UNIDAD I. INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS.

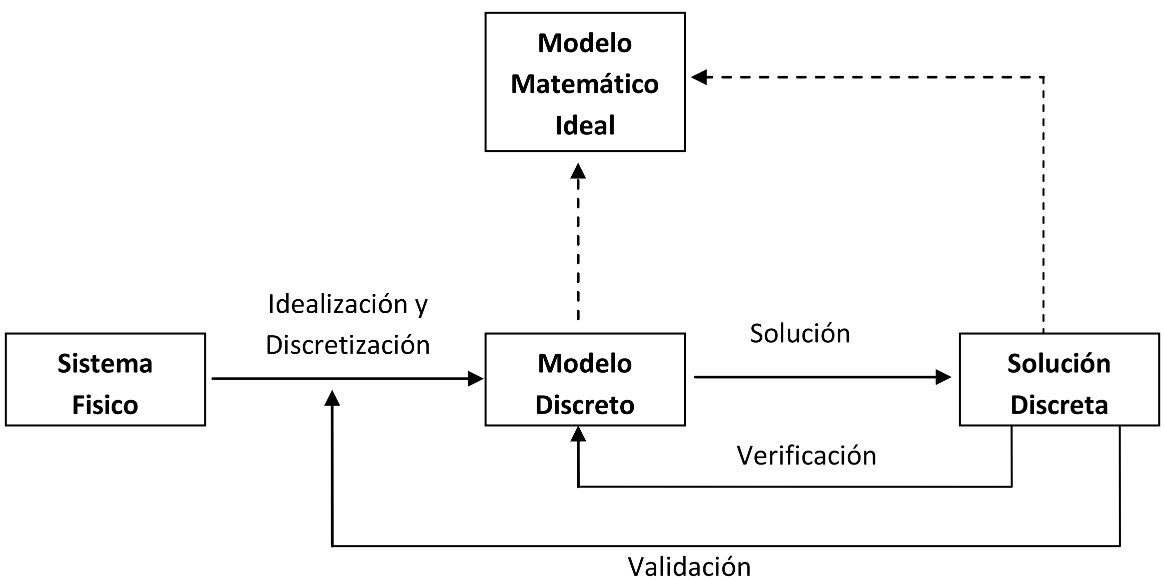
1.1. Importancia de los métodos numéricos.

Los métodos numéricos son técnicas mediante las cuales es posible formular problemas matemáticos de tal forma que puedan resolverse usando operaciones aritméticas.

Los métodos numéricos nos vuelven aptos para entender esquemas numéricos a fin de resolver problemas matemáticos, de ingeniería y científicos en una computadora, reducir esquemas numéricos básicos, escribir programas y resolverlos en una computadora y usar correctamente el software existente para dichos métodos y no solo aumenta nuestra habilidad para el uso de computadoras sino que también amplia la pericia matemática y la comprensión de los principios científicos básicos.

El análisis numérico trata de diseñar métodos para “aproximar” de una manera eficiente las soluciones de problemas expresados matemáticamente.

El objetivo principal del análisis numérico es encontrar soluciones “aproximadas” a problemas complejos utilizando sólo las operaciones más simples de la aritmética. Se requiere de una secuencia de operaciones algebraicas y lógicas que producen la aproximación al problema matemático.



Los métodos numéricos pueden ser aplicados para resolver procedimientos matemáticos en:

- Cálculo de derivadas
- Integrales
- Ecuaciones diferenciales
- Operaciones con matrices
- Interpolaciones
- Ajuste de curvas
- Polinomios

Si los métodos numéricos son los algoritmos (conjuntos detallados y secuenciados de operaciones) que nos llevan hasta las soluciones estimadas de los problemas, el estudio de éstos y del análisis de errores que pueden llevar asociados constituye el Método Numérico.

1.2 Conceptos básicos: cifra significativa, precisión, exactitud, incertidumbre y sesgo.

Cifra significativa:

Los números reales pueden expresarse con todas sus cifras o de forma aproximada. Por ejemplo:

$$3/4=0{,}75 \qquad 4/3 \approx 1{,}333 \qquad \sqrt{2} = 1{,}4142$$

En la vida real, cuando utilizamos los números decimales, se deben dar con una cantidad adecuada de cifras significativas. Pero, ¿Qué es una cifra significativa? Se llaman cifras significativas a aquellas con las que se expresa un número aproximado.

Sería absurdo decir que los litros de agua que caben en un pantano son 13,504,956; diríamos que caben 13.504 millones de litros. En este caso usamos tres **cifras significativas**. Tampoco tiene sentido decir que pesamos 75,345 kg porque sería más sensato decir que pesamos 75,3 kg.

Para aproximar los números reales podemos utilizar el redondeo o el truncamiento.

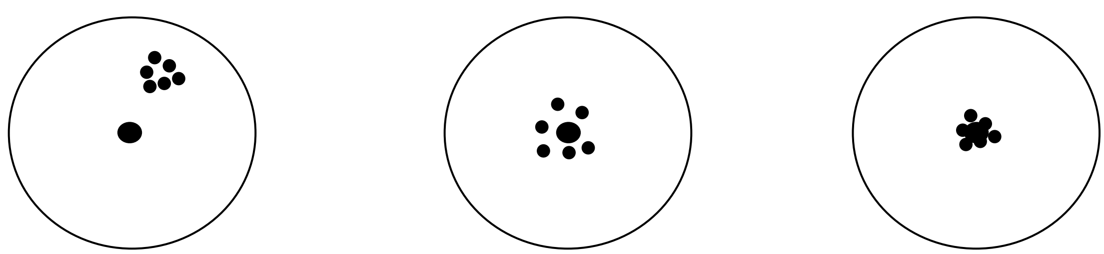
Precisión:

En física, la precisión es una medida de cuantas veces puedes obtener el mismo resultado en una medición. Es decir, tras cierto número de mediciones sucesivas, cuanta diferencia hay entre los resultados obtenidos. Cuanto menor es la dispersión mayor la precisión. Una medida común de la variabilidad es la desviación estándar de las mediciones y la precisión se puede estimar como una función de ella.

Exactitud:

En física, la exactitud es la cercanía con la que un resultado obtenido se aproxima a un valor “verdadero”. Dicho de otra manera, la exactitud es que tanto nos acercamos al resultado que queremos conseguir. En términos estadísticos, la exactitud está relacionada con el sesgo de una estimación. Cuanto menor es el sesgo más exacto es una estimación.

Cuando expresamos la exactitud de un resultado se expresa mediante el error absoluto que es la diferencia entre el valor experimental y el valor verdadero.



Preciso pero NO Exacto

Exacto pero NO Preciso

Preciso y Exacto

Incertidumbre:

Incertidumbre también se le conoce como Imprecisión. Se refiere al grado de alejamiento entre sí, a las diversas aproximaciones a un valor verdadero.

Situación bajo la cual se desconocen las probabilidades de ocurrencia asociados a los diferentes resultados de un determinado evento.

Sesgo:

Existe sesgo cuando la ocurrencia de un error no aparece como un hecho aleatorio (al azar) advirtiéndose que este ocurre en forma sistemática.

Es un alejamiento sistemático del valor verdadero a calcular.

1.3 Tipos de errores.

Todos los resultados de la aplicación de métodos numéricos van acompañados de un error que es conveniente estimar, además de mantener dichos errores dentro de límites aceptables.

Errores inherentes o heredados

Son los errores o valores numéricos con que al operar pueden deberse a dos causas: errores sistemáticos y errores accidentales.

- Errores Sistemáticos, son debidos a los aparatos de medición.
- Errores accidentales, son debidos a la apreciación del observador y sus causas.

Errores por truncamiento.

Se debe a la interrupción de un proceso matemático antes de su terminación sucede cuando se toman solo algunos términos de una serie infinita y/o cuando se toma solo un numero finito del intervalo. Además cuando una calculadora digital solo toma en cuenta los dígitos que caben en la y se suprimen las cifras decimales a partir de la dada.

Dado el número 2,3473:

- 2,34 es el truncamiento a las centésimas.

Errores por redondeo.

Debido a la capacidad de las maquinas para representar cantidades que requieren un gran número de dígitos.

En el redondeo se debe tener en cuenta la primera cifra que se va a suprimir; si es menor que 5 se deja igual la última cifra que se conserva. Si la cifra que se va a suprimir es mayor o igual que 5, se aumenta en una unidad la última cifra que se conserva.

Dado el número 2,3473:

- 2,347 es el redondeo de las milésimas.
- 2,35 es el redondeo a las centésimas.

Error absoluto

El error relativo en una cantidad es igual al valor absoluto de la diferencia entre la cantidad verdadera y su aproximación.

$X = \bar{X} + Ex$

$$Ex = |X - \bar{X}|$$

Donde

X = cantidad verdadera.
$\bar{X}$ = cantidad aproximada.
Ex = error absoluto.

Error relativo

El error relativo de una cantidad cualquiera es igual al cociente de el error absoluto entre la cantidad verdadera, generalmente expresado como porcentaje ya que no tiene unidades.

$$Ex = \frac{|X - \bar{X}|}{X}$$

EJEMPLO:

Dos cantidades al ser medidas nos dan los siguientes resultados:

	Error absoluto	error relativo
A = (100 +1)m	Ea = 1m	Era = 101m / 100m = 0.01 x 100% = 1%
B = (8 + 0.8)ft	Ea = 0.8ft	Era = 8.8ft / 8ft = 0.1 x100% = 10%

Ejemplo 1.

Aplicando el criterio de error relativo, calcular en cuantos términos converge la serie a un Error permisible Ep = 0.001. Si x=1.

$$Er = \frac{|X - \bar{X}|}{X}$$

$$x = 1, \quad e^1 = 2.718281828$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

n	Desarrollo	Error relativo	Condición (Er < Ep)
0	$\sum_{n=0}^{0} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^0}{0!} = \frac{(1)^0}{0!} = 1$	$Er = \frac{\|X - \bar{X}\|}{X}$ $Er = \left\|\frac{2.718281828 - 1}{2.718281828}\right\|$ $Er = 0.632120685$	$Er < 0.001$ $0.632120685 < 0.001$ NO
1	$\sum_{n=0}^{1} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} = 1 + \frac{(1)^1}{1!}$ $= 1 + 1 = 2$	$Er = \frac{\|X - \bar{X}\|}{X}$ $Er = \left\|\frac{2.718281828 - 2}{2.718281828}\right\|$ $Er = 0.26424117$	$Er < 0.001$ $0.26424117 < 0.001$ NO
2	$\sum_{n=0}^{2} \frac{x^n}{n!} = 2 + \frac{x^2}{2!} = 2 + \frac{(1)^2}{2!}$ $= 2 + 0.5 = 2.5$	$Er = \frac{\|X - \bar{X}\|}{X}$ $Er = \left\|\frac{2.718281828 - 2.5}{2.718281828}\right\|$ $Er = 0.26424117$	$Er < 0.001$ $0.080301413 < 0.001$ NO
3	$\sum_{n=0}^{3} \frac{x^n}{n!} = 2.5 + \frac{x^3}{3!} = 2.5 + \frac{(1)^3}{3!}$ $= 2.5 + 0.1666666666$ $= 2.666666667$	$Er = \frac{\|X - \bar{X}\|}{X}$ $\left\|\frac{2.718281828 - 2.666666667}{2.718281828}\right\|$ $Er = 0.018988156$	$Er < 0.001$ $0.018988156 < 0.001$ NO

4	$\sum_{n=0}^{4} \frac{x^n}{n!} = 2.666666667 + \frac{x^4}{4!}$ $= 2.666666667 + \frac{(1)^4}{4!}$ $= 2.666666667 + 0.041666666$ $= 2.708333334$	$Er = \frac{\lvert X - \bar{X} \rvert}{X}$ $\left\lvert \frac{2.718281828 - 2.708333334}{2.718281828} \right\rvert$ $Er = 0.003659847$	$Er < 0.001$ $0.003659847 < 0.001$ NO
5	$\sum_{n=0}^{5} \frac{x^n}{n!} = 2.708333334 + \frac{x^5}{5!}$ $= 2.708333334 + \frac{(1)^5}{5!}$ $= 2.708333334 + 0.008333333$ $= 2.716666667$	$Er = \frac{\lvert X - \bar{X} \rvert}{X}$ $\left\lvert \frac{2.718281828 - 2.716666667}{2.718281828} \right\rvert$ $Er = 0.000594184$	$Er < 0.001$ $0.000594184 < 0.001$ SI

Ejemplo 2.

Aplicando el criterio de error relativo, calcular en cuantos términos converge la serie a un Error permisible Ep = 0.001. Si $x = \pi/2$.

$$Er = \frac{\lvert X - \bar{X} \rvert}{X}$$

$$x = \pi/2, \quad \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.509178$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

n	Desarrollo	Error relativo	Condición (Er < Ep)
0	$\sum_{n=0}^{0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} = \frac{(\pi/2)^0}{0!} = 1$	$Er = \frac{\lvert X - \bar{X} \rvert}{X}$ $Er = \left\lvert \frac{2.509178 - 1}{2.509178} \right\rvert$ $Er = 0.601463$	$Er < 0.001$ $0.601463 < 0.001$ NO
1	$\sum_{n=0}^{1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} = 1 + \frac{(\pi/2)^2}{2!}$ $= 1 + 1.233700 = 2.233700$	$Er = \frac{\lvert X - \bar{X} \rvert}{X}$ $Er = \left\lvert \frac{2.509178 - 2.233700}{2.509178} \right\rvert$ $Er = 0.10978814$	$Er < 0.001$ $0.10978814 < 0.001$ NO

2	$\sum_{n=0}^{2} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 2.233700 + \frac{x^4}{4!}$ $= 2.233700 + \frac{(\pi/2)^4}{4!}$ $= 2.233700 + 0.2536695$ $= 2.4873695$	$Er = \frac{\lvert X - \bar{X} \rvert}{X}$ $Er = \left\lvert \frac{2.509178 - 2.4873695}{2.509178} \right\rvert$ $Er = 0.0086914$	$Er < 0.001$ $0.0086914 < 0.001$ NO
3	$\sum_{n=0}^{3} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 2.4873695 + \frac{x^6}{6!}$ $= 2.4873695 + \frac{(\pi/2)^6}{6!}$ $= 2.4873695 + 0.0208634$ $= 2.5082329$	$Er = \frac{\lvert X - \bar{X} \rvert}{X}$ $\left\lvert \frac{2.509178 - 2.5082329}{2.509178} \right\rvert$ $Er = 0.0003766$	$Er < 0.001$ $0.0003766 < 0.001$ SI

1.4 Software de cómputo numérico.

NAG

El Grupo de Algoritmos numéricos (Numerical Algorithms Group) (NAG) ha desarrollado una biblioteca de Fortran conteniendo alrededor de 1000 subrutinas accesibles al usuario para resolver problemas generales de matemáticas aplicadas, incluyendo: ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, transformada rápida de Fourier, cuadratura, álgebra lineal, ecuaciones no lineales, ecuaciones integrales, y más.

IMSL

La biblioteca numérica de Fortran IMSL hecha por Visual Numerics, Inc. cubre muchas de las áreas contenidas en la biblioteca NAG. También tiene soporte para analizar y presentar datos estadísticos en aplicaciones científicas y de negocios

Numerical récipes: Los libros de Numerical Recipes in C/Fortran son muy populares entre los ingenieros porque pueden ser usados como libro de cocina donde se puede encontrar una "receta (recipe)" para resolver algún problema a mano. Sin embargo, el software correspondiente de Numerical Recipes no es comparable en alcance o calidad al dado por NAG o IMSL.

Debe de mencionarse que todo el software listado anteriormente también esta disponible para el lenguaje C (o al menos puede ser llamado desde C).

El programador sólo tiene que escribir una rutina pequeña (driver) para el problema particular que tenga, porque el software para resolver las subtareas se encuentra ya disponible. De esta forma la gente no tiene que reinventar la rueda una y otra vez.

Matlab

(MATrix LABoratory, "laboratorio de matrices") es un software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M). Está disponible para las plataformas Unix, Windows y Apple Mac OS X.

Entre sus prestaciones básicas se hallan: la manipulación de matrices, la representación de datos y funciones, la implementación de algoritmos, la creación de interfaces de usuario (GUI) y la comunicación con programas en otros lenguajes y con otros dispositivos hardware. El paquete MATLAB dispone de dos herramientas adicionales que expanden sus prestaciones, a saber, Simulink (plataforma de simulación multidominio) y GUIDE (editor de interfaces de usuario - GUI). Además, se pueden ampliar las capacidades de MATLAB con las cajas de herramientas (toolboxes); y las de Simulink con los paquetes de bloques (blocksets).

Es un software muy usado en universidades y centros de investigación y desarrollo. En los últimos años ha aumentado el número de prestaciones, como la de programar directamente procesadores digitales de señal o crear código VHDL.

1.5 Métodos iterativos.

Los métodos iterativos se usan para encontrar raíces de las ecuaciones polinomiales y de un sistema de ecuaciones, usando solamente un solo valor de inicio *x* o dos respectivamente, conociéndosele como valor semilla, algunas veces divergen o se alejan de la raíz verdadera a medida que se avanza en el cálculo, sin embargo, cuando los métodos abiertos convergen, en general lo hacen en pocas iteraciones, ganan ventaja el tiempo a la solución aproximada.

En los métodos iterativos se emplea una fórmula para predecir la raíz. esta fórmula puede desarrollarse como una iteración simple de punto fijo (también llamada iteración de un punto o sustitución sucesiva o método de punto fijo), al arreglar la ecuación *f(x)=0* de tal modo que x este a su lado izquierdo de la ecuación: *x=g(x).*

Esta transformación se realiza mediante operaciones algebraicas o simplemente sumando *x* a cada lado de la ecuación original. Por ejemplo, $x^2 - 2x + 3 = 0$

se arregla para obtener

$$x = \frac{x^2+3}{2} \qquad x = \sqrt{2x-3}$$

mientras que *sen x=0* puede transformarse sumando *x* a ambos lados para obtener

$$x = senx + x$$

estas formulas predicen un nuevo valor de x en función del valor anterior de x. de esta manera, dado un vaklor inicial para la raíz x_i estas ecuaciones se utilizan para obtener una nueva aproximación x_{i+1}, expresada por la formula iterativa

$x_{i+1}=g(x_i)$

El error aproximado de esta ecuación se calcula usando el error normalizado,

$$Ea = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| * 100\%$$

Ejemplo 3.

Use la iteración de punto fijo para localizar la raíz de $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$. Con un error permisible de 0.001.

La función se puede separar directamente y expresarse en la forma, $x_{i+1} = \sqrt{x_i + 2}$

Comenzando con un valor inicial $x_0 = 0$, se aplica esta ecuación iterativa para calcular.

i	x	$Ea = \left\|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right\| * 100\%$	$Et = \|Vr - Va\| * 100\%$
0	0		200
1	1.414213562	100	58.57864376
2	1.847759065	23.46331353	15.2240935
3	1.961570561	5.80205974	3.842943919
4	1.990369453	1.446911903	0.963054666
5	1.997590912	0.361508406	0.240908759
6	1.999397637	0.090363465	0.060236261
7	1.999849404	0.022590015	0.015059632
8	1.999962351	0.005647451	0.003764943
9	1.999990588	0.001411859	0.000941238

De esta manera, se puede observar que cada iteración se acerca cada vez mas el valor aproximado al valor verdadero de la raíz: 2.

Ejemplo 4.

Use la iteración de punto fijo para localizar la raíz de $f(x) = 2sen(\sqrt{x}) - x = 0$. Con un error permisible de 0.001.

La función se puede separar directamente y expresarse en la forma, $x_{i+1} = 2sen\left(\sqrt{x_i}\right)$

Comenzando con un valor inicial $x_0 = 1$, se aplica esta ecuación iterativa para calcular.

i	x	$Ea = \left\|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right\| * 100\%$	$Et = \|Vr - Va\| * 100\%$
0	1		97.237
1	1.68294197	40.58024471	28.94280304
2	1.925655418	12.60419941	4.671458154
3	1.966561956	2.080104171	0.580804427
4	1.971690045	0.260085984	0.067995481
5	1.972299451	0.030898241	0.007054897
6	1.972371381	0.003646868	0.00013808

De esta manera, se puede observar que cada iteración se acerca cada vez mas el valor aproximado al valor verdadero de la raíz: 1.972380998.