Primera parte

LÓGICA DE PROPOSICIONES

Idea de lógica de proposiciones

La lógica de proposiciones es la parte más elemental de la lógica moderna o matemática. En esta primera parte de la lógica, las inferencias se construyen sin tomar en cuenta la estructura interna de las proposiciones. Sólo se examinan las relaciones lógicas existentes entre proposiciones consideradas como un todo, y de ellas sólo se toma en cuenta su propiedad de ser verdaderas o falsas. Por esta razón emplea sólo variables proposicionales.

La lógica de proposiciones estudia las relaciones formales extraproposicionales, es decir, aquellas relaciones existentes entre proposiciones y no las que se dan dentro de ellas. Se la denomina, también, lógica de las proposiciones sin analizar. Dispone de medios de análisis formal de las inferencias (lenguaje simbólico y métodos específicos), y la validez de éstas se determina por las relaciones entre proposiciones consideradas como un todo, sin penetrar en su estructura interna.

Concepto de proposición

El lenguaje, en sentido estricto, es un sistema convencional de signos, es decir, un conjunto de sonidos y grafías con sentido, sujeto a una determinada articulación interna. Sirve para afirmar o negar (oraciones aseverativas o declarativas); expresar deseos (oraciones desiderativas); formular preguntas (oraciones interrogativas); expresar sorpresa o admiración (oraciones exclamativas o admirativas) e indicar exhortación, mandato o prohibición (oraciones exhortativas o imperativas).

De todas estas clases de oraciones la lógica sólo toma en cuenta las declarativas o aseverativas, las únicas que pueden constituir proposiciones, según cumplan o no determinados requisitos.

La proposición es una oración aseverativa de la que tiene sentido decir que es verdadera o falsa. Ejemplos:

a) Dolly fue la primera oveja clonada.
b) El átomo es una molécula.

'a)' y 'b)' son ejemplos de proposiciones, porque tiene sentido decir que 'a)' es verdadera y que 'b)' es falsa. En consecuencia, la verdad y la falsedad son sus propiedades, es decir, sólo las proposiciones pueden ser verdaderas o falsas

Expresiones lingüísticas que no son proposiciones

Todas las proposiciones son oraciones, pero no todas las oraciones son proposiciones. En efecto, las oraciones interrogativas, las exhortativas o imperativas, las desiderativas y las exclamativas o admirativas no son proposiciones porque ninguna de ellas afirma o niega algo y, por lo tanto, no son verdaderas ni falsas. Asimismo, las oraciones dubitativas, así como los juicios de valor —no obstante afirmar algo— no constituyen ejemplos de proposiciones, pues su verdad o falsedad no puede ser establecida. Ejemplos:

c) El cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.
d) ¿Qué es la lógica?
e) Debemos honrar a nuestros héroes.
f) Sea en hora buena.
g) ¡Por Júpiter! ¡Casi me saco la lotería!

h) Quizá llueva mañana.

i) Valentín es bueno.

'c)' es proposición porque es una oración aseverativa verdadera; 'd)' no es proposición porque es una oración interrogativa; 'e)' no es proposición porque es una oración imperativa o exhortativa; 'f)' tampoco es proposición porque es una oración desiderativa, 'g)' no es proposición porque es una oración exclamativa o admirativa, 'h)' no es proposición porque es una oración dubitativa, y finalmente, 'i)' no es proposición porque constituye un juicio de valor.

Finalmente, toda proposición es una oración aseverativa, pero no toda oración aseverativa es una proposición. Ejemplos:

j) El triángulo es inteligente.

k) Eduardo es un número racional.

l) $x + 3 = 5$

m) a es la capital del Perú.

'j)', 'k)', 'l)' y 'm)' son ejemplos de oraciones aseverativas, mas no de proposiciones. 'j)' e 'k)' son expresiones lingüísticas que tienen apariencia de proposiciones, pero que realmente no lo son porque no tiene sentido decir de ellas que son verdaderas o falsas. Son pseudoproposiciones, es decir, falsas proposiciones. 'l)' y 'm)' son también ejemplos de oraciones aseverativas, pero no de proposiciones; no son verdaderas ni falsas porque en ellas figura una o más letras sin interpretar, son ejemplos de funciones proposicionales.

n) El principal sospechoso de los atentados del 11 de setiembre de 2001 en los Estados Unidos.

o) El actual Presidente de la República del Perú.

'n)' y 'o)' no son proposiciones; son descripciones definidas, es decir, frases especiales que pueden ser reemplazadas por nombres propios. 'n)' puede ser sustituida por Osama bin Laden y 'o)' por Alejandro Toledo.

p) ‘La realidad es duración’ (Bergson).

q) ‘La materia se mueve en un ciclo eterno’ (Engels).

r) ‘Las condiciones de posibilidad de la experiencia en general son al mismo tiempo las de la posibilidad de los objetos de la experiencia’ (Kant).

s) ‘Considera bien quién eres. Ante todo, un hombre, es decir, un ser para el que nada existe más importante que su propia capacidad de opción’ (Epicteto).

t) ‘Filosofar (...) es el extraordinario preguntar por lo extra-ordinario’ (Heidegger).

u) ‘Nunca filósofo alguno ha demostrado algo. Toda pretensión es espuria. Lo que tengo que decir es simplemente esto: los argumentos filóficos no son deductivos, por lo tanto no son rigurosos, por lo que nada prueban; sin embargo, tienen fuerza’ (F. Waismann).

v) La ciencia y la religión son, ambas, vías respetables para adquirir creencias respetables, no obstante tratarse de creencias que son buenas para propósitos muy diferentes (R. Rorty).

‘p)’, ‘q)’, ‘r)’, ‘s)‘, ‘t)’, ‘u)’ y ‘v)’ no son proposiciones, sino filosofemas, es decir, enunciados filosóficos. Ninguna de ellos puede calificarse de verdadero o falso. Su verdad o falsedad no puede ser establecida lógica o empíricamente. En filosofía no hay verdades, pues los enunciados filosóficos o filosofemas sólo expresan opiniones racionalmente fundamentadas.

En conclusión:

Para que una expresión lingüística sea proposición debe cumplir con los siguientes requisitos:

1) Ser oración.
2) Ser oración aseverativa, y
3) Ser o bien verdadera o bien falsa.

Por esto, no son ejemplos de proposiciones:

1) Las oraciones interrogativas, imperativas o exhortativas, desiderativas, exclamativas o admirativas y las dubitativas.
2) Los juicios de valor.
3) Las pseudoproposiciones.
4) Las funciones proposicionales.
5) Las descripciones definidas, y
6) Los filosofemas.

Proposición, oración y enunciado

Es necesario distinguir una proposición (objeto conceptual o constructo) de las oraciones (objetos lingüísticos) que la designan, expresan o formulan, así como es preciso distinguir una oración de sus diversas enunciaciones (acto psicofísico) orales, escritas, o por ademanes. En efecto, cuando enuncio, o escucho, o escribo, o leo una oración, por ejemplo, 'Tres es mayor que dos', ejecuto un acto psicofísico.

En consecuencia, la enunciación y la percepción de una oración son procesos y, como tales, objetos físicos en sentido lato. No así la oración misma: ésta puede considerarse como una clase de enunciaciones concretas en circunstancias particulares. Una misma oración podrá ser pronunciada por diversos sujetos, en distintas circunstancias y con diferentes tonos de voz. Cámbiese el sujeto, o las circunstancias, o el tono de voz, y se tendrán enunciaciones diferentes de la misma oración. Piénsese en la oración '3 > 2' dicha en lenguaje interior, susurrada, gritada, o escrita en diversos lenguajes.

Asimismo, ciertas oraciones designan o expresan proposiciones. Por ejemplo, las oraciones '3 > 2', 'III > II', 'Three is greater than two' y 'Tres es mayor que dos' expresan o designan una misma proposición. Pero si bien toda proposición es expresable por una o más oraciones, la recíproca no es cierta. En efecto, hay oraciones gramaticales que no formulan proposición alguna, como por ejemplo 'El número cinco aleteó' y 'La raíz cuadrada de una melodía es igual a un sueño'.[27]

En resumen, tenemos tres clases de objetos y dos relaciones entre ellos:

$$\text{Enunciados} \xrightarrow{\text{enuncian}} \text{Oraciones} \xrightarrow{\text{expresan}} \text{Proposiciones}$$

Enunciados	Oraciones	Proposiciones
↓	↓	↓
(acto psicofísico)	(objeto lingüístico)	(objeto conceptual)

Clases de proposiciones

Éstas pueden ser de dos clases: atómicas y mole-culares.

Las proposiciones atómicas (simples o elementales) carecen de conjunciones gramaticales típicas o conectivas ('y', 'o', 'si... entonces', 'si y sólo si') o del adverbio de negación 'no'. Ejemplos:

a) San Marcos es la universidad más antigua de América.
b) La lógica es distinta a la matemática.

Las proposiciones atómicas de acuerdo a sus elementos constitutivos pueden clasificarse en predicativas y relacionales.

Las proposiciones predicativas constan de sujeto y predicado. Ejemplos:

c) El número 2 es par.
d) El espacio es relativo.

Las proposiciones relacionales constan de dos o más sujetos vinculados entre sí. Ejemplos:

[27] BUNGE, Mario, *Epistemología,* La Habana, Ciencias Sociales, 1982, pp. 62-65.

e) Silvia es hermana de Angélica.
f) 5 es mayor que 3.

Las proposiciones moleculares (compuestas o coligativas) contienen alguna conjunción gramatical típica o conectiva o el adverbio negativo 'no'. Ejemplos:

g) La lógica y la matemática son ciencias formales.
h) El tiempo es absoluto o es relativo.
i) Si dos ángulos adyacentes forman un par lineal, entonces son suplementarios.
j) Este número es par si y sólo si es divisible por dos.
k) El Inca Garcilaso de la Vega no es un cronista puneño.

Clasificación de las proposiciones moleculares

Las proposiciones moleculares, según el tipo de conjunción que llevan, se clasifican en conjuntivas, disyuntivas, condicionales y bicondicionales; si llevan el adverbio de negación 'no' se llaman negativas.

• Las proposiciones conjuntivas llevan la conjunción copulativa 'y', o sus expresiones equivalentes como 'e', 'pero', 'aunque', 'aun cuando', 'tanto... como...', 'sino', 'ni... ni', 'sin embargo', 'además', etc. Ejemplos:

a) 'El' es un artículo y 'de' es una preposición.
b) El número dos es par, pero el número tres es impar.
c) Silvia es inteligente, sin embargo es floja.
d) Tanto el padre como el hijo son melómanos.
e) Manuel e Ismael son universitarios.
f) La materia ni se crea ni se destruye.
g) Iré a verte aunque llueva.
h) Ingresaré a la universidad aun cuando no apruebe el examen de admisión.

En las proposiciones conjuntivas no es necesario que sus proposiciones componentes estén relacionadas en cuanto al contenido; es suficiente la presencia de la conjuncion ‘y’.

Una proposición conjuntiva es conmutativa, es decir, se puede permutar el orden de sus proposiciones componentes sin alterar la conjunción. Esto es posible en la lógica, pero no en el lenguaje natural. En efecto, la proposición ‘Angélica se casó y tuvo diez hijos’ no significa lo mismo que ‘Angélica tuvo diez hijos y se casó’. En el lenguaje natural, la primera sugiere una relación de causalidad, en cambio la segunda no. Sin embargo, desde el punto de vista lógico, las dos proposiciones conjuntivas son equivalentes.

Las pseudoproposiciones conjuntivas son proposiciones que se presentan como si fuesen proposiciones conjuntivas, pero que en realidad son proposiciones atómicas relacionales. La ‘y’, de los ejemplos, tiene carácter de término relacional y no propiamente de conjunción copulativa o conectiva. Ejemplos:

a) Sansón y Dalila son hermanos.
b) Sansón y Dalila son primos.
c) Sansón y Dalila son vecinos.
d) Sansón y Dalila son compadres.
e) Sansón y Dalila son contemporáneos.
f) Sansón y Dalila son condiscípulos.
g) Sansón y Dalila son paisanos.
h) Sansón y Dalila son colegas.
i) Sansón y Dalila son cuñados.
j) Sansón y Dalila son enamorados.
k) Sansón y Dalila son novios.
l) Sansón y Dalila son esposos.
m)Sansón y Dalila son amantes.
n) Sansón y Dalila son mellizos.
o) Sansón y Dalila son siameses.
p) Sansón y Dalila comparten sus ganancias.
q) Sansón y Dalila obsequian una bicicleta a su sobrina Cleopatra.

• Las proposiciones disyuntivas llevan la conjunción disyuntiva ‘o’, o sus expresiones equivalentes como ‘u’, ‘ya... ya’, ‘bien... bien’, ‘ora... ora’, ‘sea... sea’, ‘y / o’, etc.

En español la disyunción 'o' tiene dos sentidos: uno inclusivo o débil y otro exclusivo o fuerte. La proposición disyuntiva inclusiva admite que las dos alternativas se den conjuntamente. La proposición disyuntiva exclusiva no admite que las dos alternativas se den conjuntamente. Ejemplos:

a) Pedro es tío o es sobrino.
b) Elena está viva o está muerta.
c) Roberto es profesor o es estudiante.
d) Silvia es soltera o es casada.

‘a)’ y ‘c)’ son proposiciones disyuntivas inclusivas o débiles porque en ellas no se excluye la posibilidad de que Pedro pueda ser al mismo tiempo tío y sobrino o de que Roberto sea profesor y estudiante a la vez; en cambio ‘b)’ y ‘d)’ son proposiciones disyuntivas exclusivas o fuertes porque en ellas se excluye la posibilidad de que Elena pueda estar viva y muerta al mismo tiempo y que Silvia sea soltera y casada a la vez.

En español no existe un signo especial para la disyunción inclusiva y otro para la exclusiva, es decir, en ambos casos se usa la misma partícula ‘o’; mientras que en lógica sí existen signos especiales para distinguirlas, como veremos más adelante.

• Las proposiciones condicionales llevan la conjunción condicional compuesta ‘si... entonces...’, o sus expresiones equivalentes como ‘si’, ‘siempre que’, ‘con tal que’, ‘puesto que’, ‘ya que’, ‘porque’, ‘cuando’, ‘de’, ‘a menos que’, ‘a no ser que’, ‘salvo que’, ‘sólo si‘, ‘solamente si’. Ejemplos:

a) Si es joven, entonces es rebelde.
b) Es herbívoro si se alimenta de plantas.
c) El número cuatro es par puesto que es divisible por dos.

d) Se llama isósceles siempre que el triángulo tenga dos lados iguales.
e) Cuando venga Raúl jugaremos ajedrez.
f) De salir el sol iremos a la playa.
g) La física relativista fue posible porque existió la mecánica clásica.
h) Nuestra moneda se devalúa solamente si su valor disminuye.

Toda proposición condicional consta de dos elementos: antecedente y consecuente. La proposición que sigue a la palabra 'si' se llama antecedente y la que sigue a la palabra 'entonces' se denomina consecuente.

Toda proposición implicativa es condicional, pero no toda proposición condicional es implicativa. En efecto, sólo las proposiciones condicionales que son tautologías son implicativas.

Para que una proposición condicional sea lógicamente correcta no es necesario que haya relación de atingencia entre el antecedente y el consecuente, es decir, que la verdad en una proposición condicional es independiente de las relaciones que puedan existir o no entre los significados del antecedente y el consecuente. Por ejemplo, la proposición "Si la tierra gira alrededor del sol, entonces Lima es capital del Perú" es verdadera no obstante no existir relación alguna entre los significados de sus proposiciones componentes.

Finalmente, en toda proposición condicional el consecuente es condición necesaria del antecedente y el antecedente es condición suficiente del consecuente. Por ejemplo, en la proposición condicional 'si los cuerpos se calientan, entonces se dilatan', el consecuente 'se dilatan' es condición necesaria del antecedente 'se calientan' y el antecedente 'se calientan' es condición suficiente del consecuente 'se dilatan'.

• Las proposiciones bicondicionales llevan la conjunción compuesta '... sí y sólo si...', o sus expresiones equivalentes como 'cuando y sólo cuando', 'si..., entonces y sólo entonces...', etc. Ejemplos:

a) Es fundamentalista si y sólo si es talibán.
b) Habrá cosecha cuando y sólo cuando llueva.
c) Si apruebo el examen de admisión, entonces y sólo entonces ingresaré a la universidad.

Las proposiciones bicondicionales se caracterizan porque establecen dos condicionales, pero de sentido inverso. Por ejemplo, la proposición bicondicional ‘el triángulo es equilátero si y sólo si tiene tres lados iguales’ establece dos condicionales de sentido inverso: ‘si es triángulo equilátero, entonces tiene tres lados iguales’ y ‘si el triángulo tiene tres lados iguales, entonces es equilátero’.

En toda proposición bicondicional el antecedente es condición necesaria y suficiente del consecuente y el consecuente es condición necesaria y suficiente del antecedente.

• Las proposiciones negativas llevan el adverbio de negación ‘no’, o sus expresiones equivalentes como ‘nunca’, ‘jamás’, ‘tampoco’, ‘no es verdad que‘, ‘no es cierto que’, ‘es falso que’, ‘le falta’, ‘carece de’, ‘sin’, etc. Ejemplos:

a) Nunca he oído esa música.
b) Jamás he visto al vecino.
c) Es imposible que el átomo sea molécula.
d) Es falso que el juez sea fiscal.
e) Al papá de Nelly le falta carácter.

Cuestionario N.º 5

1. ¿Qué es una proposición?
2. ¿Qué requisitos debe cumplir una expresión lingüística para que sea considerada proposición?
3. ¿Qué expresiones lingüísticas no constituyen ejemplos de proposiciones?
4. ¿Por qué las oraciones interrogativas, imperativas o exhortativas, desiderativas, admirativas o exclamativas y las dubitativas no constituyen ejemplos de proposiciones?

5. ¿Qué semejanzas y diferencias existen entre las pseudoproposiciones y las funciones proposicionales?
6. ¿Qué es una descripción definida?
7. Los filosofemas o enunciados filosóficos, ¿son o no ejemplos de proposiciones? ¿Por qué?
8. ¿Es la ley, un ejemplo de proposición? ¿Por qué?
9. ¿Qué clases de proposiciones hay y cuáles son las diferencias que existen entre ellas?
10. ¿Cómo se clasifican las proposiciones atómicas?
11. ¿Qué diferencia existe entre proposición predicativa y proposición relacional?
12. ¿Cómo se clasifican las proposiciones moleculares?
13. ¿Qué es una proposición conjuntiva?
14. ¿Qué es una pseudoproposición conjuntiva?
15. ¿Qué es una proposición disyuntiva?
16. ¿Qué clases de proposiciones disyuntivas existen y en qué consisten cada una de ellas?
17. ¿Qué es una proposición condicional?
18. ¿Qué diferencia existe entre proposición condicional y proposición implicativa?
19. ¿Qué es una proposición bicondicional?
20. ¿Qué es una proposición negativa?

Ejercicio N.º 4
Reconocimiento de proposiciones

1. Analice las siguientes expresiones lingüísticas e indique si son o no proposiciones:

a) La nueva Constitución Política del Perú fue sancionada y promulgada por la Asamblea Constituyente en 1993.
b) El presidente de la República es el Jefe del Estado y personifica a la Nación (Constitución Política del Perú, Art. 110).
c) ¿Quién es el pez gordo del narcotráfico?

d) Sea en hora buena.
e) ¡Por fin llegó la primavera!
f) Los números racionales son inteligentes.
g) Que tengan ustedes buen viaje.
h) Sólo sé que nada sé.
i) Juan es bondadoso.
j) No engañes nunca a nadie.
k) Quizá existan miles de millones de universos.
l) Los organismos superiores tienen pulmones porque necesitan respirar.
m) a es la capital del Perú.
n) $x + y = y + x$
o) Los planetas del sistema solar, a excepción de Plutón, ocupan prácticamente el mismo plano con respecto al Sol.
p) El número 5 sonrió.
q) Los cuerpos sin apoyo caen aceleradamente en proporción directa al cuadrado del tiempo de caída.
r) x es un número par.
s) Los electrones son partículas que se encuentran alrededor del núcleo del átomo.
t) La semana tiene y días.

Ejercicio N.°5
Clases de proposiciones

1. Diga si las siguientes proposiciones son atómicas o moleculares:

a) Osama y Omar son concuñados.
b) Toda inferencia inductiva es una inferencia en términos de probabilidad.
c) Hace unos años se consideraba al computador como una gran ‘calculadora’, pero hoy se habla de sus logros intelectuales.
d) El oxígeno no produce óxido en presencia de metaloides.
e) Tanto la suma como la multiplicación de números naturales son asociativas.

f) Los peces son acuáticos puesto que respiran por branquias.
g) La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.
h) Gloria e Irene son contemporáneas.
i) El abuelo y la abuelita obsequiaron una muñeca a su nieta.
j) Hace aproximadamente 1 750 000 años el Homo habilis desapareció para ser reemplazado por un individuo más fornido, conocido como Homo erectus.
k) Una lógica se dice paraconsistente si puede ser la lógica de teorías inconsistentes pero no triviales.
l) A la descomposición química de una sustancia en iones por la acción de la corriente eléctrica se llama electrolisis.
m) Los términos ‘lenguaje objeto’ y ‘metalenguaje’ no son absolutos sino relativos.
n) Por razones aún no conocidas, el hombre de Neanderthal desapareció hace unos 40 mil años y cedió el lugar a un individuo venido del este: el hombre de Cro-Magnon, nuestro ancestro directo.
o) Decir que la inteligencia es hereditaria es defender la idea de que nuestras facultades intelectuales se transmiten de padres a hijos casi de la misma manera que el color de los ojos.
p) Así pues, no hay forma de argumentar en contra de las ideas de Aristóteles sobre la base de las creencias formuladas en el vocabulario, pero no a la inversa.
q) La diferencia que hay aquí entre Sellars y Davidson es la diferencia entre alguien que se toma en serio la pregunta “¿Existe en realidad aquello sobre lo que hablamos?” y alguien que no.
r) “Liberalismo burgués posmoderno” fue una contribución a un simposio sobre “La responsabilidad social de los intelectuales”, celebrado en la reunión anual de 1983 de la división oriental de la Asociación Americana de Filosofía.
s) Me parece que la izquierda posmarxista actual difiere de la marxista anterior principalmente en que esta última tenía en mente una revolución concreta.
t) La concepción que denomino “pragmatismo” es casi la misma que la que Hilary Putnam denomina “la concepción internalista de la filosofía”.

Ejercicio N.º 6
Clasificación de las proposiciones moleculares

1. Diga si las siguientes proposiciones moleculares son conjuntivas, disyuntivas inclusivas, disyuntivas exclusivas, condicionales, bicondicionales o negativas:

a) Si el ciclotrón bombardea el átomo, entonces acelera la velocidad de los protones.
b) Todos los cuerpos se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.
c) Un ejemplo típico de la falacia del círculo vicioso es la famosa prueba del quinto postulado de Euclides o postulado de las paralelas.
d) El 20% de 150 es 30 ó 50.
e) Dos ángulos son suplementarios siempre que formen un par lineal.
f) La huelga continúa, pues no hay solución.
g) Si consigo una beca, entonces y sólo entonces viajaré al extranjero.
h) Si se calienta un cuerpo, entonces se dilata; y si se enfría, entonces se contrae.
i) Cuando apruebe el examen de admisión ingresaré a la universidad.
j) David no es limeño ni loretano.
k) Si la distancia entre el Sol y la Tierra hubiera diferido en apenas un 5 por ciento, ninguna forma de vida habría podido surgir y nuestro planeta habría sido un desierto.
l) Sin la aparición de las galaxias, sin la formación de estrellas masivas, sin el paso por el estadio de supernova, jamás habrían podido existir el hombre ni la vida.
m) Francis Fukuyama proclamaba el fin de la historia y la muerte de toda ideología, puesto que era liberal.

n) Actualmente está claramente establecido que nuestro universo sufre una tremenda expansión, y que esta expansión parece ser el resultado de una explosión inicial o big bang.
o) Las estrellas nacen y viven, pero también mueren.
p) Se dice que existe probabilidad de que ocurra un hecho o que un hecho es probable, cuando hay en alguna medida razones o fundamentos para afirmar su ocurrencia, pero sin llegar al nivel de la certeza o de la seguridad.
q) Vilma trabaja despacio, pero sin pausa
r) Paradoja es un tipo especial de contradicción constituida por una proposición determinada cuya verdad implica su falsedad y cuya falsedad implica su verdad.
s) El pragmatismo norteamericano ha oscilado entre el intento de elevar el resto de la cultura al nivel epistemológico de las ciencias naturales y el intento de nivelar las ciencias naturales en paridad epistemológica con el arte, la religión y la política.
t) "Definición operacional" es la expresión del significado de un constructo o concepto teorético en términos de propiedades observables y medibles llamadas indicadores.

EL LENGUAJE FORMALIZADO DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

El lenguaje natural y el lenguaje formalizado

Existen dos tipos fundamentales de lenguajes: el natural y el formalizado. El lenguaje natural es el lenguaje usado en la vida familiar, en la vida cotidiana. Tiene una amplia gama expresiva, es decir, sirve para comunicar informaciones, formular órdenes, expresar deseos, sentimientos, etc. Pertenecen a este lenguaje, por ejemplo, el español, el inglés, el francés, el alemán, entre otros. El lenguaje formalizado es el lenguaje usado en la actividad científica. Sólo sirve para formular conocimientos. Es un lenguaje especializado. Pertenecen a este lenguaje, por ejemplo, el lenguaje lógico y el matemático.

Variables proposicionales y operadores lógicos

El lenguaje lógico se denomina formalizado porque su propiedad más importante es la de revelar la forma o estructura de las proposiciones e inferencias. El lenguaje formalizado de la lógica de proposiciones consta de dos clases de signos: variables proposicionales y operadores o conectores lógicos.

Las variables proposicionales representan a cualquier proposición atómica. Son letras minúsculas del alfabeto castellano ‘p’, ‘q’, ‘r’, ‘s’, etc. Los operadores lógicos además de enlazar o conectar proposiciones establecen determinadas operaciones entre ellas. Son de dos clases: diádicos y el monádico. Los operadores diádicos tienen un doble alcance: hacia la izquierda y hacia la derecha, es decir, afectan a dos variables. Y son los siguientes:

El conjuntivo: representa a la conjunción ‘y’. Su símbolo es ‘$\wedge$’.

El disyuntivo: representa a la conjunción ‘o’. Puede ser inclusivo y exclusivo.

El símbolo del inclusivo es ‘$\vee$’; el del exclusivo es ‘$\nleftrightarrow$’.

El condicional: representa a la conjunción compuesta ‘si... entonces’. Su símbolo es ‘$\rightarrow$’.

El bicondicional : representa a la conjunción compuesta ‘si y sólo si’. Su símbolo es ‘$\leftrightarrow$’.

Negación conjunta: representa a las partículas ‘ni...ni‘. Su símbolo es ‘$\downarrow$’.

Negación alterna : representa a la expresión ‘no o no’. Su símbolo es ‘$|$’

El Negativo: Es el operador monádico y tiene un solo alcance: hacia la derecha, es decir, afecta a una sola variable. Es el operador de la negación. Representa al adverbio negativo ‘no’. Su símbolo es ‘$\sim$’.

Principales notaciones simbólicas

Existen diferentes notaciones simbólicas, pero pueden reducirse a tres: la de Scholz, la de Peano-Russell y la de Lukasiewicz. Las tablas siguientes muestran las correspondencias entre las principales notaciones simbólicas:

Sistemas	Negación	Conjunción	Disyunción inclusiva	Disyunción exclusiva	Condicional	Bicondicional
Scholz	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \nleftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
Peano-Russell	$\sim p$	$p \,.\, q$	$p \vee q$	$p \not\equiv q$	$p \supset q$	$p \equiv q$
Luka-siewicz	Np	Kpq	Apq	Jpq	Cpq	Epq

Sistemas	Variables	Jerarquía entre operadores
Scholz	p, q, r, etc.	Usa paréntesis
Peano-russell	p, q, r, etc.	Usa puntos
Lukasiewicz	p, q, r, etc.	Ni paréntesis ni puntos

Sistemas de Scholz y Peano-Russell

Las características de las notaciones simbólicas de Scholz y Peano-Russell son:

a) Los operadores diádicos se escriben entre las variables que enlazan, pero la negación va delante.
b) Los operadores son signos especiales.
c) Se usa puntos auxiliares o signos de agrupación para determinar la jerarquía entre los operadores.

Sistema de Lukasiewicz

La notación simbólica de Lukasiewicz presenta las siguientes características:

a) Los operadores se escriben delante de las variables que conectan.
b) Los operadores son letras mayúsculas del alfabeto castellano.

c) No se usa signos de agrupación ni puntos auxiliares para establecer la jerarquía entre los operadores. El operador de mayor jerarquía va a la cabeza.

Nosotros hemos preferido usar la notación simbólica de Scholz porque es la que con mayor frecuencia se emplea en los libros de lógica que circulan en nuestro medio.

Reglas de formación de fórmulas lógicas

Una fórmula lógica, es decir, una fórmula bien formada (FBF) es una cadena de símbolos construida según reglas establecidas por la sintaxis lógica. Puede ser de dos tipos: atómica y molecular.

Una fórmula atómica es aquella que no contiene entre sus símbolos ningún operador y puede ser representada por una variable proposicional, mientras que una fórmula molecular contiene entre sus signos, al menos, un operador.

La sintaxis lógica es una disciplina metalógica que estudia el lenguaje de la lógica desde el punto de vista formal, es decir, sin interesarse más que por las relaciones entre los símbolos. Ella permite la construcción de fórmulas bien formadas estableciendo, con tal objeto, reglas para usar y combinar símbolos.

Las siguientes son reglas de la sintaxis lógica que posibilitan la construcción de fórmulas bien formadas:

Regla 1. Toda variable proposicional (‘p’, ‘q’, ‘r’, ‘s’) es una FBF.
Regla 2. Si ‘p’ es una FBF, entonces ‘~ p’ es también una FBF.
Regla 3. Si ‘p’ y ‘q’ son FBF, entonces ‘p ∧ q’, ‘p ∨ q’, ‘p ↮ q’, ‘p → q’, ‘p ↔ q’ ‘p ↓ q’ y ‘p | q’ son igualmente FBF.
Regla 4. Una cadena de símbolos es una FBF si y sólo si se sigue de la aplicación de R.1, R.2 y R.3.
Regla 5. Una fórmula lógica está bien formada si y sólo si existe una jerarquía claramente establecida entre sus operadores; en caso contrario, la fórmula carece de sentido.
Regla 6. Una FBF tiene un nombre y éste depende de su operador de mayor jerarquía.

Regla 7. El operador de mayor jerarquía es aquel que está libre de los signos de agrupación: '( )', '[ ]', '{ }'.

Regla 8. Los signos de agrupación se usan sólo cuando su omisión hace ambigua una fórmula, es decir, cuando una fórmula es susceptible de una doble interpretación.

Regla 9. Los operadores diádicos tienen mayor jerarquía que el operador monádico.

Regla 10. El operador negativo se escribe antes y no después de una fórmula.

Regla 11. El operador negativo no se escribe entre dos fórmulas, sino inmediatamente a la derecha de un operador diádico.

Regla 12. Si un operador negativo antecede a otro operador igualmente negativo, entonces el de la izquierda tiene mayor jerarquía.

Ejemplos de aplicación de las reglas de formación de fórmulas lógicas:

a) $p \rightarrow (p \wedge r)$

Es una FBF en virtud de R.5. Y se llama condicional por R.6 y R.7.

b) $p \vee q \wedge r$

Es una fórmula mal formada (FMF) por atentar contra la R.8. La ambigüedad de 'b)' se elimina utilizando adecuadamente los paréntesis. Ejemplos:

- $p \vee (q \wedge r)$ Es ya una FBF por R.5. Y se llama disyuntiva inclusiva por R.6 y R.7.

- $(p \vee q) \wedge r$ Es también una FBF por R.5. Y se llama conjuntiva por R.6 y R.7.

c) $\sim (p \wedge q) \not\leftrightarrow \sim (r \vee t)$

Es una FBF por R.5. Se trata de una disyuntiva exclusiva por R.6, R.7 y R.9.

d) $p \sim$

Es una FMF por atentar contra R.10, pero '$\sim p$' es ya una FBF por R. 10

e) $[p \rightarrow (\sim q \wedge \sim r)] \sim$

Es una FMF por atentar contra R.10, pero '$\sim [p \rightarrow (\sim q \wedge \sim r)]$' es ya una FBF por R.5. Se llama negativa por R.6 y R. 7

f) $p \sim q$

Es una FMF por atentar contra R.11, pero '$p \leftrightarrow \sim q$' es ya una FBF por R.5. Se llama bicondicional por R.6, R.7, y R.9.

g) $(\sim p \leftrightarrow \sim q) \sim (\sim r \vee \sim q)$

Es una FMF por atentar contra R.11, pero '$(\sim p \leftrightarrow \sim q) \wedge \sim (\sim r \vee \sim q)$' es ya una FBF por R.5. Y se llama conjuntiva por R.6, R.7 y R.9.

Formalización de proposiciones

Formalizar una proposición significa abstraer su forma lógica, es decir, revelar su estructura sintáctica a través del lenguaje formalizado de la lógica. En términos más sencillos, formalizar una proposición equivale a representarla simbólicamente.

Toda proposición tiene su forma lógica y su fórmula. La forma lógica de una proposición es otra proposición equivalente a la primera con la diferencia de que en ella toda su estructura sintáctica está completamente explicitada. A partir de aquí, su fórmula no es otra cosa que la que resulta de sustituir a toda proposición atómica distinta por una variable proposicional también distinta, a toda conjunción gramatical por el operador lógico correspondiente y el adverbio 'no' por el operador negativo. La técnica de formalización de proposiciones comprende los siguientes pasos:

a) Se explicita su forma lógica empleando las conjunciones 'y', 'o', 'si..., entonces', 'si y sólo si' y el adverbio 'no' en sustitución de sus expresiones equivalentes.
b) Se halla su fórmula reemplazando cada proposición atómica por una variable proposicional, las conjunciones gramaticales por sus operadores lógicos correspondientes y el adverbio 'no' por el operador negativo.
c) Los signos de agrupación se usan para establecer la jerarquía entre los operadores de una fórmula lógica, pero sólo cuando su omisión la hace ambigua.

Ejemplos de formalización de proposiciones:

a) Kant es filósofo, pero Frege es lógico
Forma lógica:
Kant es filósofo y Frege es lógico

Fórmula:
p: Kant es filósofo.
q: Frege es lógico.
$p \wedge q$

b) No iremos al teatro a menos que venga Raúl.
Forma lógica:
Si Raúl viene, entonces iremos al teatro.

Fórmula:

p: Raúl viene.

q: iremos al teatro.

$p \rightarrow q$

c) Einstein no es filósofo, sino físico.

Forma lógica:

Einstein es físico y Einstein no es filósofo.

Fórmula:

p: Einstein es físico.

q: Einstein es filósofo.

$p \wedge \sim q$

d) Euclides no es médico ni físico.

Forma lógica:

Euclides no es médico y Euclides no es físico.

Fórmula:

p: Euclides es médico.

q: Euclides es físico

$\sim p \wedge \sim q$ o $p \downarrow q$

e) Ni Vilma, ni Silvia, ni Angélica ingresaron a la universidad.

Forma lógica:

Vilma no ingresó a la universidad y Silvia no ingresó a la universidad y Angélica no ingresó a la universidad.

Fórmula:

p: Vilma ingresó a la universidad.

q: Silvia ingresó a la universidad.

r: Angélica ingresó a la universidad.

$\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

f) Sin carbono, oxígeno, nitrógeno e hidrógeno, no hay vida.

Forma lógica:

Si no hay carbono y no hay oxígeno y no hay nitrógeno y no hay hidrógeno, entonces no hay vida.

Fórmula:

p: hay carbono.

q: hay oxígeno.

r: hay hidrógeno.

s: hay nitrógeno.

t: hay vida.

$(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge \sim s) \rightarrow \sim t$

g) Tanto Waldir Sáenz como “Chemo” Del Solar son atletas porque son futbolistas.

Forma lógica:

Si Waldir Sáenz es futbolista y “Chemo” Del Solar es futbolista, entonces Waldir Sáenz es atleta y “Chemo” Del Solar es atleta.

Fórmula:

p: Waldir Sáenz es futbolista.

q: “Chemo” Del Solar es futbolista.

r: Waldir Sáenz es atleta.

s: “Chemo” Del Solar es atleta.

$(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$

h) César es profesor o es alumno, pero no puede ser ambas cosas a la vez.

Forma lógica:

César es profesor o César es alumno y es falso que César sea profesor y César sea alumno.

Fórmula:

p: César es profesor.

q: César es alumno.

$(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$

i) Las Fuerzas Armadas y las Fuerzas Policiales participan en el desarrollo económico y social del país, pero no son deliberantes.

Forma lógica:

Las Fuerzas Armadas participan en el desarrollo económico del país y las Fuerzas Armadas participan en el desarrollo social del país y las Fuerzas Policiales participan en el desarrollo económico del país y las Fuerzas Policiales participan en el desarrollo social del país y las Fuerzas Armadas no son deliberantes y las Fuerzas Policiales no son deliberantes.

Fórmula:

p: las Fuerzas Armadas participan en el desarrollo económico del país.
q: las Fuerzas Armadas participan en el desarrollo social del país.
r: las Fuerzas Policiales participan en el desarrollo económico del país.
s: Las Fuerzas Policiales participan en el desarrollo social del país.
t: las Fuerzas Armadas son deliberantes.
w: las Fuerzas Policiales son deliberantes.

$(p \wedge q \wedge r \wedge s) \wedge (\sim t \wedge \sim w)$

Formalización de inferencias

Una inferencia (razonamiento, deducción, argumentación o argumento) es una operación lógica que consiste en derivar a partir de la verdad de ciertas proposiciones conocidas como premisas la verdad de otra proposición conocida como conclusión.

Las premisas de una inferencia son proposiciones que ofrecen las razones para aceptar la conclusión. Preceden a las premisas, en inferencias desordenadas, las palabras ‘puesto que’, ‘ya que’, ‘pues’, ‘porque’, ‘siempre que’, ’si’, etc.

La conclusión de una inferencia es la proposición que se afirma sobre la base de las premisas. Preceden a la conclusión las palabras ‘luego’, ‘por tanto’, ‘por consiguiente’, ’en consecuencia’, etc. Además, en inferencias desordenadas, la proposición inmediatamente anterior a las palabras que preceden a las premisas es la conclusión. Ejemplos:

a) Los postulados son proposiciones primitivas de la matemática. Luego, los postulados son proposiciones primitivas de la matemática o de la lógica.

Premisa: Los postulados son proposiciones primitivas de la matemática.

Conclusión: Luego, los postulados son proposiciones primitivas de la matemática o de la lógica.

b) Ningún metaloide es metal, puesto que todos los metales son cuerpos brillantes y ningún metaloide es cuerpo brillante (inferencias desordenada).

Premisas: 1. Todos los metales son cuerpos brillantes.
2. Ningún metaloide es cuerpo brillante.

Conclusión: En consecuencia, ningún metaloide es metal.

c) Si esta figura tiene cuatro lados, es un cuadrilátero. Si esta figura tiene tres lados, es un trilátero. Esta figura tiene cuatro lados o tiene tres lados. Por tanto, esta figura es un cuadrilátero o es un trilátero.

Premisas: 1. Si esta figura tiene cuatro lados, es un cuadrilátero.
2. Si esta figura tiene tres lados, es un trilátero.
3. Esta figura tiene cuatro lados o tiene tres lados.

Conclusión: Por tanto, esta figura es un cuadrilátero o es un trilátero.

Formalizar una inferencia significa abstraer su forma lógica, vale decir, explicitar su estructura sintáctica a través del lenguaje formalizado de la lógica. La técnica de formalización de inferencias queda expuesta a través de los siguientes pasos:

a) Se ordena la inferencia, pero sólo en el caso de que su forma lógica haya sido alterada en el lenguaje natural, observando el esquema: premisas-conclusión.
b) Se explicita su estructura lógica empleando las conjunciones 'y', 'o', 'si..., entonces', 'si y sólo si' y el adverbio 'no', en lugar de sus expresiones equivalentes. Simultáneamente, se disponen las premisas y la conclusión una debajo de la otra. Entre la última premisa y la conclusión se escribe una barra horizontal y la palabra 'luego', 'en consecuencia', o 'por tanto', antes de la conclusión.
c) Se halla su fórmula lógica sustituyendo cada proposición atómica por una variable proposicional distinta, las conjunciones gramaticales por sus operadores lógicos correspondientes, el adverbio 'no' por el operador negativo y la palabra 'luego' por el símbolo '$\rightarrow$'. Los signos de agrupación se usan para establecer la jerarquía entre los operadores de una fórmula, pero sólo cuando su omisión la hace ambigua.
d) Se construye una fórmula condicional que tenga como antecedente las premisas unidas por el operador conjuntivo y como consecuente la conclusión, de tal forma que la estructura lógica de cualquier inferencia quede representada esquemáticamente de la siguiente manera:

$$\underbrace{[\,(\text{ Premisa })\wedge(\text{ Premisa })\,]}_{\text{antecedente}}\rightarrow\underbrace{(\text{ Conclusión })}_{\text{consecuente}}$$

Ejemplos de formalización de inferencias ordenadas

a) Los congresistas representan a la Nación, pero no están sujetos a mandato imperativo. Luego, los congresistas representan a la Nación.

Forma lógica:

1. Los congresistas representan a la Nación y los congresistas no están sujetos a mandato imperativo.

Luego, los congresistas representan a la Nación.

Fórmula:

p: los congresistas representan a la Nación.

q: los congresistas están sujetos a mandato imperativo.

$$\frac{1.\ p \wedge \sim q}{\therefore\ p}$$

$(p \wedge \sim q) \rightarrow p$

b) Felipe no será expulsado del club a menos que él cometa actos de traición e inmoralidad. No ha sido expulsado. En consecuencia, no ha cometido actos de traición ni de inmoralidad.

Forma lógica:

1. Si Felipe comete actos de traición y actos de inmoralidad, entonces será expulsado del club.
2. Felipe no ha sido expulsado del club

Luego, Felipe no ha cometido actos de traición y no ha cometido actos de inmoralidad.

Fórmula:

p: Felipe comete actos de traición.

q: Felipe comete actos de inmoralidad.

r: Felipe será expulsado del club.

$$\begin{array}{l} 1.\ (p \wedge q) \rightarrow r \\ 2.\ \sim r \\ \hline \therefore \sim p \wedge \sim q \end{array}$$

$\{[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge \sim r\} \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

c) Si el niño, el adolescente y el anciano son abandonados, entonces son protegidos por el Estado. Pero el niño es abandonado, también el anciano. Luego, tanto el niño como el anciano son protegidos por el Estado.

Forma lógica:

1. Si el niño es abandonado y el adolescente es abandonado y el anciano es abandonado, entonces el niño es protegido por el Estado y el adolescente es protegido por el Estado y el anciano es protegido por el Estado.
2. El niño es abandonado y el anciano es abandonado

Luego, el niño es protegido por el Estado y el anciano es protegido por el Estado.

Fórmula:

p: el niño es abandonado.
q: el adolescente es abandonado.
r: el anciano es abandonado.
s: el niño es protegido por el estado.
t: el adolescente es protegido por el estado.
w: el anciano es protegido por el estado.

1. $(p \wedge q \wedge r) \rightarrow (s \wedge t \wedge w)$
2. $p \wedge r$

$\therefore \quad s \wedge w$

$$\{[(p \wedge q \wedge r) \rightarrow (s \wedge t \wedge w)] \wedge (p \wedge r)\} \rightarrow (s \wedge w)$$

d) Sin mandato judicial ni autorización de la persona que lo habita, no se puede ingresar en el domicilio, tampoco efectuar investigación. Pero se ingresó al domicilio y efectuó investigación. En consecuencia, hubo mandato judicial y autorización de la persona que lo habita.

Forma lógica:

1. Si no hay mandato judicial y no hay autorización de la persona que lo habita, entonces no se puede ingresar en el domicilio y no se puede efectuar investigación.
2. Se ingresó al domicilio y se efectuó investigación.

Luego, hubo mandato judicial y hubo autorización de la persona que lo habita.

Fórmula:

p: hay mandato judicial.
q: hay autorización de la persona que lo habita.
r: se puede ingresar en el domicilio.
s: se puede efectuar investigación.

1. $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim r \wedge \sim s)$
2. $r \wedge s$

$\therefore p \wedge q$

$\{[(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim r \wedge \sim s)] \wedge (r \wedge s)\} \rightarrow (p \wedge q)$

e) Un número es divisible por 2 si la última cifra de dicho número es múltiplo de 2. Un número es divisible por 3 si la suma de las cifras de dicho número es múltiplo de 3. Pero dicho número no es divisible por 2 o no lo es por 3. Por tanto, la suma de las cifras de un número no es un múltiplo de 3 si la última cifra de un número es múltiplo de 2.

Forma lógica:

1. Si la última cifra de un número es múltiplo de 2, entonces ese número es divisible por 2.
2. Si la suma de las cifras de un número es múltiplo de 3, entonces ese número es divisible por 3.
3. Un número no es divisible por 2 o un número no es divisible por 3.

Luego, si la última cifra de un número es múltiplo de 2, entonces la suma de las cifras de un número no es múltiplo de 3.

Fórmula:
p: la última cifra de un número es múltiplo de 2.
q: un número es divisible por 2.
r: la suma de las cifras de un número es múltiplo de 3.
s: un número es divisible por 3.

1. $p \rightarrow q$
2. $r \rightarrow s$
3. $\sim q \vee \sim s$

$\therefore \; p \rightarrow \sim r$

$$\{[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \wedge (\sim q \vee \sim s)\} \rightarrow (p \rightarrow \sim r)$$

Ejemplos de formalización de inferencias desordenadas

La forma lógica de la inferencia es premisas-conclusión; sin embargo, en el lenguaje coloquial es frecuente observar que dicha forma lógica se presente alterada y en orden inverso, es decir, conclusión-premisas. En este caso, antes de proceder a su formalización, es preciso restablecer su forma lógica, o sea, se debe ordenar la inferencia. Ejemplo:

"Raúl viajará a Londres, puesto que obtuvo la beca y habla correctamente el inglés".

En este ejemplo, la conclusión "Raúl viajará a Londres" se encuentra en primer término. Si restituimos a esta inferencia su forma lógica, se enunciará de la siguiente manera:

"Si Raúl obtuvo la beca y habla correctamente el inglés, entonces viajará a Londres".

Para identificar las premisas y la conclusión de una inferencia conviene tener en cuenta estas sencillas indicaciones:

- Preceden a las premisas las partículas: “ya que”, “puesto que”, “pues”, “porque”, “siempre que”, etc.
- Preceden a la conclusión las partículas: “por tanto”, “por consiguiente”, “en consecuencia”, “en conclusión”, “de manera que”, etc.
- Regla práctica: la expresión inmediatamente anterior a las partículas que preceden a las premisas, es la conclusión.

Ejemplo 1

Inferencia : Si César es guitarrista, entonces es músico. César no es guitarrista puesto que no es músico.

Forma lógica:

1. Si César es guitarrista, entonces es músico.
2. César no es músico.

Luego, César no es guitarrista.

Fórmula:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

$[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$

Ejemplo 2

Inferencia: Habrá un número elevado de víctimas si estalla la fábrica de explosivos, ya que si estalla la fábrica de explosivos, se derrumbarán los edificios de la población más cercanas, y habrá un número elevado de víctimas si se derrumban los edificios de la población más cercanas.

Forma lógica:

1. Si estalla la fábrica de explosivos, entonces se derrumbarán los edificios de la población más cercana.
2. Y si se derrumban los edificios de la población más cercana, entonces habrá un número elevado de víctimas.

Luego, si estalla la fábrica de explosivos, entonces habrá un número elevado de víctimas.

Fórmula:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Ejemplo 3

Inferencia: Si el embajador ha viajado, ha debido ir a Buenos Aires o a Brasilia. Debo concluir que ha ido a Brasilia, pues ha viajado y no ha ido a Buenos Aires.

Forma lógica:

1. Si el embajador peruano ha viajado, entonces ha debido ir a Buenos Aires o a Brasilia.
2. El embajador peruano ha viajado y no ha ido a Buenos Aires.

Por lo tanto, el embajador peruano ha ido a Brasilia.

Fórmula:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \vee r) \\ \underline{p \wedge \sim q} \\ \therefore r \end{array}$$

$$\{[p \rightarrow (q \vee r)] \wedge (p \wedge \sim q)\} \rightarrow r$$

Cuestionario N.º 6

1. Señale la diferencia existe entre lenguaje natural y lenguaje formalizado
2. ¿Por qué el lenguaje de la lógica se llama formalizado?
3. ¿De qué tipos de símbolos consta el lenguaje formalizado de la lógica?
4. ¿Qué diferencia existe entre variable proposicional y operador lógico?
5. ¿Cuáles son las principales notaciones simbólicas de la lógica?
6. ¿Cuáles son las características de las notaciones simbólicas de Scholz, Peano-Russell y Lukasiewicz, respectivamente?
7. ¿Qué es una fórmula bien formada (fbf)?
8. ¿Qué una fórmula mal formada (fmf)?
9. ¿Qué es la sintaxis lógica?
10. ¿Qué reglas deben tomarse en cuenta al momento de construir una fórmula bien formada (fbf)
11. ¿Qué significa formalizar una proposición?
12. ¿Qué se entiende por forma lógica y qué por fórmula lógica?
13. ¿Cuáles son los pasos que comprende la técnica de formalización de proposiciones?
14. ¿Qué es una inferencia?
15. ¿De qué elementos consta una inferencia?
16. ¿Qué diferencia existe entre premisa y conclusión?
17. ¿Qué diferencia existe inferencia deductiva e inferencia inductiva?
18. ¿Cuándo se dice que una inferencia es válida y cuándo no válida?
19. ¿Qué significa formalizar una inferencia?
20. ¿Cuáles son los pasos necesarios a seguir en la formalización de una inferencia?

Ejercicio N.º 7
Reglas de formación de fórmulas lógicas

1. Escriba la palabra ‘sí’ cuando la fórmula esté bien formada y ‘no’, en caso contrario. En el primer caso diga, además, cómo se llama, estableciendo previamente la jerarquía entre sus operadores mediante números y, en el segundo caso, enuncie las reglas de la sintaxis lógica que viola:

    a) $\sim p \rightarrow \sim q$

    b) $(p \wedge q) \wedge \sim (r \wedge s)$

    c) $\sim (p \wedge q) \wedge \sim (r \wedge s)$

    d) $(p \wedge q) \sim (r \rightarrow s)$

    e) $\sim p \rightarrow \sim q \leftrightarrow \sim r$

    f) $(p \wedge q \wedge r) \sim$

    g). $\sim [p \rightarrow (\sim q \vee \sim r)]$

    h) $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s) \leftrightarrow (t \wedge w)$

    i) $\sim \sim [(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim (t \wedge \sim w)]$

    j) $\{ [(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \wedge (p \wedge r) \} \rightarrow (q \leftrightarrow s)$

    k) $\sim (p \downarrow q) \mid \sim (r \downarrow s)$

    l) $\sim [p \rightarrow (\sim q \downarrow \sim r)]$

    m) $p \downarrow \sim (q \sim r)$

    n) $\sim p \mid [q \rightarrow \sim (r \wedge s \wedge t)]$

    ñ) $\sim p \downarrow \sim [q \downarrow \sim (r \mid s)]$

    o) $\sim [p \wedge (q \downarrow r)] \mid \sim (r \sim s)$

    p) $\sim p \rightarrow \sim [(q \wedge r) \sim (s \downarrow t)]$

    q) $(p \rightarrow q) \sim [r \downarrow \sim (s \mid t)]$

    r) $[(p \wedge q) \downarrow (r \wedge s)] \mid [t \rightarrow (q \wedge r)]$

    s) $\sim p \downarrow [\sim (q \mid r) \downarrow \sim (\sim s \mid \sim t)] \wedge \sim t$

Ejercicio N.º 8
Formalización de proposiciones

1. Formalice las siguientes proposiciones: en cada caso halle su forma lógica y escriba la fórmula correspondiente.

a) Si eres talibán, entonces eres fundamentalista.
b) No como ni duermo.
c) La universidad está sin rector.
d) En los países democráticos no hay delito de opinión, tampoco prisión por deudas.
e) Ni Juan ni Pedro ni Felipe te darán la razón.
f) A nadie quiso escribir, ni a sus más íntimos amigos.
g) Tanto Carlos como Federico son ateos porque son materialistas.
h) Si hay ley, razón y justicia en el mundo, no sucederá lo que temes.
i) Aunque esté enfermo, no faltaré a la cita.
j) No lo hizo Antonio, sino David.
k) Las declaraciones obtenidas por la violencia carecen de valor.
l) El dinero hace ricos a los hombres, pero no dichosos.
m) No pudo asistir porque estuvo ausente.
n) Los actos del Presidente de la República son nulos siempre que no tengan refrendación ministerial.
o) De saberlo antes, habría venido.
p) Cuando tú lo dices, verdad será.
q) Sin su libre consentimiento, sin la debida retribución, no se le puede obligar a prestar trabajo.
r) Se te enviará el diploma, bien por el correo de hoy, bien por el de mañana.
s) Sufre la pena, pues cometiste la culpa.
t) Los yacimientos y restos arqueológicos son patrimonio cultural de la Nación, están bajo el amparo del Estado y la ley regula su conservación.

Ejercicio N.º 9
Formalización de inferencias

1. Formalice las siguientes inferencias: en cada caso halle su fórmula lógica y escriba la fórmula correspondiente.

a) Osama bin Laden es un fundamentalista religioso y Hitler es un fundamentalista político. Luego, Hitler es un fundamentalista político.
b) Esta figura no es un cuadrilátero, puesto que es un triángulo. Es un triángulo. En consecuencia, no es un cuadrilátero.
c) Si la suma de dos números naturales es conmutativa, entonces si cambiamos el orden de los sumandos, se obtiene la misma suma. La suma de dos números naturales es conmutativa. Por tanto, se obtiene la misma suma si cambiamos el orden de los sumandos.
d) Un cuerpo está en estado neutro y no presenta ningún fenómeno eléctrico en su conjunto siempre que su carga eléctrica positiva esté en estado igual a la negativa. Pero es falso que el cuerpo esté en estado neutro y no presente ningún fenómeno eléctrico en su conjunto. En consecuencia, la carga eléctrica positiva de un cuerpo está en estado igual a la negativa.
e) Se llama falacia o sofisma si una inferencia inválida tiene la apariencia de ser válida. Se llama falacia o sofisma. Luego, la inferencia inválida tiene la apariencia de ser válida.
f) Este triángulo no se llama equilátero a menos que tenga tres lados iguales. Si se llama equilátero, no se llama isósceles. En consecuencia, si tiene tres lados iguales, no se llama isósceles.
g) Sin variables ni operadores, no hay lenguaje lógico posible. No hay variables ni operadores. Por tanto, no hay lenguaje lógico posible.
h) Tanto Roberto como Ernesto son creyentes, porque ambos son católicos. Roberto y Ernesto son católicos. Luego, son creyentes.
i) La ‘p’ es una variable proposicional o es un operador lógico, pero no puede ser ambas cosas a la vez. En consecuencia, es falso que la ‘p’ sea un operador lógico.

j) Un número es divisible por 2 si termina en cero o en cifra par. Un número es divisible por 5 si termina en cero o en 5. Por tanto, un número es divisible por 2 si no termina en 5.
k) Si hay guerra civil, hay estado de sitio. Hay estado de emergencia si se altera el orden interno de la Nación. En consecuencia, no hay estado de emergencia si hay guerra civil.
l) Sin decano ni consejo de facultad no hay gobierno de la facultad ni democracia. Pero es falso que haya gobierno de la facultad o haya democracia. Por tanto, es falso que haya decano o haya consejo de facultad.
m) Los profesores ordinarios son principales, asociados y auxiliares. Los profesores extraordinarios son eméritos, honorarios, investigadores y visitantes. Luego, los profesores ordinarios son principales, asociados y auxiliares.
n) Si tu profesor recomienda la duda, o es un escéptico o es un nihilista. Si es escéptico o nihilista, es idealista o metafísico. En consecuencia, tu profesor recomienda la duda si es idealista o metafísico.
o) Si eres profesor principal, eres maestro o doctor. Si eres profesor ordinario, tienes derecho a la promoción en la carrera docente y a la participación en el gobierno de la universidad. Luego, eres profesor principal u ordinario si eres maestro o doctor.
p) Los profesores universitarios son ordinarios, extraordinarios y contratados. Por tanto, los profesores universitarios son ordinarios, extraordinarios y contratados, o los jefes de práctica y ayudantes de cátedra realizan una actividad preliminar en la carrera docente.
q) Sin carbono, oxígeno, nitrógeno e hidrógeno, no hay vida. En consecuencia, hay carbono o hay oxígeno o hay nitrógeno o hay hidrógeno, si hay vida.
r) Si el Presidente de la República decreta el estado de emergencia, las Fuerzas Armadas asumen el control del orden interno de la Nación. Si las Fuerzas Armadas asumen el control del orden interno de la Nación, se suspenden las garantías constitucionales y no se impone la pena de destierro. Luego, no se impone la

pena de destierro si el Presidente de la República decreta el estado de emergencia.

s) Si un número natural es primo, es mayor que uno. Es divisible por sí mismo si es primo. Por tanto, es divisible por sí mismo si es mayor que uno.

t) Si dos es un número natural, su opuesto es un número entero y no un número natural. Es falso que el opuesto de dos sea un número entero y no sea un número natural. Luego, dos es un número natural o entero.

u) Si Osama estudia música podrá obtener un puesto en la Orquesta Sinfónica. Debo concluir que Osama podrá obtener un puesto en la orquesta Sinfónica ya que, o se dedica al deporte o estudia música, y Osama no se dedica al deporte.

v) Si el candidato es fundamentalista, no tendrá éxito. Deduzco que sufrirá una censura, si recordamos que o bien tiene éxito o bien sufre una censura, y el candidato es fundamentalista.

w) No es cierto que Pizarro conquistó el Perú y no fue español, dado que Pizarro conquistó el Perú si y sólo si no fue marino, pero fue español.

x) Si el ómnibus sale hoy para Ayacucho, entonces no cayó ningún huayco, ya que si el ómnibus no sale hoy a Ayacucho, entonces o cayó algún huayco o se produjo una huelga; pero es cierto que no se produjo una huelga.

y) O no ingresaste a la universidad o no conseguiste el empleo, pues es cierto que no vendes tu casa si ingresas a la universidad y consigues un empleo; y tu vendiste tu casa.

FUNCIONES VERITATIVAS Y TABLAS DE LA VERDAD

Definición tabular de los operadores lógicos

De la conjunción

Una fórmula conjuntiva ‘$p \wedge q$’ es verdadera si y sólo si ‘p’ es verdadera y ‘q’ también es verdadera. En los demás casos la fórmula ‘$p \wedge q$’ es falsa.

Tomemos, por ejemplo, las dos proposiciones atómicas siguientes:

a) La lógica es una ciencia formal.
b) La física es una ciencia factual.

Enlazando ‘a)’ y ‘b)’ mediante la conjunción ‘y’ obtenemos una nueva:

c) La lógica es una ciencia formal y la física es una ciencia factual. Esta nueva proposición se denomina proposición molecular conjuntiva. Y ‘c)’ es verdadera porque ‘a)’ es verdadera y ‘b)’ también es verdadera.

Justamente, el hecho de que el valor de verdad de ‘c)’ esté determinado por el de ‘a)’ y ‘b)’, hace que ‘c)’ sea una función de verdad de ‘a)’ y ‘b)’.

Fórmula de ‘c)’: $p \wedge q$

Para explicitar la definición del operador conjuntivo vamos a recurrir al método de la tabla de verdad, usado por el filósofo y lógico austriaco L. Wittgenstein en su obra más importante el *Tractatus Logico-Philosophicus*. Este método ha de permitir mostrar en orden todas las combinaciones posibles de los valores de las variables ‘p’ y ‘q’ y luego establecer la verdad de la fórmula conjuntiva ‘p ∧ q’.

El proceso de construcción de la Tabla de Verdad de una fórmula conjuntiva se realiza observando fielmente los siguientes pasos:

Paso 1. Se dibuja una cruz con el brazo derecho más largo que el izquierdo. La parte de la izquierda se llama margen (M) y la parte de la derecha se denomina cuerpo (C):

Margen (M)	MS	CS	Cuerpo (C)
	MI	CI	

MS:	Margen Superior	CS :	Cuerpo Superior
MI :	Margen Inferior	CI :	Cuerpo Inferior

Paso 2. Se escribe en la parte superior del margen (MS) las variables ‘p’ y ‘q’ y en la parte superior del cuerpo (CS) la fórmula conjuntiva ‘p ∧ q’ que se ha de tabular:

Variables	p q	p ∧ q	Fórmula conjuntiva

Paso 3. Se escribe en la parte inferior del margen (MI), y en columna, todas las combinaciones o arreglos posibles de los valores de las variables, empleando para el valor verdadero la abreviatura V y para el valor falso la abreviatura F.

Paso 4. Se calcula el número de arreglos posibles de los valores de las variables aplicando la fórmula 2n. En donde ‘n’ es una variable numérica cuyo valor depende del número de variables proposicionales que tenga la fórmula que se ha de tabular y ‘2’ una constante que hace referencia a los dos valores V y F que puede asumir cualquier proposición atómica. En este caso específico el número de variables es 2. Luego, el número de arreglos será:

Si $n = 2$, entonces $2^2 = 4$

Paso 5. Se escribe en la primera columna de valores la mitad de valores verdaderos y la mitad de valores falsos. En la segunda columna, también la mitad de valores verdaderos y la mitad de valores falsos, pero en relación con los valores verdaderos y falsos de la primera columna, hasta completar los cuatro arreglos:

	p	q	$p \wedge q$
Arreglo 1	V	V	
Arreglo 2	V	F	
Arreglo 3	F	V	
Arreglo 4	F	F	

Columna de valores

Paso 6. Se escribe, en la parte inferior del cuerpo (CI) y debajo del operador conjuntivo, los valores que asume la fórmula conjuntiva. La nueva columna de valores obtenida se llama matriz de la conjunción, cuya tabla es la siguiente:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Matriz de la conjunción

De la disyunción inclusiva

Una fórmula disyuntiva inclusiva ‘$p \vee q$’ es falsa si y sólo si ‘p’ es falsa y ‘q’ también es falsa. En los demás casos la fórmula ‘$p \vee q$’ es verdadera.

Ejemplo:

a) Eduardo es profesor.

b) Eduardo es alumno.

Enlazando ‘a)’ y ‘b)’ mediante la conjunción disyuntiva ‘o’ obtenemos una nueva:

c) Eduardo es profesor o Eduardo es alumno.

Esta nueva proposición se llama proposición molecular disyuntiva inclusiva. Y ‘c)’ es verdadera siempre que una de las proposiciones componentes o bien ambas sean verdaderas. Y es falsa cuando ambas son falsas.

Fórmula de ‘c)’: $p \vee q$

Para construir la tabla de verdad de la disyunción inclusiva es necesario proceder exactamente de la misma manera como procedimos en el caso de la conjunción, hasta el paso 5. Luego, aplicando la definición del operador disyuntivo inclusivo, en armonía con lo estipulado en el paso 6, obtenemos la matriz de la disyunción inclusiva:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Matriz de la disyunción inclusiva o débil

De la disyunción exclusiva

Una fórmula disyuntiva exclusiva ‘p $\not\leftrightarrow$ q’ es verdadera si y sólo si las variables ‘p’ y ‘q’ no tienen el mismo valor. En los demás casos es falsa.

Ejemplo:

a) Jorge está vivo.
b) Jorge está muerto.

Enlazando ‘a)’ y ‘b)’ mediante la conjunción disyuntiva 'o' obtenemos una nueva:

c) Jorge está vivo o Jorge está muerto.

Esta nueva proposición se llama proposición disyuntiva exclusiva. Y ‘c)’ es verdadera siempre que ambas proposiciones componentes no sean verdaderas o falsas al mismo tiempo. La verdad de una de las proposiciones componentes excluye la verdad de la otra, es decir, no pueden ser ambas verdaderas.

Fórmula de ‘c)’: p $\not\leftrightarrow$ q

Aplicando la definición del operador disyuntivo exclusivo, en consonancia con lo establecido en el paso 6 obtenemos la matriz de la disyunción exclusiva:

p	q	p $\not\leftrightarrow$ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Matriz de la disyunción exclusiva o fuerte

Del condicional

Una fórmula condicional ‘p → q’ es falsa si su antecedente ‘p’ es verdadero y su consecuente ‘q’ es falso. En los demás casos es verdadera.

Ejemplo:

a) El polinomio tiene tres términos.
b) El polinomio se llama trinomio.

Enlazando ‘a)’ y ‘b)’ mediante la conjunción condicional compuesta 'si..., entonces' obtenemos una nueva:

c) Si el polinomio tiene tres términos, entonces se llama trinomio.

Esta nueva proposición se llama proposición condicional. Y ‘c)’ es verdadera en cualquier caso, excepto cuando la proposición que desempeña el papel de antecedente es verdadera y la proposición que hace las veces de consecuente es falsa: No es posible que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso.

La verdad de una proposición condicional no depende de las relaciones que puedan existir o no entre los significados del antecedente y del consecuente. En efecto, hay ejemplos de proposiciones condicionales verdaderas en que entre el antecedente y el consecuente no existe ninguna relación de atingencia, es decir, lo que dice el antecedente es diferente a lo que dice el consecuente.

Ejemplo de una proposición condicional verdadera, no obstante que entre el antecedente y el consecuente no existe ninguna relación de atingencia, sería el siguiente:

d) Si Galileo descubrió que los cuerpos caen con aceleración constante, entonces la Óptica es la parte de la Física que estudia la luz.

Fórmula de ‘c)’: $p \rightarrow q$

Aplicando la definición del operador condicional, en correspondencia con lo estipulado en el paso 6 obtenemos la matriz del condicional:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Matriz del condicional

Del bicondicional

Una fórmula bicondicional ‘$p \leftrightarrow q$’ es verdadera si y sólo si las variables ‘p’ y ‘q’ tienen el mismo valor. En los demás casos es falsa.

Ejemplo:

a) Enrique ingresará a la universidad.
b) Enrique aprueba el examen de admisión.

Enlazando ‘a)’ y ‘b)‘ mediante la conjunción bicondicional compuesta ‘si y sólo si’ obtenemos una nueva:

c) Enrique ingresará a la universidad si y sólo si aprueba el examen de admisión.

Esta nueva proposición se llama proposición bicondicional. Y se llama así porque establece dos condicionales, es decir, está constituida por dos proposiciones condicionales de sentido inverso:

d) ‘Si Enrique ingresó a la universidad, entonces aprobó el examen de admisión’ y ‘si Enrique aprobó el examen de admisión, entonces ingresó a la universidad’.

La proposición bicondicional establece que si el antecedente es verdadero entonces el consecuente tiene que ser verdadero. Igualmente, si el consecuente es verdadero, entonces el antecedente tiene que ser verdadero. Lo que significa que la verdad o falsedad de una proposición exige necesariamente la verdad o la falsedad de la otra:

Fórmula de ‘c)’: $p \leftrightarrow q$

Aplicando la definición del operador bicondicional, en armonía con lo establecido en el Paso 6 obtenemos la matriz del bicondicional:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Matriz del bicondicional

De la negación

Una fórmula negativa ‘~ p’ es verdadera si y sólo si la variable ‘p’ es falsa y ‘~ p‘ es falsa si y sólo si ‘p’ es verdadera. Justamente debido a que el operador negativo tiene como función transformar el valor verdadero en falso y viceversa se llama operador inversor.

Ejemplo:

a) El ciclotrón sirve para acelerar electrones.

Introduciendo el adverbio negativo ‘no’ en ‘f1)’ obtenemos una nueva:

b) El ciclotrón no sirve para acelerar electrones.

Esta nueva proposición se llama proposición negativa.

Fórmula de ‘b)’: ~ p

Aplicando la definición del operador negativo, en correspondencia con lo prescrito en los pasos 4, 5 y 6, obtenemos la matriz de la negación:

P	~ P
V	F
F	V

Matriz de la negación

De la negación conjunta

Una fórmula negativa conjunta ‘p ↓ q’ es verdadera si y sólo si ‘p’ es falsa y ‘q’ también es falsa. En todos los demás casos es falsa.

Ejemplo:

a) Arequipa es un puerto
b) Puno es un desierto

Enlazando ‘a)’ y ‘b)’ mediante la partícula ‘ni... ni’ obtenemos una nueva:

c) Ni Arequipa es un puerto ni Puno es un desierto.

Esta nueva proposición se llama proposición negativa conjunta. Y ‘c)’ es verdadera siempre que sus dos componentes sean falsas; y es falsa en los demás casos.

Fórmula de ‘c)’: $p \downarrow q$

Aplicando la definición del operador de la negación conjunta y en consonancia con lo establecido en el paso 6 obtenemos la matriz de la negación conjunta:

p	q	p	$\downarrow$	q
V	V		F	
V	F		F	
F	V		F	
F	F		V	

Matriz de la negación conjunta

De la negación alterna

Una fórmula negativa alterna ‘p | q’ es falsa si y sólo si ‘p’ es verdadera y ‘q’ también es verdadera. En todos los demás casos es verdadera.

Ejemplo:

a) Mario Vargas Llosa es argentino.

b) Gabriel García Márquez es peruano

Enlazando ‘a)’ y ‘b)’ mediante la expresión ‘no o no’ obtenemos una nueva:

c) Mario Vargas Llosa no es argentino o Gabriel García Márquez no es peruano.

Esta nueva proposición se llama proposición negativa alterna. Y ‘c)’ es falsa siempre que sus dos componentes sean verdaderos; en los demás casos es verdadera.

Fórmula de ‘c)’: $p \mid q$

Aplicando la definición del operador de la negación alterna y en consonancia con lo establecido en el paso 6 obtenemos la matriz de la negación alterna:

p	q	$p \mid q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Matriz de la negación alterna.

Definición tabular de fórmulas moleculares complejas

Las fórmulas moleculares definidas anteriormente a través de la tabla de la verdad son elementales en la medida en que contienen un solo operador y dos variables. En adelante trabajaremos con fórmulas moleculares complejas, es decir, fórmulas que contienen dos o más operadores distintos o dos o más veces el mismo operador.

Para definir tabularmente fórmulas moleculares complejas se deben observar los siguientes pasos:

Paso 1. Dada la fórmula molecular compleja se establece la jerarquía entre sus operadores a través de los signos de agrupación:

$$\sim [(p \vee q) \wedge (\sim q \rightarrow \sim p)]$$

Paso 2. Se construye las matrices secundarias que corresponden a las de los operadores de menor jerarquía aplicando sus respectivas definiciones:

p	q	~ [(p ∨ q) ∧ (~ q → ~ p)]
V	V	V V V V F V V F V
V	F	V V F F V F F F V
F	V	F V V V F V V V F
F	F	F F F F V F V V F

Paso 3. Se construye, finalmente, la matriz principal que corresponde a la del operador de mayor jerarquía aplicando la definición correspondiente a las matrices de los operadores que la siguen en jerarquía:

			3 2 4 3 4
p	q	~	[(p ∨ q) ∧ (~ q → ~ p)]
V	V	F	V V V V F V V F V
V	F	V	V V F F V F F F V
F	V	F	F V V V F V V V F
F	F	V	F F F F V F V V F

La matriz principal, como podrá observarse, se ha obtenido aplicando la definición del operador negativo a los valores de la matriz 2. La matriz 2 se obtuvo aplicando la definición del operador conjuntivo a los valores de las matrices 3. La matriz 3 del lado izquierdo se ha obtenido aplicando la definición del operador disyuntivo inclusivo a los valores de ‘p’ y ‘q’. La matriz 3 del lado derecho se ha obtenido aplicando la definición del operador condicional a los valores de las matrices 4. La matriz 4 del lado izquierdo se ha obtenido aplicando la definición del operador negativo a los valores de ‘q’ y la matriz 4 del lado derecho, aplicando la definición del operador negativo a los valores de ‘p’.

Otro ejemplo:

Definir tabularmente la fórmula: $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

p	q	r	$[(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \rightarrow r)]$	$\rightarrow$	$(p \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Clasificación de las fórmulas moleculares por su matriz principal

Las tablas de verdad nos permiten clasificar a las fórmulas moleculares, atendiendo a su matriz principal, en tautológicas, consistentes y contradictorias.

Las fórmulas moleculares tautológicas (FMT), llamadas también leyes lógicas, son aquellas en que los valores de su matriz principal son todos verdaderos.

Ejemplo:

p	q	$[(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$\sim q]$	$\rightarrow$	$\sim p$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

FMT

Fórmulas moleculares consistentes (FMC), son aquellas en que algunos de los valores de su matriz principal son verdaderos y algunos son falsos.

Ejemplo:

p	q	[~	(p ∨ q)	∧	~ p]	↔	(q → p)
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	F	V

FMC

Fórmulas moleculares contradictorias (FM⊥), denominadas también fórmulas inconsistentes, son aquellas en que los valores de su matriz principal son todos falsos.

Ejemplos:

p	q	~	[(p ∧ q)	→	~	(~q	∨	~ p)]
V	V	F	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	F	V	V	F
F	V	F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V	V

FM⊥

Implicación y equivalencia de fórmulas

Implicación de fórmulas

Una fórmula ‘A’ implica a ‘B’ si y sólo si unidas en forma condicional, ‘A’ como antecedente y ‘B’ como consecuente, su matriz resulta tautológica; si su matriz es consistente o contradictoria, se dice que ‘A’ no implica a ‘B’.

Notación:

$A \rightarrow B$: se lee ‘A’ implica a ‘B’
$A \not\rightarrow B$: se lee ‘A’ no implica a ‘B’

Ejemplos:

Si las matrices de las siguientes fórmulas son:
A: VVFF
B. VVVF
C: FFVV
D: FFFV

Determine, mediante la tabla de verdad, si:

1) “La conjunción de las negaciones de A y C implica a la negación de la negación conjunta de B y D”.

Procedimiento:

a) Se expresa simbólicamente el enunciado.
b) Se evalúa la fórmula mediante la tabla de verdad.
c) Si su matriz es tautológica se dice que ‘A’ implica a ‘B’; si es consistente o contradictoria, se dice que ‘A’ no implica a ‘B’.

$(\sim A \wedge \sim C) \rightarrow \sim (B \downarrow D)$

~A	∧	~C	→	~	B	↓	D
F	F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	F	V

FMT

Respuesta: $\alpha \rightarrow \beta$

2) "El bicondicional de la negación de A y la disyunción débil de C y D implica a la negación de la disyunción débil de B y la negación de A"

$$[\sim A \leftrightarrow (C \vee D)] \rightarrow \sim (B \vee \sim A)$$

$\sim$	A	$\leftrightarrow$	C	$\vee$	D	$\rightarrow$	$\sim$	B	$\vee$	$\sim$	A
F		V	F	F	F	F	F	V	V	F	
F		V	F	F	F	F	F	V	V	F	
V		V	V	V	F	F	F	V	V	V	
V		V	V	V	V	F	F	F	V	V	

FMI

Respuesta: $\alpha \nrightarrow \beta$

Equivalencia de fórmulas

Dos fórmulas 'A' y 'B' son equivalentes si y sólo si sus matrices son iguales; si sus matrices son diferentes, se dice que 'A' y 'B' no son equivalentes.

Notación:

A $\equiv$ B: se lee 'A' es equivalente a 'B'
A $\not\equiv$ B: se lee 'A' no es equivalente a 'B'

Ejemplos:

a) "La negación de la negación alterna de las negaciones de A y D es equivalente al condicional de B y la negación de C"

$$\sim(\sim A \mid \sim D) \equiv (B \rightarrow \sim C)$$

$\sim$	($\sim$	A	$\mid$	$\sim$	D)	$\equiv$	(B	$\rightarrow$	$\sim$	C)
F	F		V	V			V	V	V	
F	F		V	V			V	V	V	
V	V		F	V			V	F	F	
F	V		V	F			F	V	F	

Respuesta: $\alpha \not\equiv \beta$

b) “La negación de la conjunción de las negaciones de C y D es equivalente a la negación conjunta del condicional de A y B y la disyunción débil de C y B”

$$\sim(\sim C \wedge \sim D) \equiv [(A \rightarrow B) \downarrow (C \vee B)]$$

$\sim$	$(\sim C$	$\wedge$	$\sim D)$	$\equiv$	$[(A$	$\rightarrow$	$B)$	$\downarrow$	$(C$	$\vee$	$B)]$
F	V	V	V		V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V		V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V		F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	F		F	V	F	F	V	V	V

Respuesta: $\alpha \not\equiv \beta$

Cuestionario N.º 7

1. ¿Cómo se calcula el número de arreglos posibles de los valores veritativos de las variables?
2. ¿Cuándo una fórmula conjuntiva es verdadera?
3. ¿En qué caso es falsa una fórmula disyuntiva inclusiva?
4. ¿Cuándo es verdadera una fórmula disyuntiva exclusiva?
5. Una fórmula condicional, ¿cuándo es falsa?
6. ¿En qué caso una fórmula bicondicional es verdadera?
7. Una fórmula negativa, ¿cuándo es verdadera y cuándo es falsa?
8. ¿Cuándo es verdadera una fórmula negativa conjunta?
9. ¿Cuándo es falsa una fórmula negativa alterna?
10. ¿A qué se denominan fórmulas moleculares complejas?
11. ¿Qué pasos son necesarios seguir a fin de definir tabularmente fórmulas moleculares complejas?
12. ¿Cómo se clasifican las fórmulas moleculares atendiendo a su matriz principal?
13. ¿Qué característica presenta la matriz principal de cada una de las fórmulas moleculares posibles?
14. ¿Cuándo una fórmula ‘A’ implica a una fórmula ‘B’, y cuándo no?
15. ¿Cuándo una fórmula ‘A’ es equivalente a una fórmula ‘B’, y cuándo no?

Ejercicio N.º 10
Fórmulas moleculares y tablas de verdad

1. Mediante la tabla de la verdad determine si las siguientes fórmulas son tautológicas, consistentes o contradictorias:

a) $\sim (p \downarrow \sim p)$
b) $(\sim p \rightarrow p) \downarrow p$
c) $\sim [\, p \rightarrow (\sim p \wedge p)]$
d) $\sim (\sim p \leftrightarrow p) \rightarrow \sim (\sim p \vee p)$
e) $(p \wedge p) \leftrightarrow [\, p \vee (\sim q \mid q)]$
f) $\sim (p \rightarrow q) \vee \sim (\sim q \rightarrow \sim p)$
g) $\sim [(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \sim (\sim q \wedge q)]$
h).$\sim [\, p \rightarrow \sim (q \wedge \sim p)] \downarrow [\sim (p \vee q) \rightarrow \sim p]$
i) $[(\sim p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \rightarrow \sim r)] \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim r)$
j) $\sim \{[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim p)\}$

2. Implicación de fórmulas:
Si
A: FVFF
B: FVVF
C: VVVF
D: FFFV

Determine mediante la tabla de verdad si:

a) La negación del bicondicional de A y B implica a la negación alterna de C y D.
b) La negación de la disyunción débil de C y D implica a la negación conjunta de A y B.
c) La conjunción de las negaciones de A y B implica a la negación del bicondicional de C y D.
d) La disyunción fuerte de A y C implica a la negación de la negación alterna de las negaciones de B y D.
e) La negación conjunta de C y la disyunción débil de A y D implica a la negación del condicional de A y B.

f) El bicondicional de las negaciones de B y D implica a la negación alterna de la negación de A y la conjunción de las negaciones de C y B.
g) La conjunción de la disyunción débil de A y C y la disyunción fuerte de B y D implica a la negación alterna de A y D.
h) La negación conjunta de A y D implica al bicondicional de la conjunción de C y B y la negación alterna de A y la negación de D.
i) La negación de la conjunción de A y el bicondicional de C y D implica a la disyunción fuerte de la negación de B y el condicional de A y D.
j) La negación del bicondicional de la conjunción de A y B y el condicional de las negaciones de C y D implica a la negación de la negación alterna de A y la disyunción débil de las negaciones de A y D.

3. Equivalencia de fórmulas:
Si
A: VVFV
B: VVVF
C: VVFF
D: FFFV

Determine mediante la tabla de verdad si:

a) La negación del bicondicional de las negaciones de A y B es equivalente a la negación alterna de C y D.
b) La negación de la disyunción fuerte de las negaciones de C y D es equivalente a la negación conjunta de las negaciones de A y B.
c) La disyunción débil de las negaciones de A y B es equivalente a la negación del bicondicional de las negaciones de C y D.
d) La conjunción de las negaciones de A y C es equivalente a la negación de la negación alterna de las negaciones de B y D.
e) La negación alterna de la negación de C y la disyunción débil de A y D es equivalente a la negación del condicional de las negaciones de A y B.

f) El condicional de las negaciones de B y D es equivalente a la negación alterna de la negación de A y la negación conjunta de las negaciones de C y B.
g) La conjunción de la disyunción débil de las negaciones de A y C y la disyunción fuerte de B y D es equivalente a la negación alterna de las negaciones de A y D.
h) La negación alterna de las negaciones de A y D es equivalente al bicondicional de la conjunción de las negaciones de C y B y la negación conjunta de las negaciones de A y D.
i) La negación del condicional de A y el bicondicional de C y D es equivalente a la disyunción débil de la negación de B y la conjunción de las negaciones de A y D.
j) La negación del bicondicional de la conjunción de A y B y el condicional de las negaciones de C y D es equivalente a la negación de la negación alterna de A y la disyunción débil de las negaciones de A y D.

ANÁLISIS DE INFERENCIAS

La lógica es fundamentalmente una teoría de la inferencia, es análisis formal de inferencias. La lógica es una ciencia formal que estudia la validez de las inferencias. Para decidir su validez la lógica cuenta con procedimientos de varios tipos. Estos procedimientos o métodos pueden agruparse en dos clases: métodos sintácticos y métodos semánticos.

Los métodos sintácticos consisten en transformaciones puramente lógicas a partir de ciertas reglas de inferencia. La forma normal conjuntiva, el método de la deducción natural y el analógico son ejemplos de métodos sintácticos. Los métodos semánticos vinculan la noción de 'validez' con la de 'verdad'. El método de la tabla de verdad y el método abreviado son ejemplos de métodos semánticos. En lo que sigue procederemos al análisis de inferencias, es decir, determinaremos su corrección o incorrección a través de los métodos tanto semánticos como sintácticos.

Análisis de inferencias a través de la tabla de verdad

La tabla de verdad es un algoritmo o procedimiento decisorio porque a través de la aplicación mecánica de un conjunto finito de reglas permite decidir la validez o invalidez de las inferencias. En efecto, una inferencia es válida, mediante la tabla de verdad, si y sólo si al ser formalizada y evaluada su fórmula condicional es una tautología; es invalida si la fórmula condicional es consistente o contradictoria.

Procedimiento:

Paso 1. Se ordena la inferencia, pero sólo en el caso de que su forma lógica haya sido alterada en el lenguaje natural, observando el esquema: premisas-conclusión.

Paso 2. Se explicita su forma lógica.

Paso 3. Se halla su fórmula, expresando simbólicamente sus premisas y conclusión.

Paso 4. Se construye una fórmula condicional que tenga como antecedente a las premisas unidas por el operador conjuntivo y como consecuente a la conclusión.

Paso 5. Se evalúa la fórmula condicional mediante la tabla de verdad. Si efectuada la evaluación la fórmula condicional es tautológica, entonces la inferencia es válida; si la fórmula es consistente o contradictoria, entonces no es válida.

Ejemplos:

a) El triángulo se llama isósceles si tiene dos lados iguales. No se llama isósceles. En consecuencia, no tiene dos lados iguales.

Forma lógica:

1. Si el triángulo tiene dos lados iguales, entonces el triángulo se llama isósceles.
2. El triángulo no se llama isósceles.

Luego, el triángulo no tiene dos lados iguales.

Fórmula:

p: el triángulo tiene dos lados iguales.
q. el triángulo se llama isósceles.

1. $p \rightarrow \quad q$
2. $\sim\ q$

$\therefore \sim p$

Fórmula condicional:
$[(p \rightarrow\ q) \wedge\ \sim q]\ \rightarrow\ \sim p$

Evaluación:

p	q	[(p → q)	∧	~ q]	→	~ p
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

FMT

Respuesta: La inferencia analizada es válida porque su fórmula condicional es una tautología.

b) El pueblo es una masa pasiva que sigue bien las ideas de un gran hombre, bien los preceptos de la idea absoluta. Sigue los preceptos de la idea absoluta. Por lo tanto no sigue las ideas de un gran hombre.

Forma lógica:

1. El pueblo es una masa pasiva que sigue las ideas de un gran hombre o el pueblo es una masa pasiva que sigue los preceptos de la idea absoluta.

2. El pueblo es una masa pasiva que sigue los preceptos de la idea absoluta.

Luego, el pueblo es una masa pasiva que no sigue las ideas de un gran hombre.

Fórmula:

p: el pueblo es una masa pasiva que sigue las ideas de un gran hombre.

q: el pueblo es una masa pasiva que sigue los preceptos de la idea absoluta.

1. $p \vee q$
2. q

$\therefore \sim p$

Fórmula condicional:

$[(p \vee q) \wedge q] \rightarrow \sim p$

Evaluación:

p	q	$[(p \vee$	$q) \wedge$	$q]$	$\rightarrow$	$\sim p$
V	V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	F	V	V

FMC

Respuesta: La inferencia analizada no es válida porque su fórmula condicional es consistente.

c) Sin variables ni operadores no hay lenguaje formalizado. Ocurre que no hay variables ni operadores. Luego, no hay lenguaje formalizado.

Forma lógica:

1. Si no variables y no hay operadores, entonces no hay lenguaje formalizado.
2. No hay variables y no hay operadores.

Luego, no hay lenguaje formalizado.

Fórmula:

p: hay variables.

q: hay operadores.

r: hay lenguaje formalizado.

1. $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim r$
2. $\sim p \wedge \sim q$

$\therefore \sim r$

Fórmula condicional:

$$\{[(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim r] \wedge (\sim p \wedge \sim q) \} \rightarrow \sim r$$

Evaluación:

p	q	r	$\{[(\sim p$	$\wedge$	$\sim q)$	$\rightarrow$	$\sim r]$	$\wedge$	$(\sim p \wedge \sim q)\}$	$\rightarrow$	$\sim r$
V	V	V	F	F	F	V	F	F	F	V	F
V	V	F	F	F	F	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	F	F	V	V	V	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F	V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	F	F	F	V	V	F
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V

FMT

Respuesta: La inferencia es válida pues su fórmula es tautológica.

d) Si Pedro es burgués, es propietario de los medios de producción social y emplea trabajo asalariado. Es burgués y propietario de los medios de producción social. Luego, Pedro emplea trabajo asalariado.

Forma lógica:

1. Si Pedro es burgués, entonces Pedro es propietario de los medios de producción social y Pedro emplea trabajo asalariado.
2. Pedro es burgués y Pedro es propietario de los medios de producción social.

Luego, Pedro emplea trabajo asalariado.

Fórmula:

p: Pedro es burgués.
q: Pedro es propietario de los medios de producción social.
r: Pedro emplea trabajo asalariado.

1. $p \rightarrow (q \wedge r)$
2. $p \wedge q$

$\therefore r$

Fórmula condicional:

$$\{[p \rightarrow (q \wedge r)] \wedge (p \wedge q)\} \rightarrow r$$

Evaluación:

p	q	r	$\{[p \rightarrow$	$(q \wedge r)]$	$\wedge$	$(p \wedge q)\}$	$\rightarrow r$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	F	F	F	V

FMT

Respuesta: La inferencia es válida porque su fórmula es tautológica.

e) Los actos del Presidente de la República son nulos a menos que tengan refrendación ministerial. Son nulos, pues no tienen refrendación ministerial.

Ordenando la inferencia:

Si los actos del Presidente de la República tienen refrendación ministerial, no son nulos; no tienen refrendación ministerial. Por tanto, son nulos.

Forma lógica:

1. Si los actos del presidente de la República tienen refrendación ministerial, entonces los actos del Presidente de la República no son nulos.
2. Los actos del Presidente de la República no tienen refrendación ministerial.

Luego, los actos del Presidente de la República son nulos.

Fórmula:

p: los actos del Presidente de la República tienen refrendación ministerial.
q: los actos del Presidente de la República son nulos.

$$\begin{array}{l} 1.\ p \rightarrow \sim q \\ 2.\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Fórmula condicional:

$$[(p \rightarrow \sim q) \wedge \sim p] \rightarrow q$$

Evaluación:

p	q	[(p →	~ q)	∧	~ p]	→ q
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	F

FMC

Respuesta: La inferencia no es válida ya que su fórmula es consistente.

Análisis de inferencias por el método abreviado

Cuando el número de variables pasa de tres se torna engorroso el método de la tabla de verdad. Para superar este inconveniente, se usa el método abreviado o de invalidez, que resulta mucho más corto si bien se encuentra estrechamente vinculado con el de la tabla de verdad.

El procedimiento es inverso pues en tanto que en la tabla de verdad se comienza por las variables y por el operador de menor jerarquía avanzando hacia el de mayor jerarquía cuyo valor queda determinado por la matriz principal o cifra tabular, en cambio en el método abreviado se comienza por la cifra tabular y por el operador de mayor jerarquía y se avanza hacia el de menor jerarquía terminando en las variables.

Desde luego, tratándose de una inferencia su fórmula será siempre condicional o implicativa y, en relación con la cual, sabemos que es falsa si y sólo si su antecedente es verdadero y su consecuente es falso. El método consiste en lo siguiente: si de alguna manera es posible asignar valores veritativos a las fórmulas atómicas constituyentes de suerte que resulte verdadero el antecedente y falso el consecuente se demostrará que la inferencia es inválida.

Procedimiento:

a) Se supone verdadero el antecedente y falso el consecuente.
b) Se determinan los valores de las variables del consecuente de manera que expresen la falsedad de éste.
c) Se trasladan estos valores al antecedente y se designan los valores de las demás variables tratando de hacer verdadero el antecedente.
d) Si se verifica la hipótesis, la fórmula es no tautológica, en consecuencia, la inferencia correspondiente será inválida; si no se verifica la hipótesis, la fórmula será tautológica, en consecuencia, la inferencia correspondiente será válida.

Ejemplo 1

Sea la inferencia:

‘Si eres fiscal, eres abogado. Si eres profesional, eres abogado. Luego, si eres fiscal, eres profesional’

Fórmula: $[(p \to q) \wedge (r \to q)] \to (p \to r)$

Procedimiento;

a) Se supone V (verdadero) el antecedente y F (falso) el consecuente:

$$\overset{V}{[(p \to q) \wedge (r \to q)]} \to \overset{F}{(p \to r)}$$

b) Se determina el valor de las variables del consecuente:

$$\overset{V}{[(p \to q) \wedge (r \to q)]} \to \overset{F}{(\underset{V}{p} \underset{F}{\to} \underset{F}{r})}$$

c) Se trasladan estos valores al antecedente y se asignan los valores a las demás variables:

V F

$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow q)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

V V V V F V V F V F F

d) Habiendo asignado el valor de 'V' a la variable 'q', las dos premisas han asumido el valor de verdad y todo el antecedente ha tomado el valor de verdad con lo que queda verificada la hipótesis siendo, por lo tanto, la fórmula no tautológica; es decir, la inferencia correspondiente inválida.

Ejemplo 2

Sea la inferencia:

'Si eres cardiólogo, eres médico. Si eres médico, eres colegiado. Luego, si eres cardiólogo, eres colegiado'.

Fórmula: $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

Procedimiento:

Realizados los pasos hasta c), se llega a lo siguiente:

V F

$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

V V V F V F F V V F F

Donde puede comprobarse que al falsear el consecuente se ha falseado una premisa y, falseando una premisa, se ha falseado todo el antecedente, lo que demuestra que la fórmula es tautológica, es decir, la inferencia correspondiente, válida.

Este método también puede explicarse así:

V F

$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

V V V/$_F$V F V F V F F

Es decir, haciendo verdadero el antecedente, la variable ‘q’ asume dos valores, lo que es contradictorio. Falseando el consecuente se llega a una contradicción en el antecedente, lo que demuestra que la fórmula es tautológica, es decir, la inferencia es válida.

Análisis de inferencias mediante el método analógico

Este método consiste en comparar la forma o estructura de la inferencia que se quiere analizar con otra lógicamente válida.

Procedimiento:

Paso 1. Se explicita su forma lógica.

Paso 2. Se halla la fórmula.

Paso 3. Se confronta la fórmula obtenida con las reglas de inferencia conocidas. Si la fórmula coincide con una de estas reglas podemos inferir inequívocamente que la inferencia original es válida; pero si la fórmula obtenida atenta contra una de ellas entonces la inferencia no es válida.

Este método es muy práctico aunque limitado a la confrontación con una lista previa de reglas conocidas. Consecuentemente, presupone el empleo de ciertas reglas de la lógica proposicional. En efecto, antes de efectuar el análisis de inferencias por este método presentaremos la lista de las principales reglas de la lógica proposicional y las leyes correspondientes.

Leyes de la lógica proposicional

Las leyes lógicas son tautologías o formas lógicamente verdaderas. Son fórmulas verdaderas independientemente de los valores que asumen sus variables proposicionales componentes. Su estudio es tarea fundamental de la lógica de proposiciones, puesto que ellas constituyen un poderoso instrumento para el análisis de inferencias. En efecto, una inferencia es válida si y sólo si tiene la forma de una ley lógica; en cambio, si una inferencia tiene la apariencia de ser lógicamente válida, pero que al ser formalizada su estructura lógica no es la de una ley lógica o tautología entonces se dice que es una inferencia no válida o falacia.

A diferencia de las leyes —que son expresiones del cálculo lógico, es decir, expresiones del lenguaje lógico—, las reglas lógicas son expresiones metalógicas, es decir, prescripciones que nos permiten pasar correctamente de una o más premisas a una conclusión.

Los tres principios lógicos fundamentales conocidos por los filósofos y lógicos tradicionales fueron: el de identidad, el de no-contradicción y el del tercio excluido.

a) El principio de identidad

Formulación ontológica: Toda cosa es idéntica a sí misma.

Formulación lógica: Toda proposición es verdadera si y sólo si ella misma es verdadera.

Fórmula: $p \leftrightarrow p$ o también $p \rightarrow p$

b) El principio de no-contradicción

Formulación ontológica: Es imposible que una cosa sea y no sea al mismo tiempo y bajo el mismo respecto.

Formulación lógica: Es falso que una proposición sea verdadera y falsa al mismo tiempo.

Fórmula: $\sim (p \wedge \sim p)$

c) El principio del tercio excluido

Formulación ontológica: Una cosa o bien tiene una propiedad o bien no la tiene y no hay una tercera posibilidad.

Formulación lógica: Una proposición o es verdadera o es falsa. No existe una posibilidad intermedia.

Fórmula: $p \vee \sim p$

Estos principios lógicos fundamentales gozaban de una situación de privilegio, puesto que los lógicos desde la antigüedad los consideraban dotados de ciertos atributos, tales como: eran evidentes, universalmente verdaderos y constituían la base de toda inferencia válida.

La lógica moderna ha cuestionado tales atributos. En efecto, ha rechazado el criterio de evidencia, por ser éste un criterio eminentemente psicológico. Igualmente, ha precisado que el principio del tercio excluido no es universalmente verdadero. Por ejemplo, no es válido en las llamadas lógicas polivalentes en donde se admite, además de los valores verdadero y falso, un tercer valor. Finalmente, sostiene que estos tres principios son insuficientes para probar la validez de todas las inferencias, aun dentro de los límites de la lógica proposicional.

Para la lógica moderna ninguna ley lógica tiene una situación de privilegio. Todas las tautologías tienen igual jerarquía.

Principales reglas y leyes de la lógica proposicional

1) Regla del Modus Ponens (MP): A partir de una fórmula condicional y de su antecedente, se obtiene su consecuente.

$$\begin{array}{l} 1.\ A \rightarrow B \\ \underline{2.\ A \qquad\quad} \\ \therefore\ B \end{array}$$

Ley del Modus Ponens (MP)

$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

2) Regla del Modus Tollens (MT): A partir de una fórmula condicional y de la negación de su consecuente, se obtiene la negación del antecedente.

$$\begin{array}{l} 1.\ A \rightarrow B \\ \underline{2.\ \sim B \qquad\ } \\ \therefore\ \sim A \end{array}$$

Ley del Modus Tollens (MT)

$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

3) Regla del Silogismo Hipotético (SH): A partir de dos fórmulas condicionales, donde el consecuente de la primera es el antecedente de la segunda, se obtiene una condicional formada por el antecedente de la primera y el consecuente de la segunda.

1. $A \to B$	Ley del Silogismo Hipotético (SH)
2. $B \to C$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
$\therefore A \to C$	

4) Regla del Silogismo Disyuntivo (SD): A partir de una fórmula disyuntiva y de la negación de una de sus componentes, se obtiene la otra componente.

a) 1. $A \vee B$	Ley del Silogismo Disyuntivo (SD)
2. $\sim A$	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \to q$
$\therefore B$	
b) 1. $A \vee B$	
2. $\sim B$	$[(p \vee q) \wedge \sim q] \to p$
$\therefore A$	

5) Regla del Dilema Constructivo (DC): A partir de dos fórmulas condicionales y de la disyunción de sus antecedentes se obtiene la disyunción de sus consecuentes.

1. $A \to B$	Ley del Dilema Constructivo (DC)
2. $C \to D$	
3. $A \vee C$	$\{[(p \to q) \wedge (r \to s)] \wedge (p \vee r)\} \to (q \vee s)$
$\therefore B \vee D$	

6) Regla del Dilema Destructivo (DD): A partir de dos fórmulas condicionales y de la disyunción de las negaciones de sus consecuentes, se obtiene la disyunción de las negaciones de sus antecedentes.

1. $A \rightarrow B$ Ley del Dilema Destructivo (DD)
2. $C \rightarrow D$ $\{[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \wedge (\sim q \vee \sim s)\} \rightarrow (\sim p \vee \sim r)$
3. $\sim B \vee \sim D$

$\therefore \sim A \vee \sim C$

7) Regla de la Simplificación (Simp.): A partir de la conjunción de dos fórmulas se obtiene una de ellas.

a) 1. $A \wedge B$ Ley de Simplificación (Simp.)

$\therefore B$ $(p \wedge q) \rightarrow q$

b) 1. $A \wedge B$

$\therefore A$ $(p \wedge q) \rightarrow p$

8) Regla de la Conjunción (Conj.): A partir de dos fórmulas se obtiene la conjunción de ambas.

1. A Ley de la Conjunción (Conj.)
2. B $(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$

$\therefore A \wedge B$

9) Regla de la Adición (Ad.): A partir de una fórmula se obtiene la disyunción de esa fórmula con cualquier otra.

1. A Ley de la Adición (Ad.)

$\therefore A \vee B$ $p \rightarrow (p \vee q)$

Ejemplos de análisis de inferencias a través del método analógico:

a) Dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud la misma dirección y sentido. Tienen la misma magnitud, la misma dirección y sentido. En consecuencia son iguales.

Forma lógica:

1. Si dos vectores tienen la misma magnitud y dos vectores tienen la misma dirección y dos vectores tienen el mismo sentido, entonces dos vectores son iguales.

2. Dos vectores tienen la misma magnitud y dos vectores tienen la misma dirección y dos vectores tienen el mismo sentido.

Luego, dos vectores son iguales.

Fórmula:

p: dos vectores tienen la misma magnitud.
q: dos vectores tienen la misma dirección.
r: dos vectores tienen el mismo sentido.
s: dos vectores son iguales.

1. $(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s$
2. $p \wedge q \wedge r$

$\therefore s$

que coincide con la estructura válida del Modus Ponens:

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \underline{A} \\ \therefore B \end{array}$$

Respuesta: La inferencia es válida por MP

b) Tanto la dinámica como la cinemática estudian el movimiento. Por tanto, la cinemática estudia al movimiento.

Forma lógica:

1. La dinámica estudia al movimiento y la cinemática estudia el movimiento.

Luego, la cinemática estudia el movimiento.

Fórmula:

p: La dinámica estudia el movimiento
q: La cinemática estudia el movimiento

1. $p \wedge q$

$\therefore q$

que coincide con la estructura válida de la Simplificación:

$A \wedge B$

$\therefore B$

Respuesta: La inferencia es válida por Simp.

c) Una expresión algebraica no es prima a menos que sea divisible por ella misma y por la unidad. No es prima. En consecuencia, es falso que sea divisible por ella misma y por la unidad.
Forma lógica:

1. Si una expresión algebraica es divisible por ella misma y una expresión algebraica es divisible por la unidad, entonces la expresión algebraica es prima.
2. La expresión algebraica no es prima.

Luego, es falso que la expresión algebraica sea divisible por ella misma y la expresión algebraica sea divisible por la unidad.

Fórmula:
p: Una expresión algebraica es divisible por sí misma
q: Una expresión algebraica es divisible por la unidad
r: Una expresión algebraica es prima

1. $(p \wedge q) \rightarrow r$
2. $\sim r$

$\therefore \sim (p \wedge q)$

que coincide con la estructura válida del Modus Tollens:

$A \rightarrow B$

$\sim B$

$\therefore \sim A$

Respuesta: La inferencia es válida por MT

d) 3 es menor que 4 si 4 es mayor que 3. Y 3 es diferente de 4 si 3 es menor que 4. Luego, 4 es mayor que 3 si 3 es diferente de 4.

Forma lógica:

1. Si 4 es mayor que 3, entonces 3 es menor que 4.
2. Si 3 es menor que 4, entonces 3 es diferente de 4.

Luego, si 3 es diferente de 4, entonces 4 es mayor que 3.

Fórmula:

p: 4 es mayor que 3
q: 3 es menor que 4
r: 3 es diferente de 4

$$\begin{array}{l} 1.\ p \rightarrow q \\ 2.\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore\ r \rightarrow p \end{array}$$

que no coincide con la estructura válida del Silogismo Hipotético:

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \\ \hline \therefore A \rightarrow C \end{array}$$

Respuesta: La inferencia no es válida porque atenta contra SH

e) Enrique representa a la Nación y no está sujeto a mandato imperativo porque es congresista. Representa a la Nación y no está sujeto a mandato imperativo. Luego es congresista.

Forma lógica:

1. Si Enrique es congresista, entonces Enrique representa a la Nación y Enrique no está sujeto a mandato imperativo.
2. Enrique representa a la Nación y Enrique no está sujeto a mandato imperativo.

Luego, Enrique es congresista.

Fórmula:
p: Enrique es congresista
q: Enrique representa a la Nación
r: Enrique está sujeto a mandato imperativo

1. $p \rightarrow (q \wedge \sim r)$
2. $q \wedge \sim r$

$\therefore p$

que no coincide con la estructura válida del Modus Ponens:

$A \rightarrow B$
A

$\therefore B$

Respuesta: La inferencia no es válida porque atenta contra MP

f) Si es selectivo, metódico y explicativo, el conocimiento es científico. Si es problemático, crítico y trascendente, el conocimiento es filosófico. Es selectivo, metódico y explicativo o es problemático, crítico y trascendente. En consecuencia, el conocimiento es científico o es filosófico.
Forma lógica:

1. Si el conocimiento es selectivo y el conocimiento es metódico y el conocimiento es explicativo, entonces el conocimiento es científico.
2. Si el conocimiento es problemático y el conocimiento es crítico y el conocimiento es trascendente, entonces el conocimiento es filosófico.
3. El conocimiento es selectivo y el conocimiento es metódico y el conocimiento es explicativo o el conocimiento es problemático y el conocimiento es crítico y el conocimiento es trascendente.

Luego, el conocimiento es científico o el conocimiento es filosófico.

Fórmula:
p: el conocimiento es selectivo.
q: el conocimiento es metódico
r: el conocimiento es explicativo
s: el conocimiento es científico
t: el conocimiento es problemático
u: el conocimiento es crítico.
v. el conocimiento es trascendente.
w: el conocimiento es filosófico.

1. $(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s$
2. $(t \wedge u \wedge v) \rightarrow w$
3. $(p \wedge q \wedge r) \vee (t \wedge u \wedge v)$

$\therefore s \vee w$

que coincide con la estructura válida del Dilema Constructivo.

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \underline{C \rightarrow D} \\ A \vee C \\ \therefore\ B \vee D \end{array}$$

Respuesta: La inferencia es válida por DC

Equivalencias tautológicas

1. Tautología (Tau)

a) $(p \wedge p) \equiv p$
b) $(p \vee p) \equiv p$

2. Doble Negación (DN)

$\sim\sim p \equiv p$

3. De Morgan (De M)

a) $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
b) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
c) $(p \wedge q) \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$
d) $(p \vee q) \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$

4. Conmutación (Conm.)

a) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$

b) $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

c) $(p \not\leftrightarrow q) \equiv (q \leftrightarrow p)$

d) $(p \leftrightarrow q) \equiv (q \leftrightarrow p)$

e) $(p \downarrow q) \equiv (q \downarrow p)$

f) $(p \mid q) \equiv (q \mid p)$

5. Asociación (Asoc.)

a) $[p \wedge (q \wedge r)] \equiv [(p \wedge q) \wedge r)]$

b) $[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r)]$

c) $[p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)] \equiv [(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r]$

6. Distribución (Dist.)

a) $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

b) $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

c) $[p \rightarrow (q \wedge r)] \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$

d) $[p \rightarrow (q \vee r)] \equiv [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$

7. Definición de Implicación Material (Impl.)

a) $(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

b) $(p \rightarrow q) \equiv \sim (p \wedge \sim q)$

8. Definición de Equivalencia Material (Equiv.)

a) $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

b) $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$

9. Definición de Disyunción Exclusiva (Def. DE)

$(p \not\leftrightarrow q) \equiv [(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)]$

10. Definición de Negación Conjunta (Def. NC)

$(p \downarrow q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

11. Definición de Negación Alterna (Def. NA)

$(p \mid q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

12. Transposición (Trans.)

a) $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$

b) $(p \leftrightarrow q) \equiv (\sim q \leftrightarrow \sim p)$

13. Exportación (Exp.)

$[(p \wedge q) \rightarrow r) \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

14. Expansión (Expan.)

a) $p \equiv [p \wedge (q \vee \sim q)]$

b) $p \equiv [p \vee (q \wedge \sim q)]$

c) $(p \rightarrow q) \equiv [p \leftrightarrow (p \wedge q)]$

d) $(p \rightarrow q) \equiv [q \leftrightarrow (p \vee q)]$

15. Absorción (Abs.)

a) $[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$

b) $[p \vee (p \wedge q)] \equiv p$

c) $[p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (p \wedge q)$

d) $[p \vee (\sim p \wedge q)] \equiv (p \vee q)$

16. Reglas de Equivalencia:

R1) $(T \wedge C) \equiv C$

R2) $(T \vee C) \equiv T$

R3) $(T \wedge T) \equiv T$

R4) $(T \vee T) \equiv T$

R5) $(\perp \wedge C) \equiv \perp$

R6) $(\perp \vee C) \equiv C$

R7) $(\perp \wedge \perp) \equiv \perp$

R8) $(\perp \vee \perp) \equiv \perp$

Donde:

T= Tautología

$\perp$= Contradiccón

C= Consistencia

Cuestionario N.º 8

1. ¿En qué consisten los métodos sintácticos y cuáles son ejemplos de éstos?
2. ¿En qué consisten los métodos semánticos y cuáles se pueden señalar?

3. ¿Por qué se dice que la tabla de verdad es un procedimiento algorítmico?
4. Si se aplica el procedimiento de la tabla de verdad a una inferencia, ¿cuándo es ésta válida?
5. ¿Cuál es el procedimiento a seguir en la aplicación de la tabla de verdad?
6. ¿En qué consiste el método abreviado?
7. ¿En qué consiste el método analógico de análisis de inferencias y cuál es su procedimiento?
8. ¿Qué diferencia existe entre leyes lógicas y reglas lógicas?
9. ¿Cuáles son los tres principios lógicos fundamentales, cuál es su formulación ontológica y cuál su formulación lógica?
10. ¿Cuáles son las principales reglas y cuáles las principales leyes de la lógica proposicional? Enúncielas.

Ejercicio N.º 11

Análisis de inferencias mediante la tabla de verdad, el método abreviado y el método analógico

1. Determine mediante la tabla de verdad si las siguientes inferencias son válidas o inválidas:

a) Si se levanta la veda, entoces se podrá pescar anchoveta. No se puede pescar anchoveta. Luego, no se levantó la veda.
b) Si no se levanta la veda, entoces no se podrá pescar anchoveta. Se puede pescar anchoveta. En consecuencia, se ha levantado la veda.
c) Si hay veda, entonces no se podrá pescar atún. Hay veda. Por tanto, no se puede pescar atún.
d) Si las aguas del mar peruano se enfrían excesivamente, entonces no habrá buena actividad pesquera. No habrá buena actividad pesquera. En consecuencia, las aguas del mar peruano se enfrían excesivamente.
e) Si el mar peruano se calienta excesivamente, no habrá buena actividad pesquera. El mar peruano no se calienta excesivamente. Luego, habrá buena actividad pesquera.

f) Si hay especulación con el tipo de cambio, se incrementará la cotización del dólar y devaluará el nuevo sol. Se ha incrementado la cotización del dólar y devaluado el nuevo sol. Por tanto, hay especulación con el tipo de cambio.

g) Si se incrementa la cotización del dólar y devalúa el nuevo sol, hay especulación con el tipo de cambio. No hay especulación con el tipo de cambio. Luego, es falso que se haya incrementado la cotización del dólar y devaluado el nuevo sol.

h) Si no se incrementa la cotización del dólar ni devalúa el nuevo sol, entonces no hay especulación con el tipo de cambio. Hay especulación con el tipo de cambio. En consecuencia, se incrementa la cotización del dólar y devalúa el nuevo sol.

i) Si las aguas del mar peruano se enfrían excesivamente, no se podrá pescar anchoveta ni atún. Ocurre que no se puede pescar anchoveta ni atún. Por tanto, las aguas del mar peruano se han enfriado excesivamente.

j) Si se produjo la tragedia de Mesa Redonda, entonces la DICSCAMEC cometió irregularidades al entregar autorizaciones a comerciantes y no fiscalizó la comercialización de los pirotécnicos. Se produjo la tragedia de Mesa Redonda. Por tanto, la DICSCAMEC cometió irregularidades al entregar autorizaciones a comerciantes y no fiscalizó la comercialización de los pirotécnicos.

2. Mediante el método abreviado diga si las siguientes fórmulas son tautológicas o no:

a) $[(p \to q) \to (p \to r)] \to [p \to (q \to r)]$

b) $\{p \wedge [(q \wedge p) \to \sim r]\} \to (r \to \sim q)$

c) $\{[p \to (q \vee \sim r)] \wedge r\} \to (\sim p \vee \sim q)$

d) $\{[p \vee (q \to \sim r)] \wedge r\} \to (p \vee \sim q)$

e) $\{[(p \to q) \wedge (r \to s)] \wedge (\sim q \vee \sim s)\} \to (\sim p \vee \sim r)$

f) $(p \wedge q) \to [(\sim p \leftrightarrow r) \vee (\sim q \nleftrightarrow \sim r)]$

g) $[(\sim r \leftrightarrow q) \wedge \sim (p \leftrightarrow r)] \to (p \to q)$

h) $[(p \to \sim r) \to (r \to s)] \to \sim [(s \nleftrightarrow q) \wedge \sim p]$

i) $\{[(p \vee q) \rightarrow \sim r] \wedge (\sim r \rightarrow s)\} \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow s]$

j) $[(p \rightarrow (q \vee r)] \rightarrow [(s \leftrightarrow q) \vee (\sim s \not\leftrightarrow r)]$

3. Determine mediante el método abreviado si las siguientes inferencias son válidas o inválidas:

a) Si se produjo la tragedia de Mesa Redonda, entonces la DICSCAMEC cometió irregularidades al entregar autorizaciones a comerciantes y al no denunciar ante la fiscalía la comercialización ilegal de los pirotécnicos. La DICSCAMEC cometió irregularidades al entregar autorizaciones a comerciantes y al no denunciar ante la fiscalía la comercialización ilegal de los pirotécnicos. En consecuencia, se produjo la tragedia de Mesa Redonda.
b) Si las aguas del mar peruano se enfrían o calientan excesivamente, entonces no se podrá pescar anchoveta ni atún. No se puede pescar anchoveta ni atún. Por tanto, las aguas del mar peruano se han enfriado o calentado excesivamente.
c) Si la DICSCAMEC entregó autorizaciones a comerciantes y no denunció ante la fiscalía la comercialización ilegal de los pirotécnicos, entoces cometió irregularidades y será declarada en reorganización por el Ministerio del Interior. La DICSCAMEC no entregó autorizaciones a comerciantes y denunció ante la fiscalía la comercialización ilegal de los pirotécnicos. Luego, no cometió irregularidades y no será declarada en reorganización por el Ministerio del Interior.
d) Si no se puede pescar anchoveta ni atún, entonces las aguas del mar peruano se han enfriado o calentado excesivamente. Las aguas del mar peruano se han calentado o enfriado excesivamente. Por tanto, no se puede pescar anchoveta ni atún.
e) La tragedia de Mesa Redonda dejó cerca de trescientos muertos, doscientos desaparecidos, más de doscientos cincuenta heridos y setecientos locales devastados. En consecuencia, dejó diez millones de dólares en pérdidas materiales.
f) Si la tragedia de Mesa Redonda dejó centenares de muertos, entonces debe investigarse las causas y sancionar a los responsa-

bles. La tragedia de Mesa Redonda dejó centenares de muertos y heridos. Luego, debe investigarse las causas y sancionar a los responsables.

g) La tragedia de Mesa Redonda dejó diez millones de dólares en pérdidas materiales y se incautaron doscientas toneladas de material pirotécnico. En consecuencia, se tendrá que invertir entre diez y veinte millones de dólares para la recuperación del área afectada de Mesa Redonda.

h) La venta de artefactos pirotécnicos será prohibida al público, sin embargo los especialistas en la materia podrán solicitar una autorización a la DICSCAMEC para realizar espectáculos pirotécnicos. En consecuencia, no se podrá importar artículos pirotécnicos detonantes y las personas que ocasionen lesiones graves por el uso de estos artículos serán sancionadas con penas privativas de libertad de hasta quince años.

i) Si el Presidente de Chile designa como ministra de defensa a una mujer, médica y madre de tres hijos, entonces rompe la tradición machista de sus fuerzas armadas. El Presidente de Chile designó como ministra de defensa a una mujer, médica y madre de tres hijos. Luego, rompió la tradición machista de sus fuerzas armadas.

j) Si el Presidente de Chile designa como ministra de defensa a una mujer, socialista e hija de un militar constitucionalista, entonces será bien recibida por los peruanos esta designación. Los peruanos han recibido bien esta designación. Por tanto, el Presidente de Chile ha designado como ministra de defensa a una mujer, socialista e hija de un militar constitucionalista.

k) Si dos miembros de una desigualdad son positivos y se elevan a una misma potencia positiva, el signo de la desigualdad no cambia. Si los dos miembros de una desigualdad son negativos y se elevan a una misma potencia positiva, el signo de la desigualad cambia. Por tanto, el signo de la desigualdad cambia o no cambia.

l) Si dos miembros de una misma desigualdad se multiplican o dividen por una misma cantidad positiva, el signo de la desigualdad no varía. Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por una misma cantidad negativa, el signo de la desigualdad varía. Luego el signo de la desigualdad varía o no varía.

m) Dos polígonos son iguales si y sólo si tienen respectivamente iguales todos sus lados e iguales los ángulos comprendidos entre los lados respectivamente iguales. Dos polígonos son iguales. Luego, tienen respectivamente iguales todos sus lados.

n) O la vitamina A no es requerida por el hombre o es requerida por otros vertebrados. La vitamina A no es hidrosoluble o se almacenan en el hígado. En consecuencia, la vitamina A no es hidrosoluble ni antihemorrágica si es requerida por el hombre.

ñ) Las bacterias son organismos microscópicos y causa de enfermedades graves en el hombre o no son organismos microscópicos ni causa de enfermedades graves en el hombre. Si las bacterias tienen forma de bastoncillos, se llaman bacilos. Luego las bacterias son organismos microscópicos si y sólo si son causa de enfermedades graves en el hombre

4. Escribe la conclusión correcta a partir de las siguientes premisas, aplicando las reglas lógicas que se indica:

a) 1. $(p \vee q \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$ (Simp.)

b) 1. $\sim(\sim p \rightarrow \sim q) \mid \sim r$ (Ad.)

c) 1. $(p \wedge q) \rightarrow (r \mid \sim s)$
2. $p \wedge q$ (MP)

d) 1. $(p \wedge q \wedge r) \rightarrow \sim t$
2. $\sim s \rightarrow (p \vee q \vee r)$
3. $(p \wedge q \wedge r) \vee \sim s$ (DC)

e) 1. $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
2. $(r \mid \sim s) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$ (SH)

f) 1. $p \rightarrow (q \wedge r)$
2. $(s \vee t) \downarrow (\sim s \wedge \sim r)$ (Conj.)

g) 1. $\sim (p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)$
2. $\sim (r \rightarrow s)$ (MT)

h) 1. $(\sim s \rightarrow \sim r) \rightarrow \sim (\sim p \wedge \sim q)$
2. $\sim p \wedge \sim q$ (MT)

i) 1. $(p \rightarrow q) \vee \sim (r \wedge s)$
2. $r \wedge s$ (SD)

j) 1. $\sim p \rightarrow \sim q$
2. $[p \vee (r \rightarrow s)] \rightarrow [(p \downarrow q) \rightarrow \sim t]$
3. $q \vee \sim [(p \downarrow q) \rightarrow \sim t]$ (DD)

5. Escribe la conclusión correcta a partir de las siguientes premisas, aplicando las reglas lógicas que se indica:

a) Si A es un subconjunto de B, entonces todo elemento de A es también elemento de B. A es un subconjunto de B. Luego, (MP)
b) La Corriente del Niño eleva la temperatura ambiental de la costa norte del Perú. En consecuencia, (Ad.)
c) La vitamina C se encuentra en los jugos de frutas cítricas y la vitamina K es antihemorrágica. Luego, (Simp.)
d) Si la célula es la unidad básica de la materia viva, entonces es la base de la formación de los tejidos orgánicos. Pero es falso que la célula sea la base de la formación de los tejidos y órganos. Luego, (MT)
e) Si un ministro de Estado no ha cesado en el cargo, entonces puede postular a la Presidencia de la República y si un miembro de las Fuerzas Armadas no ha pasado a la situación de retiro, entonces no puede postular a la Presidencia de la República. En consecuencia, (Simp.)
f) Si los hidrocarburos son compuestos orgánicos, entonces contienen carbono e hidrógeno. Los hidrocarburos son compuestos orgánicos. Luego, (MP)
g) Si ha ocurrido una transformación en la estructura molecular de una sustancia, entonces se ha producido una reacción química.

Si se ha producido una reacción química, entonces ha ocurrido un fenómeno químico. Luego, (SH)

h) Si el Congreso se reúne en legislatura ordinaria, entonces ha sido convocado por su presidente. Si el Congreso se reúne en legislatura extraordinaria, entonces ha sido convocado a pedido del Presidente de la República. El Congreso no ha sido convocado por el presidente del Congreso o no ha sido convocado a pedido del Presidente de la República. En consecuencia, (DD)
i) El carbón vegetal se obtiene por la combustión incompleta de la leña o calcinando los huesos en recipientes cerrados. El carbón vegetal no se obtiene calcinando los huesos en recipientes cerrados. Luego, (SD)
j) Si no hay carbono y no hay oxígeno y no hay nitrógeno y no hay hidrógeno, entonces no hay vida. Hay vida. Luego, (MT)

6. Determine la validez o invalidez de las siguientes inferencias a través del método analógico:

a) Si el Presidente de la República sale del territorio nacional, el Primer Vicepresidente se encarga del despacho. El Presidente de la República sale del territorio nacional. Por tanto, el Primer Vicepresidente se encarga del despacho.
b) El cónyuge extranjero está facultado para optar por la nacionalidad peruana si tiene dos años de matrimonio y de domicilio en el Perú. No está facultado para optar por la nacionalidad peruana. Luego, es falso que tenga dos años de matrimonio y de domicilio en el Perú.
c) De elevarse los impuestos, habrá déficit. Habrá desocupación si hay déficit. En consecuencia, de elevarse los impuestos, habrá desocupación.
d) Si padeces de asma, eres víctima de sofocaciones intermitentes. Si padeces de bronquios, tienes inflamados los bronquios. O padeces de asma o no padeces de bronquios. Luego, o no eres víctima de sofocaciones intermitentes o no tienes inflamados los bronquios.

e) Eres un melómano si tienes afición desmedida por la música. Si eres melómano, no eres megalómano. Por tanto, no eres megalómano si tienes afición desmedida por la música.
f) Eres un misántropo si manifiestas aversión o repugnancia al trato humano. Ocurre que es falso que manifiestas aversión o repugnancia al trato humano. Luego, no eres un misántropo.
g) O Euclides es un sabio alejandrino o Lobachevski y Riemann son matemáticos. Euclides es un sabio alejandrino. Luego, es falso que Lobachevski y Riemann sean matemáticos.
h) Frege es matemático y lógico alemán y Russell es filósofo y lógico inglés. Luego, Frege es matemático.
i) La tabla de verdad no es un algoritmo a menos que permita decidir mecánicamente la validez o invalidez de las inferencias. La tabla de verdad es un algoritmo. En consecuencia, permite decidir mecánicamente la validez o invalidez de las inferencias.
j) Heidegger y Sartre son filósofos existencialistas si centran la reflexión filosófica en el problema de la existencia humana. Centran la reflexión filosófica en el problema de la existencia humana. Luego, son filósofos existencialistas.

7. Escriba el equivalente de las siguientes fórmulas aplicando las equivalencias tautológicas que se sugieren:

a) $\sim p \wedge \sim q$

a)	(De M)
b)	(Conm.)
c)	(Impl.)
d)	(NC)

b) $\sim p \vee \sim q$

a)	(De M)
b)	(Conm.)
c)	(Impl.)
d)	(NA)

c) $\sim p \rightarrow \sim q$

a) (Impl.)
b) (Trans.)
c) (DN)
d) (Expan.)

d) $\sim p \leftrightarrow \sim q$

a) (Equiv.)
b) (Trans.)
c) (Conm.)
d) (Tau)

e) $\sim p \not\leftrightarrow \sim q$

a) (DE)
b) (Conm.)
c) (Expan.)
d) (DN)

f) $\sim p \downarrow \sim q$

a) (NC)
b) (Conm.)
c) (DN)
d) (Expan.)

g) $\sim p \mid \sim q$

a) (NA)
b) (Conm.)
c) (Expan.)
d) (Tau.)

h). $\sim p \wedge (\sim q \vee \sim r)$

a) (Conm.)
b) (De M)
c) (Dist.)
d) (NC)
e) (Impl.)

i) $\sim p \vee (\sim q \wedge \sim r)$

a)	(Conm.)
b)	(De M)
c)	(Dist.)
d)	(NA)
e)	(Impl.)

j) $\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim (\sim p \wedge \sim q)$

a)	(Equiv.)
b)	(Conm.)
c)	(Impl.)
d)	(De M)
e)	(NC)

k) $\sim [(p \leftrightarrow q) \vee (r \mid s)] \wedge \sim t$

a)	(Conm.)
b)	(De M)
c)	(DE)
d)	(NA)
e)	(NC)

l) $(p \vee q \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$

a)	(Asoc.)
b)	(Dist.)
c)	(De M)
d)	(Impl.)
e)	(NC)

m) $p \wedge q \wedge r \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$

a)	(Conm.)
b)	(Asoc.)
c)	(De M)
d)	(Dist.)
e)	(Abs.)

n) $(p \wedge q \wedge r \wedge p) \vee \sim p \vee \sim q \vee \sim r \vee \sim p$

a)	(Conm.)
b)	(Asoc.)
c)	(De M)
d)	(Dist.)
e)	(Abs.)

ñ) $[(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow [\sim p \vee (r | s)]$

a)	(Impl.)
b)	(De M)
c)	(Abs.)
d)	(Dist.)
e)	(NA)

8. Aplique las leyes de absorción (Abs.) a las siguientes fórmulas:

a) $p \wedge (q \vee p)$
b) $p \vee (r \wedge p)$
c) $(p \wedge q) \vee (p \vee s)$
d) $(\sim p \wedge q \wedge r) \wedge (t \vee q \vee \sim s)$
e) $(p \vee \sim q) \wedge (\sim r \wedge s \wedge q)$
f)) $(\sim p \vee q \vee r) \vee (r \wedge s \wedge t)$
g) $(p \wedge q) \vee (\sim r \vee \sim p)$
h) $(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \vee (q \wedge \sim s)$
i) $p \wedge (t \vee \sim r \vee \sim s \vee \sim p) \wedge s \wedge (\sim t \vee \sim p)$
j) $\sim p \vee \sim r \vee (s \wedge r \wedge p)$

EL MÉTODO DE LA DEDUCCIÓN NATURAL

La deducción natural como un método sintáctico y no algorítmico

El método de la deducción natural fue propuesto en 1934 por el investigador Gerhard Gentzen. Desde entonces se conocen diversas variantes de él que algunos textos de lógica presentan como reglas para construir derivaciones, deducciones o pruebas formales. Pertenece al grupo de los métodos sintácticos, y dentro de éstos a los no algorítmicos. Es sintáctico porque procede sólo por transformaciones de las fórmulas aplicando a las premisas una serie de reglas o leyes lógicas previamente adoptadas. Es no algorítmico porque el número de pasos no puede prescribirse previamente en su totalidad. Su eficiencia va de acuerdo a la capacidad natural o adquirida del que lo aplica.

Procedimiento:

De acuerdo al método de la deducción natural, para evaluar una inferencia, es decir, para mostrar que la conclusión de una inferencia se sigue lógicamente de las premisas, es preciso indicar las reglas de inferencias válidas elementales que conducen de las premisas a la conclusión.

Dada una inferencia cualquiera, el proceso derivativo consta de los siguientes pasos:

Paso 1. Se asigna a cada proposición atómica su correspondiente variable.

Paso 2. Se simbolizan las premisas y la conclusión disponiendo aquéllas en forma vertical y escribiendo la conclusión a continuación de la última premisa en el mismo renglón. Entre la última premisa y la conclusión se escribe una barra separatoria '/' seguida del símbolo '∴' que se lee 'luego' o 'por lo tanto'.

Paso 3. Se procede a ejecutar las derivaciones tomando como punto de partida cualquiera de las premisas, siempre que sea factible, e indicando a la derecha en forma abreviada de qué premisas y mediante qué ley o regla se ha obtenido la nueva expresión.

Modalidades de la deducción natural

Prueba directa (PD)

Sea la inferencia siguiente:

Si hay abundancia de peces, habrá abundante harina de pescado. Si hay abundante harina de pescado, se incrementa la exportación. La exportación no se incrementa. O hay abundancia de peces o será preciso recurrir a otras actividades. Luego, será preciso recurrir a otras actividades.

a) Se halla su forma lógica:

1. Si hay abundancia de peces, entonces habrá abundante harina de pescado.
2. Si hay abundante harina de pescado, entonces se incrementa la exportación
3. La exportación no se incrementa.
4. O hay abundancia de peces o será preciso recurrir a otras actividades.

Luego, será preciso recurrir a otras actividades.

b) Se halla su fórmula: se determinan las variables y se expresan simbólicamente las premisas y la conclusión

p: hay abundancia de peces
q: hay abundancia de harina de pescado
r: se incrementa la exportación
s: será preciso recurrir a otras actividades

1. $p \rightarrow q$
2. $q \rightarrow r$
3. $\sim r$
4. $p \vee s \ / \ \therefore s$

c) Se efectúan las derivaciones

5. $p \rightarrow r$	SH (1,2)
6. $\sim p$	MT (5,3)
7. s	SD (4,6)

Habiéndose obtenido la conclusión, puede afirmarse que la inferencia original es correcta o válida.

No es necesario, ni siempre es posible, comenzar las derivaciones por la primera premisa; se puede comenzar por cualquier otra, siempre que ello sea posible. En el ejemplo propuesto, se puede partir de la segunda premisa comparándola con la tercera, de la manera siguiente:

5. $\sim q$	MT (2,3)
6. $\sim p$	MT (1,5)
7. s	SD (4,6)

En el primer proceso se ha utilizado SH, MT y SD. En cambio, en el segundo procedimiento se ha empleado dos veces el MT y luego el SD.

La prueba condicional (PC)

La prueba condicional (PC) es una modalidad dentro del método de la deducción natural y se aplica en los casos en que una inferencia tenga conclusión condicional o implicativa.

En efecto, siendo la conclusión una fórmula condicional o implicativa necesariamente tendrá antecedente y consecuente. Para saber si una conclusión de este tipo se deriva de las premisas dadas se agrega el antecedente de la conclusión a las premisas, y, luego, aplicando a este nuevo conjunto de premisas las reglas o leyes lógicas ya conocidas, se realizan las derivaciones hasta obtener el consecuente de la conclusión.

Procedimiento

Dado el caso de que la conclusión de una inferencia sea una fórmula condicional o implicativa:

Paso 1. Se toma primeramente su antecedente y se introduce como una nueva premisa (PA: premisa adicional).

Paso 2. Se efectúan las derivaciones corriendo la demostración algunos lugares hacia la derecha hasta hallar el consecuente de la conclusión.

Paso 3. Se une implicativamente la premisa adicional con el último paso logrado volviendo la demostración a la izquierda, a la posición original.

Ejemplo:

a) Sea la forma inferencial siguiente:

1. $s \to r$
2. $s \lor p$
3. $p \to q$
4. $r \to t$ / $\therefore \sim q \to t$

b) Se introduce la premisa adicional

5. $\sim q$ PA (antecedente de la conclusión)

c) Se efectúan las derivaciones

6. $\sim p$	MT (3,5)
7. s	SD (2,6)
8. r	MP (1,7)
9. t	MP(4,8)

d) Se unen implicativamente la premisa adicional con el último paso logrado

10. $\sim q \to t$ PC (5,9)

La prueba por la reducción al absurdo (PRA)

Ésta es otra modalidad dentro del método de la deducción natural. Resulta de la fusión de la regla de la prueba condicional y de la noción de contradicción; de aquí su nombre de reducción al absurdo.

Consiste en introducir como premisa adicional la negación de la conclusión para llegar a encontrar una contradicción en las premisas. Es decir, se supone la falsedad del consecuente para llegar a la falsedad del antecedente, mostrando de esta manera que la conclusión se halla implicada en las premisas (demostración indirecta).

El sentido de esta demostración se puede entender fácilmente si se recuerda que por el modus tollens (MT) se puede deducir la negación del antecedente de una implicación cuando se niega el consecuente, es decir, cuando se sabe que el consecuente es falso.

Procedimiento

Dada una inferencia cualquiera:

a) Se niega la conclusión y se introduce como una nueva premisa (PA: premisa adicional).
b) Se efectúan las derivaciones corriendo la demostración varios lugares hacia la derecha hasta encontrar una contradicción.
c) Se une en forma condicional o implicativa la premisa adicional con la contradicción hallada, a través de la regla de la prueba condicional (PC), volviendo la demostración a la izquierda, a la posición original.
d) Se establece la conclusión deseada como una inferencia lógicamente deducida de las premisas originales, aplicando la regla de la prueba por la reducción al absurdo (PRA):[28]

   $[p \rightarrow (q \wedge \sim q)] \rightarrow \sim p$

[28] REA RAVELLO, Bernardo, *Introducción a la lógica*, Lima, Amaru Editores, 1981, pp. 44-52.

Ejemplo

a) Sea la forma inferencial siguiente:

1. $\sim (p \wedge q)$
2. $\sim r \rightarrow q$
3. $\sim p \rightarrow r$ / $\therefore r$

b) Se introduce la premisa adicional

4. $\sim r$ PA (premisa adicional = negación de la conclusión)

c) Se efectúan las derivaciones

5. p	MT (3,4)
6. q	MP (2,4)
7. $\sim p \vee \sim q$	De M(1)
8. $\sim p$	SD (7,6)
9. $p \wedge \sim p$	Conj. (5,8) (contradicción)

d) Se aplica la regla de la PC

10. $\sim r \rightarrow (p \wedge \sim p)$ PC (4,9)

e) Se aplica la regla de la PRA (10)

11. r PRA (10)

En la práctica se puede suprimir el paso 10. De este modo, encontrada la contradicción, se infiere la conclusión del conjunto original de premisas, ubicándola hacia la izquierda, debajo de las premisas originales.

Cuestionario N.º 9

1. ¿Quién propuso el método de la deducción natural?
2. ¿ Por qué el método de la deducción natural es sintáctico?
3. ¿Por qué el método de la deducción natural no es considerado algorítmico?
4. ¿A qué se denomina método de la deducción natural?
5. ¿Qué modalidades presenta la deducción natural?
6. ¿En qué consiste la prueba directa?
7. ¿En qué modalidades de la deducción natural se emplea la premisa adicional?
8. ¿En qué casos se recurre al uso de la prueba condicional?
9. ¿En qué consiste la prueba por reducción al absurdo?
10. ¿Por qué se dice que la prueba por la reducción al absurdo es una demostración indirecta?

Ejercicio N.º 12
El método de la deducción natural

1. Justifique las siguientes demostraciones mediante el método de la deducción natural:

a) 1. $p \rightarrow q$
2. $p \wedge r$ / $\therefore q$
3. p
4. q

b) 1. $r \vee s$
2. $s \rightarrow p$
3. $\sim r$ / $\therefore p$
4. s
5. p

c) 1. $(q \rightarrow \sim p) \wedge (p \rightarrow r)$
2. $r \rightarrow q$
3. $\sim s \rightarrow p$ / $\therefore s$

4. $p \to r$
5. $p \to q$
6. $q \to \sim p$
7. $p \to \sim p$
8. $\sim p \ \text{v} \ \sim p$
9. $\sim p$
10. s

d) 1. $(p \to q) \to (r \to s)$
2. $t \vee \sim (u \to w)$
3. $(p \to q) \vee \sim t$
4. $x \to (u \to w)$
5. $\sim (r \to s) \ / \ \therefore \sim x$
6. $\sim (p \to q)$
7. $\sim t$
8. $\sim (u \to w)$
9. $\sim x$

e) 1. $p \to q$
2. $\sim p \to r$
3. $\sim q \ / \ \therefore r$
4. $\sim p$
5. r

f) 1. $p \to q$
2. $r \wedge s$
3. $p \vee \sim s \ / \ \therefore r \wedge q$
4. s
5. p
6. q
7. r
8. $r \wedge q$

g) 1. $p \vee q$
2. $q \to r$

3. $s \wedge \sim r$ / $\therefore p$
4. $\sim r$
5. $\sim q$
6. p

h) 1. $p \rightarrow \sim q$
2. $\sim r \rightarrow \sim s$
3. $p \vee \sim r$
4. q / $\therefore \sim s$
5. $\sim p$
6. $\sim r$
7. $\sim s$

i) 1. $(p \wedge q) \rightarrow [p \rightarrow (r \wedge s)]$
2. $(p \wedge q) \wedge t$ / $\therefore r \vee s$
3. $p \wedge q$
4. $p \rightarrow (r \wedge s)$
5. p
6. $r \wedge s$
7. r
8. $r \vee s$

j) 1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
2. $s \rightarrow (q \rightarrow r)$
3. $(\sim p \wedge \sim s) \rightarrow (\sim t \vee \sim u)$
4. $(\sim t \rightarrow \sim w) \wedge (\sim u \rightarrow \sim x)$
5. $(y \rightarrow w) \wedge (z \rightarrow x)$
6. $\sim (q \rightarrow r)$ / $\therefore \sim y \vee \sim z$
7. $\sim p$
8. $\sim s$
9. $\sim p \wedge \sim s$
10. $\sim t \vee \sim u$
11. $\sim w \vee \sim x$
12. $\sim y \vee \sim z$

k) 1. $p \to (q \to r)$
2. $r \to \sim r$
3. $(s \to p) \wedge (t \to q)$ / $\therefore s \to \sim t$
4. $(p \wedge q) \to r$
5. $\sim r \vee \sim r$
6. $\sim r$
7. $\sim (p \wedge q)$
8. $p \to \sim q$
9. $s \to p$
10. $s \to \sim q$
11. $t \to q$
12. $\sim q \to \sim t$
13. $s \to \sim t$

l) 1. $(p \vee q) \vee (r \wedge s)$
2. $(\sim p \wedge s) \wedge \sim(\sim p \wedge q)$ / $\therefore \sim p \wedge r$
3. $\sim p \wedge s$
4. $\sim p$
5. $\sim (\sim p \wedge q)$
6. $\sim p \to \sim q$
7. $\sim q$
8. $\sim p \wedge \sim q$
9. $\sim (p \vee q)$
10. $r \wedge s$
11. r
12. $\sim p \wedge r$

m) 1. $[(p \vee \sim q) \vee r] \to [s \to (t \to u)]$
2. $(p \vee \sim q) \to [(\vee \to w) \to x]$
3. $p \to [(t \to u) \to x]$
4. p / $\therefore s \to x$
5. $p \vee \sim q$
6. $(\vee \to w) \to x$
7. $(t \to u) \to x$
8. $(p \vee \sim q) \vee r$
9. $s \to (t \to u)$
10. $s \to x$

n) 1 $q \rightarrow (r \rightarrow s)$

2. $t \rightarrow (r \rightarrow s)$
3. $(\sim q \wedge \sim t) \rightarrow (\sim v \vee \sim w)$
4. $(\sim v \rightarrow \sim x) \wedge (\sim w \rightarrow \sim y)$
5. $(u \rightarrow x) \wedge (z \rightarrow y)$
6. $\sim (r \rightarrow s)$ / $\therefore \sim u \vee \sim z$
7. $\sim q$
8. $\sim t$
9. $\sim q \wedge \sim t$
10. $\sim v \vee \sim w$
11. $\sim x \vee \sim y$
12. $\sim u \vee \sim z$

ñ) 1. $\sim p \vee (q \rightarrow r)$

2. $\sim s \vee (q \rightarrow r)$
3. $\sim (\sim p \wedge \sim s) \vee (\sim t \vee \sim u)$
4. $\sim t \rightarrow \sim w$
5. $\sim u \rightarrow \sim x$
6. $y \rightarrow w$
7. $z \rightarrow x$
8. $\sim (q \rightarrow r)$ / $\therefore \sim y \vee \sim z$
9. $\sim p$
10. $\sim s$
11. $\sim p \wedge \sim s$
12. $\sim t \vee \sim u$
13. $\sim w \vee \sim x$
14. $\sim y \vee \sim z$

2. Demuestre por la prueba directa (PD)

a) 1. $\sim p \rightarrow q$

2. $\sim (p \vee r)$ / $\therefore q$

b) 1. $q \wedge \sim s$

2. $\sim p \vee (r \wedge s)$ / $\therefore \sim p$

c) 1. $\sim (p \wedge q) \vee r$
2. $p \wedge s$
3. $q \;/ \therefore\; r \vee t$

d) 1. $\sim (\sim p \vee q)$
2. $p \rightarrow \sim r$
4. $q \vee \sim s \;/ \therefore\; \sim (r \vee s)$

e) 1. $\sim (p \vee q) \vee r$
2. $s \rightarrow p$
3. $t \rightarrow q$
4. $s \vee t \;/ \therefore\; r$

f) 1. $\sim t \vee \sim r$
2. $\sim r \rightarrow s$
3. $\sim t \rightarrow s$
4. $w \rightarrow \sim s \;/ \therefore \sim w$

g) 1. $p \rightarrow \sim (q \rightarrow r)$
2. $(s \wedge q) \rightarrow r$
3. $s \;/ \therefore\; \sim p$

h) 1. $\sim (\sim p \vee \sim q)$
2. $r \rightarrow \sim s$
3. $r \vee \sim q \;/ \therefore\; \sim s$

i) 1. $p \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$
2. $p \leftrightarrow q \;/ \therefore \sim p \wedge \sim q$

j) 1. $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$
2. $p \vee (t \rightarrow \sim t)$
3. $\sim r \;/ \therefore \sim t \vee \sim w$

k) 1. p
2. $p \rightarrow (q \wedge r) \;/ \therefore\; p \not\leftrightarrow r$

l) 1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

2. $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow s$

3. $\sim s$ / $\therefore r \vee \sim t$

m) 1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

2. $\sim (\sim p \vee s)$

3. q / $\therefore r$

n) 1. $(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$

2. p

3. $\sim s$ / $\therefore r$

ñ) 1. $r \rightarrow s$

2. $p \vee r$

3. $p \rightarrow q$ / $\therefore q \vee (s \vee r)$

3. Demuestre mediante la prueba condicional (PC):

a) 1. $\sim (p \vee q) \vee \sim r$

2. $s \rightarrow p$

3. $\sim t \vee q$

4. $s \vee t$ / $\therefore r \rightarrow q$

b) 1. $\sim (r \vee s) \vee t$

2. $p \rightarrow \sim t$

3. $\sim p \rightarrow s$ / $\therefore r \rightarrow s$

c) 1. $\sim r \vee s$

2. $\sim q \rightarrow \sim s$

3. $r \vee (s \wedge t)$ / $\therefore \sim q \rightarrow (t \wedge s)$

d) 1. $(r \wedge s) \rightarrow t$

2. $\sim p \vee \sim t$

3. $p \wedge q$ / $\therefore r \rightarrow \sim s$

e) 1. $\sim p \rightarrow \sim q$
2. $\sim r \vee s$
3. $\sim q \rightarrow r \ / \therefore \sim p \rightarrow (s \vee \sim t)$

f) 1. $\sim p$
2. $\sim r \rightarrow t$
3. $s \vee p \ / \therefore \sim (r \wedge s) \rightarrow t$

g) 1. $\sim (\sim r \wedge \sim q)$
2. $t \rightarrow \sim q$
3. $\sim s \rightarrow \sim q \ / \ \therefore (t \vee \sim s) \rightarrow r$

h) 1. $q \rightarrow p$
2. $t \vee s$
3. $s \rightarrow q \ / \therefore \sim (p \vee r) \rightarrow t$

i) 1. $s \rightarrow \sim p$
2. $\sim q$ Ú $\sim r$
3. $t \rightarrow (s \wedge r) \ / \ \therefore t \rightarrow \sim (p \vee q)$

j) 1. $\sim r \rightarrow s$
2. $p \rightarrow t$
3. $r \rightarrow \sim q \ / \therefore (p \wedge q) \rightarrow (s \wedge t)$

k) 1. $r \rightarrow s$
2. $p \vee r$
3. $p \rightarrow q \ / \ \therefore \sim q \rightarrow (s \vee r)$

l) 1. $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$
2. $\sim r \wedge \sim s \ / \therefore \ p \rightarrow \sim q$

m) 1. $p \rightarrow \sim q$
2. $r \vee \sim s$
3. $s \vee \sim p$
4. $\sim r \ / \ \therefore p \rightarrow (\sim q \wedge \sim s \wedge r)$

n) 1. $p \to q$
2. $q \to \sim r$
3. $s \vee t$
4. $r \vee \sim s \;/\; \therefore \sim t \to \sim p$

ñ) 1. $\sim r \vee s$
2. $\sim (p \mid q) \to \sim q$
3. $\sim q \to r \;/\; \therefore \sim (p \mid q) \to (s \vee \sim t)$

o) 1. $\sim p$
2. $\sim r \to t$
3. $s \vee p \;/\; \therefore \sim (r \wedge s) \to t$

4. Demuestre mediante la prueba por la reducción al absurdo (PRA):

a) 1. $\sim p \vee \sim q$
2. $q \vee \sim s$
3. $(p \to \sim s) \to \sim t$
4. $\sim r \vee t \;/\; \therefore \sim r$

b) 1. $\sim p \vee q$
2. $\sim r \vee p$
3. $\sim q \;/\; \therefore \sim r$

c) 1. $\sim (\sim p \wedge \sim q)$
2. $p \vee r$
3. $q \to \sim r \;/\; \therefore p$

d) 1. $\sim p \to q$
2. $s \to \sim p$
3. $\sim q \wedge \sim r \;/\; \therefore \sim s$

e) 1. $r \to t$
2. $s \to q$
3. $(t \vee q) \to p$
4. $r \vee s \;/\; \therefore p$

f) 1. $p \rightarrow (q \vee r)$
2. $q \rightarrow \sim p$
3. $s \rightarrow \sim r$ / $\therefore \sim (p \wedge s)$

g) 1. $\sim s \rightarrow q$
2. $s \rightarrow \sim r$
3. $q \rightarrow t$ / $\therefore \sim r \vee t$

h) 1. $\sim p \vee \sim s$
2. $\sim s \rightarrow r$
3. $\sim (t \vee r)$ / $\therefore \sim p$

i) 1. $r \rightarrow \sim z$
2. $(t \vee s) \rightarrow r$
3. $z \vee \sim s$
4. $\sim t$ / $\therefore \sim (t \vee s)$

j) 1. $(w \wedge r) \leftrightarrow \sim s$
2. $\sim s \rightarrow w$
3. $\sim r \rightarrow \sim s$ / $\therefore r$

k) 1. $(p \rightarrow \sim q) \wedge (q \rightarrow r)$
2. $r \rightarrow p$
3. $\sim s \rightarrow q$ / $\therefore s$

l) 1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
2. $p \rightarrow (s \rightarrow t)$
3. $p \wedge (q \vee s)$
4. $\sim r$ / $\therefore t$

m) 1. $(p \rightarrow \sim q) \wedge (r \rightarrow s)$
2. $(\sim q \rightarrow t) \wedge (s \rightarrow \sim x)$
3. $(t \rightarrow \sim y) \wedge (\sim x \rightarrow z)$
4. $p \wedge r$ / $\therefore \sim y \wedge z$

n) 1. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$
2. $(q \vee s) \rightarrow t$
3. $\sim t \quad / \therefore \sim (p \vee r)$

ñ) 1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
2. $\sim r \rightarrow p \quad / \therefore r \vee \sim q$

5. Demuestre la validez de las siguientes inferencias mediante el método de la deducción natural.

a) Si la policía patrulla las calles, entonces no hay delincuentes al acecho. Pero o bien hay delincuentes al acecho o sujetos ebrios fomentando el desorden. La policía patrulla las calles. Luego, hay sujetos ebrios fomentando el desorden.
b) Si Pablo Castel vive obsesionado con María Iribarne, entonces la encontrará algún día. Si Pablo Castel encuentra a María Iribarne entablará una conversación con ella. Es el caso que Pablo Castel vive obsesionado con María Iribarne. Por lo tanto, Pablo Castel entablará una conversación con Maria Iribarne.
c) Si Raskolnikov fue visto saliendo de la casa de la usurera o dejó algún indicio allí, entonces Petrovich le seguirá el rastro y lo acusará de asesinato. Si Petrovich le sigue el rastro y lo acusa de asesinato, Raskolnikov no tendrá ninguna coartada. Raskolnikov fue visto saliendo de la casa de la usurera o dejó algún indicio allí. Luego, Raskolnikov no tendrá ninguna coartada.
d) Las tiendas estás cerradas y no hay vigilancia policial. Si las tiendas están cerradas o no hay vigilancia policial, entonces es mala idea salir a comprar. Si es mala idea salir a comprar, entonces es conveniente ir a ver televisión. Luego, es conveniente ir a ver televisión.
e) Si Juan consigue el préstamo, entonces se comprará un departamento. Si Juan consigue el préstamo, entonces, si compra el departamento, deberá comprar muebles. Luego, si Juan consigue el préstamo, entonces deberá comprar muebles.

f) Si Fiorella ingresa a la universidad, entonces su mamá se alegrará, y si Elvira consigue trabajo su papá celebrará. Sucede que la mamá de Fiorella no se alegra y el papá de Elvira no celebra. Pero si no es el caso que Fiorella ingresa a la universidad y Elvira consigue trabajo, entonces ambas viajan al extranjero. Por consiguiente, ambas viajan al extranjero.
g) Si Perú gana o empata el partido, entonces clasifica al mundial. Pero es el caso que Perú gana o empata. Por lo tanto, Perú clasifica al mundial.
h) Si Andrés se dedica a la pintura, entonces será un gran artista, y si se dedica a administrar los negocios de su padre, ganará un buen sueldo. Si Andrés llega a ser un gran artista o a ganar un buen sueldo, habrá realizado sus sueños. Pero Andrés no realizará sus sueños. En consecuencia, no se dedica a la pintura y no administra los negocios de su padre.
i) Si hace calor, entonces la gente acude masivamente a la playa. Hay más sed que de costumbre porque hace calor, entonces los niños piden gaseosas o la gente acude masivamente a la playa. Si hace calor y la gente acude masivamente a la playa, entonces hay más sed que de costumbre. No es el caso que los niños pidan gaseosas. Luego, la gente acude masivamente a la playa.
j) Si Carlos Santana y Joe Satriani vienen al Perú, entonces los cultores del Rock podrán apreciar un buen espectáculo cultural. Si Carlos Santana viene al Perú, los cultores del Rock podrán apreciar un buen espectáculo cultural, entonces irán entusiasmados al concierto. Luego, si Joe Satriani viene al Perú, entonces los cultores del Rock irán entusiasmados al concierto.
k) O no fuiste al cine o te quedaste dormido durante la proyección de la película. Si no estabas en tu casa, entonces fuiste al cine. Luego, si no estabas en tu casa, te quedaste dormido durante la proyección de la película.
l) Te visitaré por la tarde o por la noche. Si te visito por la tarde, saldremos a pasear. Si te visito por la noche, veremos televisión. Luego, saldremos a pasear o veremos televisión.

m) Si Daniel no toca la guitarra, entonces la tendrá que tocar Henry. Y si Henry toca la guitarra, Antonio abandonará el grupo. Pero Antonio no abandonó el grupo. Por lo tanto, Daniel toca la guitarra.
n) Si el equipo de atletismo se está preparando adecuadamente entonces estará en condiciones de asistir a las próximas olimpiadas. Y estará en condiciones de asistir a las próximas olimpiadas si y sólo si el equipo cuenta con un plantel competente. Pero o el equipo no cuenta con un plantel competente o uno de sus integrantes está lesionado. Sucede que ningún integrante del plantel está lesionado. Por lo tanto, el equipo de atletismo no se está preparando adecuadamente.
ñ) Cuando se produce el fenómeno del niño se generan lluvias torrenciales y huaycos. Pero no se producen lluvias torrenciales o huaycos. Por lo tanto, no se ha producido el fenómeno del niño.

FORMAS NORMALES

Concepto de formas normales

Es importante anotar que unas fórmulas pueden reducirse a otras. Por ejemplo, la fórmula condicional '$p \rightarrow q$' puede reducirse a la negación de la conjunción '$\sim (p \wedge \sim q)$' o a la disyuntiva '$\sim p \vee q$', que son sus equivalentes.

La transformación de unas fórmulas en otras da origen a un verdadero cálculo lógico de acuerdo a reglas precisas que permiten pasar de formas complicadas a formas simples. De aquí nace un nuevo procedimiento decisorio, llamado de las formas normales, cuyo carácter es sintáctico ya que sólo se toman en cuenta las relaciones de los símbolos entre sí.

Se llaman formas normales a aquellas fórmulas constituidas únicamente por conjunciones '$\wedge$', disyunciones '$\vee$' y negaciones '$\sim$' que sólo afectan a variables. Las formas normales son fórmulas moleculares compuestas por conjunciones o disyunciones básicas, cuyos elementos son variables negadas o sin negar.

Ejemplos de conjunciones básicas:
a) $p \wedge p$
b) $\sim p \wedge \sim q$
c) $p \wedge \sim q \wedge r$
d) $\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge \sim s$

Ejemplos de disyunciones básicas:
a) $p \vee q$
b) $p \vee \sim q$
c) $\sim p \vee q \vee r$
d) $\sim p \vee \sim q \vee \sim r \vee \sim s$

Clases de formas normales

Las formas normales son de dos clases: conjuntivas y disyuntivas.

a) Forma normal conjuntiva (FNC) es la fórmula constituida por disyunciones básicas como '$p \vee q \vee r \vee \sim r$', o por conjunciones de disyunciones básicas, como '$(p \vee q \vee r) \wedge (\sim r \vee s \vee t)$'.

b) Forma normal disyuntiva (FND) es la fórmula constituida por conjunciones básicas como '$p \wedge q \wedge r \wedge \sim r$', o por disyunciones de conjunciones básicas como '$(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim r \wedge s \wedge t)$'.

Como es fácil advertir, estando la fórmula básica compuesta por conjunciones o disyunciones de variables, pueden darse estos dos casos:

a) Si la fórmula básica está compuesta por conjunciones, entonces es posible que una misma variable aparezca afirmada y negada dentro de la misma fórmula, con lo que se obtendría una contradicción del tipo: '$p \wedge \sim p$'

b) Si la fórmula básica está compuesta por disyunciones, entonces puede suceder que una misma variable se repita con diferente signo dentro de la misma fórmula, con lo que se obtendría una tautología del tipo: ‘$p \vee \sim p$’

La presencia o ausencia de una contradicción o de una tautología constituye el criterio para determinar la validez o invalidez de una fórmula o inferencia.

Procedimiento para determinar el carácter tautológico de cualquier fórmula mediante la forma normal conjuntiva (FNC):

a) Se eliminan todos los operadores diádicos que no sean conjunciones y disyunciones mediante la aplicación de sus respectivas definiciones.
b) Se eliminan las negaciones que afectan a operadores mediante las leyes de De Morgan (De M)
c) Se suprimen las dobles negaciones aplicando la ley del mismo nombre.
d) Se aplican las leyes de distribución, absorción y tautología cuando fuera necesario.
e) Se aplica el siguiente criterio: La FNC es tautología si y sólo si todas y cada una de sus disyunciones básicas contienen la tautología del tercio excluido.

Ejemplo 1

Sea la siguiente fórmula:

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

a) Se eliminan los operadores condicionales aplicando Implicación material (Imp.)

$$\sim [(\sim p \vee q) \wedge p] \vee q$$

b) Se elimina la negación que está delante del corchete aplicando De Morgan (De M)

$$\sim (\sim p \vee q) \vee \sim p \vee q$$

c) Se elimina la negación que está delante del paréntesis mediante De Morgan (De M)

$$(p \wedge \sim q) \vee \sim p \vee q$$

d) Se aplica la ley de distribución para obtener la FNC:

$$(p \vee \sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p \vee q)$$

Respuesta: Habiendo tercio excluido en las dos disyunciones básicas resultantes, la fórmula es tautológica.

Ejemplo 2

Sea ahora la fórmula siguiente:

$$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$$

a) Se eliminan los operadores condicionales mediante Implicación material (Imp.)

$$\sim [(\sim p \vee q) \wedge q] \vee p$$

b) Se elimina la negación que está delante del corchete aplicando De Morgan (De M)

$$\sim (\sim p \vee q) \vee \sim q \vee p$$

c) Se elimina la negación que está delante del paréntesis mediante De Morgan (De M)

$$(p \wedge \sim q) \vee \sim q \vee p$$

d) Se aplica la ley de distribución para obtener la FNC:

$$(p \vee \sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee \sim q \vee p)$$

Respuesta: no habiendo tercio excluido en las disyunciones básicas resultantes, la fórmula no es tautológica.

Procedimiento para determinar el carácter tautológico de cualquier fórmula mediante la forma normal disyuntiva (FND):

Para hallar la forma normal disyuntiva (FND) de una fórmula proposicional cualquiera se procede de la siguiente manera:

a) Se niega la fórmula proposicional propuesta.
b) Se realizan los mismos pasos que el procedimiento anterior.
c) Se aplica el siguiente criterio: La FND es tautológica si y sólo si todas y cada una de las conjunciones básicas contienen una contradicción. Se entiende que esta FND sea contradictoria desde el momento que se parte de la negación de la fórmula proposicional originaria.

Ejemplo 1

Sea la misma fórmula del 'Ejemplo 1' anterior:

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

a) Se niega toda la fórmula:

$$\sim \{[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q\}$$

b) Se eliminan los operadores condicionales aplicando Implicación Material (Imp.):

$$\sim\{\sim (\sim p \vee q) \wedge p] \vee q \}$$

c) Se cancela la negación que está delante de la llave aplicando De Morgan (De. M):

$$(\sim p \vee q) \wedge p \wedge \sim q$$

d) Se aplica la ley de la distribución para obtener la FND:

$$(\sim p \wedge p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p \wedge \sim q)$$

Respuesta: habiendo contradicción en las dos conjunciones básicas resultantes, la fórmula es tautológica.

Ejemplo 2

Sea la misma fórmula del 'Ejemplo 2' anterior:

$$[(p \to q) \wedge q] \to q$$

a) Se niega toda la fórmula.

$$\sim \{[(p \to q) \wedge q] \to p\}$$

b) Se eliminan los operadores condicionales mediante la Implicación material (Imp.)

$$\sim\{\sim[(\sim p \vee q) \wedge q] \vee p\}$$

c) Se cancela la negación que está delante de la llave mediante De Morgan (De. M)

$$(\sim p \vee q) \wedge q \wedge \sim p$$

d) Se aplica la ley de la distribución para obtener la FND:

$$(\sim p \wedge q \wedge \sim p) \vee (q \wedge q \wedge \sim p)$$

Respuesta: no habiendo contradicción en las dos conjunciones básicas resultantes, la fórmula no es tautológica.

Leyes de absorción (Abs.)

Cuando la aplicación de la ley de distribución se hace engorrosa por presentarse dos o más fórmulas entre paréntesis, entonces es preciso valerse de las leyes de absorción que simplifican el procedimiento. Son las cuatro siguientes:

Fórmulas conjuntivas:

a) $[p \wedge (p \vee q)] \leftrightarrow p$

b) $[p \wedge (\sim p \vee q)] \leftrightarrow (p \wedge q)$

Fórmulas disyuntivas:

c) $[p \vee (p \wedge q)] \leftrightarrow p$

d) $[p \vee (\sim p \wedge q)] \leftrightarrow (p \vee q)$

En cada uno de estas fórmulas es preciso distinguir dos miembros: uno absorbente y otro que se absorbe.

En las fórmulas conjuntivas:
Miembro absorbente: una variable o conjunción básica.
Miembro que se absorbe: una disyunción básica.

Criterio:

a) Si una variable del miembro absorbente se repite con el mismo signo en la disyunción básica, se absorbe toda la disyunción básica.
b) Si una variable del miembro absorbente se repite con diferente signo en la disyunción básica, se absorbe esta variable de la disyunción básica.

En las fórmulas disyuntivas:
Miembro absorbente: una variable o una disyunción básica.
Miembro que se absorbe: una conjunción básica.
Criterio:

c) Si una variable del miembro absorbente se repite con el mismo signo en la conjunción básica, se absorbe toda la conjunción básica.
d) Si una variable del miembro absorbente se repite con diferente signo en la conjunción básica, se absorbe esta variable de la conjunción básica.

Ejemplo 3

Determine mediante la forma normal conjuntiva (FNC) el carácter tautológico de la siguiente fórmula mediante la ley de la absorción:

Modelo de FNC:

1. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$
2. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \rightarrow r$ Equiv. (1)
3. $\sim [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \vee r$ Imp. (2)
4. $\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p) \vee r$ De. M (3)
5. $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \vee r$ De. M (4)
6. $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee q \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim p \vee r)$ Dist. (5)

El paso de 5 a 6 puede hacerse mediante la ley de absorción de la manera siguiente:

6. $p \vee q \vee r$ Abs. (5)

No habiendo tercio excluido en la disyunción básica, la fórmula original no es tautológica.

Modelo de FND

1. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$
2. $\sim[(p \leftrightarrow q) \rightarrow r]$ Negación de la fórmula del paso ‘1’
3. $\sim \{[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \rightarrow r\}$ Equiv. (2)
4. $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \wedge \sim r$ Imp. (3)
5. $(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge p \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (q \wedge p \wedge \sim r)$ Dist. (4)

Usando la ley de absorción en lugar de la distribución obtendremos:

5. $\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$ Abs. (4)

No habiendo contradicción en la disyunción básica, la fórmula original no es tautológica.

REDUCTIBILIDAD DE FÓRMULAS

Simplificación de la lógica proposicional

Las formas normales han mostrado que las 16 funciones de verdad posibles se pueden reducir a tres: conjunción, disyunción inclusiva y negación. No obstante la reducción puede ser aún mayor ya que todas las funciones de verdad posibles pueden ser expresadas mediante dos, como en el caso del teorema de Post, en el que sólo intervienen la conjunción y la negación.

Pero también es posible encontrar una sola función de verdad que, sin la ayuda de la negación, puede expresar todas las demás. En efecto, Sheffer mostró, en 1919, que es posible reducir todas las funciones de verdad posibles al operador de la negación alterna o de incompatibilidad. Igualmente, el lógico inglés Nicod, valiéndose del descubrimiento de Sheffer, mostró que el mismo resultado se podría lograr por medio del operador de la negación conjunta. Aunque ambos se traducen de manera poco natural al lenguaje ordinario, son especialmente productivos en los usos teóricos y tecnológicos de la lógica proposicional. El común denominador de ambas reducciones está en que por medio de ellas se puede definir la negación.

La posibilidad de poder reducir todas las funciones de verdad posibles a una sola, sin la ayuda de ninguna otra, tiene una enorme importancia, tanto matemática como filosófica. Matemática porque permite descubrir relaciones interesantes entre las diversas funciones, lo que permite a su vez realizar una simplificación extraordinaria de los cálculos. Filosófica, porque muestra que desde el punto de vista más general de la estructura del pensamiento, que es la estructura de la lógica proposicional, la unión de las proposiciones se realiza de acuerdo a una sola pauta muy simple.

El ideal de simplicidad en el campo de la lógica supone el empleo de un reducido número de operadores que, como estamos viendo, en el caso de Sheffer y Nicod, se limita a uno solo. Sin embargo, simplicidad no es sinónimo de brevedad, pues una fórmula sumamente simple puede no ser la más breve.

Si se logra demostrar que esta posibilidad de reducción radical se aplica a cualquier número de variables se habrá demostrado que el pensamiento tiene una estructura general muy simple y que avanza por repeticiones de una misma forma. Es decir, el pensamiento en su estructura más general —que consiste de conexiones de proposiciones no analizadas— tiene como elemento último una sola forma. Lo que esto significa en relación con las posibilidades del conocimiento es enorme, pero rebasa el marco del presente trabajo.[29]

Reductibilidad de fórmulas a la negación conjunta

a) $\sim p \;=\; \text{df. } (p \downarrow p)$

b) $(p \wedge q) \;=\; \text{df. } (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

c) $(p \vee q) \;=\; \text{df. } (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

d) $(p \rightarrow q) \;=\; \text{df. } [(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow q]$

e) $(p \leftrightarrow q) \;=\; \text{df. } [(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow p]$

f) $(p \not\leftrightarrow q) \;=\; \text{df.} \{[(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)] \downarrow (p \downarrow q)\} \downarrow \{[(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)] \downarrow (p \downarrow q)\}$

g) $(p \mid q) \;=\; \text{df. } [(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)]$

Reductibilidad de fórmulas a la negación alterna

a) $\sim p \;=\; \text{df. } (p \mid p)$

b) $(p \wedge q) \;=\; \text{df. } (p \mid q) \mid (p \mid q)$

c) $(p \vee q) \;=\; \text{df. } (p \mid p) \mid (q \mid q)$

d) $(p \rightarrow q) \;=\; \text{df. } p \mid (q \mid q)$

[29] MIRÓ QUESADA CANTUARIAS, Francisco, *Lógica*, Lima, IPEM, 1970, pp. 29-31.

e) $(p \leftrightarrow q) \;=\; \text{df.}\ (p \mid q) \mid [(p \mid p) \mid (q \mid q)]$

f) $(p \not\leftrightarrow q) \;=\; \text{df.}\{[(p \mid p) \mid (q \mid q)] \mid (p \mid q)\} \mid \{[(p \mid p) \mid (q \mid q)] \mid (p \mid q)\}$

g) $(p \mid q) \;=\; \text{df.}\ [(p \mid p) \mid (q \mid q)] \mid [(p \mid p) \mid (q \mid q)]$

Cuestionario N.º 10

1. ¿Qué son las formas normales?
2. ¿Por qué las formas normales constituyen un procedimiento decisorio?
3. ¿Por qué las formas normales poseen un carácter sintáctico?
4. ¿Cuántas clases de formas normales existen?
5. ¿Qué es una forma normal conjuntiva?
6. ¿Cómo se prueba el carácter tautológico de una fórmula a través de la forma normal conjuntiva?
7. ¿Qué es una forma normal disyuntiva?
8. ¿Cómo se prueba el carácter tautológico de una fórmula a través de la forma normal disyuntiva?
9. ¿En qué caso se aplican las leyes de absorción?
10. En cuanto a las dieciséis funciones de verdad, ¿qué han mostrado las formas normales?
11. ¿En qué consisten los descubrimientos de Sheffer y Nicod en cuanto a reductibilidad de fórmulas?
12. ¿En qué ámbitos son especialmente productivos los lenguajes propuestos por Sheffer y Nicod?
13. Desde la perspectiva matemática, ¿en qué radica la importancia de la reductibilidad de fórmulas?
14. En relación con la filosofía, ¿cuál es la importancia de la reductibilidad de fórmulas?
15. ¿La simplicidad de una fórmula implica necesariamente su brevedad? ¿Por qué?

Ejercicio N.º 13
Análisis de inferencias mediante
Las formas normales

1. Halle la forma normal de las siguientes fórmulas y clasifíquelas en forma normal conjuntiva (FNC) o forma normal disyuntiva (FND).

   a) $\sim p \rightarrow \sim q$
   b) $\sim p \leftrightarrow \sim q$
   c) $\sim p \nleftrightarrow \sim q$
   d) $\sim p \downarrow \sim q$
   e) $\sim p \mid \sim q$
   f) $\sim (p \wedge q)$
   g) $\sim (p \vee q)$
   h) $\sim (p \rightarrow q)$
   i) $\sim (p \leftrightarrow q)$
   j) $\sim (p \nleftrightarrow q)$
   k) $\sim (p \wedge q) \downarrow \sim (r \wedge s)$
   l) $\sim (p \wedge q) \mid \sim (r \wedge s)$
   m) $(p \rightarrow q) \downarrow (r \rightarrow s)$
   n) $\sim (p \rightarrow q) \mid \sim (r \rightarrow s)$
   ñ) $\sim [(p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow s)]$

2. Diga si las siguientes fórmulas son tautológicas o no mediante la forma normal conjuntiva (FNC):

   a) $p \rightarrow (p \vee q)$
   b) $p \rightarrow (\sim p \vee q)$
   c) $(p \wedge q) \rightarrow q$
   d) $(p \wedge q) \rightarrow \sim q$
   e) $(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$
   f) $(p \wedge q) \rightarrow \sim (p \wedge q)$
   g) $\sim [p \rightarrow (p \vee q)]$
   h) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q$

i) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

j). $\{[(p \to q) \wedge (r \to s)] \wedge \sim (q \vee s)\} \to \sim (p \vee r)$

3. Diga si las siguientes fórmulas son tautológicas o no mediante la forma normal disyuntiva (FND):

a) $p \to (q \vee p)$

b) $\sim p \to (p \vee \sim q)$

c) $\sim (p \vee q) \to \sim q$

d) $(p \wedge q) \to \sim p$

e) $(p \wedge q) \to \sim (\sim p \vee \sim q)$

f) $[(p \to q) \wedge q] \to p$

g) $[(p \to q) \wedge \sim p] \to \sim q$

h) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (r \to p)$

i) $\{[(p \to q) \wedge (r \to s)] \wedge (p \vee r)\} \to (q \vee s)$

j) $\{[(p \wedge q) \to \sim r] \wedge r\} \to \sim (p \wedge q)$

4. Determine la validez o invalidez de las siguientes inferencias mediante la forma normal conjuntiva (FNC):

a) La tabla de verdad es un algoritmo si y sólo si permite decidir mecánicamente la validez de una inferencia. La tabla de verdad es un algoritmo. En consecuencia, permite decidir mecánicamente la validez de una inferencia.

b) Si un triángulo tiene dos lados desiguales, entonces el mayor lado se opone el mayor ángulo. Ocurre que el mayor lado no se opone al mayor ángulo. Luego, el triángulo no tiene dos lados desiguales.

c). La tabla de verdad es un algoritmo. La forma normal conjuntiva es también un algoritmo. Por lo tanto, la tabla de verdad y la forma normal conjuntiva son algoritmos.

d) Si manifiestas aversión o repugnancia al trato humano, eres un misántropo. Pero es falso que manifiestes aversión o repugnancia al trato humano. En consecuencia, es falso que seas un misántropo.

e) Tarski es un lógico matemático polaco. Luego, Tarski es un lógico matemático polaco o Newton formuló la ley de la gravitación universal.
f) Si el cónyuge extranjero tiene dos años de matrimonio y de domicilio en el Perú, entonces está facultado para optar por la nacionalidad peruana. Pero el cónyuge extranjero no está facultado para optar por la nacionalidad peruana. Por tanto, es falso que tenga dos años de matrimonio y de domicilio en el Perú.
g) Los leones son carnívoros o herbívoros, pero no ambas cosas a la vez. Los leones son carnívoros. En consecuencia, no son herbívoros.
h) Si padeces de asma, eres víctima de sofocaciones intermitentes. Si padeces de bronquitis, tienes inflamados los bronquios. Padeces de asma o de bronquitis. Luego, eres víctima de sofocaciones intermitentes o tienes inflamados los bronquios.
i) Dos radicales son semejantes si tienen igual índice e igual radicando. Ocurre que los dos radicales son semejantes. Por tanto, tienen igual índice e igual radicando.
j) El Presidente de la República está facultado para disolver el Congreso si éste ha censurado o negado confianza a tres Consejos de Ministros. El Congreso ha censurado o negado confianza a tres Consejos de Ministros. Luego, el Presidente de la República está facultado para disolverlo.
k) Las fuerzas Armadas y las Fuerzas Policiales no son deliberantes porque están subordinadas al Poder Constitucional. Las Fuerzas Armadas y las Fuerzas Policiales están subordinadas al Poder Constitucional. Luego, no son deliberantes.
l) Un número es divisible por dos si termina en cero o en cifra par. Un número es divisible por cinco si termina en cero o en cinco. Por tanto, un número es divisible por dos si no termina en cinco.
m) O Pasteur es el fundador de la bacteriología moderna o es el creador de la teoría microbiana del origen de las enfermedades. En consecuencia, no es el fundador de la bacteriología moderna
n) Si el trigo es una planta gramínea sirve para la alimentación del hombre. Si la cebada es una planta gramínea sirve para la elaboración de la cerveza. El trigo o la cebada son plantas gramíneas.

Luego, el trigo sirve para la alimentación del hombre o la cebada para la elaboración de la cerveza.

ñ) La suma de dos ángulos exteriores de un polígono convexo es igual a cuatro rectas. En consecuencia, la suma de dos ángulos exteriores de un polígono convexo es igual a cuatro rectas o las bisectrices de todos los ángulos de un polígono regular concurren en un mismo punto.

Ejercicio N.º 14
Reductibilidad de fórmulas

1. Reduzca las siguientes fórmulas a la negación conjunta:

a) $\sim p \wedge \sim q$
b) $\sim p \vee \sim q$
c) $\sim p \rightarrow \sim q$
d) $\sim p \leftrightarrow \sim q$
e) $\sim p \not\leftrightarrow \sim q$
f) $\sim p \mid \sim q$
g) $\sim (p \wedge \sim q)$
h) $\sim (p \vee \sim q)$
j) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim r$
k) $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim r$

2. Reduzca las siguientes fórmulas a la negación alterna:

a) $\sim p \wedge \sim q$
b) $\sim p \vee \sim q$
c) $\sim p \rightarrow \sim q$
d) $\sim p \leftrightarrow \sim q$
e) $\sim p \not\leftrightarrow \sim q$
f) $\sim p \downarrow \sim q$
g) $\sim (p \wedge \sim q)$
h) $\sim (p \vee \sim q)$
i) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim r$
j) $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim r$

LA LÓGICA PROPOSICIONAL
Y LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS

El isomorfismo entre la lógica proposicional y los circuitos eléctricos

La presencia de la lógica matemática en la solución de problemas científicos y tecnológicos es manifiesta. En efecto, el conocimiento científico tiene dos características fundamentales: es explicativo y predictivo. Estas dos características de la ciencia hacen que ella permita entender o comprender el fenómeno y aumentar nuestros conocimientos. Pero tanto las explicaciones como las predicciones de la ciencia se hacen por medio de inferencias o deducciones, es decir, ellas suponen la presencia de la lógica, presuponen la aplicación de las leyes lógicas. Por ejemplo, el descubrimiento del planeta Neptuno, hecho por el astrónomo Francés Leverrier en el siglo diecinueve, es un ejemplo de explicación y predicción en la ciencia. Por tanto, es un ejemplo de aplicación de las leyes lógicas al fenómeno que se quiere comprender.

Una de las grandes creaciones de la tecnología contemporánea es, sin duda alguna, el invento de las computadoras electrónicas, es decir, máquinas electrónicas del tratamiento de la información que han permitido resolver una serie de problemas, cuya solución, sin ellas, habría demorado siglos. La construcción de las computadoras electrónicas se basa en la construcción de circuitos electrónicos y ésta es posible mediante la aplicación de las leyes de la lógica proposicional.

La aplicación de la lógica proposicional a los circuitos eléctricos es posible en virtud del isomorfismo existente entre ambas. En efecto, el matemático e ingeniero norteamericano Claudio Shannon —uno de los diseñadores de las modernas computadoras— descubrió, en 1936, el isomorfismo (igualdad de formas básicas) existente entre la lógica de proposiciones y la teoría de los circuitos eléctricos. Gracias a este descubrimiento se ha desarrollado una teoría sistemática de los circuitos eléctricos y ésta ha hecho posible resolver cualquier problema concerniente a la construcción y funcionamiento de estos circuitos básicos de las computadoras electrónicas.

Para establecer el isomorfismo entre ambas teorías es necesario considerar sólo tres funciones lógicas: la conjunción, la disyunción y la negación. Como a través de esas tres funciones básicas se puede definir las demás funciones lógicas, entonces el isomorfismo es total.

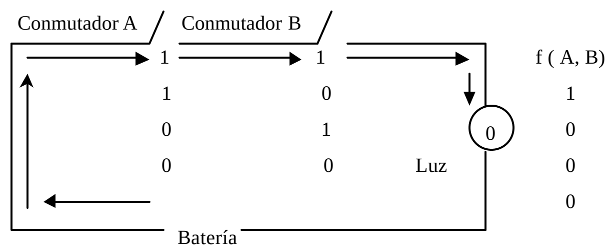
Tipos fundamentales de circuitos

Para construir una computadora electrónica es preciso construir determinados circuitos eléctricos. Estos circuitos pueden reducirse a dos fundamentales: circuito en serie y circuito en paralelo.

El circuito en serie

El circuito en serie es un circuito con los conmutadores A y B, dispuestos de tal manera que uno queda detrás del otro. En este caso para que la corriente pase y se encienda el foco es necesario que los conmutadores A y B estén cerrados, es decir, asuman el valor de ‘1’. Basta que se abra uno de ellos, es decir, tome el valor de ‘0’ para que la corriente se interrumpa. Esto quiere decir que el circuito en serie se comporta exactamente igual que una conjunción, es decir son dos funciones isomórficas tal como puede observarse en el siguiente diseño del circuito en serie:

Diseño del circuito en serie



A	B	f (A, B)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

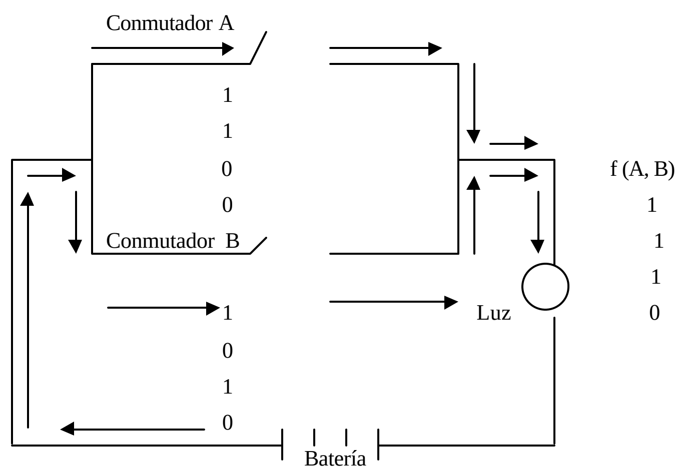
p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

El circuito en serie y la conjunción son dos funciones isomórficas.

En consecuencia, para que la corriente pase y se encienda el foco, es necesario que los conmutadores A y B estén cerrados. Basta que uno de los conmutadores esté abierto para que la corriente se interrumpa y no pueda encenderse el foco. Asimismo, si los conmutadores A y B están cerrados asumen el valor 1; en cambio, si los conmutadores A y B están abiertos, asumen el valor 0. Finalmente, el diseño del circuito en serie nos muestra que éste se comporta exactamente igual que una conjunción. Por lo tanto, en el lenguaje lógico este circuito se expresa a través de la fórmula conjuntiva: ‘$p \wedge q$’

El circuito en paralelo

El circuito en paralelo es un circuito con dos conmutadores A y B, dispuestos de tal manera que uno queda al lado del otro. En este caso, para que la corriente pase y se encienda el foco basta que uno de los conmutadores éste cerrado. Para que la corriente se interrumpa es necesario que los dos conmutadores estén abiertos. Esto quiere decir que el circuito en paralelo se comporta exactamente igual que una disyunción, es decir, son dos funciones isomórficas, tal como puede apreciarse en el siguiente diseño del circuito en paralelo.



A	B	f (A , B)
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

El circuito en paralelo y la disyunción son dos funciones isomórficas.

En consecuencia, para que la corriente pase y se encienda el foco es suficiente que uno de los dos conmutadores éste cerrado. Solamente en el caso de que los dos conmutadores estén abiertos la corriente se interrumpe y el foco no se enciende. Asimismo, si los conmutadores A y B están cerrados, entonces asumen el valor 1; mientras que si A y B están abiertos, entonces asumen el valor 0. Finalmente, el diseño del circuito en paralelo nos muestra que éste se comporta exactamente igual que una disyunción. Por tanto, en el lenguaje lógico este circuito se expresa a través de la fórmula disyuntiva: ‘$p \vee q$’

Construcción, traducción y simplificación de circuitos

Sobre la base de estas consideraciones es posible, en primer lugar, construir circuitos para fórmulas conjuntivas o disyuntivas; en segundo lugar, expresar estos circuitos a través de fórmulas moleculares y, finalmente, simplificar los circuitos aplicando las reglas lógicas estudiadas.

Equivalencias tautológicas empleadas en la construcción y simplificación de circuitos:

1. De Morgan (De M)

a) $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
b) $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

2. Implicación material (Imp.)

a) $(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$
b) $(p \rightarrow q) \equiv \sim (p \wedge \sim q)$

3. Equivalencia material (Equiv.)

a) $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$
b) $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

4. Distribución (Distr.)

a) $[\, p \wedge (q \vee r) \,] \equiv [\, (p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
b) $[\, p \vee (q \wedge r)] \equiv [\, (p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

5. Tautología (Tau.)

a) $(p \wedge p) \equiv p$
b) $(p \vee p) \equiv p$

6. Absorción (Abs.)

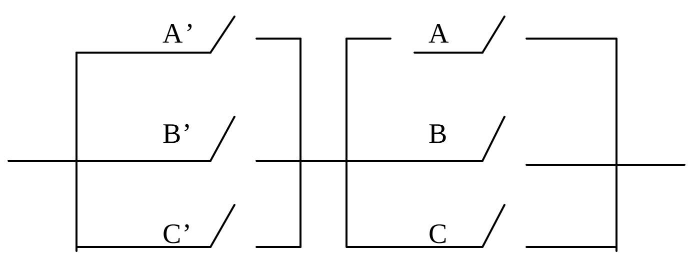
a) $[\, p \wedge (p \vee q)] \equiv p$
b) $[\, p \vee (p \wedge q)] \equiv p$
c) $[\, p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (p \wedge q)$
d) $[\, p \vee (\sim p \wedge q) \equiv (p \vee q)$

A) Ejemplos de traducción de fórmulas a circuitos:

a) Fórmula:

1. $\sim (p \wedge q \wedge r) \wedge \sim (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$
2. $(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (p \vee q \vee r)$ De M (1)

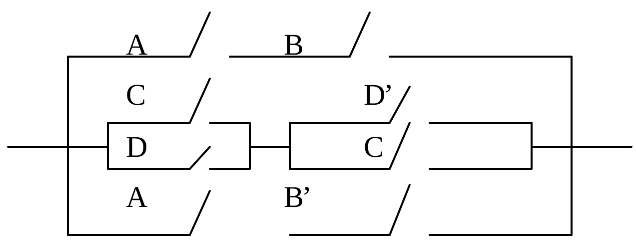
Circuito:



b) Fórmula:

1. $\sim(\sim p \vee \sim q) \vee [(r \vee s) \wedge (\sim s \vee r)] \vee (p \wedge \sim q)$
2. $(p \wedge q) \vee [(r \vee s) \wedge (\sim s \vee r)] \vee (p \wedge \sim q)$ De M (1)

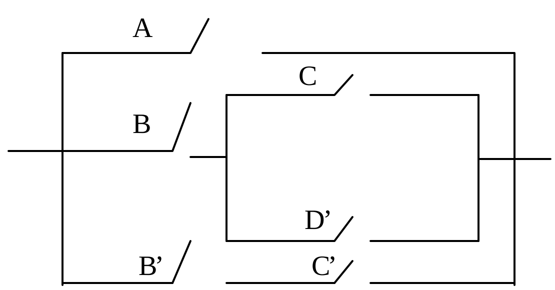
Circuito:



c) Fórmula:

1. $\sim p \rightarrow \sim[\sim q \vee \sim(r \vee \sim s)] \vee \sim(q \vee r)$
2. $p \vee \sim[\sim q \vee \sim(r \vee \sim s)] \vee \sim(q \vee r)$ Imp (1)
3. $p \vee [q \wedge (r \vee \sim s)] \vee (\sim q \wedge \sim r)$ De M (2)

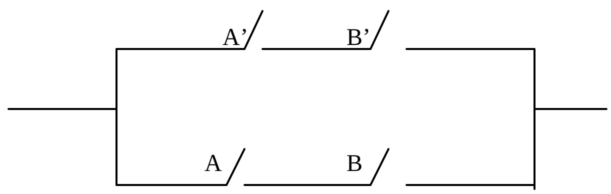
Circuito:



d) Fórmula:

1. $\sim (p \not\leftrightarrow q)$
2. $\sim[(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)]$ DE (1)
3. $\sim (p \vee q) \vee \sim (\sim p \vee \sim q)$ De M (2)
4. $(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$ De M(3)

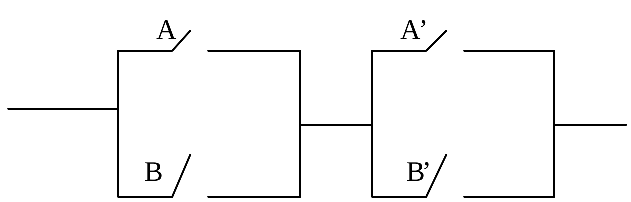
Circuito:



e) Fórmula:

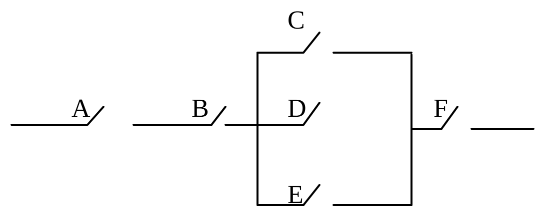
1. $\sim (\sim p \leftrightarrow \sim q)$
2. $\sim [(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)]$ Equiv. (1)
3. $\sim (\sim p \wedge \sim q) \wedge \sim (p \wedge q)$ De M (2)
4. $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ De M (3)

Circuito:



B) Ejemplos de traducción de circuitos a fórmulas:

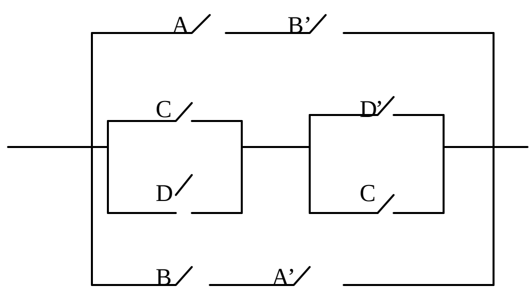
a) Circuito:



Fórmula:

$p \wedge q \wedge (r \vee s \vee t) \wedge w$

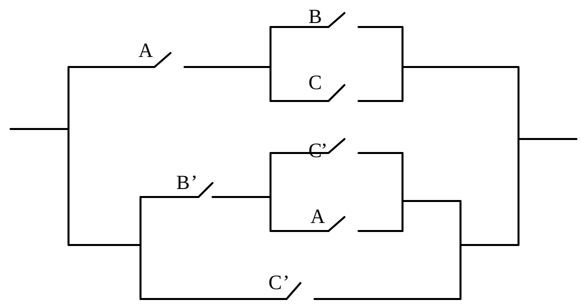
b) Circuito:



Fórmula:

$(p \wedge \sim q) \vee [(r \vee s) \wedge (\sim s \vee r)] \vee (q \wedge \sim p)$

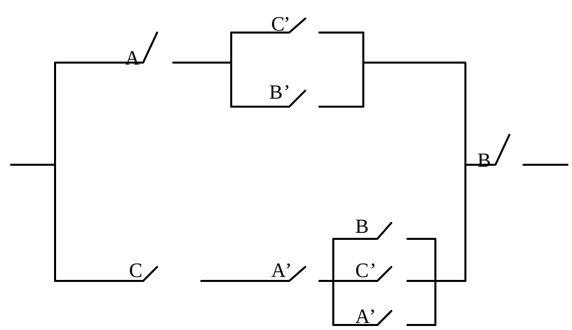
c) Circuito:



Fórmula:

$[\, p \wedge (q \vee r)] \vee [\sim q \wedge (\sim r \vee p)\,] \vee \sim r$

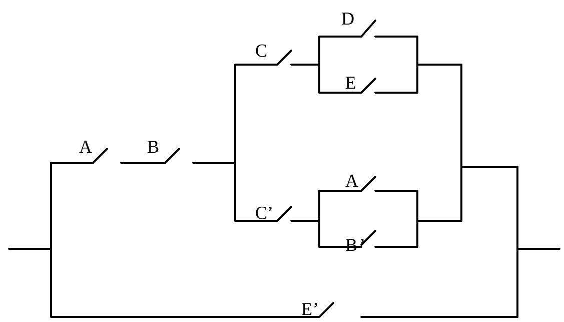
d) Circuito:



Formula:

$[\, p \wedge (\sim r \vee \sim q)] \vee [\, r \wedge \sim p \wedge (q \vee \sim r \vee \sim p)] \wedge q$

e) Circuito:

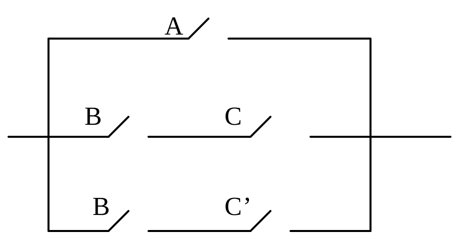


Formula:

$p \wedge q \wedge [\, r \wedge (\, s \vee t)] \vee [\, \sim r \wedge (\, p \vee \sim q)\,] \vee \sim t$

C) Ejemplos de simplificación de circuitos:

a) Circuito:



Fórmula:

$p \vee (q \wedge r) \vee (\, q \wedge \sim r)$

Simplificación de la fórmula:

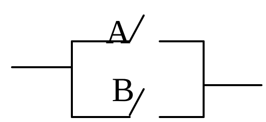
1. $p \vee (q \wedge r) \vee (q \sim r)$
2. $p \vee [(q \vee q) \wedge (q \vee \sim r) \wedge (r \vee q) \wedge (r \vee \sim r)]$ Dist. (1)
3. $p \vee [q \wedge (q \vee \sim r) \wedge (r \vee q) \wedge (r \vee \sim r)]$ Tau. (2)
4. $p \vee [q \wedge (r \vee \sim r)]$ Abs. (3)
5. $p \vee q$ R.1. (4)

R. 1.: $(T \wedge Q) \Leftrightarrow Q$

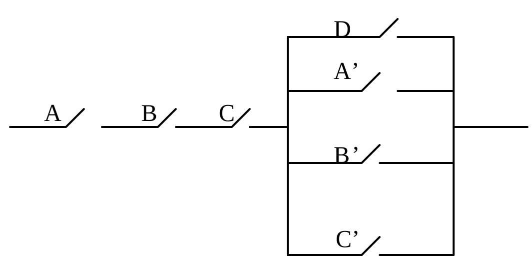
T: tautología

Q: fórmula cualquiera

Circuito simplificado:



b) Circuito:



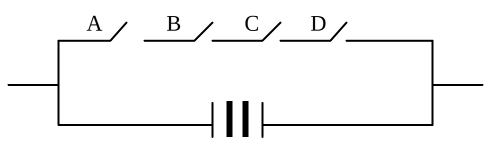
Fórmula:

$p \wedge q \wedge r \wedge (s \vee \sim p \vee \sim q \vee \sim r)$

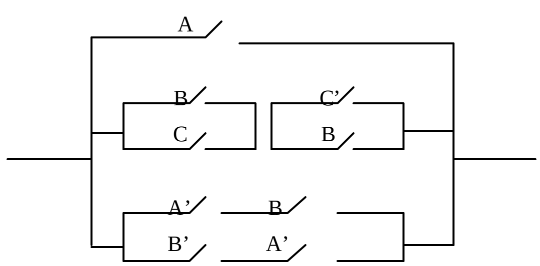
Simplificación de la fórmula:

1. $p \wedge q \wedge r \wedge (s \vee \sim p \vee \sim q \sim r)$
2. $p \wedge q \wedge r \wedge s$ Abs. (1)

Circuito simplificado:



c) Circuito:



Fórmula:

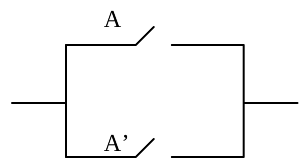
$p \vee [(q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)] \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim q \wedge \sim p)$

Simplificación de la fórmula:

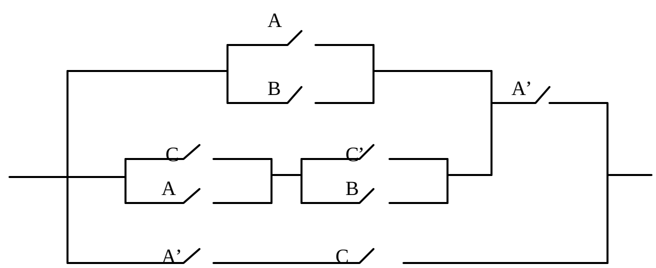
1. $p \vee [(q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)] \vee (\sim p \wedge q \vee (\sim q \wedge \sim p)$
2. $p \vee [(q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)] \vee q \vee \sim p$ Abs. (1)
3. $p \vee \sim p$ R.2. (2)

R.2. : $(T \vee Q) \Leftrightarrow T$
T : tautología
Q : fórmula cualquiera

Circuito simplificado:



d) Circuito



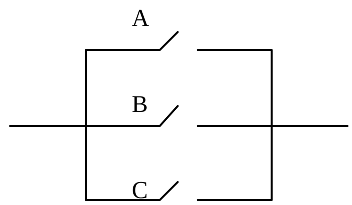
Fórmula:

$p \vee q \vee [(r \vee p) \wedge (\sim r \vee q) \wedge \sim p] \vee (\sim p \wedge r)$

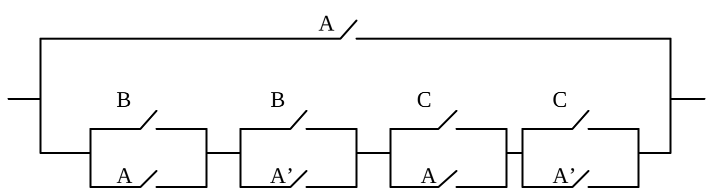
Simplificación de la fórmula:

1.	$p \vee q \vee [(r \vee p) \wedge (\sim r \vee q) \wedge \sim p] \vee (\sim p \wedge r)$	
2.	$p \vee q \vee (r \wedge q \wedge \sim p) \vee (\sim p \wedge r)$	Abs. (1)
3.	$p \vee q \vee (\sim p \wedge r)$	Abs. (2)
4.	$p \vee q \vee r$	Abs. (3)

Circuito simplificado:



e) Circuito:



Fórmula:

$p \vee [(q \vee p) \wedge (q \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim p)]$

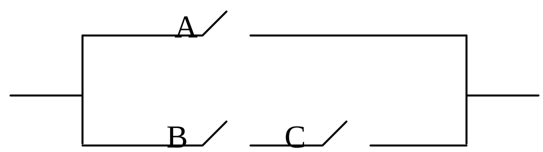
Simplificación de la fórmula:

1. $p \vee [(q \vee p) \wedge (q \vee \sim p) \wedge (r \vee p) \wedge (r \vee \sim p)]$
2. $(p \vee q \vee p) \wedge (p \vee q \vee \sim p) \wedge (p \vee r \vee p) \wedge (p \vee r \vee \sim p)$ Dist. (1)
3. $(p \vee q) \wedge (p \vee q \vee \sim p) \wedge (p \vee r) \wedge (p \vee r \vee \sim p)$ Tau. (2)
4. $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ R. 1. (3)

R. 1. : $(T \wedge Q) \Leftrightarrow Q$
T : tautología
Q : fórmula cualquiera

5. $(p \wedge p) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge r)$ Dist. (4)
6. $p \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge r)$ Tau. (5)
7. $p \vee (q \wedge r)$ Abs. (6)

Circuito simplificado:



CUESTIONARIO N.º 11

1. ¿Por qué es relevante la presencia de la lógica matemática en la solución de problemas científicos y tecnológicos?
2. ¿Cuál fue el descubrimiento del matemático norteamericano Claudio Shannon?
3. ¿En qué consiste el isomorfismo entre la lógica proposicional y los circuitos eléctricos?
4. ¿Cuál es la aplicación de la teoría de los circuitos eléctricos en el campo de la informática?
5. ¿Qué funciones lógica es necesario considerar para establecer el isomorfismo entre la lógica matemática y los circuitos eléctricos?
6. ¿Qué tipos de circuitos eléctricos existen?
7. ¿En qué consiste el circuito en serie?
8. ¿Por qué la conjunción y el circuito en serie son dos funciones isomórficas?
9. ¿ En qué consiste el circuito en paralelo?
10. ¿Por qué el circuito en paralelo y la disyunción son dos funciones isomórficas?

Ejercicio N.º 15

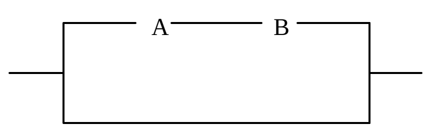
La lógica proposicional y los circuitos eléctricos

1. Construya un circuito para cada una de las siguientes fórmulas:

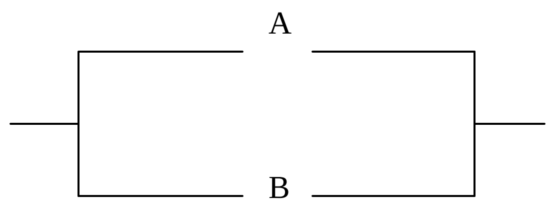
a) $p \vee (q \wedge r)$
b) $p \vee (q \vee r)$
c) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$
d) $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$
e) $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$
f) $(p \vee q \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$
g) $\sim [(p \wedge q) \vee (r \wedge s)]$
h) $\sim [(p \vee q) \vee (r \wedge s)]$
i) $\sim [(p \wedge q) \vee \sim (\sim p \wedge \sim q)]$
j) $\sim [\sim (p \vee q) \wedge \sim (\sim p \vee \sim q)]$
k) $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$
l) $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$
m) $\sim [(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)]$
n) $\sim p \leftrightarrow \sim q$
o) $\sim p \downarrow \sim q$
p) $(p \wedge q) \mid (r \wedge s)$
q) $\sim (p \wedge q) \downarrow \sim (r \wedge s)$
r) $\sim [(p \rightarrow q) \downarrow (r \rightarrow s)]$
s) $[(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)]$
t) $[(p \mid p) \mid (q \mid q)] \mid [(p \mid p) \mid (q \mid q)]$

2. Traduzca a fórmulas los siguientes circuitos:

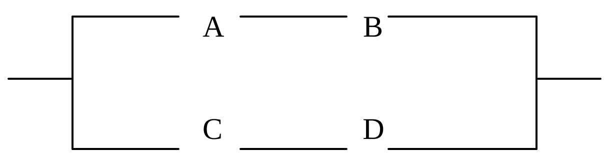
a)



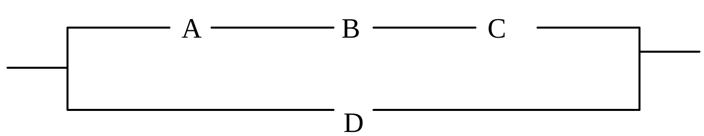
b)



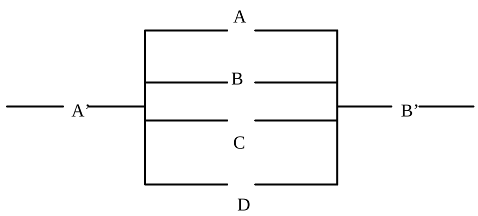
c)



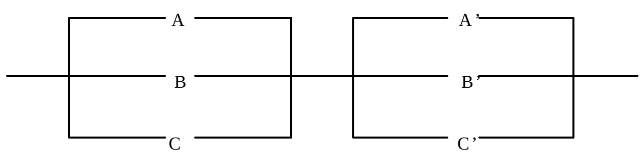
d)



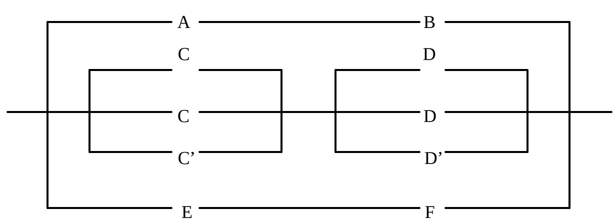
e)



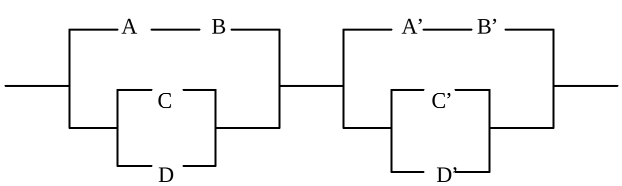
f)



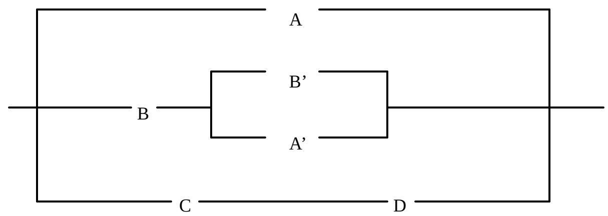
g)



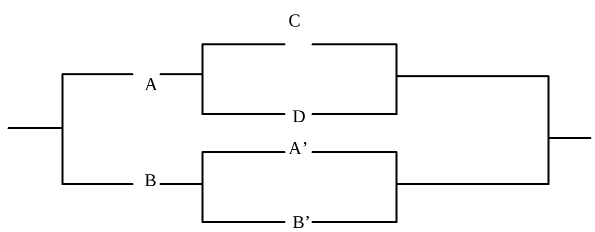
h)



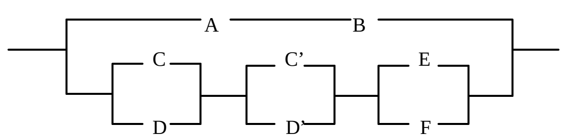
i)



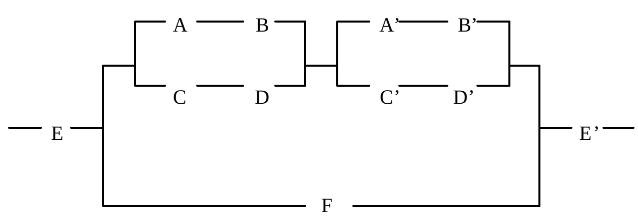
j)



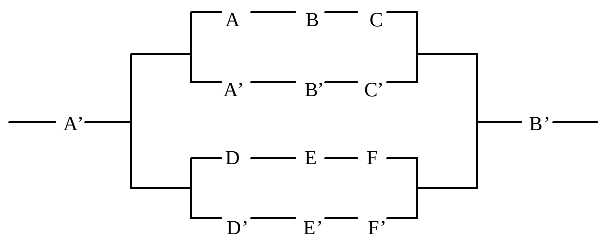
k)



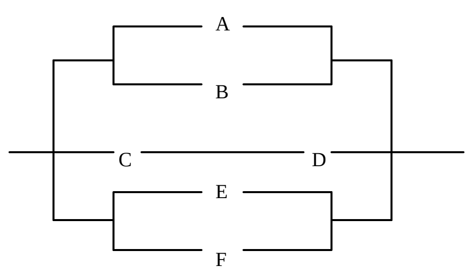
l)



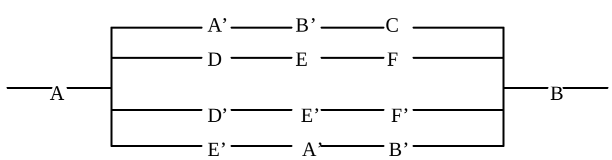
m)



n)

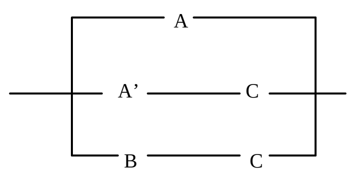


ñ)

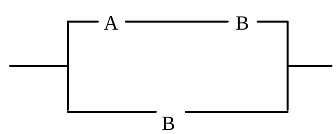


C) Simplifique los siguientes circuitos:

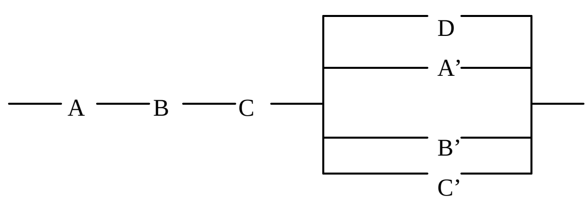
a)



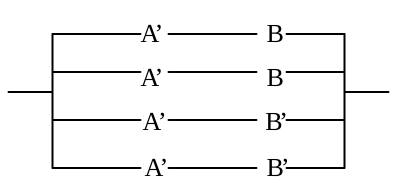
b)



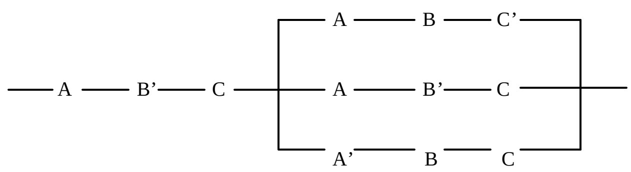
c)



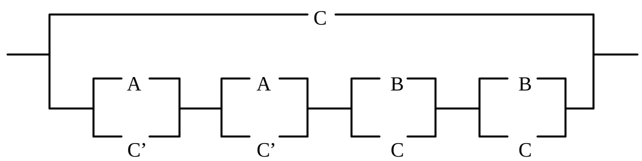
d)



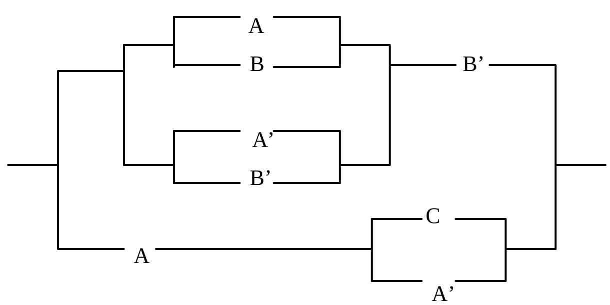
e)



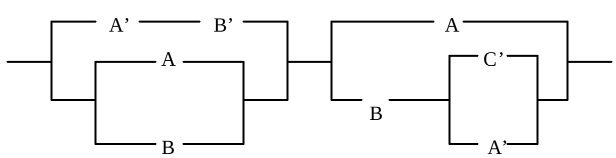
f)



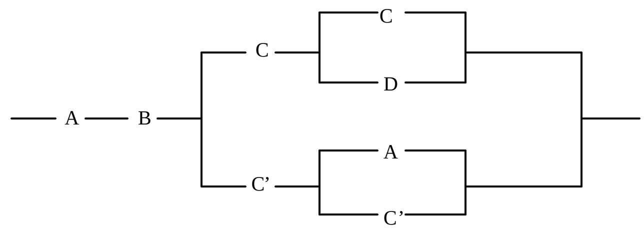
g)



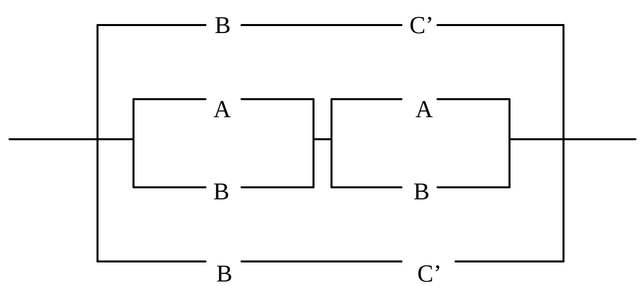
h)



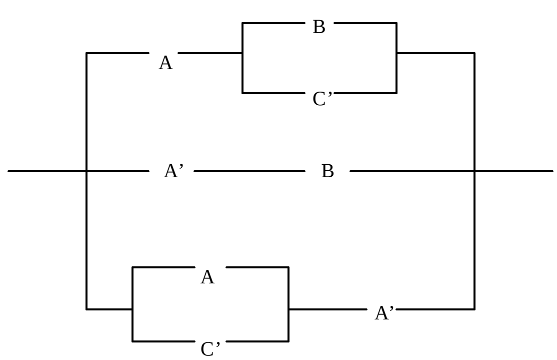
i)



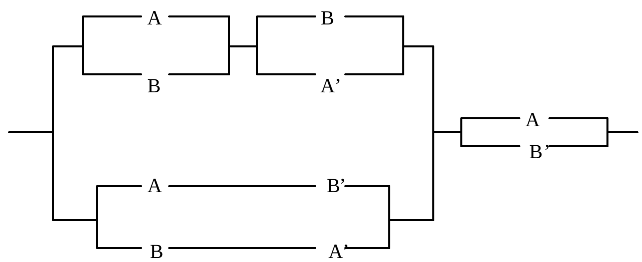
j)



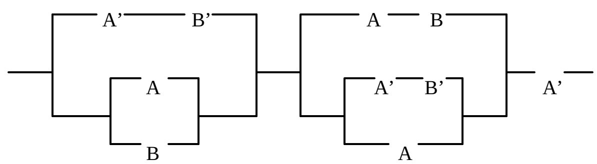
k)



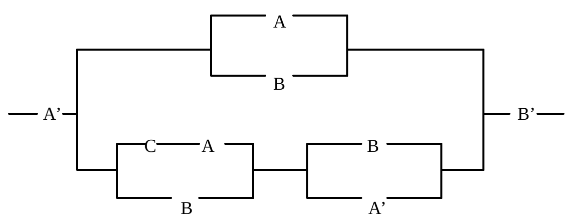
l)



m)



n)



UNA PRESENTACIÓN AXIOMÁTICA DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

El sistema axiomático

El sistema axiomático es, desde los tiempos de la geometría euclidiana, la forma típica de presentar el cálculo o lenguaje formalizado. Lo característico del sistema axiomático consiste en disponer de un conjunto de enunciados o fórmulas que se admiten sin demostración y a partir de los cuales se obtienen todas las demás afirmaciones de la teoría, las cuales se llaman teoremas. Las fórmulas aceptadas sin demostración se llaman axiomas o postulados.

El conjunto de los axiomas más la definición de enunciado o fórmula del sistema y el conjunto de las reglas para la obtención de teoremas a partir de los axiomas (reglas de transformación) constituyen la base primitiva del sistema. El nombre de 'reglas de transformación' está justificado porque las operaciones mediante las cuales se obtienen teoremas a partir de los axiomas consisten en transformaciones de éstos, como sustituciones de unas variables por otras, composición de axiomas para formar otras fórmulas.

Suele distinguirse entre sistemas axiomáticos formalizados y no formalizados. La diferencia principal entre unos y otros consiste en que los formalizados presentan explícitamente todas las reglas de transformación, mientras que los otros no lo hacen. En un sistema axiomático formalizado el conjunto de los axiomas y el de las reglas de transformación son ambos efectivos.

Como es natural las reglas de transformación y de formación de fórmulas o enunciados son metalingüísticas respecto de las fórmulas del sistema, puesto que son afirmaciones acerca de lo que puede hacerse con fórmulas del sistema. Igualmente, un enunciado que diga que tal o cual fórmula es un axioma será metalingüístico respecto del lenguaje al que pertenezca dicho axioma.

Finalmente, del mismo modo que los teoremas se obtienen de los axiomas, así también los predicados no primitivos, no contenidos en los axiomas, se obtienen en el sistema a partir de las nociones primitivas, contenidas en los axiomas. El modo de hacerlo se especifica mediante reglas de definición.

Idea de demostración

Un sistema axiomático se constituye para establecer con precisión la fundamentación de los teoremas de una teoría en sus axiomas y la demostración como el modo formal de fundamentar.

Una demostración en un sistema axiomático es una sucesión finita de fórmulas cada una de las cuales es o bien un axioma o bien una fórmula obtenida inmediatamente de un axioma por la aplicación de una regla de transformación, o bien una fórmula obtenida de otra u otras de los dos géneros anteriores mediante una aplicación de las reglas de transformación. Un teorema es, en sentido estricto, una fórmula de cualquiera de las dos clases últimamente citadas; y, en sentido amplio, es cualquier fórmula fundamentada del sistema.[30]

Sistema axiomático de *Principia Mathematica*. Russell/Whitehead

I. Símbolos primitivos

1. Variables proposicionales: p, q, r, s
2. Operadores: ~, ∨.
3. Signos de agrupación: ‘( )’, ‘[ ]’, ‘{ }’

II. Reglas de formación:

1. Toda variable proposicional es una fórmula bien formada (fbf).
2. Si P es una fbf, entonces ~P también lo es.
3. Si P y Q son fbfs, entonces P ∨ Q también lo es.
4. Éstas son todas las reglas de formación del sistema.

[30] SACRISTÁN, Manuel, *Introducción a la lógica y al análisis formal,* Barcelona, Ariel, 1969, pp. 103-104.

III. Definiciones:

1. Definición 1 (Def. 1) $P \rightarrow Q$ = def. $\sim P \vee Q$
2. Definición 2 (Def. 2) $P \wedge Q$ = def. $\sim (\sim P \vee \sim Q)$
3. Definición 3 (Def. 3) $P \leftrightarrow Q$ = def. $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

IV. Reglas de transformación:

1. Regla de sustitución (R.1.)
   En una fórmula cualquiera toda variable proposicional puede ser sustituida por cualquier fbf, siempre que la sustitución se verifique en todos los lugares en que dicha variable aparezca.
2. Regla de separación (R.2.)
   Si P es una fórmula derivable del sistema y también lo es la fórmula $P \rightarrow Q$, entonces
   Q es otra fórmula derivable.

V. Axiomas:

Ax. 1 $(p \vee p) \rightarrow p$
Ax 2 $q \rightarrow (p \vee q)$
Ax 3 $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
Ax 4 $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$

Ejemplos de demostración de teoremas

1. Demuestre los siguientes teoremas:

Teorema 1 $q \rightarrow (p \rightarrow q)$

1. $q \rightarrow (p \vee q)$ Ax. 2
2. $q \rightarrow (\sim p \vee q)$ R. 1 $\sim p / p$ (1)
3. $q \rightarrow (p \rightarrow q)$ Def. 1(2)

Teorema 2 $(q \to r) \to [(p \to q) \to (p \to r)]$

1. $(q \to r) \to [(p \lor q) \to (p \lor r)]$ Ax. 4
2. $(q \to r) \to [(\sim p \lor q) \to (\sim p \lor r)]$ R.1 ~ p / p (1)
3. $(q \to r) \to [(p \to q) \to (p \to r)]$ Def.1 (2)

Teorema 3 $(p \to \sim p) \to \sim p$

1. $(p \lor p) \to p$ Ax. 1
2. $(\sim p \lor \sim p) \to \sim p$ R. 1 ~ p / p (1)
3. $(p \to \sim p) \to \sim p$ Def. 1 (2)

Teorema 4 $(p \to \sim q) \to (q \to \sim p)$

1. $(p \lor q) \to (q \lor p)$ Ax. 3
2. $(\sim p \lor \sim q) \to (\sim q \lor \sim p)$ R.1 ~p / p, ~ q / q (1)
3. $(p \to \sim q) \to (q \to \sim p)$ Def. 1 (2)

Teorema 5 $p \to p$

1. $(q \to r) \to [(p \to q) \to (p \to r)]$ T.2
2. $[(p \lor p) \to p] \to \{[p \to (p \lor p)] \to (p \to p)\}$ R.1 p ∨ p / q p / r (1)
3. $(p \lor p) \to p$ Ax.1
4. $[(p \to (p \lor p)] \to (p \to p)$ R.2 (2,3)
5. $q \to (p \lor q)$ Ax. 2
6. $p \to (p \lor p)$ R.1 p / q (5)
7. $p \to p$ R.2 (4,6)

Teorema 6 $(q \lor p) \to (p \lor q)$

1. $(p \lor q) \to (q \lor p)$ Ax. 3
2. $(r \lor s) \to (s \lor r)$ R.1 r / p, s / q (1)
3. $(q \lor p) \to (p \lor q)$ R.1 q / r, p / s (2)

Teorema 7 $\sim p \vee p$

1. $p \to p$ T.5
2. $\sim p \vee p$ Def. 1(1)

Teorema 8 $p \vee \sim p$

1. $p \to p$ T.5
2. $\sim p \to \sim p$ R.1 $\sim p / p$ (1)
3. $p \vee \sim p$ Def. 1 (2)

Teorema 9 $p \to \sim\sim p$

1. $p \vee \sim p$ T.8
2. $\sim p \vee \sim\sim p$ R.1 $\sim p / p$ (1)
3. $p \to \sim\sim p$ Def. 1 (2)

Teorema 10 $p \vee \sim\sim\sim p$

1. $(q \to r)\, [(p \vee q) \to (p \vee r)]$ Ax. 4
2. $(\sim p \to \sim\sim\sim p) \to [(p \vee \sim p) \to (p \vee \sim\sim\sim p)]$
   R.1$\sim p / q$, $\sim\sim\sim p / r$ (1)
3. $p \to \sim\sim p$ T.9
4. $\sim p \to \sim\sim\sim p$ R.1 $\sim p / p$ (3)
5. $(p \vee \sim p) \to (p \vee \sim\sim\sim p)$ R.2 (2,4)
6. $p \vee \sim p$ T.8
7. $p \vee \sim\sim\sim p$ R.2 (5,6)

Cuestionario N.º 12

1. ¿Qué es el sistema axiomático?
2. ¿A qué se denominan axiomas?
3. ¿Cuál es la base primitiva del sistema axiomático?
4. ¿Cuál es la diferencia principal entre los sistemas axiomáticos formalizados y aquellos que no son tales?
5. ¿Por qué las reglas de transformación y formación de fórmulas son consideradas metalingüísticas?
6. ¿Cuál es la finalidad con que se constituye un sistema axiomático?
7. En el contexto de un sistema axiomático, ¿qué es una demostración?
8. ¿Qué es un teorema?
9. ¿Qué símbolos primitivos, reglas de formación y definiciones contiene el sistema axiomático de PM?
10. ¿Cuáles son las reglas de transformación y los axiomas que se consideran en PM?

Ejercicio N.º 16
Demostración de teoremas de la lógica proposicional

1. Demuestre los siguientes teoremas:

a) Teorema 11 $\sim \sim p \rightarrow p$

b) Teorema 12 $(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$

c) Teorema 13 $\sim (p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

d) Teorema 14 $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim (p \wedge q)$

e) Teorema 15 $\sim (p \wedge \sim p)$

f) Teorema 16 $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

g) Teorema 17 $(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

h) Teorema 18 $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$

i) Teorema 19 $p \rightarrow (p \vee p)$

j) Teorema 20 $p \rightarrow (q \rightarrow p)$