UNIDAD EDUCATIVA “SAMINAY – EL LEGADO”

“INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO APLICANDO LA DEFINICIÓN DE LÍMITES Y DERIVADAS EN LAS FUNCIONES REALES”

TRABAJO MONOGRÁFICO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE BACHILLER

AUTOR:

JUAN MIGUEL FUERES PERUGACHI

DIRECTOR:

LIC. OSCAR DAVID NOGALES ARCE

Inguincho- Otavalo

2014

UNIDAD EDUCATIVA "SAMINAY – EL LEGADO"

CERTIFICADO DE APROBACION DE MONOGRAFIA

En mi carácter de mentor de la Unidad Educativa "Saminay – El Legado" y de Director de la monografía presentada por el/la estudiante ***(JUAN MIGUEL FUERES PERUGACHI)*** *identificado(a) con cédula de ciudadanía ecuatoriana número 100411284-1, para optar por el título de Bachiller, certifico que la monografía que tiene por título* **("INTRODUCCION AL CÁLCULO APLICANDO LA DEFINICIÓN DE LÍMITES Y DERIVADAS EN LAS FUNCIONES REALES*")*** *reúne los requisitos especificados por el Ministerio de Educación por medio del documento "Instructivo para la Elaboración de la Monografía para Tercer Curso de Bachillerato General Unificado en Ciencias", así como el Artículo 200 del Reglamento General a la Ley Orgánica de Educación Intercultural, por lo que cuenta con los méritos suficientes para su aprobación.*

Se firma en San Juan de Inguincho, a los _____ días del mes de mayo de 2014.

ASESOR: ***FIRMAS:***

LIC. ***OSCAR DAVID NOGALES ARCE*** ______________________________

RECTOR(A) ***FIRMAS:***

PILAR LINDO ______________________________

Inguincho- Otavalo

2014

UNIDAD EDUCATIVA “SAMINAY – EL LEGADO”

CERTIFICADO DE AUTORIA Y CESION DE DERECHOS

Los estudiantes de 3º curso de Bachillerato General Unificado que firman este trabajo, manifiestan que, en cumplimiento de las actividades académicas para aspirar al título de bachiller, han elaborado la monografía que tiene por título **(“INTRODUCCION AL CÁLCULO APLICANDO LA DEFINICIÓN DE LÍMITES Y DERIVADAS EN LAS FUNCIONES REALES”)**, *incluyendo su planificación, diseño y ejecución, así como la interpretación de los resultados. Así mismo, revisaron críticamente el trabajo, aprobaron su versión final y están de acuerdo con su publicación de conformidad con el Capítulo VII y sus Artículos 223, 224, 225, 226 del Reglamento General a la Ley Orgánica de Educación Intercultural.*

Por otro lado, reconocemos que los derechos sobre la monografía pertenecen a la Unidad Educativa “Saminay – El Legado”.

No se ha omitido ninguna firma responsable del trabajo y se satisfacen los criterios de autoría.

AUTOR:	***FIRMAS:***
JUAN MIGUEL FUERES PERUGACHI	______________________________

Inguincho- Otavalo

2014

DEDICATORIA…

Para todos mis mentores del colegio “Saminay-El Legado”, en especial de las áreas; matemática y física quienes han despertado en mí el amor por conocer nuevos temas. A aquellos jóvenes de mi colegio, a quienes les encanta las Áreas antes mencionadas ya que es una introducción a un tema amplio y complejo con temas simples.

AGRADECIMIENTO…

Extiendo el más sincero agradecimiento por la ayuda que me ha brindado para hacer este trabajo, Lic.: David Nogales. Ing.: Javier Mena por ayudarme con la delimitación del tema y mentores de la institución quienes son indispensables en mis estudios.

A mis padres, quienes están siempre brindándome un apoyo incondicional en todos los aspectos necesarios para cualquier trabajo por realizar.

RESUMEN

El cálculo, son todas aquellas operaciones en su mayoría matemáticas que nos permite llegar a una solución partiendo solamente de algunos datos; por ende tiene muchas herramientas fundamentales que permite la resolución del mismo. Límites y derivadas son ejes fundamentales para lograr una introducción al cálculo, temas que brindan un conocimiento profundo de las funciones con sus respectivos gráficos; siendo así, la derivación es indispensable porque con ello podemos llegar a tener resultados efectivos en las aplicaciones, una de ellas la variación de velocidades en una trayectoria circular. Los límites de una función son los puntos críticos que se nos presentan al obtener cocientes por ceros que prácticamente forman parte de elementos indefinidos. Cuyos puntos se las demuestran con teorías planteadas como: el teorema del sándwich; reconociendo los diferentes casos de límites se nos hace más fácil el problema. Las funciones reales son todas aquellas relaciones entre conjuntos de valores tales que uno depende de otro, de esta manera permite también enlazar en el análisis de los límites y derivadas que son temas exclusivamente de este trabajo.

El cálculo es una ciencia inventada por Newton entre los años 1670 con el término fluxiones y fue publicada en 1678 con el nombre (PhilosophiaeNaturalis Principia Mathematica).

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Con todas las metas planteadas para mi porvenir, siendo uno de los temas muy necesarios para obtener la profesión a la cual aspiro, me ha llevado a elegir este tema; sin olvidar que también ayudaría a los estudiantes del último año de bachillerato en cuanto a esta materia, para poder entender con facilidad en los primeros pasos de la universidad. Una de las razones también ha sido el amor que tengo por los números, a pesar de tener muchos vacíos, deseo seguir aprendiendo sobre muchos temas novedosos. De esta manera presento esta investigación resumida de algunas fuentes diferentes.

Dentro del marco investigativo para la introducción al cálculo con límites, teoremas de límites y derivadas, trataremos lo posible por comprender como se gráfica una función real, demostración de límite, la derivación de funciones reales y sus aplicaciones. En el marco teórico tratamos los conceptos generales que se mencionan en los objetivos; general y específicos, ya que hay muchos términos importantes para lograr una debida comprensión. Prácticamente muchos conceptos no son amplios pero juegan un papel importante para comprender qué es una derivación; limites…

Después de cada concepto presentamos un ejemplo de aplicación, de esta manera demostramos la importancia de especificar el interés de la investigación. En dicha especificación mostramos adjunto algunas imágenes necesarias como es el caso de las gráficas de las funciones reales, tipo de funciones, etc. En el capítulo II se menciona específicamente sobre los temas necesarios para comprender sobre límites en distintas funciones que se pueden encontrar que justamente se encuentra en el capítulo posterior. En el capítulo V presentamos ejercicios resueltos de algunos casos de derivación, de esta manera finalizando con las aplicaciones de las derivadas dentro del cálculo.

¿CÓMO APLICAMOS LA DEFINICIÓN DE LÍMITES Y DERIVADAS EN LAS FUNCIONES REALES?

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN:

- MÉTODO CUANTITATIVO
  - MÉTODO DESCRIPTIVO
- MÉTODO CIENTÍFICO
  - MÉTODO INDUCTIVO

OBJETIVO GENERAL

APLICAR LA DEFINICION DE LÍMITES Y DERIVADAS EN LAS FUNCIONES REALES

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- COMPRENDER COMO SE GRAFICA UNA FUNCION REAL.
- INTERPRETAR LOS TEOREMAS DE LOS LÍMITES Y DERIVADAS EN LAS FUNCIONES REALES.
- ANALIZAR TEOREMAS DE LOS LÍMITES (TEOREMA DEL SANDWICH…)
- CONOCER LAS FÓRMULAS BÁSICAS PARA LA DERIVACIÓN.

HIPÓTESIS

El tema educativo de tercer año de bachillerato, demanda en todos los estudiantes con preferencia en las asignaturas como: matemática y física, nutran de una comprensión básica sobre el cálculo, para relacionarse con algunos conceptos importantes; siendo necesario desarrollar una destreza en funciones reales principalmente. Tomando en cuenta la importancia de comprender sobre todo los términos básicos para desarrollar un adelanto importante en los estudiantes en la introducción al cálculo.

La visión de todos los estudiantes de 3er año de BGU debe ser lo suficientemente claro para poder seguir un mismo patrón en los temas de preferencia. La elección de todos los temas puede variar de acuerdo a su preferencia y este trabajo está orientado a ser de gran apoyo en la toma de decisiones de algunos estudiantes según sea su afinidad con los números .En las asignaturas preferidas, naturalmente y sin esperar, nace el deseo investigativo y aún más cuando es acorde a la carrera escogida por seguir.

El poder dominar los requisitos básicos para afiliarse en el tema amplio que es el cálculo, brindaría muchos beneficios a los estudiantes, tales como: graficar una función real, conocer los limites en las funciones reales, proceso de derivación de una función… los cuales permitirán la facilidad de llegar al cálculo diferencial e integral que son propósitos en los primeros periodos de la universidad.

MARCO REFERENCIAL

CAPÍTULO I

1.0 DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN REAL:

Una función real contiene a todos los elementos tanto del dominio como del codominio dentro de los números reales (**R**). Por ejemplo, "el salario de una persona puede depender del número de horas que trabaje" Podemos representar de la siguiente manera:

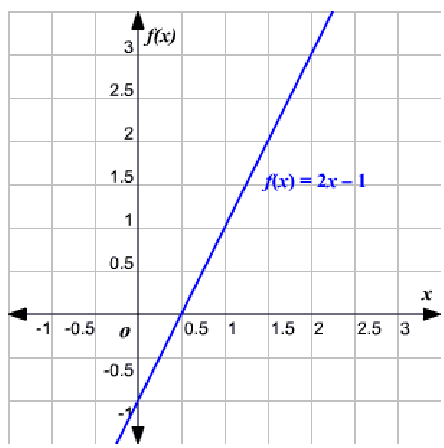
f(x)= X+ n esta representación es muy sencilla.

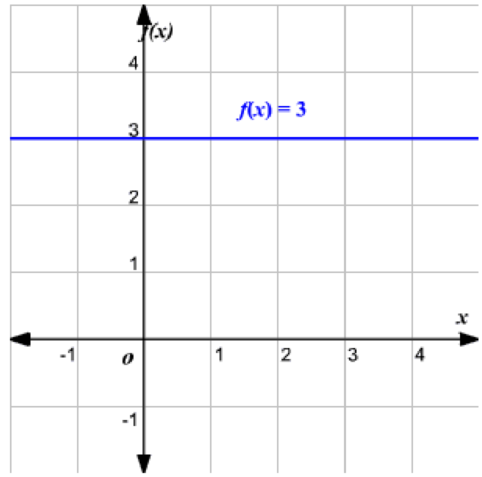
El valor de **x** puede ser todos los elementos del conjunto (**R**) y de la misma manera **n** también; por lo tanto, el resultado que se obtenga al remplazar a **x** por una cantidad será **y** que depende y así podemos entender que **y** depende de **x**.

2.0 TIPOS DE FUNCIONES REALES.- tenemos muchos tipos de funciones reales, por lo tanto, es indispensable lograr entender todos los conceptos.

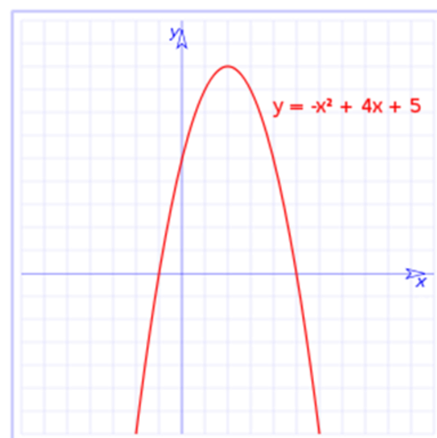
3.0 FUNCIONES POLINOMIALES.-

- **3.1 FUNCIONES LINEALES**.- representamos: f(**x**)= m**x**+b donde, para cada valor de **x** hay un solo valor correspondiente f(**x**) y (**m** es la pendiente, **b** la abscisa).

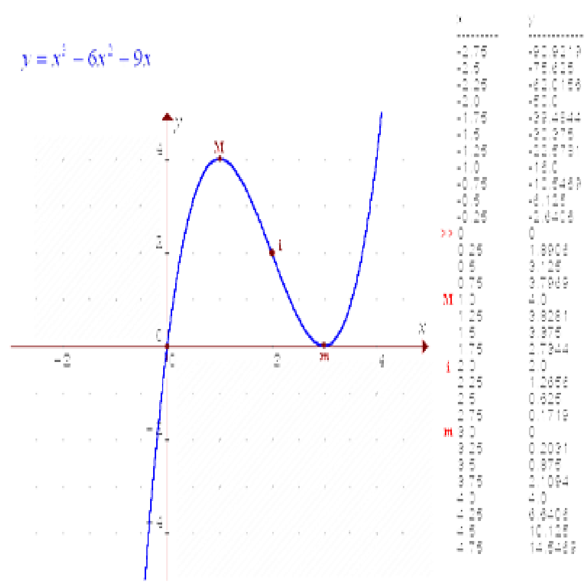




- **3.2 FUNCIONES CONSTANTES**.- f(**x**)= **k** es un solo valor correspondiente para todos los valores de **x** siendo así, **k** la constante; en la gráfica se muestra una línea perpendicular al eje de las **y**y paralelas al eje de las **x**.



- **3.3 FUNCIONES CUADRÁTICAS**.- se conoce también como funciones de segundo grado, que es de la forma f(**x**)= a**x**+b**x**+c donde, **a,b,** y **c** son números reales. Remplazando los valores, la gráfica es una parábola.

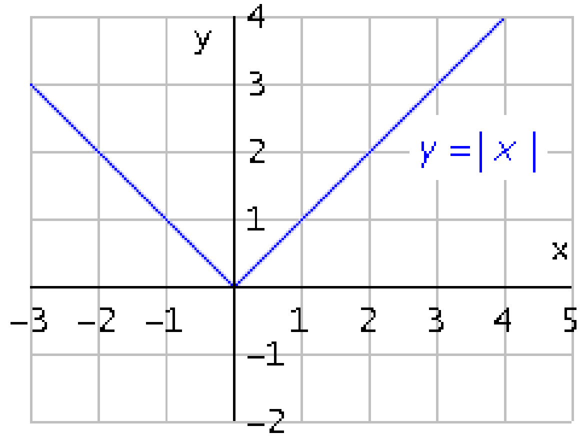


- **3.4 FUNCIONES POLINÓMICAS**.- f(**x**)= $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a$ donde $a_n,a_{n-1,\ldots,}a$ son constantes reales.

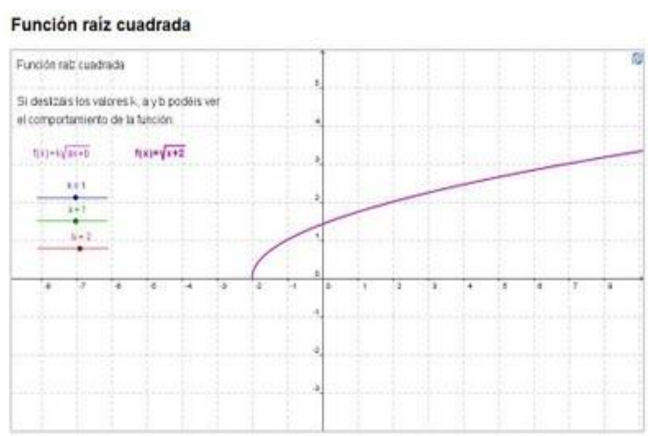
  en este ejemplo se puede apreciar la gráfica de **y**=x^3-6x^2-9x

FUNCIONES ESPECIALES

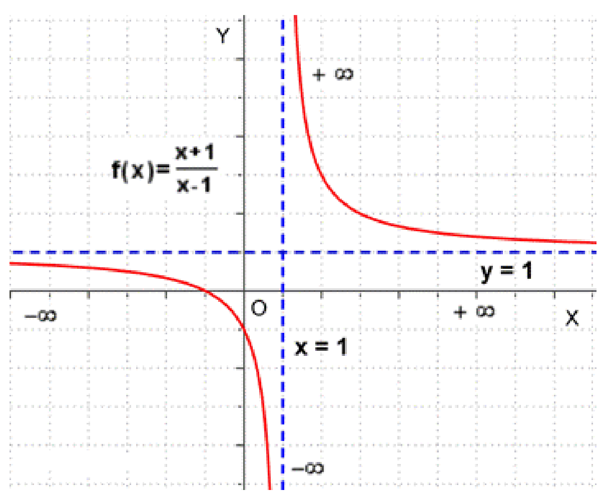
- **3.5 FUNCIONES DE VALORES ABSOLUTOS.-** las funciones se las representa como: f(**x**)=**lxl.** De esta manera, si remplazamos con valores a **x**, la gráfica será un parábola en forma de V.



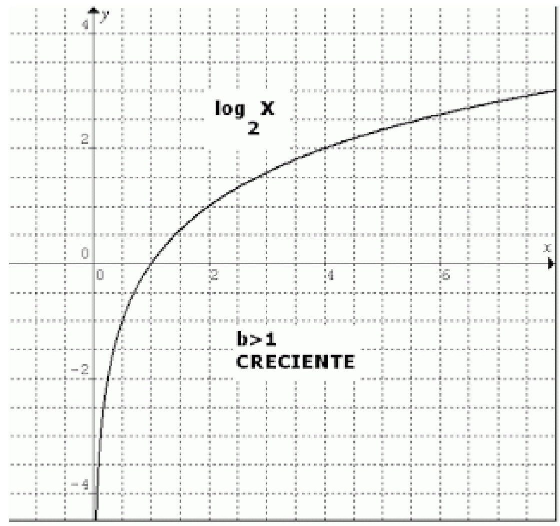
- **3.6 FUNCIONES DE RAÍCES CUADRADAS.-** es de la forma f(x) = √x donde el dominio de las funciones son los valores de x cumpliendo con la condición de que el radicando sea positivo. El rango es mayor o igual a cero (≥) y la gráfica es una curva.



- 3.7 **FUNCIONES RACIONALES.-** son funciones de la forma “f(x) = p(x)/q(x) donde p(x) y q(x) son polinomios y q(x)≠0. La función racional no está definida para valores de x en el cual q(x) se hace diferente de cero, este valor al representarlo gráficamente es una asíntota. La grafica que se obtiene son curvas interrumpidas por la asíntota”



FUNCIONES TRASCENDENTALES



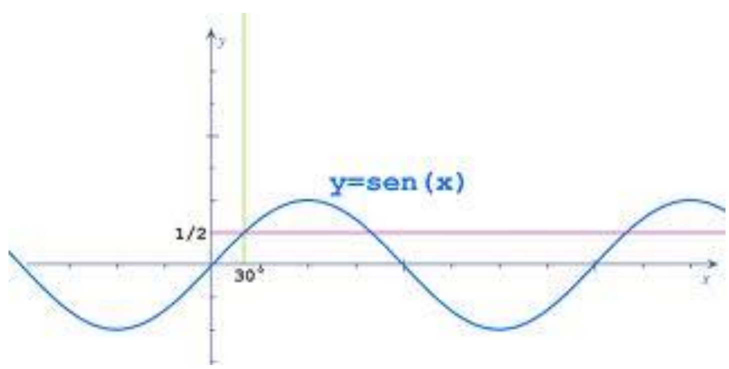
- **3.8 FUNCIONES EXPONENCIALES.-** **"**Es una función de la forma f(x) = a^x, donde a>o y a≠1 .cuyo dominio son los números reales y el rango son los reales mayores que cero. La grafica que se obtiene es una curva ascendente si a>1 y descendente si o<a<1"

- **3.9 FUNCIONES LOGARÍTMICAS.-** "Es una función inversa a la función exponencial".

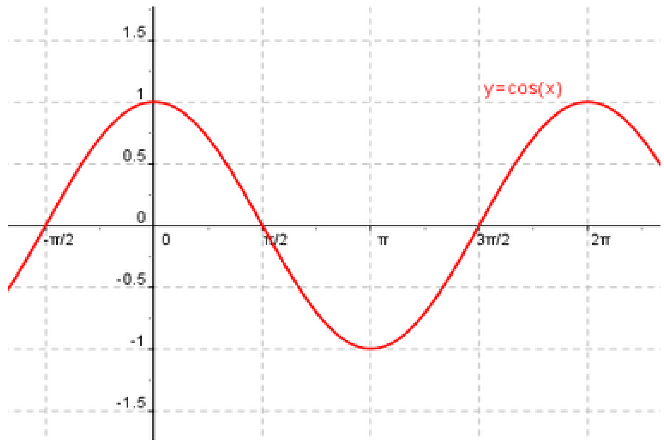
  f(x) = $\log_a x$, donde a>0 y a≠1. La grafica que se obtiene es una curva simétrica a la función exponencial

- **3.10 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.-"**Las funciones trigonométricas surgen de estudiar el triángulo rectángulo y observar que las razones entre las longitudes de dos lados cualesquiera dependen del valor de los ángulos del triángulo."
  - los principales son:

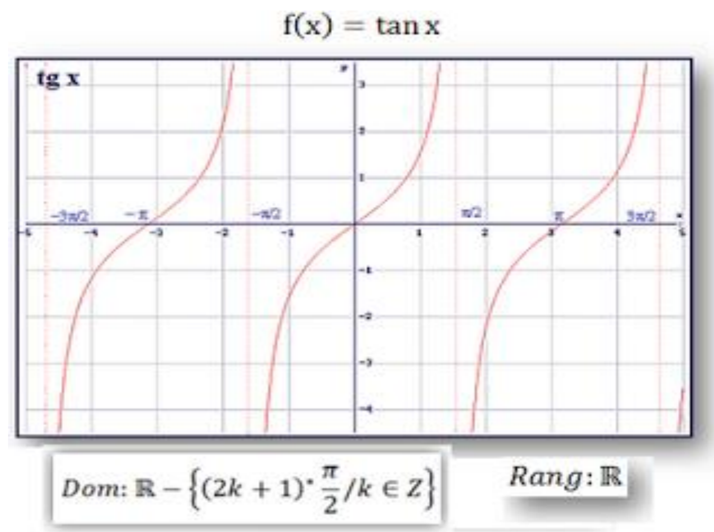
f(x) = sen x



f(x) = cos x



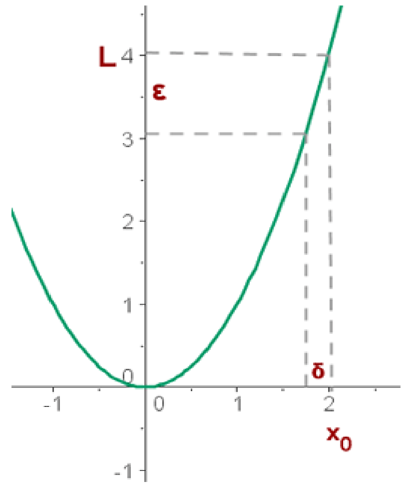
f(x) = tan x



Recuperado de http://matematicas-funcionesreales.blogspot.com/p/clases-de-funciones.html

4.0 LÍMITE.- "El límite de la función f(x) en el punto x_0, es el valor al que se acercan las imágenes (las y) cuando los originales (las x) se acercan al valor x_0." *Recuperado de http://www.vitutor.com/fun/3/a_1.html*

Vamos a estudiar el límite de la función $f(x) = x^2$ en el punto $x_0 = 2$.



Podemos acercaros por la derecha tanto por la izquierda

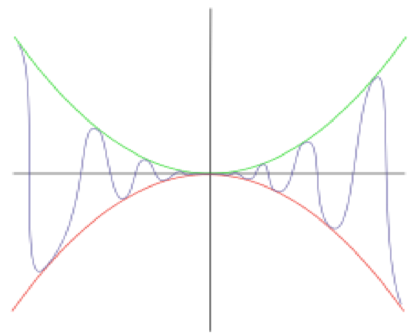
X	Y
1,9	**3,61**
1,99	**3,9601**
1,999	**3,996001**

Se puede analizar de esta manera como en el caso del teorema del sándwich, que nos permite ver el acercamiento al valor requerido tanto por la derecha como por la izquierda.

X	Y
2,1	**4.41**
2,01	**4,0401**
2,001	**4,004001**

Entonces, podemos definir en este ejercicio que $f(x)$ tiene como límite el número L , cuando x tiende a x_0, si fijado un número real positivo ε , mayor que cero, existe un numero positivo δ dependiente de ε, tal que, para todos los valores de x distintos de x_0 que cumplen la condición $|x - x_0| < \delta$, se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Hay una definición de límite.- Límite de una función es la variación de valores obtenidos como resultado cuando se aproxima a un valor establecido.



5.0 TEOREMA.- teorema es un sistema desarrollado con fin de afirmar o proponer algo.

5.1 EL TEOREMA DEL EMPAREDADO por ejemplo, es un mecanismo de demostración muy utilizado y se expresa como: si dos funciones tienden al mismo límite en un punto, cualquier otra función que pueda ser acotada entre las dos anteriores tendrá el mismo límite en el punto.

6.0 CÁLCULO.- Se puede decir cálculo a todas aquellas operaciones (en su mayoría matemática) que tiene un fin común. Este sistema puede ser simple y muy complejo, dependiendo del grado de dificultad que se nos presente obtener un resultado partiendo de algunos datos conocidos.

Tenemos cálculo geométrico (que se remplaza en muchas incógnitas, cantidades conocidas) y aritmético cuando en su totalidad se trata de números.

“Aritmética es la rama de las matemáticas que estudia ciertas operaciones de los números y sus propiedades elementales. Proviene del griego arithmos y techne que quieren decir respectivamente números y habilidad.”

Recuperado de http://definicion.de/calculo/

“De hecho el cálculo más natural y primitivo surge de la necesidad de contar y medir”. ahora por el mismo hecho de contar con muchas formas de numeración, se puede interpretar de muchas maneras.

6.1 GEOMÉTRICO.- también se entiende como un sistema complejo de resolver ecuaciones. Por lo tanto, podemos encontrar diferentes métodos de resolución tales como; método de Euclides para calcular el máximo común divisor de dos enteros positivos, o el método de Gauss que permite resolver un sistema lineal de ecuaciones. .

6.2 ARITMÉTICO.- ayuda en técnicas de números muy complejos y con secuencia.

CAPÍTULO II

VARIABLE

1.0 VARIABLE: se conoce como variable a la cantidad al que se le puede dictar independientemente, al analizar, obteniendo un ilimitado de valores.

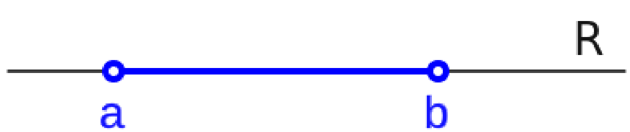
Podemos decir que **x**, es mi variable y puedo remplazarle por un valor conocido; en este caso puedo decir que vale 2 o 3… de esta manera infinitamente. Entonces representaremos **x**= IR

1.1 REPRESENTACIÓN DE UNA VARIABLE: Usualmente se toma en cuenta por las últimas letras del alfabeto castellano, las cuales pueden ser (**x, y ó z**). en este punto dependiendo de las cantidades de variable que se nos presenten en un problema matemático.

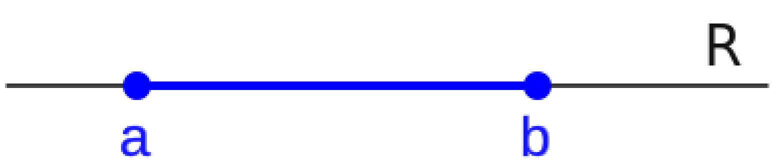
Cuando tenemos dos o más variables, el primero es **x** al cual podemos dar un valor conocido entonces **y** dependerá del valor de **x**. algebraicamente, no tendremos a lo mejor ninguna de las dos o más variables, para ello hay algunos métodos conocidos que más adelante detallaremos.

1.2 INTERVALO DE UNA VARIABLE: En todo el sistema de números representados en el plano cartesiano, solamente nos fijamos en una porción.

Cuando es un intervalo abierto. (a , b) o]a, b[



Cuando es un intervalo cerrado. [a, b]



Puede variar como decir: cerrado un extremo pero abierto el otro o viceversa. En un gráfico con intervalos se puede apreciar:

x<**b**>**a**es decir; en un intervalo cerrado solo puedo tener valores desde a hasta b, pero no puedo pasar de ese intervalo

1.3 Variable independiente**:** Tomamos en cuenta, las variables sean: **x, y.** las cuales son denominadas de la siguiente manera. “variable independiente” a **x.** a esta variable (**x**) comprendemos que puede poseer diferentes valores, los mismos que se designa.

X=2 o **x**=-4…

1.4 VARIABLE DEPENDIENTE: Al comprender una variable independiente, es lo inverso a ello, puesto que al designar un valor a nuestra variable independiente la obtendremos. Podemos denominarlos “variable dependiente” (**y**). En el ejemplo anterior sea la función f(x)= **x**+ 5

Formando nuestra tabla de valores seria:

X	**Y**
2	7
-4	3
0	5

Si trasladamos estos valores al plano cartesiano podremos ver la gráfica.

2.0 Variación continua: dicen que una variable es continua cuando tenemos dos puntos entre A y B, es decir que dentro de ese segmento varían los valores. Entonces puede ser que

A<X<B. decimos

CAPÍTULO III

CONSTANTES

1.0 CONSTANTE: cuando obtenemos una cantidad fija durante todo el proceso de análisis, se denomina "constante". Constante π por ejemplo, es una constante, puede ser una constante k en movimientos circularorios.

1.1 CONSTANTES NUMÉRICAS O ABSOLUTAS.- podemos decir que son cantidades que mantienen los mismos valores en todos los problemas. Puede ser (5,2,π…)

1.2 CONSTANTES ARBITRARIAS O PARÁMETROS: son todas aquellas que principalmente se puede remplazar por un valor. A estas constantes se las puede representar generalmente con las primeras letras del alfabeto. (**a** y **b**).

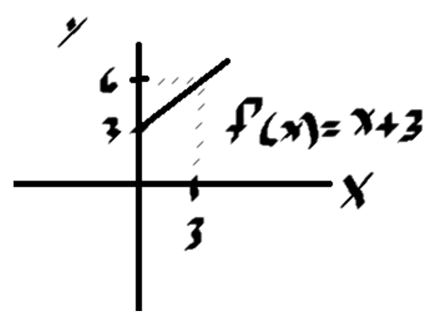
Podemos representar en la recta numérica, de la siguiente forma:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=5$ Donde a y b son constantes arbitrarias. El 5 es una constante numérica o absoluta.

2.0 FUNCIÓN: función es una "correspondencia" del primer conjunto de valores para el segundo que específicamente dependerá de ello.

Si presentamos en una tabla: esta ecuación **f(x)= x+3** obtendremos.

X	Y
0	3
3	6



Comprendemos que para cada valor de **x** hay un solo valor de **y.**

2.1 NOTACIÓN DE FUNCIONES.- a una función podemos representar de varias formas:

f(x), nos permite designar una función de **x**, se lee: f de x. cuando tenemos varias funciones y queremos distinguir, simplemente nos permite cambiar la letra inicial f́ **(x)** o F(x)…

Cada símbolo tiene la misma funcionalidad, es decir, en cada proceso un mismo símbolo representa toda su funcionalidad que esta tiene y la ley de dependencia.

Por ejemplo: si tenemos **$f(x)=x^2+2x-4$,** si es la función de **y** sería; **$f(y)=y^2+2y-4$**, si es en función de (a+b) sería: **f(**(a+b)**)=**(a+b) ^{2}**+2**(a+b) **-4**de esta forma sucesivamente.

2.2 DIVISIÓN DE UNA FUNCIÓN POR CERO (0).- debemos tomar en cuenta que no es posible dividir por cero, cociente por cero es excluida. Puesto que cociente de a/b=x, a=bx; si b=0 x no existe porque no podemos dividir por 0. Esta presentación queda como indefinida.

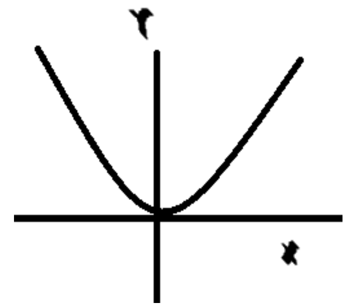
Algunas representaciones carecen de sentido por esta razón. $\frac{a}{0}$; $\frac{0}{0}$no es posible división por cero. Ejemplo: casos de dividir inadvertidamente por cero. En este ejemplo suponen que: a=b

Entonces dicen también que debería ser lo mismo decir que	$ab=a^2$
Restando b^2 mi ecuación sería	$ab-b^2=a^2-b^2$
Esta expresión prácticamente no altera:	b(a-b)=(a+b)(a-b)
Dividen por (a-b)	b=a+b
Pero decían que a=b !	
Si seguimos el proceso sería	a=2b
Como respuesta obtienen	1=2

El error está en dividir por (a-b) que prácticamente es cero.

2.3 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN REAL: para graficar una función real simplemente conocemos la ecuación, el tipo de función y procedemos con reconocer la variable dependiente y la variable independiente. Sea la ecuación $y=x^2$

Si la gráfica es continua, es decir, si los valore de **x** aumenta, los valores de **y** aumenta continuamente. Podemos decir que la variable siempre es parábola.



El nombre a estas gráficas las llamamos "gráfica de la función x^2". Con fin a esto, si hacemos una tabla de valores sería:

X	Y
A	a^2
-a	a^2
B	b^2
-b	b^2

CAPÍTULO IV

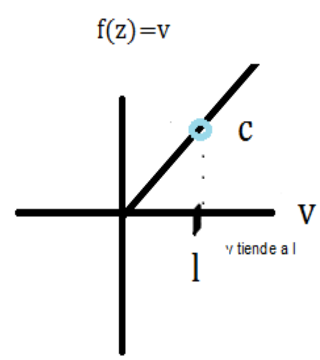
LÍMITES

1.0 LÍMITE DE UNA VARIABLE

Se refiere a una tendencia de una función cuando las medidas de las mismas se acerquen a un valor, en este caso infinito o cero. podemos concluir entonces que v es una variable y z la función, es decir, z de v; z(v). cuando z también presenta como v se define como límite de z=a cuando v se aproxima a l. en ecuación tenemos:

$$\lim_{v \to l} z = a$$

Se leerá siempre como: límite de z cuando v tiende a l es a.

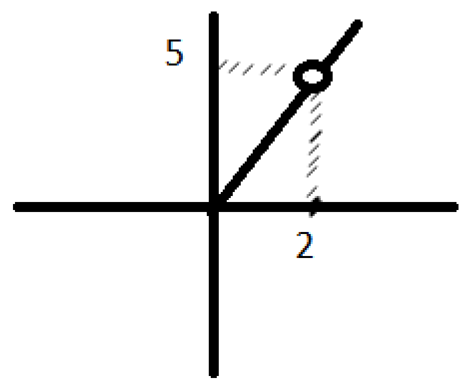


1.1 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN real**:** para una función real los límites se puede diferenciar mediante sus valores en las gráficas. tales que la imagen anterior ilustra el concepto.

1.2 DEMOSTRACIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL

Con el ejemplo anterior podemos decir que; **z(v)=a** cuando a=2 entonces el límite de z también se aproxima a ese valor. de esta manera:

$$\lim_{v \to l} z = a$$



2.0 TEOREMA SOBRE LÍMITES

Para demostrar el teorema sobre límites, podemos decir que u,v,w son funciones de una misma variable.

Es decir que:

$$\lim_{x \to a} u = A$$

$$\lim_{x \to a} v = B$$

$$\lim_{x \to a} w = C$$

Si esto ocurre puede ser que se cumpla los siguientes términos.

Primera regla: $lim_{x \to a}(u + v - w) = A + B - W$

Segunda regla: $lim_{x \to a}(uvw) = ABW$

Tercera regla: $lim_{x \to a}(u/v) = A/B$, si B no es cero por supuesto. Esto quiere decir que las sumas algebraicas o producto hasta un cociente se relacionan, solo que en el cociente tiene que ser B diferente de cero.

Podemos concluir de lo anterior que: si c es una constante y B no es cero, cumple con lo siguiente.

$$\lim_{x \to a}(u + c) = A + c$$

$$\lim_{x \to a}(cu) = cA$$

$$\lim_{x \to a}(c/v) = c/B$$

2.1.1 Ejemplo demostrativo

Demostramos que:

$lim_{x \to 2}(x^2 + 4x) = 12$

La función dada es la suma de x^2+4x

Paso 1, hallar los límites de:

$lim_{x \to 2}\, x^2 = 4$ Como sabemos que x^2=x.x.

$lim_{x \to 2}\, 4\mathrm{x} = 4$ $lim_{x \to 2}\, \mathrm{x} = 8$

En conclusión decimos que el límite buscado es la suma 4+8 que es prácticamente 12.

Ahora bien, demostremos que:

$$\lim_{z \to 2} \frac{z^2 - 9}{z + 2} = -\frac{5}{4}$$

Tenemos que el numerador es

$lim_{z \to 2}\, z^2 - 9 = -5$ según los ejemplos anteriores la segunda regla y la cuarta.

En el denominador tendremos que:

$$\lim_{z \to 2}(z + 2) = 4$$

Luego, por la regla tres tenemos la respuesta

En esta parte tenemos también *funciones continuas y discontinuas.*

Las funciones continuas son todas aquellas que cumple con una relación en donde

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Es decir, que el límite de f(x) cuando tiende a un valor **a,** es igual a la función f(a). el resultado entonces coincide tanto con el límite de la función en un determinado valor como la función de ese mismo valor. Caso contrario, si no cumple para esta regla, simplemente no es una función continua; se denomina discontinua.

Para generalizar la continuidad y discontinuidad, hacemos lo siguiente; presentamos dos casos muy frecuentes en el análisis de los límites.

Primer caso: sea la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Dicen que para x cuando es igual a uno, la función es igual a tres; f(1)=3, por otro lado, cuando x tiende a uno el límite es uno. En el primer caso es que cumple y por lo tanto es continua.

En un siguiente caso dice: cuando no cumple en la función x=a, porque no está definida, pero el limite cuando x tiende a un valor **a**, es igual a B. es decir;

f(x) no está definida para x=a pero cumple con la condición de:

$$\lim_{x \to a} f(x) = B$$

Con esta demostración dicen que f(x) será continua para x=a si se toma como valor de f(x) para x=a el valor B.

Ejemplo: sea la función: $\frac{x^2-4}{x-2}$ no está definida para x=2 porque sería una división de cero. Pero tenemos el resultado para límites que es; $\frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$ siguiendo el método de factoreo.

Asi obtenemos lo siguiente;

$$\lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

en conclusión que

$lim_{x\to 2} f\, \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ de esta manera se hace continua a x=2

debemos tomar en cuenta que una función es continua en un intervalo cuando todos los valores dentro de ella también es continua.

Este proceso es frecuente en el cálculo diferencial e integral. Como antes mencionamos, v cuando tiende a un valor **a.**

2.1.2 INFINITO.-también es un término que nos hace entender que es infinito; digamos que **v** es una variable independiente, y esta toma valores mucho mas grandes que los datos o se acerca mucho al mayor de todos los valores, se define infinito. Puede ser infinito positivo, si solo tomamos valores mayores, negativo si lo tomamos de la misma manera valores menores.

Tenemos también tres casos, la notación es la siguiente:

$\lim v = \infty$ $\lim v = +\infty$ $\lim v = -\infty$ es decir, límite de **v** es infinito, límite de $\lim v = +\infty$ y $\lim v = -\infty$.

para decir que $\lim v = \infty$ dicen que v es igual al infinito, no que v se aproxima al infinito; así:

$$\lim_{x\to 0}(1/x) = \infty$$

Esto se define como, límite de 1/x cuando x tiende a cero es infinito. Con todo lo mencionado hay que ser conscientes en saber que el infinito no es un número, siendo así también que el infinito no es un límite.

Por lo tanto, analicemos lo siguiente:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

Dice que f(x)=∞ cuando x tiende a un valor a. pero a esto deducimos que es discontinua al saber que f(x) cuando x=a no cumple con las reglas de la continuidad.

Definen también que una función puede ser infinita cuando la variable vuelve infinita, y la ilustran:

$lim_{x\to\infty} f(1/\infty) = 0$ en este caso el límite es cero ya que la función dada cuando x toma el valor de infinito, tiende a cero.

Tenemos un caso también en donde el valor constante A es límite cuando x tiende a infinito, lo denotamos así.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

Tenemos también algunos límites que se nos presentan frecuentemente. Tales como:

$lim_{v\to 0}\, c/v) = \infty$ Siendo c/0=∞

$lim_{v\to\infty}\, cv = \infty$ Siendo c.∞=∞

$lim_{v\to\infty}\, v/c = \infty$ Siendo ∞/C=∞

$lim_{v\to\infty} \frac{c}{v} = 0$ Siendo c/∞=0

Los límites descritos son útiles para hallar el límite del cociente en dos polinomios cuando la variable tiende a infinita.

Ejemplo ilustrativo: podemos demostrar que

$$\lim_{z\to\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{5x - x^2 - 7x^3} = -\frac{2}{7}$$

Dividiendo tanto el numerador como el denominador para x^3, entonces quedaría así;

$$\lim_{z\to\infty} \frac{2x^3/x^3 - 3x^2/x^3 + 4/x^3}{5x/x^3 - x^2/x^3 - 7x^3/x^3} = -\frac{2}{7}$$

Al seguir resolviendo, obtendremos lo siguiente.

$$\lim_{z\to\infty} \frac{2 - 3/x + 4/x^3}{5/x^2 - 1/x - 7} = -\frac{2}{7}$$

tenemos otro de los casos. Si u y v son funciones de x, y dicen que $lim_{x\to a}\, u = A$; $lim_{x\to a}\, v = 0$

si A no es igual a cero seria:

$lim_{z\to a}\frac{u}{v}=\infty$ a pesar que este caso es solo para resolver casos excepcionales.

2.1.3 Ejercicios planteados:

1) $lim_{x\to\infty}\frac{4x+5}{2x+3}=2$
2) $lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3}{2x^3+3x^2}=0$
3) $lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\frac{5}{4}$
4) $lim_{x\to\infty}\frac{ax^4+bx^2+c}{dx^5+ex^{3+fx}}=0$
5) $lim_{t\to 0}\frac{4t^2+3t+2}{t^3+2t-6}=-\frac{1}{3}$

3.0 INFINITÉSIMO.- se refiere a una variable cuando tiende a cero.

lim v=0 o puede ser v→0

Dicen que v permanece menor que cualquier número positivo asignado, entonces, si $lim\ v=l$ es justo decir que $(v-1)=0$. Nos hacen comprender que la diferencia entre una variable y su límite es un infinitésimo. Por otro lado, nos dice también que si la diferencia entre una variable y una constante es un infinitésimo, es porque la constante es el límite de la variable.

3.1 TEOREMAS RELATIVOS A INFINITÉSIMOS Y LÍMITES.- tenemos consideraciones como; todas las variables como funciones de la misma variable independiente y tienden a sus límites cuando respectivos cuando esta variable adopta el valor fijo a. la constante $\boldsymbol{\varepsilon}$ representa un valor positivo pequeño.

3.1.1 TEOREMAS SOBRE INFINITÉSIMOS.- "GRANVILLE" 1998 (pag. 17)

1) La suma algebraica de n infinitésimos, si n es un número finito es otro infinitésimo. El valor de la suma estará por debajo de $\boldsymbol{\varepsilon}$ y menor que $\frac{\varepsilon}{n}$

2) El producto de una constante c por un infinitésimo es otro infinitésimo. En este caso es producto será menor que ε cuando en valor del infinitésimo sea menor que $\frac{\varepsilon}{|c|}$

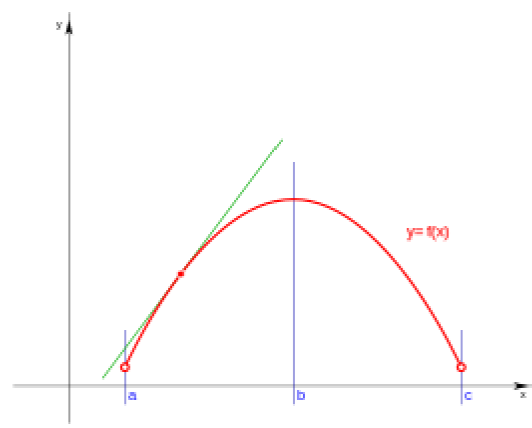
3) El producto de n de infinitésimo es otro infinitésimo, permanece menor que ε cuando cada infinitésimo permanece menor que la raíz n de ε

4) Si el límite de v es igual a l y l no es cero, entonces el cociente del infinitésimo i dividido por v es otro infinitésimo.

   a. Para comprender mejor, podemos decir como un número positivo c menor que l y v permanece mayor que c, también i permanece menor que c ε entonces el valor numérico permanece menor que ε

CAPÍTULO V

1.0 DERIVADA.- la derivada de una función, se define como la medida de la rapidez con la que cambia el valor de dicha función matemática, esto de acuerdo al cambio de su variable. Se calcula como límite de cambio medio de la función en sí en un intervalo pequeño.



Dicen que "La derivada de la función en el punto marcado equivale a la pendiente de la recta tangente"

"La derivada de una función *f* en un punto *x* se denota como *f′*(*x*). La función cuyo valor en cada punto *x* es esta derivada es la llamada **función derivada** de *f*, denotada por *f′*. El proceso de encontrar la derivada de una función se denomina **diferenciación**, y es una de las herramientas principales en el área de las matemáticas conocida como cálculo."

Recuperado de: **http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada**

Para llegar a la derivada tuvieron que pasar mucho tiempo, por lo mismo se cita dos razones;

El problema de la tangente a una curva (Apolonio de Perge)

El Teorema de los extremos: máximos y mínimos (Pierre de Fermat)

Derivada de una función

Considerando la función *f* definida en el intervalo abierto *I* y un punto *a* fijo en *I*, se tiene que la derivada de la función f en el punto a se define como:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

1.2 INCREMENTO DE UNA VARIABLE.- el incremento de una variable se lo representa como: Δx variación de la posición de x, en cualquier punto. Se lo obtiene al restar el punto final menos el punto inicial y se lee “delta x”. de esta manera se puede decir de cualquier variable, por decir; delta y, o delta z, etc.

Si Δx toma variaciones, Δy de igual manera toma variaciones correspondientes, ya que depende de x. podemos decir $\boldsymbol{y = x^2}$ como una función. Es decir que si x toma valor de 1º como su punto inicial, y tomará como su valor inicial correspondiente a 100.

Podemos decir también que si x toma el valor de 12, siendo su punto inicial 10; nos muestra variación o delta x que es igual a dos. Δx=2 porque 12-10 es 2; delta y será en este caso 44. Si x toma valores menores como 9, delta x será -1 y delta y será también -19. De la misma manera hay ocasiones en que puede ser positivo delta x y negativo delta y.

2.0 COMPARACIÓN DE INCREMENTOS.- $\boldsymbol{y = x^2}$ considerando como una función, y que x tiene un valor fijo; al variar x varia también y, se puede ver así.

$\boldsymbol{y} + \Delta y = (x + \Delta x)^2$, entendemos que es $\boldsymbol{y} + \Delta y = x^2 + 2x. \Delta x + (\Delta x)^2$

Otra comparación; $\Delta y = 2x.\Delta x + \Delta x^2$ podemos obtener delta y empezando de x y delta x, entonces decimos que la razón es esta: $\frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}} = 2x + \Delta x$

Siguiendo los ejemplos anteriores, si x es igual a 4 es visible que sea: $lim_{x \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}} = 8$

3.0 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE.- en el cálculo diferencial, la definen así; que la derivada de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando este tiende a cero. Por eso, cuando existe el límite de la función dicen que es derivable. Podemos ver de muchas formas:

$\boldsymbol{y} = f(x)$ cuando x toma valores iniciales fijos

$\boldsymbol{y} + \Delta y = f(x + \Delta x)$ cuando hay un incremento

$\Delta y = f(x + \Delta x)$- $f(x)$ para hallar el incremento de la función restamos 1 de 2.

$\frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ el límite del segundo miembro cuando x tiende a 0 es la derivada de f(x), se representa por: $\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}$ y la igualdad resulta $\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta \boldsymbol{x}}$, se define como la derivada de f(x) o **y** con respecto a **x**. De lo siguiente también obtienen $\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}}$; así mismo si u es función de t; $\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dt}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{u}}{\Delta \boldsymbol{t}}$, nombrado como derivada de u con respecto a t.

Cuando realizamos la operación se denomina, derivación.

4.0 SÍMBOLOS PARA REPRESENTAR LAS DERIVADAS.- cuando delta x y delta y son cantidades finitas.

$\frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}}$ considerando valores finitos

$\frac{dy}{dx}$ viendo como una fracción; en este caso conjuntos.

Se representa también, considerando que la derivada de una función de x es función de x; con el símbolo f´(x) como derivada de f(x).

Ahora ya podemos ver las igualdades.

$\boldsymbol{y} = f(x)$

$\frac{dy}{dx} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ se lee como la derivada de y con respecto a x es igual a f prima de x, $\frac{d}{dx}$ como símbolo; de esta manera indica toda derivada con respecto a x.

$\frac{dy}{dx}$ indica derivada de y con respecto a x

$\frac{d}{dx}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ indica derivada de f(x) con respecto a x.

En conclusión decimos: $y' = \frac{d}{dx}\boldsymbol{y} = \frac{d}{dx}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D_x f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$.

Tenemos que tener en cuenta que delta x no es igual que **x** y la variación será siempre representado con delta, si x es inicial pues x_o puede ir de principio a fin con esa representación. $f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(x_o + \Delta \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(x_o)}{\Delta \boldsymbol{x}}$

5.0 FUNCIONES DERIVABLES.- cuando es derivable es porque es continua.

Para derivar seguimos los siguientes pasos:

6.0 REGLA GENERAL PARA DERIVAR

1) **“**según Granville**”,** se sustituye x por $x_o + \Delta \boldsymbol{x}$ y se calcula el valor de la función $y_o + \Delta \boldsymbol{y}$
2) Se obtiene el incremento de la función $\Delta \boldsymbol{y}$ restando el valor dado de la función del nuevo valor.
3) Dice que se divide $\Delta \boldsymbol{y}$ por $\Delta \boldsymbol{x}$ **(**incremento de la variable independiente**)**

4) Que se calcula el límite de este cociente cuando $\Delta \boldsymbol{x}$ tiende a cero. Entonces el límite hallado es la derivada buscada.

6.1 EJEMPLOS DEMOSTRATIVOS.- podemos encontrar los siguientes casos. Hallar la derivada de la función **$3x^2$+5**

Paso por paso se lo realiza de esta forma:

$\boldsymbol{y} + \Delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{3}(x + \Delta x)^2$+5 seguimos los pasos

$\boldsymbol{y} + \Delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{3}x^2 + 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5$ luego procedemos a realizar de la siguiente manera

$\boldsymbol{y} + \Delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{3}x^2 + 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5$ siguiendo el segundo paso restado $\boldsymbol{y}+= \boldsymbol{3}x^2$ como respuesta del segundo paso es

$\Delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{3}x^2 + 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2$ con el tercer paso, sería:

$\frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}} = 6x$+$3.\Delta x$, de esta manera el último paso es:

En el siguiente miembro hacen $\Delta \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}$ según el concepto anterior sería,

$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = 6x$ o también $y' = \frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{3}x^2 + 5) = 6x$ es el resultado obtenido.

6.1.1 DE ESTA MANERA SEGUIMOS RESOLVIENDO LOS SIGUIENTES EJERCICIOS

- Hallar la derivada de $\boldsymbol{x^3 - 2x + 7;}$ la solución es:

$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = 3\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{2}$ o también $y' = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}(x^3 - 2 + 7) = \boldsymbol{3}x^2 - 2$

- Hallar la derivada de: $y = \boldsymbol{2 - 3x}$ solución; $y' = -3$
- $y = mx + b$ solución **y´=m**
- $y = a\boldsymbol{x^2}$ solución $y' = 2ax$

CAPÍTULO VI

1.0 REGLAS BÁSICAS PARA LA DERIVACIÓN

Se presentan u,v,w como funciones derivables de x, entonces reglas

- **1.1 DERIVADA DE UNA CONSTANTE.-** si f(x) es constante.

y=c si x toma un incremento, tampoco se altera, $\boldsymbol{\Delta y = 0}$; $\frac{\boldsymbol{\Delta y}}{\boldsymbol{\Delta x}} = 0$

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{\Delta y}}{\boldsymbol{\Delta x}} = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = 0$$

$$\therefore \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = 0$$

- **1.2 DERIVADA DE UNA VARIABLE CON RESPECTO A SI MISMA.-** es la unidad

Sea **y=x** por paso tendremos:

Primer paso $\boldsymbol{y} + \Delta y = x + \Delta x$

Segundo paso $\Delta y = \Delta x$

Tercer paso $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$

La fórmula es $\frac{dx}{dx} = 1$

- **1.3 DERIVADA DE UNA SUMA.-** es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones.

Según la regla general $\boldsymbol{y} + \Delta y = x + \Delta x$

Primer paso $\boldsymbol{y} + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w$

Segundo paso $\Delta y = +\Delta u + \Delta v - \Delta w$

Tercer paso $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta y} - \frac{\Delta w}{\Delta y}$

Continuando $lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{u}}{\Delta \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}}$, $lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}}$, $lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{w}}{\Delta \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{dw}}{\boldsymbol{dx}}$

Y el cuarto paso $\frac{dy}{dx} = \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}} + \frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}} - \frac{\boldsymbol{dw}}{\boldsymbol{dx}}$

La fórmula es $\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}} + \frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}} - \frac{\boldsymbol{dw}}{\boldsymbol{dx}}$

- **1.4 DERIVADA DEL PRODUCTO DE UNA CONSTANTE POR UNA FUNCIÓN.-** es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

La fórmula es $\frac{d}{dx}(cv) = c\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}}$

Sea $\boldsymbol{y} = cv$

Primer paso $\boldsymbol{y} + \Delta y = c(v + \Delta v) = cv + c\Delta v$

Segundo paso $\Delta y = c\Delta v$

Tercer paso $\frac{\Delta y}{\Delta x} = c\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{x}}$

Cuarto paso $\frac{dy}{dx} = c\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}}$

- **1.5 DERIVADA DEL PRODUCTO DE DOS FUNCIONES.-** es igual al producto de la primera función, por la derivada de la segunda, más la el producto de la segunda por la derivada de la primera.

Fórmula $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}} + v\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}}$

Sea $\boldsymbol{y} = uv$

Primer paso $\boldsymbol{y} + \Delta y = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$

Segundo paso $\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{x}} + v\frac{\Delta \boldsymbol{u}}{\Delta \boldsymbol{x}} + \Delta u\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{x}}$

Sabemos que límite de $lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$

El producto de $\Delta u \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{x}} = 0$

Cuarto paso $\frac{dy}{dx} = u \frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{x}} + v \frac{d\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{x}}$

- **1.6 DERIVADA DE LA POTENCIA.-** cuando el exponente es constante, es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente de menor grado con una unidad y por la derivada de la función.

Fórmula principal: $\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{x}}$

Cuando v=x $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

- **1.7 DERIVADA DE UN COCIENTE.-** la derivada de cociente de funciones es igual al producto del denominador por la derivada del numerador menos el producto del numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador.

Si el denominador es constante $\boldsymbol{v} = c$

Obtenemos $\frac{d}{dx}(\frac{u}{c}) = \frac{\frac{du}{dx}}{c}$

Puesto que $\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{x}} = \frac{d\boldsymbol{c}}{d\boldsymbol{x}} = 0$

La derivada del cociente de una función dividida por una constante, es igual a la derivada de la función dividida por la constante. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{1}{c}\frac{du}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{c}$

2.0 PROBLEMAS

Hallar la derivada de las siguientes funciones

- **y=x^3**

Procedemos $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) = 3^2$

- **y=ax^4 –bx^2**

Solución $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ax^4 - bx^2) = \frac{d}{dx}(ax^4) - \frac{d}{dx}(bx^2)$

$$a\frac{d}{dx}(x^4) - b\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= 4ax^3 - 2bx$$

2.1 PODEMOS RESOLVER LOS SIGUIENTES PROBLEMAS:

- derivar $y = \frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$ sol; $\frac{3a^2x-x^3}{(a^2-x^2)^{3/2}}$
- derivar $y = x^{4/3}$ sol; 4/3.x$^{1/3}$
- derivar $y = \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$ sol; $\frac{dy}{dx} = \frac{4a^2x}{(a^2-x^2)^2}$

CAPÍTULO VII

1.0 APLICACIONES DE LA DERIVADA

- Para hallar la pendiente de una tangente, señalar los intervalos de crecimiento o decrecimiento, determinar los extremos de una función.

- Para hallar el punto de inflexión y decidir si el caso es máximo o mínimo local. También si la concavidad es hacia arriba o hacia abajo.
- La derivada interviene también en la torsión.
- Y cualquiera derivada interviene en el desarrollo de una función en una serie de potencias en un dominio adecuado, todas ellas en otras cosas más.
- La derivada como rapidez de variación

Un ejemplo práctico es: si un auto recorre los 100 metros planos en 10 segundos, estamos realizando una derivada, pero si especificamos más, podemos decir que en unos dos segundos varía la velocidad, por decir; que los 10 segundo solamente es un promedio.

CONCLUCIONES

1. En Cálculo, los temas como: límites y derivadas, son fundamentales, porque de ahí parte el proceso de la solución de cualquier problema.
2. Una vez realizado este trabajo podemos darnos cuenta, que en la vida real estamos realizando derivadas.
3. Se puede decir que el teorema del “**emparedado**” es un sistema muy sencillo que nos brinda una comprensión general de límites.
4. Cuando hablamos de “**cálculo”,** podemos abarcar prácticamente cualquier evento de la vida real.
5. Los números están presentes en todas las áreas, porque “*el mundo mismo está hecho de ecuaciones que nosotros no podemos descifrar todas*” (Einstein)

FUENTE BIBLIOGRÁFICO:

a) “GRANVILLE” 1998, CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

b) “JAVIER PEREZ GONZÁLEZ” SEPTIEMBRE 2006,
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

c) “FIDENCIO MATA GONZÁLEZ” SÉPTIMA EDICIÓN 1998, EL CÁLCULO.

LINCONGRAFÍA:

a) Granville, (s.f.) cálculo diferencial e integral.
http://www.slideshare.net/secretweapon_vk/clculo-diferencial-e-integral-granville

b) Recuperado (20/05/2014)
http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_real

c) Fidencio Mata González El Cálculo, séptima edición 1998
http://www.math.epn.edu.ec/~sandra/Calculo_2014_A/libros/Leithold7a.Ed..pdf

Maira Diaz y Sandra Santos, Funciones reales, graficos.
http://matematicas-funcionesreales.blogspot.com/p/clases-de-funciones.html

d) Recuperado (22/05/2014) Funciones, definición.
http://www.vitutor.com/fun/2/a_r.html

e) Recuperado (25/05/2014) Cálculo de Límites infinitos.
http://www.vitutor.com/fun/3/a_8.html

f) Recuperado (25/05/2014), Definición de Derivada
http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada

g) Recuperado (27/05/2014), Teorema del Emparedado
http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_emparedado

h) Recuperado (27/05/2014), definición del Calculo
http://definicion.de/calculo/

i) Recuperado (28/05/2014), Cálculo
https://es.answers.yahoo.com/question/index?qid=20091203123633AALZISg

j) Recuperado (28/05/2014), Intervalos de una Función.
http://es.wikipedia.org/wiki/Intervalo_%28matem%C3%A1tica%29#mediaviewer/Archivo:Intervalo_real_01.svg

k) Recuperado (28/05/2014), Gráfica de Funciones
http://www.youtube.com/watch?v=ZYP9-rT52r8

l) Recuperado (28/05/2014), Derivación
http://es.wikipedia.org/wiki/Derivaci%C3%B3n_%28matem%C3%A1tica%29

m) Recuperado (28/05/2014), Símbolos matemáticos
http://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:S%C3%ADmbolos_matem%C3%A1ticos

n) Recuperado (28/05/2014), Cálculo.
http://www.youtube.com/watch?v=U5aW5aR0qbU

o) Recuperado (28/05/2014), Límites
http://www.youtube.com/watch?v=ZFYc4NGKZ4I

p) Recuperado (28/05/2014), Teoremas de Límites.
http://www.youtube.com/watch?v=FZE67BY-eYc

ANEXOS

1. La altura a la que se encuentra una pelota pateada desde un punto situado a 10 pies sobre el nivel del suelo esta dada por la siguiente función

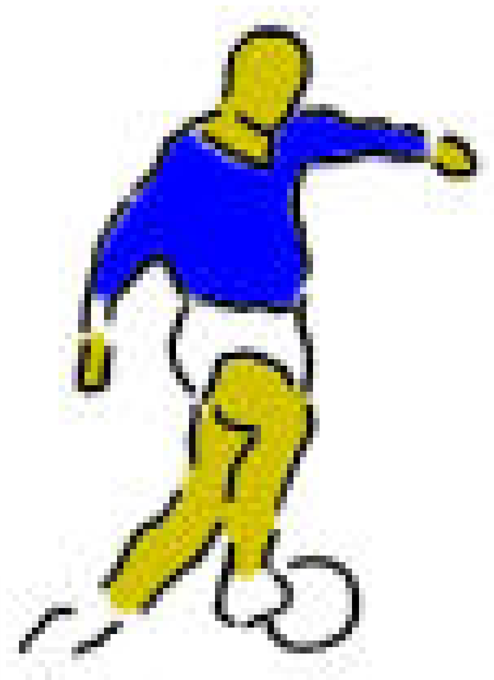
h (t) = 80t – 16t2 + 10

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

84

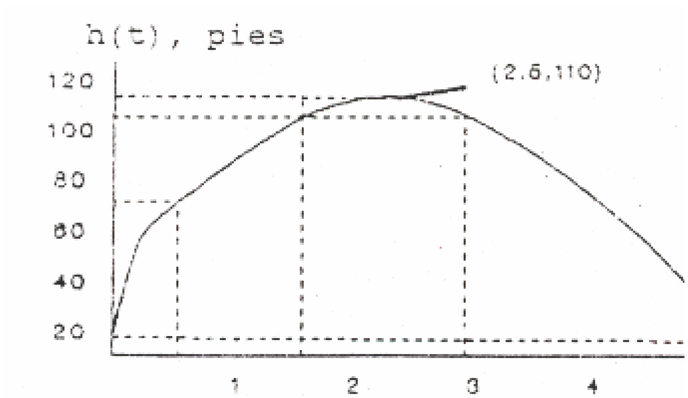
En donde “t” es el tiempo (en segundos) y h (t) es la altura (en pies) sobre el suelo a la que se encuentra situada la pelota en el instante t.

Completa la siguiente tabla



T	0	1	2	2,5	3	4	5	6
h(t)			106		106			

La gráfica se muestra a continuación



Observa la gráfica y analiza las siguientes preguntas.

¿Para qué valores del tiempo (t), la altura (h) que alcanza la pelota tiene significado lógico? A ese conjunto se llama dominio, y se presenta así: $0 \leq t \leq 5.12$

Lo que significa que ‘t’ es mayor o igual que cero, pero menor o igual que 5.12 ¿Cuáles son los posibles valores de la altura que puede alcanzar la pelota? A ese conjunto se le llama rango, y se presenta así:

$0 \leq h \leq 110$ y significa que ‘h’ es mayor o igual que cero, pero menor o igual que 110.

2. PROBLEMAS DE LÍMITES

$$\lim_{x\to 1}(-x^2-5x+6)$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2}{x^2-5x+2}$$

$$\lim_{x\to \infty}(3x^4+x^3-2x)$$

$$\lim_{x\to \infty}(-x^2+5x+6)$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{1}{3x^4+x^3-2x}$$

3. TEOREMA DEL EMPAREDADO. es un método muy sencillo para poder comprender sobre límites. Ya que brinda un analisis tanto por la derecha como por la izquierda.

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

CÁLCULO

<table>
<tr><th>Símbolo</th><th>Nombre</th><th>se lee como</th><th>Categoría</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\int$</td><td>integración</td><td>integral desde ... hasta ... de ... con respecto a ...</td><td>cálculo</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\int_a^b f(x)\,dx$ significa: el área, con signo, entre el eje-x y la gráfica de la función f entre $x = a$ y $x = b$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\int_0^b x^2\,dx = b^3/3$; $\int x^2\,dx = x^3/3$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">f'</td><td>derivación</td><td>derivada de f; f prima</td><td>cálculo</td></tr>
<tr><td colspan="3">$f'(x)$ es la derivada de la función f en el punto x, esto es, la pendiente de la tangente en ese lugar.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Si $f(x) = x^2$, entonces $f'(x) = 2x$ y $f''(x) = 2$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">∇</td><td>gradiente</td><td>del, nabla, gradiente de</td><td>cálculo</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\nabla f(x_1, \ldots, x_n)$ es el vector de derivadas parciales $(df / dx_1, \ldots, df / dx_n)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Si $f(x, y, z) = 3xy + z^2$ entonces $\nabla f = (3y, 3x, 2z)$</td></tr>
</table>

∂	derivada parcial	derivada parcial de	cálculo
	Con $f(x_1, \ldots, x_n)$, $\partial f/\partial x_i$ es la derivada de f con respecto a x_i, con todas las otras variables mantenidas constantes.		
	Si $f(x, y) = x^2y$, entonces $\partial f/\partial x = 2xy$		

FUNCIONES

Símbolo	Nombre	se lee como	Categoría
$(\ )$ $[\ ]$ $\{\ \}$	aplicación de función; agrupamiento	de	funciones
	para aplicación de función: $f(x)$ significa: el valor de la función f sobre el elemento x para agrupamiento: realizar primero las operaciones dentro del paréntesis.		
	Si $f(x) := x^2$, entonces $f(3) = 3^2 = 9$; $(8/4)/2 = 2/2 = 1$, pero $8/(4/2) = 8/2 = 4$		
f: $X \to Y$	mapeo funcional	de ... a	funciones
	$f: X \to Y$ significa: la función f mapea el conjunto X al conjunto Y		
	Considérese la función $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ definida por $f(x) = x^2$		

Los símbolos nos permiten comprender expresiones matemáticos que se nos presenta en muchos problemas.