *x*, son (–1 , –π/4), (0 , 0) y (1 , π/4). Asimismo, la asíntotas verticales *x* =–π/2, *x* = π/2 se convierten en asíntotas horizontales

En el gráfico anterior (**figura 14**), notamos algunas propiedades de la función *y* = arct*a*n(*x*):

- El dominio es el conjunto ...... de los números reales.
- El conjunto de valores o rango es el intervalo]... , ...[.
- Los ceros de la función son: $\arctan(x) = 0$, para x = ...
- Los intervalos de signo constante son:

  $\arctan(x) > 0$, para $x \in$]... , ... [; $\arctan(x) <$ ..., para $x \in [-\infty, 0[$.
- La función $\arctan(x)$ es ...., sobre todo su dominio.
- La gráfica de $\arctan(x)$ es simétrico respecto al ....

5. FUNCIONES INVERSAS DE LA COT, SEC Y CSC

De manera análoga a como hemos razonado para las funciones inversas del seno, coseno y tangente, se procede para las funciones trigonométricas cotangente, secante, cosecante cuyas gráficas se construyen a partir de las funciones restringidas (figura 15):

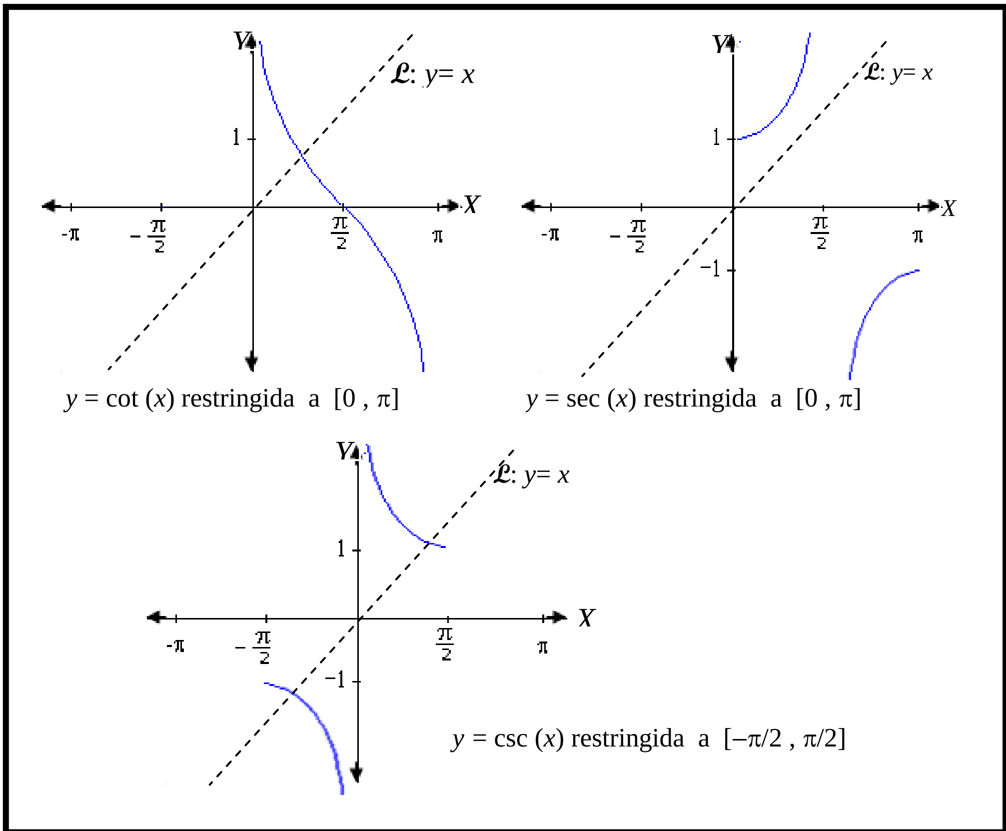


***Figura* 15**

EJERCICIOS:

Halle el valor de x, en cada caso:

a) $\text{sen}(x) = -1/2$ b) $\cos(x) = \sqrt{3}/2$ c) $\text{arcsen}(x) = \pi/2$ d) $\arctan(x) = 2$.

e) $\text{sen}(2x) = \sqrt{2}/2$, $x \in [0, 2\pi]$ f) $\cos(x/2) = -1$.

Comprueba tu aprendizaje

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones reales de variable real admiten inversa?

   a) $f(x) = x^2 + 2$ b) $g(x) = 2x^3$

   c) $h(x) = 2x - 5$ d) $i(x) = 1/x + 1$

2. Calcule:

   a) $E = \arctan(1) + \arctan(\sqrt{3})$ b) $E = \text{arcsec}(2) + \text{arcsec}(\sqrt{2})$

   c) $E = \arccos(\sqrt{3}/2) + \text{arcsen}(-1/2)$ d) $E = \text{arcsen}(5/7) + \arccos(5/7)$

3. Calcule:

   a) $\cos(\text{arcsen}(0{,}8))$ b) $\tan[\frac{1}{2}\arccos(1/2)]$

   c) $\cos[2\arctan(\sqrt{3}) - \text{arcsen}(1/2)]$ d) $\text{sen}(2\text{arcsen}(x))$, $(0 < x < 1)$

4. Calcule:

   a) $\text{sen}[\arccos(-1/2) + \text{arc}(\tan(4/3))]$ b) $\tan[\text{arcsen}(-1/3) - \arccos(2/3)]$

   c) $\cos[\arctan(\sqrt{3}/2) - \text{arcsen}(12/13)]$ d) $\cot[\arctan(-2/3)] + \arccos[\tan(-12/5)]$

5. Analice el cumplimiento de las siguientes propiedades:

   a) $\arctan(1) + \arctan(1/2) = \arctan(3)$ b) $2\arccos(x) = \pi$.

   c) $\text{sen}[\arccos(-1/2)] = -1/2$ c) $\cos[\text{arcsen}(4/5) + \arctan(3/4)] = 1$

6. Demuestre las siguientes identidades:

   a) $2\arctan(1/2) = \arctan(4/3)$ b) $2\arctan(1/3) + \arctan(1/7) = \pi/4$

   c) $\text{arcsen}(4/5) + \text{arcsen}(3/4) = \pi/2$ d) $\arccos(12/13) + \arctan(1/4) = \text{arccot}(43/32)$

7. a) Pruebe que: si $-1 < x < 1$, entonces $\text{arcsen}(x) + \arccos(x) = \pi/2$.

   b) si $\text{sen}(\theta) = y$ con $0 < y < 1$. Exprese en términos del arcsen el arccos y el arctan

c) Determine la verdad o falsedad de: arcsen(3/5) = arccos(4/5) = arctan(3/4).

d) Halle el intervalo de variación de "θ" para arcsen[(θ+1)/2].

8. Completa en los espacios subrayados:

a) La función inversa de la tangente se denota ....

b) La función tangente inversa se define como la inversa de la función .... restringida al Dominio]$-\pi/2$, $\pi/2$[.

c) El dominio de la función Tangente inversa es ....

d) El rango de la función Tangente inversa es ....

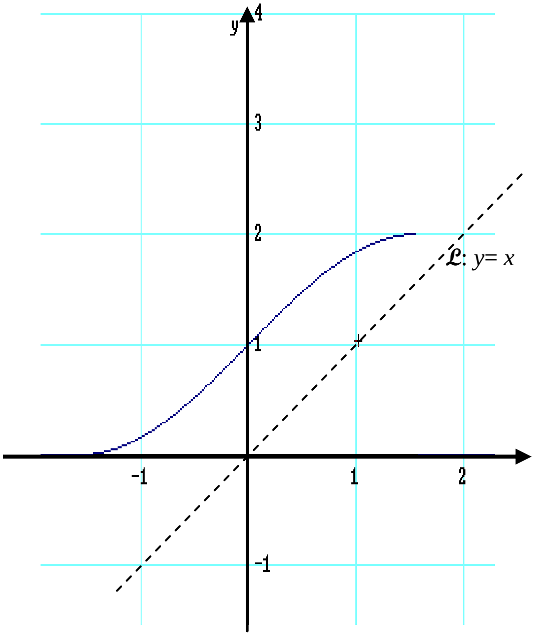
9. Trace el gráfico de las siguientes funciones:

a) y = arcsen(x) + 1 c) y = arctan(x + 1)

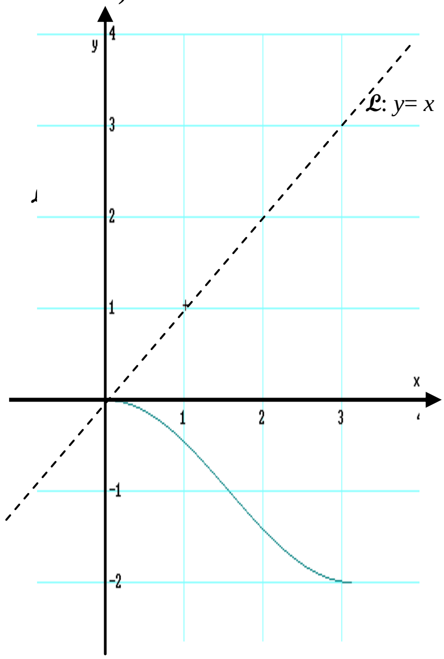
b) y = arcsen(2x) d) y = arccos(3x)

10. Dada las curvas: identifique dominio y rango, trace el gráfico de sus inversas, si es que existe:

a)



b)



BIBLIOGRAFÍA

1. BOYLE, Patrick (1990) *Trigonometría con Aplicaciones: Con ejercicios para calculadora.* México D.F. : Harla.

2. HAASER, N., LASALLE, J. & SUVILLAN, J. (1980) *Análisis Matemático I*. Curso de introducción. México D.F.: Editorial Trillas

3. NICHOLS, E. & GARLAND, E. (1975) *Trigonometría Moderna*. México: Editorial Continental S.A.

4. SWOKOWSKI, E. (1996) *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México D.F.: Editorial Iberomaricana, S.A. de C.V.

5. TSIPKIN, A. (1985) *Manual de matemáticas para la enseñanza media*. Moscú: Editorial Mir.

6. SAÉNZ, Jorge (S/A) *Vectores, geometría y trigonometría*. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

7. SCHOOL MATHEMATICS STUDY GOUP (1965) *Matemática para la Escuela Secundaria. Funciones Elementales*. Washington: organización de los Estados Americanos.