MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL CON EXCEL Y GEOGEBRA

MEDIA ARITMÉTICA

MEDIA ARITMÉTICA SIMPLE

a) Para Datos sin Agrupar

La media de una población es el parámetro μ (que se lee "miu"). Si hay N observaciones en el conjunto de datos de la población, la media se calcula así:

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N}{N} = \frac{\sum x_i}{N}$$

La media de una muestra es un estadístico $\bar{x}$ (que se lee "x barra"). Con n observaciones en el conjunto de datos de la muestra $(x_1, x_2, \ldots)$, la media se determina así:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$$

b) Para Datos Agrupados en Tablas de Frecuencias.- Cuando una serie se la agrupa en *serie simple con frecuencias* para obtener la media aritmética, se multiplica la variable por la frecuencia respectiva (f), luego se obtiene la suma de todos estos productos y luego a este valor se lo divide para el número de elementos (n). Todo esto puede representarse mediante una fórmula matemática, así:

$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + \cdots + f_n \cdot x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots f_n} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f} = \frac{\sum fx}{n}$$

Donde $n = \sum f$ es la frecuencia total (o sea, el número total de casos)

c) Para Datos Agrupados en Intervalos.- Cuando una serie se la agrupa en *intervalos* para obtener la media aritmética, se multiplica la marca de clase de intervalo (xm) por la frecuencia respectiva (f), luego se obtiene la suma de todos estos productos y luego a este valor se lo divide para el número de elementos. Todo esto se representa mediante la siguiente fórmula matemática:

$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot xm_1 + f_2 \cdot xm_2 + f_3 \cdot xm_3 + \cdots f_n \cdot xm_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots f_n} = \frac{\sum f_i \cdot xm_i}{\sum f} = \frac{\sum f \cdot xm}{n}$$

Ejemplo ilustrativo: Calcular la media aritmética de las siguientes calificaciones de Estadística tomadas de una muestra de 20, sin agrupar, agrupando en tablas de frecuencias y agrupando en intervalos.

4, 8, 10, 10, 5, 10, 9, 8, 6, 8, 10, 8, 5, 7, 4, 4, 8, 8, 6 y 6

Solución:

1) Sin agrupar

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{4+8+10+10+5+10+9+8+6+8+10+8+5+7+4+4+8+8+6+6}{20}$$

$$\bar{x} = \frac{144}{20} = 7{,}2$$

En Excel:

	A	B	C	D
1	4	8	10	10
2	5	10	9	8
3	6	8	10	8
4	5	7	4	4
5	8	8	6	6
6				
7	$\bar{x}$	7,2	=PROMEDIO(A1:D5)	

2) Agrupando en tablas de frecuencias

x	f
4	3
5	2
6	3
7	1
8	6
9	1
10	4
Total	20

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{n} = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + 1 \cdot 9 + 4 \cdot 10}{3 + 2 + 3 + 1 + 6 + 1 + 4} = \frac{144}{20} = 7{,}2$$

En Excel:

	A	B	C	D	E	F
1	4	8	10	10		
2	5	10	9	8		
3	6	8	10	8		
4	5	7	4	4		
5	8	8	6	6		
6						
7	x	f				
8	4	3	=CONTAR.SI($A$1:$D$5;A8)			
9	5	2	=CONTAR.SI($A$1:$D$5;A9)			
10	6	3	=CONTAR.SI($A$1:$D$5;A10)			
11	7	1	=CONTAR.SI($A$1:$D$5;A11)			
12	8	6	=CONTAR.SI($A$1:$D$5;A12)			
13	9	1	=CONTAR.SI($A$1:$D$5;A13)			
14	10	4	=CONTAR.SI($A$1:$D$5;A14)			
15	Total	20	=SUMA(B8:B14)			
16	$\bar{x}$	7,2	**=SUMAPRODUCTO(A8:A14;B8:B14)/B15**			

3) Agrupando en intervalos

Intervalos	f	xm
4- 5	5	4,5
6 -7	4	6,5
8- 9	7	8,5
10-11	4	10,5

$$\bar{x}=\frac{\sum f\cdot xm}{n}=\frac{5\cdot 4{,}5+4\cdot 6{,}5+7\cdot 8{,}5+4\cdot 10{,}5}{5+4+7+4}=\frac{150}{20}=7{,}5$$

Nota: Cuando se agrupa en intervalos los cálculos son sólo aproximaciones
En Excel:

	A	B	C	D	E	F	G
1	4	8	10	10			
2	5	10	9	8			
3	6	8	10	8			
4	5	7	4	4			
5	8	8	6	6			
6							
7	$X_{máx}$	10	=MAX(A1:D5)				
8	$X_{mín}$	4	=MIN(A1:D5)				
9	Rango	6	=B7-B8				
10	n	20	=CONTAR(A1:D5)				
11	n_i	5	=ENTERO(1+3,32*LOG(B10))				
12	i	1,2	=B9/B11				
13							
14	Intervalos		xm	f	{=FRECUENCIA(A1:D5;B15:B18)}		
15	4	5	4,5	5			
16	6	7	6,5	4			
17	8	9	8,5	7			
18	10	11	10,5	4			
19				20	=SUMA(D15:D18)		
20							
21	$\bar{x}$	7,5	**=SUMAPRODUCTO(C15:C18;D15:D18)/D19**				

Ejemplo ilustrativo de un problema:

A un estudiante le han realizado cinco evaluaciones en Matemática y su media es 7,8. Si en otras dos evaluaciones obtiene 7 y 10, ¿cuál es el nuevo valor medio?.

Solución:

Simbolizando, "A un estudiante le han realizado cinco evaluaciones en Estadística y su media es 8", se obtiene:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}=7{,}8\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7{,}8\cdot 5=39$$

Simbolizando, "Si en otras dos pruebas obtiene 7 y 10, el nuevo valor medio será", se obtiene:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+7+10}{7}=\bar{x}$$

Remplazando $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=39$ en la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{39+7+10}{7}=\bar{x}\Longrightarrow\frac{56}{7}=\bar{x}=8$$

MEDIA ARITMÉTICA PONDERADA

Cuando los números $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k$ se les asocian ciertos factores peso (o pesos) $p_1, p_2, p_3, \ldots p_k$, dependientes de la relevancia asignada a cada número, en tal caso se requiere calcular la media aritmética ponderada, la cual se calcula así:

$$\bar{x} = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + \cdots p_k \cdot x_k}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots p_k} = \frac{\sum p \cdot x}{\sum p}$$

Ejemplo ilustrativo: Se tiene una información acerca de las utilidades por pan y cantidades vendidas de panes de tres tiendas. Calcular la media aritmética promedio de la utilidad por pan.

Tienda	Utilidad/pan	Cantidad vendida
1	1	2000
2	0,8	1800
3	0,9	2100

Solución:

$$\bar{x} = \frac{\sum p \cdot x}{\sum p} = \frac{2000 \cdot 1 + 1800 \cdot 0{,}8 + 2100 \cdot 0{,}9}{2000 + 1800 + 2100} = \frac{5330}{5900} = 0{,}90339$$

En Excel:

	A	B	C	D	E
1	Tienda	Utilidad/pan	Cantidad vendida		
2	1	1	2000		
3	2	0,8	1800		
4	3	0,9	2100		
5			5900	=SUMA(C2:C4)	
6	$\bar{x}$	**0,9033898**	**=SUMAPRODUCTO(B2:B4;C2:C4)/C5**		

Ejemplo ilustrativo de un problema:

Una estudiante de secundaria de ecuador de la Unidad Educativa "Ibarra" obtiene en el primer quimestre, 6 en la primera parcial, 9 en la segunda parcial, 6 en la tercera parcial. Si el promedio del quimestre es de 7,2, ¿cuál fue la calificación del examen?. Recuerde que el sistema educativo ecuatoriano secundario las tres parciales aportan al promedio con el 80% y la nota del examen con el 20%

Solución

Evaluación	Calificación(x)	Ponderación(p)	$p \cdot x$
1ra parcial	6	80/3	160
2da parcial	9	80/3	240
3ra parcial	6	80/3	160
examen	x	20	$20x$
Total		100	$560 + 20x$

$$\bar{x} = \frac{\sum p \cdot x}{\sum p} = 7{,}2 = \frac{560 + 20x}{100} \Longrightarrow 100 \cdot 7{,}2 = 560 + 20x \Longrightarrow 720 - 560 = 20x \Longrightarrow 160 = 20x$$

$$x = \frac{160}{20} \Longrightarrow x = 8$$

MEDIA GEOMÉTRICA

a) Para Datos No Agrupados
Se emplea la ecuación:

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n}$$

O aplicando logaritmos la ecuación:

$$logG = \frac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + \cdots \log x_n}{n}$$

Ejemplo ilustrativo: La media geométrica es útil en el cálculo de tasas de crecimiento; por ejemplo, si el crecimiento de las ventas en un pequeño negocio son 3%, 4%,8%,9% y 10%, hallar la media de crecimiento.

Solución:

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n} = \sqrt[5]{3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = 6{,}128$$

Respuesta: 6,128%

O utilizando logaritmos:

$$logG = \frac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + \cdots \log x_n}{n} = \frac{\log 3 + \log 4 + \log 8 + \log 9 + \log 10}{5}$$

$$logG = \frac{0{,}4771 + 0{,}6021 + 0{,}9031 + 0{,}9542 + 1}{5} = \frac{3{,}9365}{5} = 0{,}7873$$

$$G = antilog\ 0{,}7873 = 6{,}128$$

En Excel:

	A	B	C	D
1	3			
2	4			
3	8			
4	9			
5	10			
6	G	6,12777413	=MEDIA.GEOM(A1:A5)	

b) Para Datos Agrupados en Tablas de Frecuencias

Se emplea la siguiente ecuación:

$$\log G = \frac{\sum \log\ x_i \cdot f_i}{n}$$

Donde:

$f_i = frecuencia\ absoluta\ de\ cada\ dato\ x_i$

Ejemplo ilustrativo: Calcular la media geométrica para las siguientes calificaciones de Estadística:

x_i	f_i
4	5
6	8
8	9
9	10
10	8

Solución:

Se llena la siguiente tabla, realizando los cálculos respectivos:

x_i	f_i	$\log x_i$	$\log x_i \cdot f_i$
4	5	0,602	3,010
6	8	0,778	6,225
8	9	0,903	8,128
9	10	0,954	9,542
10	8	1,000	8,000
Total	40		34,906

Se aplica la siguiente ecuación para obtener la respuesta.

$$\log G = \frac{\sum \log x_i \cdot f_i}{n} = \frac{34{,}906}{40} = 0{,}873$$

G = anti log 0,873 = 7,458

En Excel:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x_i	f_i						
2	4	5						
3	6	8						
4	8	9						
5	9	10						
6	10	8						
7								
8	G	7,46	=10^(SUMAPRODUCTO(LOG10(A2:A6);B2:B6)/SUMA(B2:B6))					

c) Para Datos Agrupados en Intervalos

Se emplea la ecuación:

$$\log G = \frac{\sum \log xm \cdot f_i}{n}$$

Donde:

xm $= marca\ de\ clase$

MEDIA ARMÓNICA

a) Para Datos No Agrupados

Sean los números $x_1, x_2, \ldots x_n$.La media armónica H se obtiene con la siguiente ecuación:

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots \frac{1}{x_n}}$$

O con la siguiente ecuación:

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots \frac{1}{x_n}\right)}$$

Ejemplo ilustrativo: La velocidad de producción de azúcar de tres máquinas procesadoras son 0,5, 0,3 y 0,4 minutos por kilogramo. Hallar el tiempo promedio de producción después de una jornada de 4800 minutos del proceso.

Solución:

Como en la razón minutos/kilogramos (min/kg) cada máquina trabaja 4800 min, la razón contante es el tiempo de trabajo (4800 min), es decir la contante es la unidad del numerador, por lo tanto se debe emplear el promedio armónico.

$$H=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\frac{1}{x_n}}=\frac{3}{\frac{1}{0{,}5}+\frac{1}{0{,}3}+\frac{1}{0{,}4}}=0{,}383$$

O empleando la otra ecuación**:**

$$H=\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\frac{1}{x_n}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{0{,}5}+\frac{1}{0{,}3}+\frac{1}{0{,}4}\right)}=0{,}383$$

El tiempo promedio de producción es 0,383 minutos por kilogramo de azúcar.

En Excel :

	A	B	C	D
1	0,5			
2	0,3			
3	0,4			
4	H	0,38298	=MEDIA.ARMO(A1:A3)	

b) Para Datos Agrupados en Tablas de Frecuencias
Se emplea cualquiera de las siguientes ecuaciones:

$$H=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{x_i}}=\frac{n}{\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}+\cdots\frac{f_n}{x_n}}\qquad H=\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}+\cdots\frac{f_n}{x_n}\right)}$$

Ejemplo ilustrativo: En la siguiente tabla se presentan los datos sobre el tiempo en horas que se demoran en realizar la misma obra determinados obreros. Calcular el tiempo promedio que se demora en realizar la obra un obrero tipo (un obrero promedio).

Tiempo	Obreros
4	4
5	5
6	7
7	2
9	2

Solución:

$$H=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{x_i}}=\frac{n}{\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}+\cdots\frac{f_n}{x_n}}=\frac{20}{\frac{4}{4}+\frac{5}{5}+\frac{7}{6}+\frac{2}{7}+\frac{2}{9}}=\frac{20}{\frac{463}{126}}=\frac{2520}{463}=5{,}44$$

En Excel:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Tiempo	Obreros					
2	4	4					
3	5	5					
4	6	7					
5	7	2					
6	9	2					
7							
8	H	5,44276	=SUMA(B2:B6)/SUMAPRODUCTO((1/A2:A6);B2:B6)				

c) Para Datos Agrupados en Intervalos

Se emplea la siguiente ecuación:

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{xm_i}} = \frac{n}{\frac{f_1}{xm_1} + \frac{f_2}{xm_2} + \cdots \frac{f_n}{xm_n}}$$

Ejemplo ilustrativo: En la siguiente tabla se presentan los datos sobre el tiempo en minutos que se demoran para resolver una prueba de Estadística determinados estudiantes. Calcular el tiempo promedio que se demora en resolver la prueba un estudiante tipo.

Tiempo	Estudiantes
[40-50)	4
[50-60)	8
[60-70)	10
[70-80)	7
[80-90]	11

Solución:
Realizando los cálculos respectivos se obtiene:

x_i	f_i	xm_i	f_i/xm_i
[40-50)	4	45	0,089
[50-60)	8	55	0,145
[60-70)	10	65	0,154
[70-80)	7	75	0,093
[80-90]	11	85	0,129
Total	40		0,611

Aplicado la ecuación se obtiene:

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{xm_i}} = \frac{n}{\frac{f_1}{xm_1} + \frac{f_2}{xm_2} + \cdots \frac{f_n}{xm_n}} = \frac{40}{0{,}611} = 65{,}47$$

En Excel:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Intervalos		f	xm			
2	40	50	4	45	=PROMEDIO(A2:B2)		
3	50	60	8	55	=PROMEDIO(A3:B3)		
4	60	70	10	65	=PROMEDIO(A4:B4)		
5	70	80	7	75	=PROMEDIO(A5:B5)		
6	80	90	11	85	=PROMEDIO(A6:B6)		
7			40	=SUMA(C2:C6)			
8							
9	H	=	65,473	=C7/SUMAPRODUCTO(1/(D2:D6);C2:C6)			

LA MEDIANA

La mediana, llamada algunas veces media posicional, es el valor del término medio que divide una distribución de datos ordenados en dos partes iguales, es decir, el 50% de los datos se ubican sobre la mediana o hacia los puntajes altos y el 50% restante hacia los puntajes bajos.

a) Para Datos No Agrupados

1) Si el número n de datos es impar, la mediana es el dato que se encuentra a la mitad de la lista. Para calcular su posición se aplica la siguiente ecuación:

$$Md = x_{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} = x_{\frac{n+1}{2}}$$

Ejemplo ilustrativo:
Calcular la mediana de las siguientes calificaciones del curso de Estadística evaluadas sobre diez: 10, 8, 6, 4, 9, 7, 10, 9 y 6

Solución:
Se ordena los datos de menor a mayor:

4	6	6	7	8	9	9	10	10
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9

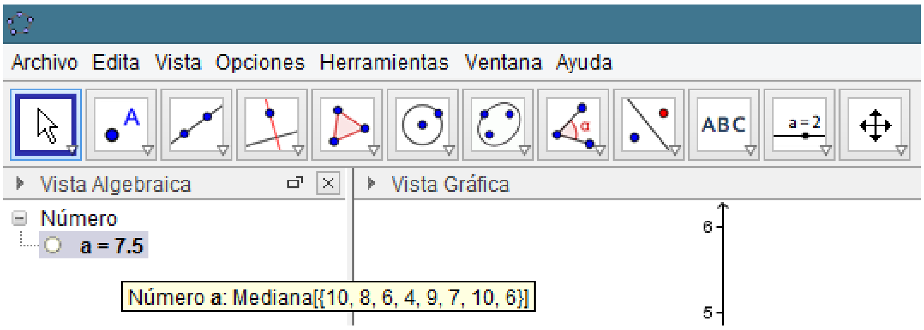
Se aplica la ecuación:
$Md = x_{\frac{n+1}{2}}$
$Md = x_{\frac{9+1}{2}} = Md = x_5$
La mediana es el valor de x_5 (quinto dato), es decir, Md=8

En Excel :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	10	8	6	4	9	7	10	6
2								
3	Md	7,5	=MEDIANA(A1:H1)					

En GeoGebra :

Escribir los datos: Mediana[10,8,6,4,9,7,10,6]. Enter



2) Si el número n de datos es par, la mediana es la media aritmética de los dos datos que se encuentran a la mitad de la lista. Para calcular su posición se aplica la siguiente ecuación:

$$Md = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

Ejemplo ilustrativo: Calcular la mediana de las siguientes calificaciones del curso de Matemática evaluadas sobre diez: 10, 8, 9, 6, 4, 8, 9, 7, 10 y 9

Solución:

Se ordena los datos de menor a mayor:

4	6	7	8	8	9	9	9	10	10
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}

$$Md = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{8+9}{2} = 8{,}5$$

b) Para Datos Agrupados en Tablas de Frecuencia

Para calcular la posición de la mediana se aplica la siguiente ecuación:

$$Md = \frac{n+1}{2}$$

Ejemplo ilustrativo:

Dados los siguientes 20 números: 1, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 2, 2, 2, 6, 6, 4, 4, 4 ,4, 5, 5, 5, 5

Agrupar los datos en tabla de frecuencia y calcular la mediana.

Solución:

Agrupando en frecuencias

x	f
1	1
2	3
3	2
4	4
5	8
6	2
Total	20

Calculando la posición de la mediana se obtiene:

$$Md = \frac{n+1}{2} = \frac{20+1}{2} = 10{,}5$$

Como la posición de la mediana es 10,5, su valor es el promedio de los datos décimo y undécimo. Para observar con claridad cuáles son los datos décimo y undécimo se aconseja calcular la frecuencia acumulada.

x	f	fa
1	1	1
2	3	4
3	2	6
4	4	10
5	8	18
6	2	20
Total	20	

Se observa que el décimo dato es 4 y el undécimo es 5, por lo tanto:

$$Md = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$$

c) Para Datos Agrupados en Intervalos

$$Md = Li_{md} + \left(\frac{\frac{n}{2} - Fa}{f_{md}}\right) \cdot c$$

En donde:

$Li_{md} =$ Límite inferior del intervalo de clase de la mediana

$n =$ Número total de datos

$Fa =$Frecuencia acumulada del intervalo de clase que antecede al intervalo de clase de la mediana.

$fmd =$ Frecuencia absoluta del intervalo de clase de la mediana

$c =$ Ancho del intervalo

Ejemplo ilustrativo: Calcular la mediana empleando la fórmula y mediante un histograma de frecuencias acumuladas.

Se calcula la frecuencia acumulada como se muestra en la siguiente tabla:

Intervalos	f	fa
$[45,55)$	6	6
$[55,65)$	10	16
$[65,75)$	19	35
$[75,85)$	11	46
$[85,95)$	4	50

Solución:

Se calcula la posición de la mediana de la siguiente manera:

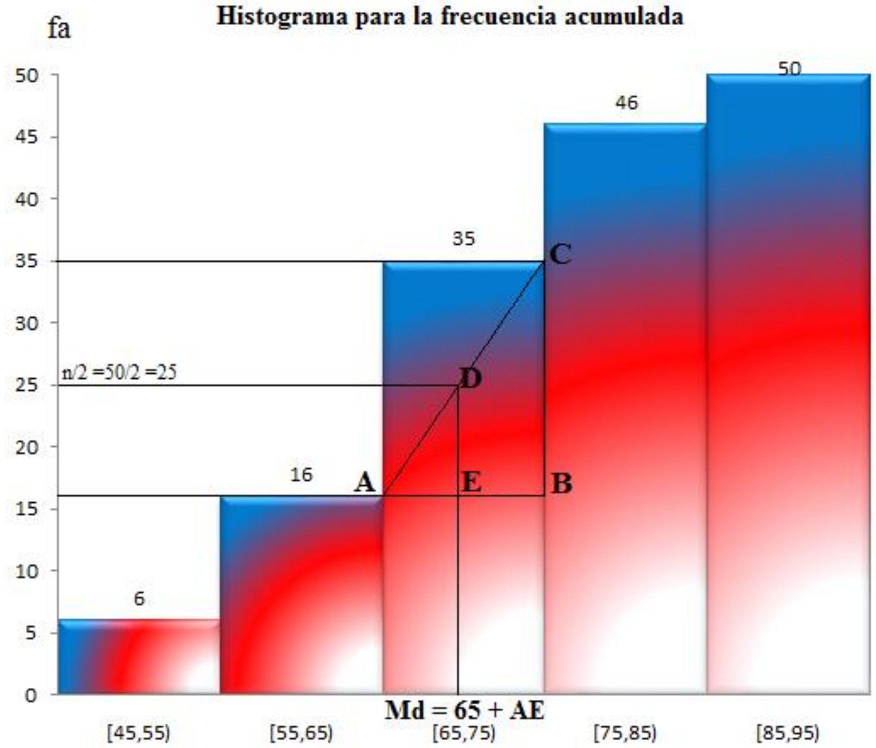
$$\frac{n}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

Por lo tanto el intervalo o clase de la mediana es [65,75).

Al aplicar la ecuación respectiva se obtiene:

$$Md = Li_{md} + \left(\frac{\frac{n}{2} - Fa}{f_{md}}\right) \cdot c \Rightarrow Md = 65 + \left(\frac{\frac{50}{2} - 16}{19}\right) \cdot 10 = 65 + \left(\frac{9}{19}\right) \cdot 10 = 65 + \frac{90}{19} = 69{,}737$$

Resolviendo de manera gráfica



Observando el gráfico se determina que Md = 65+AE

Los triángulos ABC y AED son semejantes, por lo que se cumple:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AE}{DE}$$

$$\frac{75 - 65}{35 - 16} = \frac{AE}{25 - 16} \Longrightarrow \frac{10}{19} = \frac{AE}{9}$$

Despejando AE se obtiene:

$$\frac{10}{19} \cdot 9 = AE \Longrightarrow AE = \frac{90}{19} = 4{,}737$$

Entonces, Md = 65+AE = 65+4,737= →Md = 69,737

Son similares a la mediana en que también subdividen una distribución de mediciones de acuerdo con la proporción de frecuencias observadas. Mientas que la mediana divide a una distribución en mitades, los cuartiles (Q) la dividen en cuartos, los deciles (D) la dividen en décimos y los puntos percentiles (P) la dividen en centésimos.
Colectivamente, cuartiles, deciles y percentiles se denominan cuantiles. Puesto que sirven para ubicar datos particulares dentro de ciertas porciones de una distribución de datos, toman el nombre de medidas de posición.

CUARTILES.- Son cada uno de los 3 valores Q_1, Q_2, Q_3 que dividen a la distribución de los datos en 4 partes iguales.

Primer cuartil: $Q_1 = P_{25}$, segundo cuartil: $Q_2 = D_5 = P_{50}$ = Mediana, tercer cuartil: $Q_3 = P_{75}$

a) Para Datos No Agrupados

La posición o ubicación de los cuartiles se encuentra aplicando la siguiente ecuación:

$$Q_k = X_{\left[\frac{n\cdot k}{4}+\frac{1}{2}\right]} = X_{\left[\frac{n\cdot k+2}{4}\right]}$$

Donde:
n = número total de datos
k = número del cuartil

Ejemplo ilustrativo: Encuentre los cuartiles dada la siguiente distribución: 6, 9, 9, 12, 12, 12, 15 y 17

Solución:
Para calcular los cuartiles se ordena los datos de menor a mayor

6	9	9	12	12	12	15	17
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8

Aplicando la ecuación para el cuartil uno se obtiene:

$$Q_k = X_{\left[\frac{n\cdot k+2}{4}\right]} = X_{\left[\frac{n+2}{4}\right]} = X_{\left[\frac{8+2}{4}\right]} = X_{\left[\frac{10}{4}\right]} = X_{2,5}$$

Como la posición del cuartil 1 es 2,5, su valor es el promedio de los datos segundo y tercero

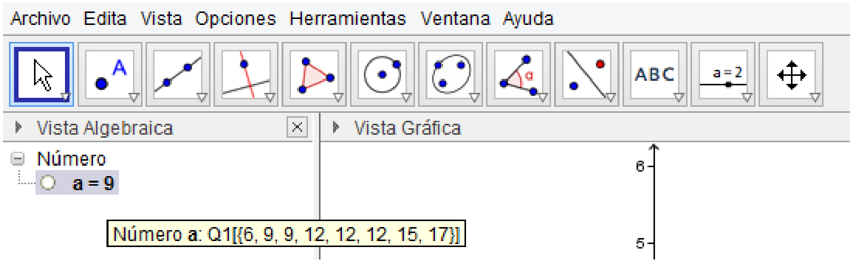
$$Q_1 = X_{2,5} = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{9+9}{2} = 9$$

O también la posición 2,5 dice que el cuartil 1 está ubicado al 50% del trayecto comprendido entre el segundo dato, que es 9 y el tercer dato que es 9, es decir, Q_1= 9+0,5(9-9) = 9

Interpretación: Este resultado indica que el 25% de los datos es inferior a 9
En Excel:

	A	B	C	D
1	6			
2	9			
3	9			
4	12			
5	12			
6	12			
7	15			
8	17			
9				
10	Q_1	9	=CUARTIL.INC(A1:A8;1)	

En GeoGebra:



Aplicando la ecuación para el cuartil dos se obtiene:

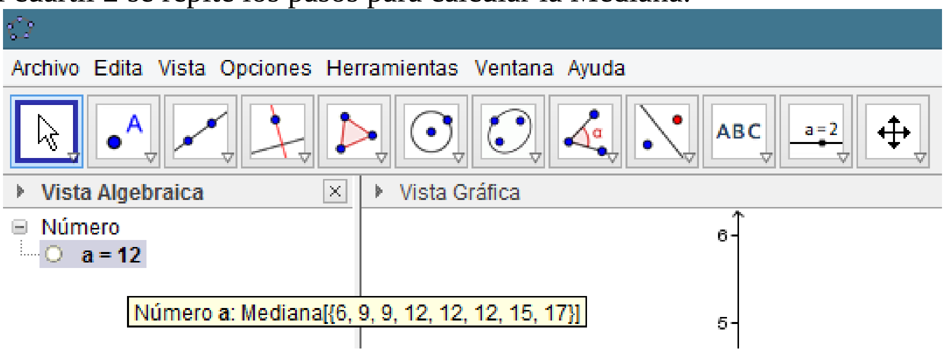
$$Q_k = X_{\left[\frac{n\cdot k+2}{4}\right]} \Longrightarrow Q_2 = X_{\left[\frac{n\cdot 2+2}{4}\right]} = X_{\left[\frac{2n+2}{4}\right]} = X_{\left[\frac{2\cdot 8+2}{4}\right]} = X_{\left[\frac{16+2}{4}\right]} = X_{4,5} = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{12+12}{2} = 12$$

O también la posición 4,5 dice que el cuartil 2 está ubicado al 50% del trayecto comprendido entre el cuarto dato, que es 12 y el quinto dato que también es 12, es decir,
$Q_2 = 12 + 0,5(12 - 12) = 12$
Interpretación: Este resultado indica que el 50% de los datos es inferior a 12

En Excel:

	A	B	C	D
1	6			
2	9			
3	9			
4	12			
5	12			
6	12			
7	15			
8	17			
9				
10	Q_2	12	=CUARTIL.INC(A1:A8;2)	

En GeoGebra:
Para calcular el cuartil 2 se repite los pasos para calcular la Mediana:

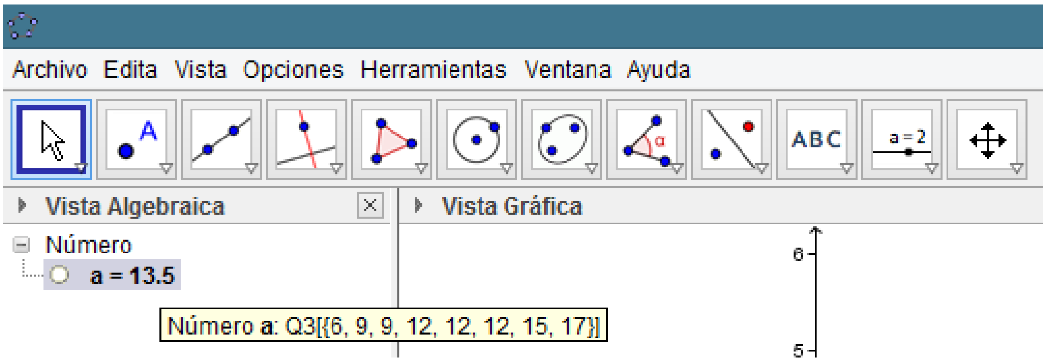


Aplicando la ecuación para el cuartil tres se obtiene:

$$Q_k = X_{\left[\frac{n\cdot k+2}{4}\right]} \Longrightarrow Q_3 = X_{\left[\frac{3n+2}{4}\right]} = X_{\left[\frac{3\cdot 8+2}{4}\right]} = X_{\left[\frac{24+2}{4}\right]} = x_{\frac{26}{4}} = X_{6,5} = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{12+15}{2} = 13,5$$

O también la posición 6,5 dice que el cuartil 2 está ubicado al 50% del trayecto comprendido entre el doceavo dato, que es 12 y el quinceavo dato que es 15, es decir, Q_3 = 12+0,5(15-12)
Q_3= 12+0,5(3)=12+1,5=13,5
Interpretación: Este resultado indica que el 75% de los datos es inferior a 13,5

En GeoGebra:



En Excel:
Repetir los pasos para el cuartil 1, y en la opción de cuartil escribir 3.

	A	B	C	D
1	6			
2	9			
3	9			
4	12			
5	12			
6	12			
7	15			
8	17			
9				
10	Q_3	12,75	=CUARTIL.INC(A1:A8;3)	

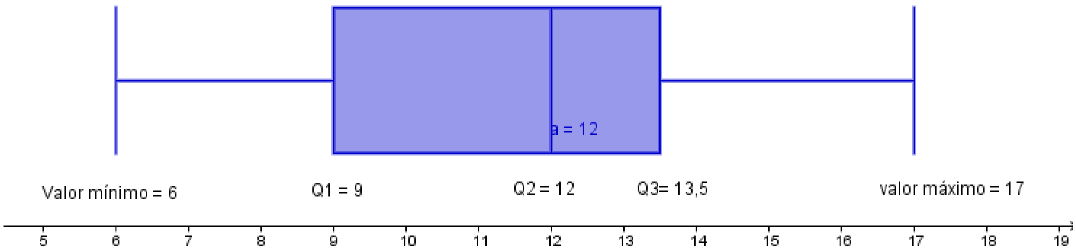
Notas importantes:
-Los cálculos en Excel para un número impar de datos coinciden con los cálculos realizados con las ecuaciones.
-Para un número par de datos, aunque en ciertas ocasiones coinciden, suele existir diferencias en los cálculos del Q_1 y Q_3 realizados con Excel. Este error de cálculo es: e = 0,25d, en donde d es la distancia de separación de los datos
-Para el Q_1 se resta el error al valor obtenido con Excel
-Para el Q_3 se suma el error al valor obtenido con Excel
En nuestro ejemplo $e = 0{,}25(x_7 - x_6) = 0{,}25(15 - 12) = 0{,}25(3) = 0{,}75$. Al sumar el error al valor Q_3 inicialmente calculado con Excel se obtiene el valor correcto como se muestra en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E
1	6				
2	9				
3	9				
4	12				
5	12				
6	12				
7	15				
8	17				
9					
10	Q_3	13,5	=CUARTIL.INC(A1:A8;3)+0,25*(A7-A6)		

Diagrama de caja y bigotes

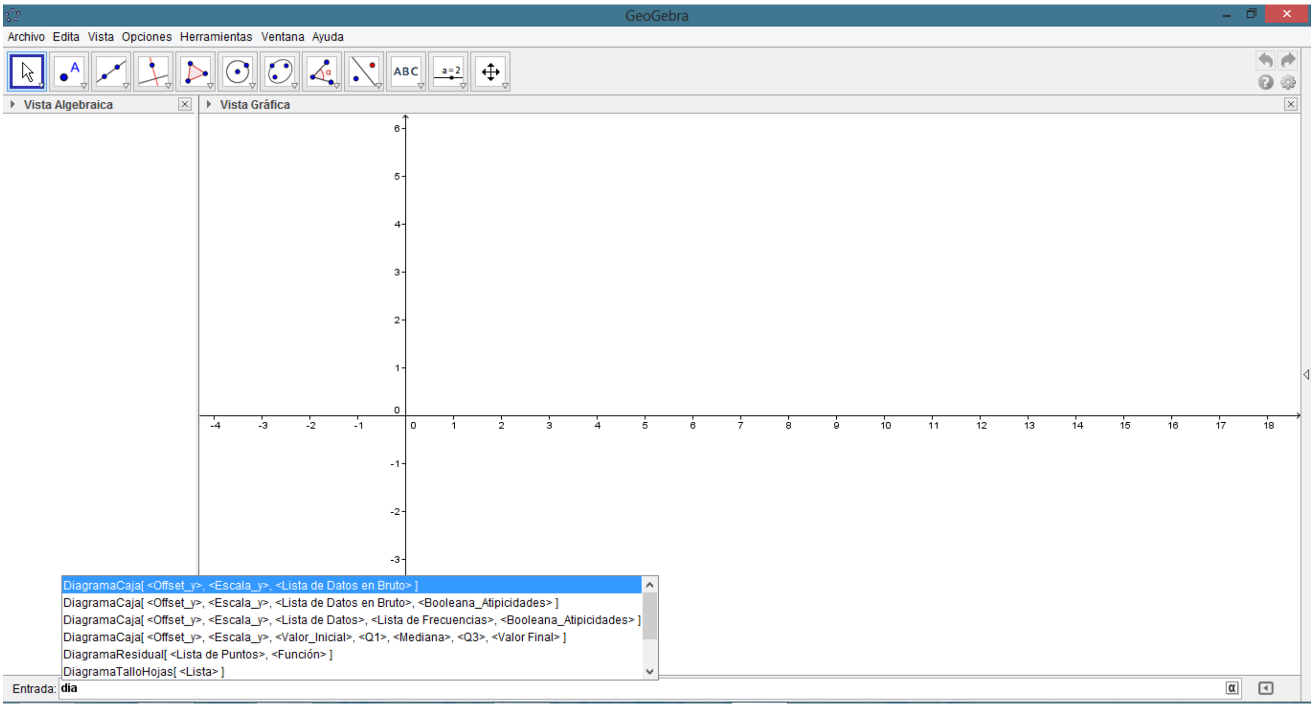
Un diagrama de caja y bigotes es una representación gráfica que ayuda a visualizar una distribución de datos: caja desde Q_1 a Q_3 (50% de los datos), y bigotes el recorrido (distancia desde valor mínimo hasta el valor máximo).

De acuerdo al ejemplo ilustrativo del cálculo de cuartiles para datos sin agrupar de la distribución de datos 6, 9, 9, 12, 12, 12, 15 y 17 se obtienen:
Valor mínimo = 6
$Q_1 = 9; Q_2 = 12;\ Q_3 = 13{,}5$
Valor máximo = 17
Por lo tanto el diagrama de caja y bigotes es:

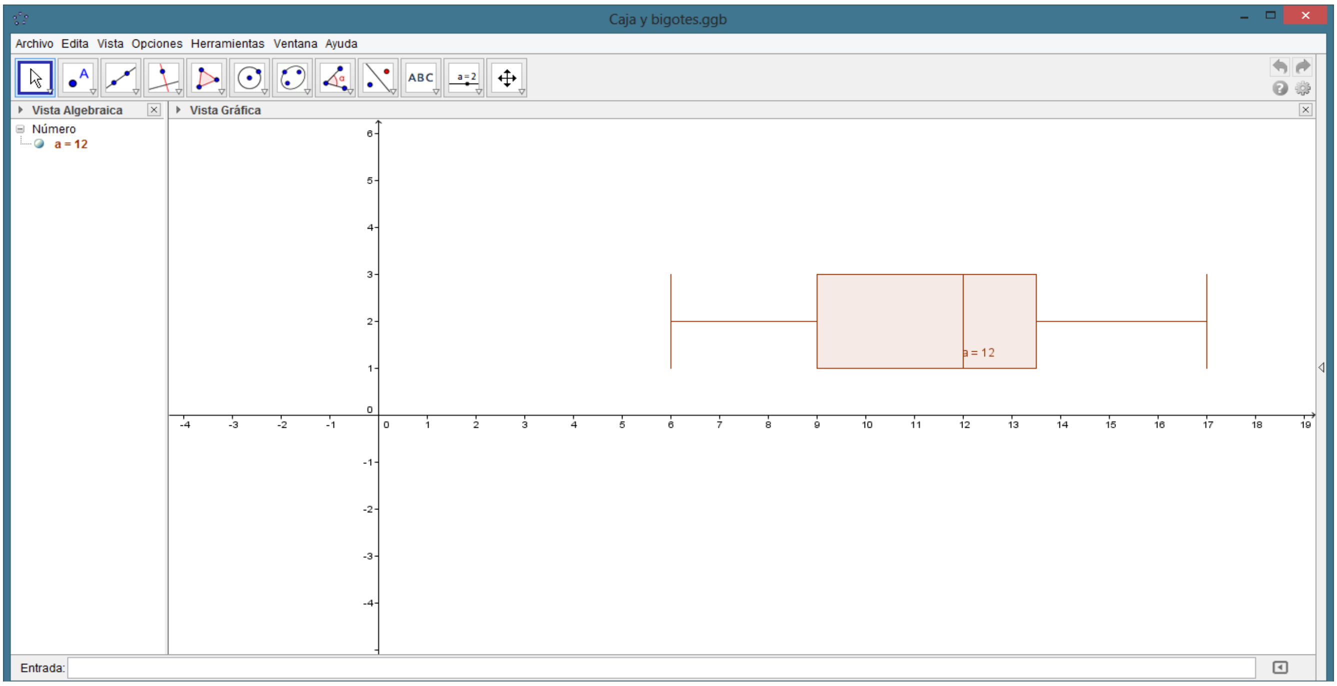


El diagrama de caja y bigotes en GeoGebra se elabora de la siguiente manera:

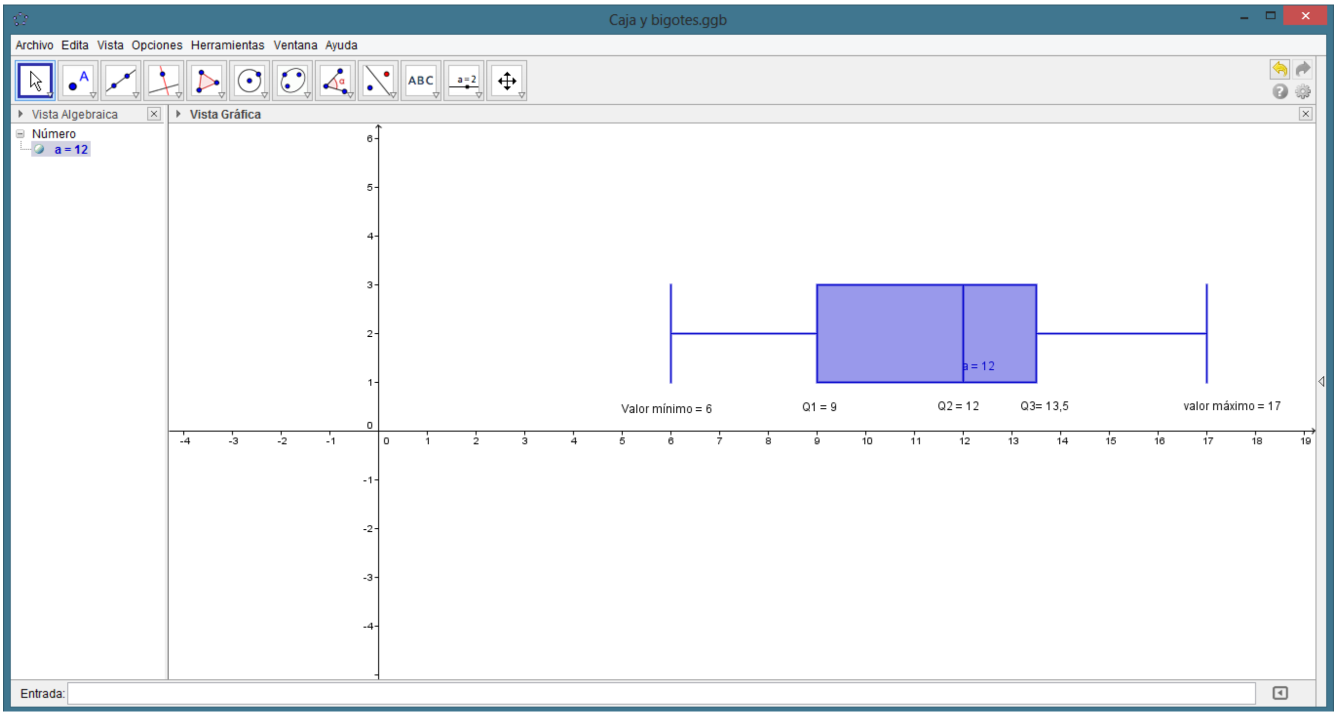
a) Ingrese al programa.En la casilla Entrada escriba las primeras letras de DiagramaCaja



b) Seleccione DiagramaCaja[<Offset_y>, <Escala_y>, <Lista de Datos en Bruto>] y dicha opción escriba DiagramaCaja[2,1,{6,9,9,12,12,12,15,17}]. Enter



c) Editando el diagrama de caja y bigotes se obtiene:



b) Para Datos Agrupados en Tablas de Frecuencias

Se aplica la misma ecuación empleada para el cálculo en los datos no agrupados

Ejemplo ilustrativo: Dada la siguiente tabla, calcular el cuartil 2:

x	f
6	1
9	2
12	3
15	1
17	1

Solución:
1) Cálculo del cuartil 2
Aplicando la primera ecuación para el cuartil dos se obtiene:

$$Q_k = X_{\left[\frac{n\cdot k+2}{4}\right]} \Longrightarrow Q_2 = X_{\left[\frac{n\cdot 2+2}{4}\right]} = X_{\left[\frac{2(n+1)}{4}\right]} = X_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = X_{\left[\frac{8+1}{2}\right]} = X_{\left[\frac{9}{2}\right]} = X_{4,5}$$

Como la posición del cuartil 2 es 4,5, su valor es el promedio de los datos cuarto y quinto
Para observar con claridad cuáles son los datos cuarto y quinto se aconseja calcular la frecuencia acumulada

x	f	fa
6	1	1
9	2	3
12	3	6
15	1	7
17	1	8

Se observa que el cuarto dato es 12 y el quinto dato es 12, por lo tanto

$$Q_2 = X_{4,5} = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{12+12}{2} = 12$$

c) Para Datos Agrupados en Intervalos
Se emplea la siguiente ecuación:

$$Q_k = Li_Q + \left(\frac{\frac{nk}{4} - Fa}{f_Q}\right) \cdot c$$

Donde:
Li_Q = Límite inferior del intervalo de clase del cuartil
n = Número total de datos
Fa = Frecuencia acumulada del intervalo de clase que antecede al intervalo de clase del cuartil
f_Q = Frecuencia absoluta del intervalo de clase del cuartil
c = Ancho del intervalo de clase del cuartil

Ejemplo ilustrativo: Dado los siguientes datos sobre pesos de un grupo de 50 personas:

Intervalos	f
45- 55	6
55- 65	10
65- 75	19
75- 85	11
85- 95	4

1) Calcular los cuartiles empleando la ecuación

2) Calcular los cuartiles empleando un histograma para $fra(\%)$ (Frecuencia relativa acumulada mediada en porcentajes)

Solución:
1) Cálculo de los cuartiles empleando la ecuación

1.1) Cálculo del primer cuartil

Primero se calcula nk/4 y después se averigua el intervalo en el que está el cuartil, este intervalo recibe el nombre de intervalo o clase del primer cuartil. Para averiguar el intervalo en el que están los cuartiles se aconseja calcular la frecuencia acumulada

$$\frac{n \cdot k}{4} = \frac{50 \cdot 1}{4} = 12{,}5$$

Intervalos	f	fa
45- 55	6	6
55- 65	10	16
65- 75	19	35
75- 85	11	46
85- 95	4	50
n	50	

Por lo tanto en este ejemplo:
El intervalo del segundo cuartil es 55-65.
El número total de datos es n =10
Se observa que 6 valores están por debajo del valor 55, es decir Fa = 6.
La frecuencia absoluta $f_Q$del intervalo del cuartil es 10
El ancho del intervalo del cuartil es c = 65-55 =10.
Al aplicar la ecuación se obtiene:

$$\mathrm{Q_k} = \mathrm{Li_Q} + \left(\frac{\frac{\mathrm{nk}}{4} - \mathrm{Fa}}{\mathrm{f_Q}}\right) \cdot \mathrm{c} = 55 + \left(\frac{\frac{50 \cdot 1}{4} - 6}{10}\right) \cdot 10 = 55 + \left(\frac{\frac{50}{4} - 6}{10}\right) \cdot 10$$

$$\mathrm{Q_1} = 55 + \left(\frac{13}{20}\right) \cdot 10 = 55 + 6{,}5 = 61{,}5$$

1.2) Cálculo del segundo cuartil
Primero se calcula nk/4 y después se averigua el intervalo en el que está el cuartil, este intervalo recibe el nombre de intervalo o clase del cuartil.

$$\frac{n \cdot 2}{4} = \frac{50 \cdot 2}{4} = 25$$

Por lo tanto para el segundo cuartil se tiene:
Intervalo: 65-75
n=10
Fa=16
f_Q =19
c =75-65 =10

Al aplicar la ecuación se obtiene:

$$Q_k = Li_Q + \left(\frac{\frac{nk}{4} - Fa}{f_Q}\right) \cdot c$$

$$Q_2 = 65 + \left(\frac{\frac{50 \cdot 2}{4} - 16}{19}\right) \cdot 10 = 65 + \left(\frac{\frac{100}{4} - 16}{19}\right) \cdot 10 = 65 + \left(\frac{9}{19}\right) \cdot 10 = 65 + 4{,}737 = 69{,}937$$

1.3) Cálculo del tercer cuartil

Primero se calcula nk/4 y después se averigua el intervalo en el que está el cuartil, este intervalo recibe el nombre de intervalo o clase del cuartil.

$$\frac{n \cdot 3}{4} = \frac{50 \cdot 3}{4} = 37{,}5$$

Por lo tanto para el segundo cuartil se tiene:
Intervalo: 75-85

$n = 10$
$Fa = 35$
$f_Q = 11$
$c = 85 - 75 = 10$

Al aplicar la ecuación se obtiene:

$$Q_k = Li_Q + \left(\frac{\frac{nk}{4} - Fa}{f_Q}\right) \cdot c$$

$$Q_3 = 75 + \left(\frac{\frac{50 \cdot 3}{4} - 35}{11}\right) \cdot 10 = 75 + \left(\frac{\frac{150}{4} - 35}{11}\right) \cdot 10 = 75 + \left(\frac{5}{22}\right) \cdot 10 = 75 + 2{,}273 = 77{,}273$$

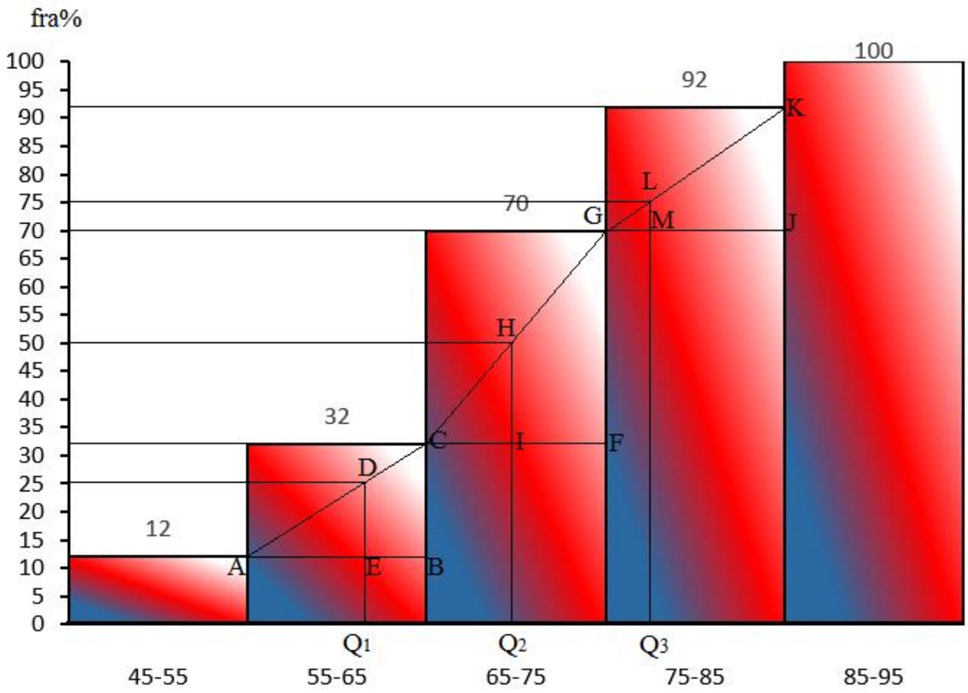
2) Cálculo de los cuartiles empleando un histograma para $fra(\%)$

2.1) Calculando la $fra(\%)$ se obtiene:

Intervalos	f	fa	fr	fra (%)
45- 55	6	6	0,12	12
55- 65	10	16	0,20	32
65- 75	19	35	0,38	70
75- 85	11	46	0,22	92
85- 95	4	50	0,08	100
N	50			

2.2) Elaborando el histograma en Excel y en Paint se obtiene la siguiente figura:

Histograma para la $fra(\%)$



2.3) Cálculo del primer cuartil

Observando en gráfico tenemos que el $Q_1 = 55 + AE$

Los triángulos ABC y AED son semejantes, por lo que se cumple:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AE}{DE}$$

$$\frac{65-55}{32-12} = \frac{AE}{25-12} \Longrightarrow \frac{10}{20} = \frac{AE}{13}$$

Despejando AE se obtiene:

$$\frac{10}{20} \cdot 13 = AE \Longrightarrow AE = 6{,}5$$

Entonces, $Q_1 = 55 + 6{,}5 = 61{,}5$

2.3) Cálculo del segundo cuartil

Observando en gráfico tenemos que el $Q_2 = 65 + CI$

Los triángulos CFG y CIH son semejantes, por lo que se cumple:

$$\frac{CF}{FG} = \frac{CI}{HI} \Longrightarrow \frac{75-65}{70-32} = \frac{CI}{50-32} \Longrightarrow \frac{10}{38} = \frac{CI}{18}$$

Despejando CI se obtiene:

$$\frac{10}{38} \cdot 18 = AE \Longrightarrow AE = 4{,}737$$

Entonces, $Q_2 = 65 + 4{,}737 = 69{,}737$

2.3) Cálculo del tercer cuartil
Observando en gráfico tenemos que el $Q_3 = 75 + GM$

Los triángulos GJK y GML son semejantes, por lo que se cumple:

$$\frac{GJ}{JK} = \frac{GM}{ML} \Longrightarrow \frac{85-75}{92-70} = \frac{CI}{75-70} \Longrightarrow \frac{10}{22} = \frac{CI}{5}$$

Despejando CI se obtiene:

$$\frac{10}{22} \cdot 5 = CI \Longrightarrow CI = 2{,}273$$

Entonces, $Q_3 = 75 + 2{,}273 = 77{,}273$

B) DECILES

a) Para Datos No Agrupados
La posición o ubicación de los deciles se encuentra aplicando la siguiente ecuación:

$$D_k = X_{\left[\frac{n\cdot k}{10}+\frac{1}{2}\right]} = X_{\left[\frac{n\cdot k+5}{10}\right]}$$

Donde:
n = número total de datos.
k = número del decil.

Ejemplo ilustrativo: Calcular el quinto decil de la siguiente distribución: 6, 9, 9, 12, 12, 12, 15 y 17

Solución: Para calcular los deciles se ordena los datos de menor a mayor.

6	9	9	12	12	12	15	17
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8

Aplicando la ecuación para el quinto decil se obtiene:

$$D_k = X_{\left[\frac{n\cdot k+5}{10}\right]}$$

$$D_5 = X_{\left[\frac{n\cdot 5+5}{10}\right]} = X_{\left[\frac{5n+5}{10}\right]} = X_{\left[\frac{5\cdot 8+10}{10}\right]} = X_{\left[\frac{40+5}{10}\right]} = X_{4,5} = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{12+12}{2} = 12$$

O también la posición 4,5 dice que el decil 5 está ubicado al 50% del trayecto comprendido entre el cuarto dato, que es 12 y el quinto dato que también es 12, es decir,
$D_5 = 12+0{,}5(12-12) = 12$

En Excel:
Como D_5 es igual a P_{50} :

	A	B	C	D	E
1	6				
2	9				
3	9				
4	12				
5	12				
6	12				
7	15				
8	17				
9					
10	$D_5 = P_{50}$	12	=PERCENTIL.INC(A1:A8;0,5)		

b) Para Datos Agrupados en Tablas de Frecuencia
Se emplea la misma ecuación utilizada en el cálculo de los deciles para datos sin agrupar.

c) Para Datos Agrupados en Intervalos
Se emplea la siguiente ecuación:

$$D_k = Li_D + \left(\frac{\frac{nk}{10} - Fa}{f_D}\right) \cdot c$$

Donde:
Li_D = Límite inferior del intervalo de clase del decil.
n = número total de datos.
F_a = Frecuencia acumulada del intervalo de clase que antecede al intervalo de clase del decil.
f_D = Frecuencia absoluta del intervalo de clase del decil.
c = Ancho del intervalo de clase del decil.

C) PERCENTILES O CENTILES
a) Para Datos No Agrupados
La posición o ubicación de los percentiles se encuentra aplicando la siguiente ecuación:

$$P_k = X_{\left[\frac{n\cdot k}{100}+\frac{1}{2}\right]} = X_{\left[\frac{n\cdot k+50}{100}\right]}$$

Donde:
n = número total de datos
k = número del percentil
Ejemplo ilustrativo: Calcular los percentiles de orden 20 y 33 del peso de diez personas que pesan (en kg)

80, 78, 65, 73, 65, 67, 72, 68, 70 y 72

Solución:
Se ordena los datos de menor a mayor se tiene:

65	65	67	68	70	72	72	73	78	80
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}

1) Cálculo del percentil de orden 20 se obtiene:

$$P_k = X_{\left[\frac{n\cdot k+50}{100}\right]} = X_{\left[\frac{n\cdot 20+50}{100}\right]} = X_{\left[\frac{10\cdot 20+50}{100}\right]} = X_{\left[\frac{250}{100}\right]} = X_{2,5} = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{65+67}{2} = 66$$

En Excel se obtiene un valor aproximado insertando la función PERCENTIL.INC(A1:A10:0,2) *como se muestra en la siguiente figura:*

	A	B	C	D	E
1	65				
2	65				
3	67				
4	68				
5	70				
6	72				
7	72				
8	73				
9	78				
10	80				
11					
12	P_{20}	66,6	=PERCENTIL.INC(A1:A10;0,2)		

2) Cálculo del percentil de orden 33 se obtiene:

$$P_k = X_{\left[\frac{n\cdot k+50}{100}\right]} = X_{\left[\frac{n\cdot 33+50}{100}\right]} = X_{\left[\frac{10\cdot 33+50}{100}\right]} = X_{\left[\frac{380}{100}\right]} = X_{3,8} = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{67 + 68}{2} = 67{,}5 = 68$$

En Excel:

	A	B	C	D	E
1	65				
2	65				
3	67				
4	68				
5	70				
6	72				
7	72				
8	73				
9	78				
10	80				
11					
12	P_{33}	67,97	=PERCENTIL.INC(A1:A10;0,33)		

b) Para Datos Agrupados en Tablas de Frecuencia
Se emplea la misma ecuación utilizada en el cálculo de los percentiles para datos sin agrupar.

c) Para Datos Agrupados en Intervalos
Se emplea la ecuación:

$$\mathrm{P_k} = \mathrm{Li_P} + \left(\frac{\frac{\mathrm{nk}}{100} - \mathrm{Fa}}{\mathrm{f_P}}\right)\cdot \mathrm{c}$$

Donde:
Li_p =Límite inferior del intervalo de clase del percentil.
n = número total de datos.
F_a = Frecuencia acumulada del intervalo de clase que antecede al intervalo de clase del percentil.
f_p = Frecuencia absoluta del intervalo de clase del percentil.
c = Ancho del intervalo de clase del percentil.

MODA

a) Para Datos No Agrupados
Se observa el dato que tiene mayor frecuencia

Ejemplo ilustrativo N° 1: Determinar la moda del conjunto de datos 2, 4, 6, 8, 8 y 10

Solución: Mo = 8, porque es el dato que ocurre con mayor frecuencia. A este conjunto de datos se le llama unimodal

En Excel:

	A	B	C	D
1	2			
2	4			
3	6			
4	8			
5	8			
6	10			
7	Mo	8	=MODA.UNO(A1:A6)	

Ejemplo ilustrativo N° 2: Determinar la moda del conjunto de datos: 2, 4, 6, 8 y 10
Solución: Este conjunto de datos no tiene moda, porque todos los datos tienen la misma frecuencia.

Ejemplo ilustrativo N° 3: Determinar la moda del conjunto de datos: 8, 4, 6, 6, 8, 2 y 10
Solución: Este conjunto de datos tiene dos modas, 8 y 6, y se llama bimodal.

En Excel:
Se inserta la función MODA.VARIOS, la cual debe especificarse como fórmula de matriz, para lo cual se selecciona las celdas donde aparecerá la respuesta (B9:B10). Luego se inserta la función MODA .VARIOS, se selecciona las celdas respectivas (A1:A7). Finalmente, se presiona Ctrl+Blog Mayús+Enter.

B9 | f_x {=MODA.VARIOS(A1:A7)}

	A	B	C
1	8		
2	4		
3	6		
4	6		
5	8		
6	2		
7	10		
8	Mo	8	
9		6	

b) Para Datos Agrupados en Tablas de Frecuencia
Se observa el dato tiene mayor frecuencia
Ejemplo ilustrativo: Calcule la moda o modas (si las hay) de los siguientes datos:

x	f
2	1
4	2
6	3
8	1
10	1

Solución:
Se observa que el dato con mayor frecuencia es 6, por lo tanto Mo = 6

c) Para Datos Agrupados en Intervalos

Se halla en el intervalo o clase que tenga la frecuencia más alta, llamada intervalo o clase modal. Se emplea la siguiente ecuación:

$$Mo = L_{Mo} + \left(\frac{D_a}{D_a + D_b}\right) \cdot c$$

$L_{M0=}$ Límite inferior de la clase modal.
D_a = Diferencia entre la frecuencia absoluta de la clase modal y la clase que la antecede.
D_b = Diferencia entre la frecuencia absoluta de la clase modal y la clase que le sigue.
c = ancho de la clase modal.

Ejemplo ilustrativo: Calcule la moda o modas (si las hay) de los siguientes datos:

Intervalo o Clase	f
10-19	3
20-29	7
30-39	15
40-49	12
50-59	8

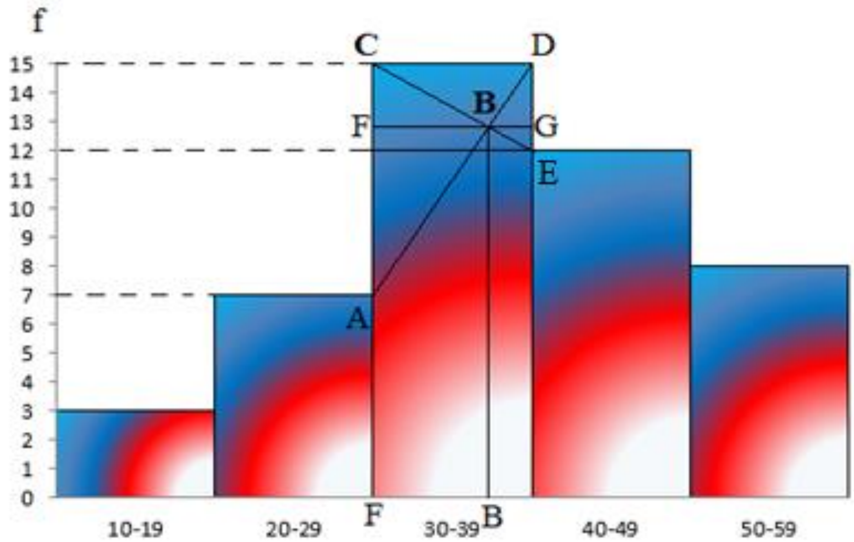
Solución: Se observa que la clase modal es 30-39, ya que es el intervalo con la mayor frecuencia.
Aplicando la ecuación

$$Mo = L_{Mo} + \left(\frac{D_a}{D_a + D_b}\right) \cdot c$$

Se tiene:

$$Mo = 30 + \left(\frac{15-7}{(15-7)+(15-12)}\right) \cdot 10 = 30 + \left(\frac{8}{8+3}\right) \cdot 10 = 30 + \frac{80}{11} = 37{,}27$$

Gráficamente empleando un histograma se calcula la moda de la siguiente manera:



La clase modal es 30-39, ya que es el intervalo con la mayor frecuencia
Observando el histograma se tiene que Mo = 30 + FB
Los triángulos ABC y EBD son semejantes, por lo que se cumple:

$$\frac{FB}{AC} = \frac{BG}{DE}$$

Donde:

AC = Diferencia entre la frecuencia absoluta de la clase modal y la clase que la antecede.
BG es igual al ancho del intervalo 30-39 menos FB.
DE = Diferencia entre la frecuencia absoluta de la clase modal y la clase que le sigue**.**

Remplazando valores y despejando FB se tiene:

$$\frac{FB}{15-7}=\frac{10-FB}{15-12}\Longrightarrow\frac{FB}{8}=\frac{10-FB}{3}\Longrightarrow 3FB=8(10-FB)\Longrightarrow 3FB=80-8FB$$

$$3FB+8FB=80\Longrightarrow 11FB=80\Longrightarrow FB=\frac{80}{11}=7{,}27$$

Por lo tanto Mo = 30 + FB = 30+7,27 = 37,27

Fuente:

Suárez, Mario. & Tapia, Fausto. (2014). *Interaprendizaje de Estadística Básica*. Ibarra, Ecuador: Universidad Técnica de Norte

Suárez, Mario. (2014). *Probabilidades y Estadística empleando las TIC. Ibarra*, Ecuador: Imprenta GRAFICOLOR

Libros y artículos del Mgs. Mario Suárez sobre Aritmética, Álgebra, Geometría, Trigonometría, Lógica Matemática, Probabilidades, Estadística Descriptiva, Estadística Inferencial, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, y Planificaciones Didácticas se encuentran publicados en:
http://es.scribd.com/mariosuarezibujes
http://repositorio.utn.edu.ec/handle/123456789/760
http://www.docentesinnovadores.net/Usuarios/Ver/29591