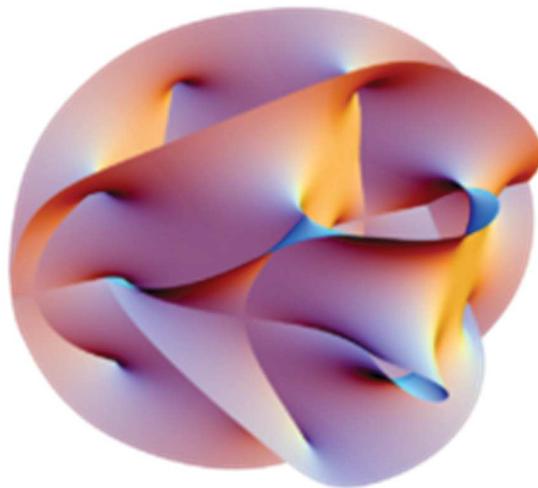




UNIVERSIDAD NACIONAL
EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA
VICERECTORADO ACADÉMICO
DECANATO DE EXTENSIÓN
DPTO. DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
San Cristóbal, Edo. Táchira - Venezuela

ALEPH SUB - CERO



\aleph_0

SERIE DE DIVULGACIÓN 2015 – I

Enero - Junio
ISSN: 1856 – 2752

MATEMÁTICA

REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TACHIRA - UNET
PARAMILLO SAN CRISTOBAL - TACHIRA

RECTOR
Ing. Raúl Casanova

VICERECTOR ACADEMICO
Dr. José Contreras.

VICERECTOR ADMINISTRATIVO
Ing. Martín Paz

SECRETARIA
Arqto. Elcy Núñez

DECANO DE DOCENCIA
Ing. Silverio Bonilla

DECANO DE INVESTIGACION
Arqto. Luis Villanueva

DECANO DE POSTGRADO
Dr. Miguel García

DECANO DE EXTENSION
Ing. José Molina

DECANO DE DESARROLLO ESTUDIANTIL
Lcda. Lisette Santos

JEFE DEL DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y FISICA
Dr. Atilio Guerrero

Enero - Junio 2015 - I

№₀ ALEPH SUB - CERO 2015 – I №₀ ENERO – JUNIO

ALEPH SUB CERO – SERIE DE DIVULGACIÓN. Revista de publicación semestral editada por docentes adscritos al Departamento de Matemática y Física de la Universidad Nacional Experimental del Táchira – UNET.

Objetivo. El objetivo de esta publicación, es la divulgación de artículos vinculados a: la matemática, la física, la informática, entre otras disciplinas científicas. Está dirigida y abierta a profesores, estudiantes y público en general.

Cada autor es el único responsable por el contenido de su artículo.

Todo artículo es sometido a arbitraje externo.

Dirección: Universidad Nacional Experimental del Táchira, telf. 0276-3530422, <http://www.unet.edu.ve/>. Departamento de Matemática y Física, apdo. 436. "Departamento de Matemática y Física" matyfis@unet.edu.ve, Paramillo, San Cristóbal - Táchira – Venezuela.

Se autoriza la reproducción parcial o total del contenido de los artículos editados, siempre que se cite la fuente.

EDITOR GENERAL

Dr. Ramón Mirabal M. - UNET
e-mail: rmirabal@unet.edu.ve

EDITOR SERIE DE DIVULGACION

Dr. Carlos E. Núñez R. - UNET
e-mail: nunezrcar@gmail.com

COMITÉ EDITORIAL

Dr. Ramón Mirabal - UNET - rmirabal12000@gmail.com
Lic. M.Sc. Reinaldo Barrientos - UNET - rey1971@gmail.com
Dr. Ramón Molina – UNET - remolinag61@gmail.com
Dr. Carlos Núñez - UNET - nunezrcar@gmail.com

UNET: <http://subcero.unet.edu.ve/> Contacto: jhernandez@unet.edu.ve

Aleph Sub Cero está indexada y certificada en Revistas Venezolanas de Ciencia y Tecnología (REVENCYT). Código RVA009.

<http://www.revencyt.ula.ve> revencyt@ula.ve revencyt@gmail.com

Depósito Legal: p.p. 200502TA2017
ISSN: 1856 – 2752

La Revista Aleph Sub-Cero se edita de manera ininterrumpida a partir de Diciembre de 1975. Desde el año 2009, sólo se edita de manera electrónica.

CONTENIDO 2015 - I

	Pág.
TIPS.	2
Agradecimiento.	3
Normas a seguir por los Autores.	4
DESDE LA INTERACCIÓN CORDAL A LA MECÁNICA QUÁNTICA FROM STRING INTERACTION TO QUANTUM MECHANICS Alberto Mejías. ULA, Venezuela.	5
DEL PROBLEMA DE BASILEA A LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN PROBLEM BASEL TO THE RIEMANN ZETA FUNCTION Carlos S. Chinae, "Isidro de Arcenegui y Carmona", Sevilla, España.	20
QUANTIZACIÓN BRST-BFV DE TEORÍAS DE CALIBRACIÓN BRST-BFV QUANTIZATION OF GAUGE THEORIES Alberto Mejías. ULA, Venezuela.	52
UNA PROPIEDAD MULTIPLICATIVA DE LA DERIVADA EN FUNCIONES DE CLASE C^1 A MULTIPLICATIVE PROPERTY OF THE DERIVATIVE IN C^1 CLASS FUNCTIONS Tobías de Jesús Rosas Soto, LUZ, Venezuela.	81
QUANTIZACIÓN BRST (BRST QUANTIZATION) Alberto Mejías. ULA, Venezuela.	103
Formato de arbitraje.	126
Declaración de originalidad y cesión de derechos.	128

Cada autor es el único responsable por el contenido de su artículo.

La imagen de la portada es la: "Representación visual de una [variedad de Calabi-Yau](#). Se postula que las dimensiones extras de la teoría de supercuerdas tienen esta forma."

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_supercuerdas

¿Dónde está el origen de esa modalidad de pensamiento filosófico? Puede no haber ningún origen y hasta podría ser erróneo buscar un origen en todo.

YOSHIHIRO MARUYAMA

TIPS

.- Descubren un nuevo tipo de estados cuánticos. El hallazgo podría simplificar las comunicaciones encriptadas.

http://m.tendencias21.net/Descubren-un-nuevo-tipo-de-estados-cuanticos_a40619.html

.- Las hormonas del estrés boicotean las terapias contra el cáncer de mama.

<http://www.abc.es/salud/noticias/20150622/abci-cancer-mama-hormonas-201506221612.html>

.- LANZAMIENTO EN INTERNET DE LA WDL, LA BIBLIOTECA DIGITAL MUNDIAL.

Ya está disponible en Internet, a través del sitio www.wdl.org Reúne mapas, textos, fotos, grabaciones y películas de todos los tiempos y explica en siete idiomas las joyas y reliquias culturales de todas las bibliotecas del planeta. Tiene, sobre todo, carácter patrimonial, es un proyecto impulsado por la Unesco y otras 32 instituciones. La BDM no ofrecerá documentos corrientes, sino "con valor de patrimonio, que permitirán apreciar y conocer mejor las culturas del mundo en idiomas diferentes: árabe, chino, inglés, francés, ruso, español y portugués.

.- 4 consejos para reducir las marcas de las cicatrices.

http://www.bbc.com/mundo/noticias/2015/06/150617_salud_cicatrices_trucos_consejos_il

.- ¿Cuál es el origen de la enorme nube de polvo que envuelve la Luna? Tres teorías científicas que pretenden explicar el temido invierno de "Game of Thrones"

http://www.bbc.com/mundo/noticias/2015/06/150619_ciencia_origen_enorme_nube_polvo_luna_lv

.- Cinco puntos clave de la "histórica" encíclica del papa Francisco sobre el cambio climático

http://www.bbc.com/mundo/noticias/2015/06/150618_papa_enciclica_cambio_climatico_claves_wbm

.- Tres teorías científicas que pretenden explicar el temido invierno de "Game of Thrones"

http://www.bbc.com/mundo/noticias/2015/06/150619_ciencia_explicacion_cientifica_game_of_thrones_lv

El Editor y el Comité Editorial de la Revista **ALEPH SUB-CERO**, agradecen a todos los que de una u otra forma colaboraron con la culminación de esta publicación.

RESPALDO: Vicerrector Académico - UNET
Decano de Extensión - UNET

CERTIFICACION: REVENCYT

2015 – I
Enero - Junio

Normas a seguir por los Autores

Publicación de Divulgación Matemática del Departamento de Matemática y Física de la Universidad Nacional Experimental del Táchira, está abierta a trabajos realizados por profesores, estudiantes y público en general.

Los trabajos deben enviarse escritos con el procesador de palabras “Word” y su editor de ecuaciones con el editor de fórmulas Math Type en caso que lo requiera el artículo, fuente Times New Roman 14, con interlineado 1,5 líneas, a: **Comité Editorial Revista Aleph Sub-Cero – Serie de Divulgación Matemática**, e-mail nunezrcar@gmail.com. Además, debe enviar una copia en formato PDF.

El Editor y el Comité Editorial se reservan el derecho de publicación de los trabajos, los cuales son evaluados de acuerdo a las siguientes consideraciones:

- ✓ Carácter divulgativo del tema.
- ✓ Contenido. Se determina si el Tema posee algún tipo de originalidad ya sea en contenido o en la presentación.
- ✓ Precisión, claridad y profundidad en la presentación del Tema.
- ✓ Rigor metodológico, debe ceñirse a las normas sobre publicación de corte científico. En cuanto a título, bibliografía, citas bibliográficas, entre otros aspectos. Se sugiere utilizar las Normas APA.
- ✓ Título en inglés y español, resumen en inglés y español, palabras claves.
- ✓ Observaciones del Comité.
- ✓ Observaciones del Arbitraje Externo.
- ✓ El artículo no puede ser publicado en cualquier otro medio.

Todo trabajo puede ser *aceptado, devuelto al autor para correcciones o rechazado*. Se concederá al autor de artículo la certificación correspondiente.

ALEPH SUB – CERO
SERIE DE DIVULGACIÓN

№₀ 2015 – I №₀
pp. 05 - 19

DESDE LA INTERACCIÓN CORDAL A LA MECÁNICA QUÁNTICA
(From String Interaction to Quantum Mechanics)

Adunador: **Alberto Mejías¹**

¿Dónde está el origen de esa modalidad de pensamiento filosófico? Puede no haber ningún origen y hasta podría ser erróneo buscar un origen en todo.

YOSHIHIRO MARUYAMA

Recepción: Enero 2015. Revisión y aceptación: Marzo 2015.

Resumen. Teoría de Cuerdas fue desarrollada por la necesidad de dar consistencia a Mecánica Quántica. En este artículo se desea revertir el razonamiento. Pretendemos que Teoría de Campos de Cuerdas Abiertas da una definición completamente consistente de la teoría –es, por lo menos, un sector autoconsistente. Así, encontramos en su estructura, que las reglas de Mecánica Quántica surgen de la naturaleza no conmutativa de las interacciones cordales básicas de empalme/disyunción. Así, en lugar de asumir las reglas de conmutación cuántica entre las variables canónicas usuales, las derivamos del proceso físico de las interacciones cordales. Consecuentemente podemos aplicar ese argumento a Teoría M, para cubrir la mecánica cuántica para toda la física. Si Teoría de Cuerdas o Teoría M realmente subyacen toda la física, parece que se ha abierto la puerta a una explicación de los orígenes de la mecánica cuántica desde el punto de vista de los procesos físicos.

Descriptores: Teoría de Cuerdas, Teoría M, Mecánica Quántica, Teoría Quántica de Campos, estrella MOYAL.

Abstract. String Theory was developed by demanding consistency with Quantum Mechanics. In this paper it is wished to reverse the reasoning. We pretend that Open String Field Theory is a fully consistent definition of the theory –it is at least a self-consistent sector. Then we find in its structure that rules of Quantum Mechanics emerges from the non-commutative nature of the basic string joining/split-

¹ ALBERTO R. MEJÍAS E. es Licenciado en Matemáticas, egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes (ULA) Mérida-Venezuela. Es profesor de Topología, jubilado de la Universidad de los Andes. alrame59@gmail.com

Alberto Mejías

ting interactions. Thus, rather than assuming the quantum commutation rules among the usual canonical variables we derive them from the physical process of string interactions. Morally we could apply such an argument to M-theory to cover Quantum Mechanics for all Physics. If String Theory or M-theory really underlies all physics, it seems that the door has been opened to an explanation of the origins of quantum mechanics from the physical processes point of view.

Keywords: String Theory, M-theory, Quantum Mechanics, Quantum Field Theory, MOYAL star.

1. INTRODUCCIÓN

La Mecánica Cuántica (QM) funciona sorprendentemente bien en todas partes conocidas de la Física Microscópica. Se puede deducir la Física Clásica como el límite de QM para grandes números cuánticos (o equivalentemente, el límite para \hbar pequeño). Por lo tanto, la creencia general es que QM es la única regla para todo tipo de mecánica. A pesar del tremendo éxito de QM, sin ningún razonamiento subyacente, hay que poner, misteriosamente, "a mano", las reglas fundamentales de conmutación de las cuales deriva toda la QM, a saber $[x, p] = i\hbar$ para todos los grados de libertad. También está bien establecido que, si se acepta la regla de cuantización, se tienen todas las increíbles y correctas consecuencias de la mecánica cuántica. El éxito de QM es por supuesto una justificación para aceptar como correcta, a la misteriosa regla, pero nos deja pidiendo una explicación subyacente.

En este artículo vamos a presentar argumentos de que puede haber una explicación física del origen de las reglas de QM. Vamos a mostrar que hay un vínculo claro entre las reglas de conmutación de los operadores en QM y las interacciones no conmutativas de empalme/disyunción [1] que fueron expresadas en el lenguaje de la formulación estrella MOYAL de Teoría de Campos Cordales (MSFT) [2] en una versión recientemente mejorada y más intuitiva [3]. Excepto por la *similitud matemática*, la \star MOYAL (en MSFT no tiene nada que ver con el producto MOYAL [4] que reproduce² a QM, porque las cantidades básicas no conmutativas en la \star de

² Para la explicación de cómo el, bien conocido, producto MOYAL [4] para las funciones de espacios de fases, clásicas, reproduce todos los detalles de QM, leer la sección III en [3], que resume los elementos esenciales de esta correspondencia.

Desde la interacción cordal a la mecánica cuántica

cuerdas en MSFT, son muy diferentes de las conjugadas canónicas indicadas por la mecánica cuántica. Sin embargo, encontramos cómo vincular a los conmutadores básicos en QM, a la \star de cuerdas y *derivar las reglas de QM sólo a partir de las reglas de empalme/disyunción de cuerdas*. Este vínculo sugiere que existe un fenómeno físico más profundo, interacciones cordales, subyacente a las reglas cuánticas usuales de QM, proporcionando así, una posible explicación de su origen.

Los argumentos esenciales para la tesis en este documento, pueden presentarse adecuadamente en un modelo simplificado que capta los ingredientes necesarios de MSFT. El modelo simplificado, que llamamos mini-MSFT, consiste básicamente, en el sistema del espacio de fase de dos partículas, en lugar de todo el espacio de fase de un número infinito de partículas que constituyen todos los puntos de una cuerda. Las dos partículas pueden ser pensadas como los puntos extremos de una cuerda abierta, pero también es posible no considerar para nada el concepto de cuerda, para discutir las ideas principales. Esto es así, porque sólo las propiedades del espacio de fase, en lugar de las propiedades de la dinámica de las dos partículas, entran en la parte principal de la discusión. Por lo tanto, para mantener nuestra discusión lo más simple posible, vamos a definir el sistema mini-MSFT en Sección 3 y discutir cómo derivar las propiedades de QM a partir de las interacciones "cordales". El mini-MSFT puede ser un modelo útil por su propio derecho, para discutir algunos sistemas físicamente interesantes, como en los ejemplos que esbozamos al final de Sección 3.

Aunque no utilizaremos todo el instrumental de MSFT en este trabajo, comenzamos nuestra discusión en la sección 2, con una breve descripción de su configuración para que el lector, incluso sin saber mucho acerca de Teoría de Cuerdas, pueda ver la conexión entre Teoría de Campos de Cuerdas y el modelo simplificado de 2 partículas en Sección 3 y sea capaz de deducir fácilmente, que los argumentos de la tesis en este documento, dados en el contexto del modelo simple en Sección 3, se aplican igualmente a la Teoría de Cuerdas total, en nuestro preferido lenguaje MSFT, para toda la cuerda. La Teoría de Cuerdas total (y su extensión Teoría M) es necesaria para poder aplicar la discusión a toda la Física, siempre y cuando uno esté dispuesto a hacer la suposición de que Teoría de Cuerdas o M-Teoría en realidad fundamenta a toda la Física.

2. GRADOS DE LIBERTAD EN MSFT

Alberto Mejías

Los grados de libertad de posición de cuerda abierta $X^M(\sigma)$, para un valor fijo τ del parámetro de la lámina mundi, vienen parametrizados por el parámetro σ de la lámina mundi con $0 \leq \sigma \leq \pi$. WITTEN [1] sugirió considerar al campo cordal $\psi(X(\sigma))$ como una matriz $\psi_{ij}(\bar{x})$ infinito dimensional

$$\psi(X(\sigma)) = \psi_{x_{L(\sigma)} x_{R(\sigma)}}(\bar{x}), \quad (2.1)$$

cuyos índices izquierdo/derecho $i \sim x_{L(\sigma)}^M$ y $j \sim x_{R(\sigma)}^M$ son las mitades izquierda/derecha de la cuerda con respecto al punto medio en $\sigma = \pi/2$; es decir, $x_{L(\sigma)}^M = \{X^M(\sigma) \text{ para } 0 \sim \sigma < \pi/2\}$ y $x_{R(\sigma)}^M = \{X^M(\sigma) \text{ para } \pi/2 < \sigma \sim \pi\}$ mientras que $\bar{x}^M \equiv X^M(\pi/2)$ es la localización del punto medio. En [1] se sugiere que los productos de campos $\psi_1(X) \star \psi_2(X) = \psi_{12}(X)$, en teoría de campos de cuerdas abiertas, son productos matriciales no conmutativos, de matrices de la forma (2.1) y que la acción es similar a la teoría CHERN-SIMONS

$$S = \int \left(\frac{1}{2} \psi \star (\hat{Q}\psi) + \frac{g}{3} \psi \star \psi \star \psi \right). \quad (2.2)$$

donde \hat{Q} es el operador BRST (donde BRST se refiere a BECCHI, ROUET, STORA y TYUTIN) de una teoría conformal de campos (CFT) sobre la lámina mundi. Esta propuesta funcionó y produjo correctamente al tipo de modelo VENEZIANO de amplitudes de dispersión perturbacional cordales [5].

El producto matricial en $\psi \star \psi$ fue implantado volviendo a la teoría conformal de campos en la lámina mundi, para realizar los cálculos, que resultaron ser prohibitivamente complicados y se alejaron de la sencillez y la elegancia de la configuración matrizoidal del producto \star y la acción. Buscando una manera de evitar las complicadas aplicaciones de CFT, tratando de mantener la elegante estructura algebraica, se sugirió en [2], la formulación de producto estrella, de MOYAL, de la Teoría de Campos Cordales (MSFT) y los cálculos realizados en [6-8], demostraron que éste era un enfoque más eficiente para calcular y recuperar correctamente las amplitudes VENEZIANO perturbacionales, incluyendo un mayor grado de exactitud para las versiones fuera de concha (off-shell) de las amplitudes [8]. El formalismo MSFT ha sido reformulado recientemente en [3] en una nueva base de grados de libertad de modo que todas las expresiones, especialmente el producto \star y los cálculos, se simplifican enormemente. Es la nueva forma del producto estrella que se muestra a continuación, que sugiere la conexión entre empalme cordal y mecáni-

Desde la interacción cordal a la mecánica cuántica

ca cuántica.

En la nueva versión de MSFT el campo de cuerdas se toma como un funcional $A(x_+, p_-)$ de la mitad del espacio de fase de la cuerda, donde $x_+^M(\sigma)$ es la parte simétrica de $X^M(\sigma)$ bajo reflexiones con respecto al punto medio, $x_+^M(\sigma) = \frac{1}{2}(X^M(\sigma) + X^M(\pi - \sigma))$, mientras que $p_{-M}(\sigma) = \frac{1}{2}(P_M(\sigma) - P_M(\pi - \sigma))$ es la parte antisimétrica de la densidad del impulso. Nótese que $p_{-M}(\sigma)$ es la conjugada canónica de $x_+^M(\sigma)$ y conmuta con $x_+^M(\sigma)$ en la primera quantización de la cuerda. Las simétrica/antisimétrica $x_{\pm}(\sigma)$ están relacionadas con (x_L, \bar{x}, x_R) , en la versión WITTEN, por $x_{\pm} = \frac{1}{2}(x_L \pm x_R)$, incluyendo al punto medio \bar{x} como parte de $x_+(\sigma)$. Así, el campo MSFT $A(x_+, p_-)$ se relaciona con el campo $\psi(X) = \psi(x_L, \bar{x}, x_R) = \psi(x_+, x_-)$ mediante una transformación FOURIER de x_+ a p_- . Con esta elección de *grados de libertad del semiespacio de fase*, para marcar al campo cordal $A(x_+(\sigma), p_-(\sigma))$, el producto matricial para el empalme de cuerdas en el espacio de posición $\psi_{12}(X) = \psi_1(X) \star \psi_2(X)$, se aplica al producto MOYAL en el *semiespacio de fase*, $A_{12}(x_+, p_-) = A_1(x_+, p_-) \star A_2(x_+, p_-)$ con

$$\star = \exp\left[\frac{1}{4} \int_0^{\pi} d\sigma \operatorname{sign}\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right) (\bar{\partial}_{p-M(\sigma)} \bar{\partial}_{x_+^M(\sigma, \varepsilon)} - \bar{\partial}_{p-M(\sigma)} \bar{\partial}_{x_+^M(\sigma, \varepsilon)})\right]. \quad (2.3)$$

Una característica muy importante del nuevo producto estrella, es que es independiente de trasfondo, porque el espacio de fase no considera cuál teoría conformal de campos sobre la lámina mundi, subyace a la acción de la cuerda S_{string} ó a los campos de trasfondo que contiene. La suma sobre los índices M en (2.3), no implica una métrica, porque X^M está definido con un índice superior y por tanto, P_M , que se deriva de la acción según el procedimiento canónico, $P_M = \partial S_{string} / (\partial_{\tau} X^M)$, automáticamente tiene un índice inferior.

Un aspecto elegante de MSFT, que será centralmente relevante para nuestra discusión en este trabajo, es que los operadores cuánticos canónicos para cualquier punto de la cuerda $\hat{X}(\sigma), \hat{P}(\sigma)$ están representados en el campo cordal $A(x_+, p_-)$ so-

Alberto Mejías

lamente por las operaciones cordales de empalme/disyunción, a saber multiplicación estrella por la izquierda o por la derecha, dependiendo de si el punto está a la izquierda o a la derecha del punto medio en $\sigma = \pi/2$

$$\hat{X}^M(\sigma, \varepsilon)A(x_+, p_-) = \begin{cases} X^M(\sigma, \varepsilon) \star A(x_+, p_-), & \text{si } 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}; \\ A(x_+, p_-) \star x_+(\sigma, \varepsilon) - 1^{MA}, & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq \sigma \leq \pi \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\hat{P}^M(\sigma)(x_+, p_-) = \begin{cases} (e^{-\varepsilon|\partial\sigma|} p_{-M}(\sigma)) \star A(x_+, p_-), & \text{si } 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}; \\ A(x_+, p_-) \star (e^{-\varepsilon|\partial\sigma|} p_{-M}(\sigma))(-1)^{MA}, & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq \sigma \leq \pi. \end{cases} \quad (2.5)$$

Nótese que, en el lado derecho, los campos cordales que se empalman son $A(x_+, p_-)$ y x_+ ó A y p_- donde x_+ y p_- , son casos especializados de un campo cordal más general $A(x_+, p_-)$.

Este producto \star incluye un pequeño parámetro ε es un regulador para evitar notorias anomalías de punto medio y el índice $M = (\mu, b, c)$ incluye espacio-tiempo (μ) y grados de libertad virtuales (b, c), todos los cuales son necesarios y aseguran una teoría bien definida. Se recomienda [3] al lector interesado en los detalles. Ninguna de estas complicaciones se necesitará para discutir los puntos principales de este documento. A continuación pasaremos a la mini-MSFT que imita de forma simplificada solamente, al producto estrella para empalme/disyunción cordal, utilizando sólo dos partículas. El resto de este documento debe ser comprensible para el lector sin tener que saber nada sobre cuerdas o teoría de campos cordales.

3. MODELO DE ENSAYO CON DOS PARTÍCULAS (MINI-MSFT)

Comenzamos con el espacio de fase de dos partículas denominadas L (izquierda) y R (derecha). Puede ser útil imaginar que éstas corresponden a los dos puntos finales de una cuerda; sin embargo, esta imagen no es necesaria y la configuración siguiente puede aplicarse a circunstancias físicas más generales. Las partículas se encuentran en posiciones arbitrarias (\vec{x}_L, \vec{x}_R) , y tienen ímpetus conjugados

Desde la interacción cordal a la mecánica cuántica

canónicos (\bar{p}_L, \bar{p}_R) . Su centro de masa y coordenadas relativas son, $R_i = \frac{1}{2}(x_L^i + x_R^i)$ y $r_i = \frac{1}{2}(x_L^i - x_R^i)$, mientras que los ímpetus canónicamente conjugados a (R_i, r_i) son el ímpetu total $P_i = (p_{iL} + p_{iR})$ y el ímpetu relativo $p_i = \frac{1}{2}(p_{iL} - p_{iR})$. La dinámica es controlada por algunos Hamiltonianos $H(P, p, R, r)$ cuyos detalles no son importantes por ahora.³

Independiente del hamiltoniano, el espacio de fase (P, p, R, r) tiene las propiedades canónicas estándar; es decir, podemos definir los clásicos corchetes POISSON o conmutadores cuánticos basados en los pares canónicos (R^i, P_j) y (r^i, p_j) . En particular, el clásico corchete POISSON entre dos funciones de espacio fase, cualesquiera, $U(P, p, R, r)$, $V(P, p, R, r)$, es

$$\{U, V\} = \frac{\partial U}{\partial R^i} \frac{\partial V}{\partial P_i} - \frac{\partial U}{\partial P_i} \frac{\partial V}{\partial R^i} + \frac{\partial U}{\partial r^i} \frac{\partial V}{\partial p_i} - \frac{\partial U}{\partial p_i} \frac{\partial V}{\partial r^i}. \quad (3.1)$$

Para proceder con la cuantización usual en Mecánica Cuántica (QM) podemos definir la base del espacio propio para un conjunto completo de operadores de conmutación tales como espacio de posición, $\langle \bar{x}_L, \bar{x}_R |$ ó $\langle \bar{R}, \bar{r} |$ y expresar la amplitud de probabilidad para un estado cuántico arbitrario $|\psi\rangle$ en cualquiera de tales bases como el producto punto en el espacio HILBERT, e.g. $\psi(x_L, x_R) = \langle x_L, x_R | \psi\rangle$ ó $\psi(R, r) = \langle R, r | \psi\rangle$. Estaremos interesados en la transformada FOURIER de este último

$$A(R, p) \xleftarrow{FOURIER(p,r)} \psi(R, r). \quad (3.2)$$

donde $\langle R, p |$ es la base propia completa para el espacio de los operadores de con-

³ El hamiltoniano H en el modelo de ensayo, es el análogo del operador VIRASORO L_0 para una cuerda en cualquier trasfondo, que desempeña un papel de operador de energía cinética en el término cuadrático en la teoría de campos cordales en la calibración SIEGEL. Más generalmente, el operador cinético en teoría de campos cordales es el operador BRST como en (2.2).

Alberto Mejías

mutación (\hat{R}^i, \hat{p}_i) . Consideraremos a la amplitud de probabilidad $A(R, p) = \langle R, p | \psi \rangle$, tanto un campo de una teoría de campos como una función del *semi-espacio de fase clásico* (\bar{R}, \bar{p}) . Esta configuración está motivada por MSFT que fue brevemente descrita en Sección 2. Vamos a llamar el modelo de ensayo en esta sección "mini-MSFT". Los paralelismos entre la MSFT total y mini-MSFT son

$$R^i \sim x_+^M(\sigma), \quad r^i \sim x_-^M(\sigma),$$

$$P_i \sim p_{+M}(\sigma), \quad p_i \sim p_{-M}(\sigma)$$

y no consideramos hacer paralelos entre el i y M , lo cual permite muchas posibilidades como bosones y fermiones (ver [3]); pero, para mantener la discusión simple, es suficiente considerar al espacio euclidiano bosónico, para i .

Para quantizar este sistema de 2 partículas en una nueva forma consideraremos el enfoque inspirado por MSFT. No asumiremos à priori, las reglas cuánticas de conmutación de los operadores $(\hat{P}_i, \hat{p}_i, \hat{R}_i, \hat{r}_i)$ que describen la naturaleza tan bien, pero cuyo origen fundamental sigue siendo misterioso. Por el contrario, como origen físico primario de QM partiremos de un producto no conmutativo que tiene significado físico como las interacciones de empalme/disyunción de las cuerdas. Solo a partir del álgebra de empalme/disyunción cordal derivamos el álgebra cuántica de los operadores $(\hat{P}_i, \hat{p}_i, \hat{R}_i, \hat{r}_i)$ sin asumirla. Las operaciones de empalme/disyunción cordal fueron formuladas para cuerdas abiertas en [1] como un producto matrizoidal para el campo como en (2.1). Para el presente modelo de ensayo con sólo dos partículas definimos un producto matrizoidal similar de campos en el espacio de posición de la forma

$$\psi_{12}(x_L, x_R) = \int_{-\infty}^{\infty} d^n z \psi_1(x_L, z) \psi_2(z, x_R), \quad (3.3)$$

donde cada campo $\psi(x_L, x_R)$ es considerado como una matriz infinito-dimensional cuyas filas y columnas está marcadas por los índices continuos (x_L, x_R) que corresponden a las ubicaciones de las dos partículas. La regla matrizoidal (3.3) se interpreta como una receta para calcular la amplitud de probabilidad $\psi_{12}(x_L, x_R)$ cuando dos nubes de 2 partículas, descritas por $\psi_1(x_L, x_R)$ y $\psi_2(x_L, x_R)$, se

Desde la interacción cordal a la mecánica cuántica

unen en una sola nube $\psi_{12}(x_L, x_R)$, por la aniquilación de un par de partículas, una de cada nube, cuando se juntan localmente en todos los posibles puntos \vec{z} de todo el volumen completo. Esto es similar a la imagen de las láminas mundi de empalme/disyunción; pero, en el presente caso hay grados de libertad dinámicos sólo en los extremos de la cuerda. Fue demostrado en [2,3] que este empalme/disyunción puede ser formulado equivalentemente, como un producto tipo MOYAL, $A_{12} = A_1 \star A_2$, en el semi-espacio de fase (R^i, p_i) relacionado con el espacio de posición (x_L, x_R) mediante la transformada FOURIER indicada en (3,2).

Ahora damos los detalles del producto \star en el semi-espacio de fase para esta mini-MSFT simplificada. Es físicamente diferente, pero matemáticamente análogo al producto MOYAL usual:

$$\begin{aligned} A_{12}(R, p) &= (A_1 \star A_2)(R, p) \\ &= A_1(R, p) \exp\left(\frac{i\theta}{2} (\bar{\partial}_{R^i} \bar{\partial}_{p_i} - \bar{\partial}_{R^i} \bar{\partial}_{p_i})\right) A_2(R, p) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Es el paralelo del producto estrella de las cuerdas en (2.3). El parámetro θ debe tener las dimensiones de la constante PLANCK \hbar , así que debe ser un múltiplo de \hbar por una constante adimensional. De hecho, mostraremos que es idénticamente la constante PLANCK. Las flechas en (3.4) instruyen al lector a aplicar las derivadas de las funciones a la izquierda (A_1) ó a la derecha (A_2). Por ejemplo, expandiendo en potencias de θ a este producto \star , se tiene

$$A_{12} = A_1 A_2 + \frac{i\theta}{2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial R^i} \frac{\partial A_2}{\partial p_i} - \frac{\partial A_1}{\partial p_i} \frac{\partial A_2}{\partial R^i} \right) + \dots \quad (3.5)$$

El término de primer orden en θ parece un corchete POISSON, pero éste es claramente diferente del corchete POISSON canónico de la mecánica clásica en la ecuación (3.1), ya que no involucra a los conjugados canónicos tradicionales que están en (3.1). En cambio, la posición del centro de masa, y el impulso relativo, p_i , que pertenecen a diferentes pares canónicos tradicionales, se configuran para desempeñar un papel nuevo, análogo al de los conjugados canónicos en el semi-espacio de fase (R^i, p_i) .

Usando (3.4) computamos $A_1 \star A_2$ para los casos especiales en los que A_1 ó

Alberto Mejías

A_2 es sólo R^i ó p_i , obteniendo así, la multiplicación izquierda o derecha de la A general de los grados de libertad elementales en el semi-espacio de fase

$$\begin{aligned}
 R^i \star A &= \left(R^i + \frac{i\theta}{2} \frac{\bar{\partial}}{\partial p_i} \right) A(R, p), \\
 A \star R^i &= A(R, p) \left(R^i - \frac{i\theta}{2} \frac{\bar{\partial}}{\partial p_i} \right), \\
 p_i \star A &= \left(p_i - \frac{i\theta}{2} \frac{\bar{\partial}}{\partial R^i} \right) A(R, p), \\
 A \star p_i &= A(R, p) \left(p_i + \frac{i\theta}{2} \frac{\bar{\partial}}{\partial R^i} \right). \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

No hay potencias superiores de θ porque las derivadas de orden superior en la expansión de la exponencial en (3.4) se desvanecen para este cálculo. Otras formas útiles equivalentes de escribir el producto \star general, son

$$A_1 \star A_2 = \begin{cases} A_1 \left(\left(R' + \frac{i\theta}{2} \frac{\bar{\partial}}{\partial p} \right), \left(p' - \frac{i\theta}{2} \frac{\bar{\partial}}{\partial R} \right) \right) A_2(R, p) \Big|_{R'=R, p'=p} \\ A_1(R', p') A_2 \left(\left(R - \frac{i\theta}{2} \frac{\bar{\partial}}{\partial p'} \right), \left(p + \frac{i\theta}{2} \frac{\bar{\partial}}{\partial R'} \right) \right) \Big|_{R'=R, p'=p} \end{cases} \tag{3.7}$$

Justo como el bien conocido producto estrella MOYAL [4], que está relacionado con el corchete POISSON (3.1) en el espacio de fase pleno (P, p, R, r) , reproduce todos los aspectos de la mecánica cuántica ordinaria (ver Nota 2), el producto estrella MOYAL de empalme cordal en (3.4), evidentemente, producirá un sistema cuánticoide en el semi-espacio de fase (R, p) , que llamaremos *mecánica cuántica inducida* (iQM). Esta iQM inducido tiene las siguientes propiedades:

- El producto es asociativo $A_1 \star (A_2 \star A_3) = (A_1 \star A_2) \star A_3 = A_1 \star A_2 \star A_3$, al igual que debe esperarse del producto asociativo de operadores en la iQM inducida, donde cualquier producto $\hat{A}_1 \hat{A}_2 \hat{A}_3 \dots$ no requiere paréntesis para computarse sin ambigüedades.
- Utilizando (3.6) calculamos los productos de los grados de libertad elementales del semi-espacio de fase (R, p)

$$R^i \star R^j = R^i R^j, \quad p_i \star p_j = p_i p_j,$$

Desde la interacción cordal a la mecánica cuántica

$$R^i \star p_j = R^i p_j + \frac{i\theta}{2} \delta_j^i, \quad p_j \star R^i = p_j R^i - \frac{i\theta}{2} \delta_j^i. \quad (3.8)$$

Esto nos lleva al conmutador estrella

$$[R^i, p_j]_{\star} = R^i \star p_j - p_j \star R^i = p_j R^i - i\theta \delta_j^i. \quad (3.9)$$

Por lo tanto, (R^i, p_j) se comportan como grados de libertad mecánico-cuánticos. Pero, *esto no es mecánica cuántica*, ya que en QM ordinaria los operadores correspondientes conmutan $[\hat{R}^i, \hat{p}_j] = 0$. En cambio, esta es la propiedad de conmutación básica en iQM que proviene de las interacciones no conmutativas en teoría de cuerdas.

Ahora demostraremos que esta iQM es una semilla para la construcción de la usual QM en el espacio de operadores completo $(\hat{x}_L^i, \hat{p}_{Li}, \hat{x}_R^i, \hat{p}_{Ri})$. Una aplicación entre operadores en QM y su representante en iQM es una propiedad elegante e intuitiva de MSFT según lo dado en Ecs. (2,4), (2.5). Traducido a mini-MSFT, su aplicación se da sólo en términos de \star entre dos campos en el semi-espacio de fase, como sigue

$$\left. \begin{array}{l} \hat{x}_L^i A = R^i \star A \\ \hat{p}_L^i A = p_i \star A \end{array} \right\} \text{el producto } \star \text{ por la izquierda, para la partícula } L$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{x}_R^i A = A \star R^i \\ \hat{p}_R^i A = A \star (-p_i) \end{array} \right\} \text{el producto } \star \text{ por la derecha, para la partícula } R \quad (3.10)$$

La razón para el signo $(-)$ en la última línea se explica naturalmente en la versión cordal de la \star en la MSFT : es porque para las cuerdas $x_+^i(\sigma)$, es simétrica con respecto a reflexiones desde el punto medio, mientras que $p_-(\sigma)$ es antisimétrica, conduciendo a $+p_-(\sigma) |_{\sigma \geq \pi/2} \rightarrow -p_-(\sigma) |_{\sigma \leq \pi/2}$. Usando esta aplicación, ahora comprobemos la consistencia de las reglas de conmutación en QM con respecto a sus representativas en iQM, dadas arriba. Calculamos los conmutadores utilizando

Alberto Mejías

sólo las reglas de \star en (3.10), la asociatividad de \star y el resultado para el conmutador de \star en (3,9). Encontramos

$$[\hat{x}_L^i, \hat{p}_{Lj}]A = [R^i, p_j]_* \star A = i\theta \delta_j^i A \quad (3.11)$$

$$[\hat{x}_R^i, \hat{p}_{Rj}]A = A \star [-p_j, R^i]_* = i\theta \delta_j^i A \quad (3.12)$$

$$[\hat{x}_L^i, \hat{p}_{Rj}]A = -R^i \star A \star p_j + R^i \star A \star p_j = 0 \quad (3.13)$$

$$[\hat{x}_L^i, \hat{p}_{Rj}]A = p_j \star A \star R^i - p_j \star A \star R^i = 0 \quad (3.14)$$

Para para que este resultado en iQM coincida con los conmutadores de operadores en QM $[\hat{x}_L^i, \hat{p}_{Lj}] = i\hbar \delta_j^i = [\hat{x}_R^i, \hat{p}_{Rj}]$, debemos identificar al parámetro θ con la constante PLANCK

$$\theta = \hbar. \quad (3.15)$$

Así hemos derivado las reglas básicas de QM para cada partícula de la iQM inducida por la interacción cordal, utilizando sólo productos de campos en el semi-espacio de fase, que representan a empalme/disyunción cordal. Por lo tanto, la no-conmutatividad inherente a las interacciones cordales, está conectada directamente a las misteriosas reglas de quantización previamente inexplicadas, de QM. Hasta ahora esto ha sido considerado dentro de un modelo de ensayo, pero puesto que el mismo fenómeno es también válido para la Teoría de Cuerdas total (véase [3]), suponiendo que la Teoría de Cuerdas es la teoría fundamental para toda la Física, entonces se convierte en una declaración para toda la física.

Continuando con mini-MSFT, a continuación, investigamos algunos operadores construidos a partir de los básicos. Partiendo de las propiedades básicas en (3.10), podemos derivar la representación de cada operador $(\hat{P}_i, \hat{p}_i, \hat{R}^i, \hat{r}^i)$, en términos de sólo el producto \star de campos y luego evaluar los productos estrella en cada línea de abajo usando (3.6), después de insertar $\theta = \hbar$, como sigue

$$\begin{aligned} \hat{R}^i A &= \frac{1}{2}(\hat{x}_L^i + \hat{x}_R^i)A = \frac{1}{2}(R^i \star A + A \star R^i) = R^i A, \\ \hat{r}^i A &= (\hat{x}_L^i - \hat{x}_R^i)A = (R^i \star A - A \star R^i) = i\hbar \partial_{p_i} A, \end{aligned}$$

Desde la interacción cordal a la mecánica cuántica

$$\begin{aligned}\widehat{P}^i A &= (\widehat{p}_{iL} + \widehat{p}_{iR}) A = (p_i \star A - A \star p_i) = -i\hbar \partial_{R^i} A, \\ \widehat{p}^i A &= \frac{1}{2}(\widehat{p}_{iL} - \widehat{p}_{iR}) A = \frac{1}{2}(p_i \star A + A \star p_i) = p_i A.\end{aligned}\quad (3.16)$$

El resultado final en términos de representación del operador diferencial es plenamente consistente con la correspondiente, bien conocida, representación de operadores diferenciales de operadores en QM. Pero el punto aquí es que este resultado se desprende tan sólo de las interacciones de acoplamiento/disyunción de cuerdas, vía el producto \star de campos, dadas en (3.4) y (3.10).

Yendo más allá de (3.10), derivamos los siguientes resultados bien adicionales que fueron significativos en la formulación de MSFT [3]: si tenemos cualquier operador cuántico $\widehat{O}_L(\widehat{x}_L, \widehat{p}_L)$ (respectivamente $\widehat{O}_R(\widehat{x}_R, \widehat{p}_R)$) en QM usual, construido a partir de sólo los grados de libertad de la partícula L (respectivamente R), entonces su representación en la versión iQM, viene dada por la misma función en la que reemplazamos $(\widehat{x}_L^i \rightarrow R^i \star$ y $\widehat{p}_{iL} \rightarrow p_i \star)$ y análogamente $(\widehat{x}_R^i \rightarrow \star R^i$ y $\widehat{p}_{iR} \rightarrow \star(-p_i))$, donde \star está, a saber, a la derecha (izquierda) de R ó p . Es decir,

$$\begin{aligned}\widehat{O}_L(\widehat{x}_L, \widehat{p}_L) A &= O_{L\star}(R, p) \star A \quad (\star \text{ por la izquierda}), \\ \widehat{O}_R(\widehat{x}_R, \widehat{p}_R) A &= A \star O_{\star R}(R, -p) \quad (\star \text{ por la derecha}),\end{aligned}\quad (3.17)$$

donde $O_{L\star}$ significa que todos los factores R, p , dentro de él, están multiplicados estrella uno con otro, en el mismo orden en que aparecen los operadores en la versión QM; mientras que en el caso de $O_{\star R}$, todos los factores R ó $(-p)$ dentro de él están multiplicados estrella uno con otro, en el orden opuesto que los operadores correspondientes en $\widehat{O}_R(\widehat{x}_R, \widehat{p}_R)$. Las expresiones para $O_{L\star}$ u $O_{\star R}$ se pueden reducir a una función clásica de (R^i, p_i) después de usar repetidamente los productos elementales dados en (3.8), para reescribir $O_{L\star}$ u $O_{\star R}$ como las expresiones clásicas $O_{L,R}(R, p)$.

En la MSFT total sólo aparecen operadores cuánticos puramente L o puramente R ,

Alberto Mejías

como antes, debido a la localidad del parámetro σ (ver nota al pie 2). Más generalmente, en mini-MSFT uno puede estar interesado en escribir el operador QM para cualquier hamiltoniano $\hat{H}(\hat{x}_L, \hat{p}_L, \hat{x}_R, \hat{p}_R)$ en el lenguaje de los productos estrella en iQM. Esto se da representando a cada operador elemental de L/R como productos estrella por la izquierda/derecha según (3.10). Por lo tanto, conseguimos la representación iQM de cualquier hamiltoniano QM como sigue

$$\hat{H}(\hat{x}_L, \hat{p}_L, \hat{x}_R, \hat{p}_R)A = H((R\star), (p\star), (\star R), (-\star p))A(R, p), \quad (3.18)$$

donde hay que preservar el orden de los factores, con respecto a las \star 's.

Ahora damos dos ejemplos. En el primer ejemplo tenemos dos partículas (L y R) interactuando con una fuerza central del tipo oscilador armónico. Podemos convertir al operador \hat{H}_1 para este problema, a su versión iQM utilizando la aplicación (3.18) que involucra solamente productos de campos de cuerdas

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 A &= \left[\frac{1}{2} (\hat{p}_L^2 + \hat{p}_R^2) + \frac{\omega^2}{2} (\hat{x}_L - x_R)^2 \right] A(R, p) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{p}^2 + \omega^2 \bar{R}^2) \star A + \frac{1}{2} A \star (\bar{p}^2 + \omega^2 \bar{R}^2) - \omega^2 \bar{R} \star A \star \bar{R} \\ &= \left[-\frac{1}{4} \hbar^2 \partial_R^2 + p^2 + \frac{\omega^2}{2} \hbar^2 \partial_p^2 \right] A(R, p). \end{aligned}$$

En la segunda línea sólo aparecen productos de campos de cuerdas que usan el empalme \star de cuerdas. La última línea se obtiene evaluando los productos estrella, utilizando (3.7), (3.6). El resultado de la última línea claramente coincide con la representación familiar del hamiltoniano mediante el operador diferencial como se expresaría a partir de QM en la base (R, p) .

En el segundo ejemplo ilustramos el hamiltoniano \hat{H}_1 derivado de la teoría de cuerdas en 2 dimensiones con quarks (0-branas) fijados en los extremos [10], donde las posiciones de los quarks $x_{L,R}^\mu$ (en la base del cono de luz) son, en realidad, los puntos extremos de la cuerda,

$$\hat{H}_2 A = \left[\frac{m_L^2}{2\hat{p}_L^+} + \frac{m_R^2}{2\hat{p}_R^+} \hat{p}_R^2 + \gamma \left| \hat{x}_L^- - x_R^- \right| \right] A(R, p)$$

Desde la interacción cordal a la mecánica cuántica

$$\begin{aligned}
&= \frac{m_L^2}{2p} \star A + A \star \frac{m_R^2}{2p} + \gamma \int' \frac{dk}{\pi k^2} A(R, p) |(R\star) - (\star R)| A(R, p) \\
&= \frac{m_L^2}{2p} \star A(R, p) + A(R, p) \star \frac{m_R^2}{2p} + \gamma \hbar \int' \frac{dk}{\pi k^2} A(R, p + k). \quad (3.19)
\end{aligned}$$

En la segunda línea se utiliza la aplicación (3.18) para conectar a la versión \star con la versión de operador QM. En la tercera línea, la prima ' en la integral, \int' , significa la integral del valor principal que surge de los productos estrella en la segunda línea de computación. La última línea reproduce exactamente el espectro QCD para N grande en dos dimensiones (ecuación integral 'T HOOFT de un mesón [9]), como era de esperarse de [10], pero aquí, se omitirán los detalles.⁴

Para cualquier elección del hamiltoniano podemos definir el término cuadrático de la teoría de campos para la mini-MSFT y además podemos incluir interacciones "cuerda" – "cuerda" que imitan a la MSFT como sigue

$$S = \int d^n R d^n p \left[\frac{1}{2} A \hat{H}(A) + \frac{g}{3} A \star A \star A + \dots \right]. \quad (3.20)$$

Aquí los puntos $+\dots$ implican que se pueden construir varios modelos mini-MSFT que incluyen potencias superiores de las interacciones de campos, más allá del término cúbico. Los diagramas tipo FEYNMAN para esta teoría de campos, reproducen las operaciones de empalme/disyunción de láminas mundi, como en los viejos "diagramas de dualidad" cordaloides. Consideramos que con sólo la interacción cúbica en (3.20) y el hamiltoniano cordal 2D, de la ecuación (3.19), parece que el enfoque mini-MSFT correspondería a los cálculos para cuerdas 2D, de los diagramas FEYNMAN en [10], que dieron correctamente las interacciones mesónicas, utilizando solamente cuerdas y branas (quarks al final), con amplitudes acordes con gráficos planares en QCD 2D para N grande. Tal vez esta exacta y exitosa correspondencia cuerdas-QCD podría ahora ser generalizada a cuatro dimensiones mediante mini-MSFT en (3.20) incluyendo los componentes transversales de R^μ , p_μ más allá de los componentes del cono lumínico.

⁴ En [9,10] la función ondal está en el espacio de ímpetus (p_L, p_R) , mientras que en (3.19) está en el espacio de fase mixto $A(R, p)$. Después de una transformación FOURIER ($R \rightarrow P$) y un apropiado cambio de variables de (P, p) a (p_L, p_R) encontramos la misma ecuación integral para mesones.

Alberto Mejías

Esto completa la construcción del modelo de teoría de campos mini-MSFT. El tiempo demostrará si esto es un método útil para discutir algunos sistemas físicos, tales como cuerdas de QCD. Es posible generalizar más al sistema, asignándole a A , índices que correspondan al espín y otros números cuánticos y, correspondientemente, eligiendo un \hat{H} apropiado. En este trabajo se ha utilizado el concepto de mini-MSFT principalmente como una simplificación de la MSFT total para discutir la relación entre el empalme producto estrella de cuerdas y las reglas de cuantización de QM. Como se muestra en [3], todas las facetas de nuestras discusiones aquí también son válidas en la MSFT total así como en subsectores derivables de ella.

4. PERSPECTIVAS

Hemos demostrado que en el semi-espacio de fase de iQM, podemos reproducir todos los aspectos de QM ordinaria, apoyados sólo en las reglas del producto \star cuyo significado físico es interacciones creadas por empalme/disyunción de cuerdas.

Para finalizar la tesis central en este documento, con respecto a la fuente de las reglas de la mecánica cuántica en toda la física, se necesita primero suponer que Teoría de cuerdas (o la generalización a Teoría M) podría ser la descripción correcta de todos los fenómenos físicos. Así, basado en la MSFT total [3] (y su posible generalización a teoría M), uno puede alegar que la fuente de las reglas de conmutación mecánico-cuánticas en toda la física podría rastrearse hasta el fenómeno físico de interacciones cordales de empalme/disyunción, expresadas en el semi-espacio de fase, en el lenguaje MSFT. Si este punto de vista se mantiene más allá del aparente limitado alcance de MSFT, en todos los aspectos de Teoría M, incluyendo segunda cuantización, entonces el concepto que discutimos aquí, de que las interacciones cordales son la fuente de la Mecánica Cuántica, aumentaría la credibilidad de la Teoría de Cuerdas como una teoría fundamental.

Reevaluemos los ingredientes principales que conducen a estos resultados. En primer lugar está el iQM generado por el producto \star de empalme cordal de la ecuación (3.4), que proviene de la correspondiente ecuación (2.3) en Teoría de Campos Cordales total. En segundo lugar está la conexión de los operadores cuánticos en QM con el producto estrella de empalme cordal como se da en la ecuación (3.10), que también proviene de la Teoría de campos cordales total en Ecs. (2,4),

Desde la interacción cordal a la mecánica cuántica

(2.5). El segundo ingrediente puede ser considerado como una particular *representación de los operadores cuánticos*. Por supuesto, siendo una representación, está obligado a satisfacer las correctas normas cuánticas. De hecho, la versión cordal en Ecs. (2,4), (2.5) fue lograda por primera vez a en [3], a partir del estudio de la cuerda cuantizada; es decir, de los conocimientos adquiridos en QM. Lo nuevo es que a diferencia de otras representaciones, esta representación se basa en un proceso físico de empalme/disyunción cordal que tiene lugar a la escala PLANCK.

En otras palabras, aunque es una representación está también conectada a procesos físicos de una manera que otras representaciones de los operadores cuánticos no lo están. Esto proporciona la semilla de una explicación de que la mecánica cuántica existe debido a ciertos fenómenos, mientras que otras representaciones no tienen esta capacidad. En esta representación, si no se producen los procesos físicos de empalme/disyunción cordal, no hay mecánica cuántica, porque el parámetro de no-conmutatividad en empalme/disyunción cordal, no es otro que la constante PLANCK \hbar . Por lo tanto, invertimos el camino lógico que nos trajo desde la mecánica cuántica, a través de la teoría de cuerdas, a SFT, en particular a MSFT. Consideramos la premisa de que Teoría de Cuerdas o Teoría M es el principal punto de partida para la descripción de todos los fenómenos de la naturaleza. Esto demanda que no haya objetos puntuales, que todos los objetos son fundamentalmente cordaloides y que deben interactuar sólo a través de procesos de empalme/disyunción cordal. El lenguaje de MSFT deja en claro que en tal caso, se obtiene una mecánica cuántica inducida y que la \hbar de la Mecánica Cuántica, proviene de la no-conmutatividad de empalme/disyunción. En este enfoque podemos decir que los operadores QM y las correspondientes reglas de conmutación se introducen por conveniencia mediante las ecs. (2.4), (2.5), (3.10) para hacer conexión con el lenguaje familiar, pero no como fundamentales ni tampoco porque se necesiten para los cálculos – MSFT ya está equipada con los instrumentos de cálculo.

La información de que las relaciones de conmutación cuántica fundamentales están conectadas a los procesos de empalme/disyunción se transmite a la física de baja energía muy por debajo de la escala PLANCK. El primer paso en este proceso, es que la teoría de campos cordales es aproximada por la teoría de campos locales, donde sólo los grados de libertad del centro de masa de la cuerda, indican a los campos locales (i. e. R en mini-MSFT). La derivada en la teoría de campos locales, es la representación del ímpetu conjugado canónico (P en mini-MSFT), notando que la derivada surge del producto estrella empalme cordal (ver e. g. ec. (3.16)). Finalmente, en el sector de una partícula de la teoría de campos locales, recupera-

Alberto Mejías

mos la reglas usuales de la mecánica cuántica, en la representación del espacio de posición, donde el ímpetu es representado por la derivada. Este razonamiento se extiende fácilmente, a otros grados de libertad, incluso el espín, incluyendo fermiones en el formalismo de campos cordales.

Independientemente de la tesis central de este trabajo, a un nivel más modesto, hemos introducido un nuevo espacio de representación para los operadores mecánico-cuánticos mediante la aplicación en ec. (3.10), que puede encontrar variadas aplicaciones. El modelo mini-MSFT puede ser útil por derecho propio, para discutir algo de física perturbacional y no-perturbacional, en ciertas circunstancias.

Referencias

- [1] E. WITTEN, Non-commutative geometry and string field theory, Nucl. Phys. B 268 (1986) 253.
- [2] I. BARS, Map of Witten's \star to Moyal's \star , Phys. Lett. B 517 (2001) 436, arXiv:hep-th/0106157; I. BARS, MSFT: Moyal star formulation of string field theory, arXiv:hep-th/0211238.
- [3] I. BARS, D. RYCHKOV, Background independent string field theory, arXiv:1407.4699.
- [4] J. E. MOYAL, Quantum mechanics as a statistical theory, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 45 (1949) 99.
- [5] S. GIDDINGS, The Veneziano amplitude from interacting string field theory, Nucl. Phys. B 278 (1986) 242.
- [6] I. BARS, Y. MATSUO, Associativity anomaly in string field theory, Phys. Rev. D 65 (2002) 126006, arXiv:hep-th/0202030; I. BARS, Y. MATSUO, Computing in string field theory using the Moyal star product, Phys. Rev. D 66 (2002) 066003, arXiv:hep-th/0204260.
- [7] I. BARS, I. KISHIMOTO, Y. MATSUO, String amplitudes from Moyal string field theory, Phys. Rev. D 67 (2003) 066002, arXiv:hep-th/0211131; I. BARS, I. KISHIMOTO, Y. MATSUO, Analytic study of nonperturbative solutions in open string field theory, Phys. Rev. D 67 (2003) 126007, arXiv:hep-th/0302151; I. BARS, I. KISHIMOTO, Y. MATSUO, Fermionic ghosts in Moyal string field theory, J. High Energy Phys. 0307 (2003) 027, arXiv:hep-th/0304005.

Desde la interacción cordal a la mecánica cuántica

- [8] I. BARS, I.Y. PARK, Improved off-shell scattering amplitudes in string field theory and new computational methods, Phys. Rev. D 69 (2004) 086007, arXiv:hep-th/0311264.
- [9] G. 'T HOOFT, Two dimensional model for mesons, Nucl. Phys. B 75 (1974) 461.
- [10] I. BARS, Exact equivalence of chromodynamics to a string theory, Phys. Rev. Lett. 36 (1976) 1521, and references therein to earlier work, see especially Eqs. (9a) and (13a).
- [11] ITZHAK BARS, DMITRY RYCHKOV, Is string interaction the origin of quantum mechanics? Phys. Lett. B (2014)

ALEPH SUB – CERO
SERIE DE DIVULGACIÓN

№₀ 2015 – I №₀
pp. 20 - 51

DEL PROBLEMA DE BASILEA A LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN
(Problem Basel to the Riemann Zeta Function)
Carlos Sánchez Chinae¹

Recepción: Marzo 2015. Revisión y aceptación: Abril 2015.

Resumen. Presentamos los elementos del problema de Basilea y de lo que podemos considerar su continuación, un siglo después, por Bernard Riemann, al ampliar de definición de la función zeta al campo complejo. Por razones de espacio no analizamos aquí la importantísima relación de la función zeta con la distribución de los números primos, planteándonos como único objetivo el describir los aspectos básicos de su construcción y prolongación analítica a todo el campo complejo.

Descriptores: Basilea, Euler, Zeta, Riemann, función, ceros, analítica, prolongación, dominio, recta crítica, banda crítica.

Abstract. We present the elements of the Basel problem and what can be considered its continuation, a century later, by Bernard Riemann, to extend the definition domain of the zeta function to the complex field. Because of space limitations, we do not analyze the important relationship of the zeta function with the distribution of primes, we solely focus on describing the basics of construction and the analytic extension to the entire complex field.

Keywords: Basel, Euler, Zeta, Riemann, functions, zeros, analytical, prolongation, domain, straight criticism, critical band.

¹ Carlos Sánchez Chinae, es Licenciado en Ciencias Físicas y Profesor de Matemáticas de Educación Secundaria, con la Condición de Catedrático, en el Instituto de Enseñanza Secundaria “Isidro de Arcenegui y Carmona” de Marchena, Sevilla, España. Prejubilado en 2008. casanchi.com, casanchi@gmail.com, casanchi@casanchi.com.

Del Problema de Basilea a la Función Zeta de Riemann

00 Introducción

El problema de determinar la suma exacta de la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

fue afrontado por diversos matemáticos en los siglos XVII y XVIII, desde su enunciado por el matemático y sacerdote boloñés Pietro Mengoli (1626-1686), en su obra “*Novae quadraturae arithmeticae*”, en 1650. Sin embargo, la primera solución correcta fue obtenida por Leonard Euler en 1735 (“*De Summis Serierum Reciprocarum*”), cuando tenía 28 años, y su descubrimiento le supuso gran notoriedad entre los matemáticos de su tiempo. Se denominó Problema de Basilea, por ser ésta su ciudad de residencia.

Los trabajos de Euler fueron retomados en el siglo XIX por Bernard Riemann (1826-1866), estudiando ahora la función que da la suma infinita de los inversos de las potencias de n para el caso general de exponente s complejo.

La función zeta de Riemann está definida en el semiplano $\text{Re}(s) > 1$ por una serie de Dirichlet simple. En tal semiplano es convergente absolutamente y uniformemente. No tiene ceros ni singularidades en dicho dominio de definición. Es, en definitiva, una función analítica dentro del semiplano $\text{Re}(s) > 1$.

Si estudiamos una prolongación analítica de la función a todo el plano complejo, es decir, si encontramos una función definida en todo punto de \mathbb{C} tal que coincida con la función zeta de Riemann al restringirla al semiplano $\text{Re}(s) > 1$, podemos estudiar los posibles ceros y singularidades de dicha prolongación.

Para la función prolongación analítica encontramos que tiene infinitos ceros en el eje real negativo (ceros triviales), que resultan ser los infinitos números reales enteros pares negativos. Y tiene también una singularidad, un polo simple de residuo unidad, en el punto $s=1$. Tiene asimismo ceros (no triviales), de parte imaginaria no nula, dentro de la banda $0 < \text{Re}(s) < 1$, denominada *banda crítica*.

Carlos Sánchez Chinae

Jacques Hadamard y De la Vallée Poussin probarían en 1896 que la prolongación analítica de la función zeta no se anula en la recta $1+it$, cualquiera que sea t real, por lo que todos los ceros existentes para dicha función prolongación son los ya indicados: triviales (pares negativos de parte imaginaria nula), y los no triviales (de parte real entre cero y la unidad, y parte imaginaria no nula) comprendidos en la banda crítica.

Se descubriría que los ceros no triviales de la prolongación analítica de la función zeta (en adelante llamaremos simplemente función zeta a dicha prolongación) pueden interpretarse como frecuencias armónicas en la distribución de los números primos. De ahí la importancia de su estudio.

Para mejor visualización de la singularidad en $s=1$ conviene prolongar primeramente la función zeta al semiplano $\sigma(s)>0$ mediante alguna función sencilla que permita hacer el estudio. La prolongación analítica de la función zeta al semiplano $\sigma(s)>0$ puede hacerse de forma elemental encontrando alguna función $f(s)$ definida en tal semiplano, cuya restricción al semiplano $\sigma(s)>1$ coincida con la función zeta originalmente definida (la serie simple de Dirichlet), y que nos permita estudiar la singularidad única en $s=1$, quedando establecido el carácter meromorfo de dicha prolongación. Mientras que para prolongar analíticamente la función zeta a todo el plano necesitamos obtener una ecuación funcional general que nos permita el estudio global para todo s de \mathbb{C} . Obtendremos la llamada *Ecuación Funcional de Riemann*.

01 El trabajo de Euler en el Problema de Basilea

01.1 La prueba inicial de Euler

Aunque se habían encontrado ya soluciones numéricas aproximadas, se pretendía la obtención de la suma exacta, que hasta el trabajo de Euler, no había sido lograda.

En esencia la forma de resolución de Euler consistió en identificar los coeficientes de una factorización infinita de la función trigonométrica $\sin x$ con los de su desarrollo en serie de Taylor-McLaurin.

Del Problema de Basilea a la Función Zeta de Riemann

El problema, en definitiva, consiste en determinar el valor de la suma infinita de los cuadrados de los inversos de los números naturales:

$$\left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots$$

o bien, llamandola mediante la función

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

se trataría de encontrar el valor de $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partiendo de la función trigonométrica $\text{sen}x$, nos encontramos que se anula para los múltiplos de π : $\text{sen}x=0$, para $x=\pm n\pi$, $n=0,1,2,\dots$

Si consideramos la función

$$\frac{\text{sen}(s\pi)}{s\pi}, \quad s \in \mathbb{R}$$

los ceros corresponden a $s\pi = \pm n\pi \rightarrow s = \pm n$, pudiendo factorizarse cada uno de los valores enteros en la forma:

$$(n+s)(n-s) = n^2 - s^2 = n^2 \left(1 - \left(\frac{s}{n}\right)^2\right), \quad n=1,2,\dots$$

Se tiene, en definitiva:

$$\frac{\text{sen}(s\pi)}{s\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} n^2 \left(1 - \left(\frac{s}{n}\right)^2\right) = K \cdot \left(1 - \left(\frac{s}{1}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{s}{2}\right)^2\right) \dots \left(1 - \left(\frac{s}{n}\right)^2\right) \dots$$

Como el límite del cociente del seno al arco tiende a la unidad, se tiene que ha de ser $K=1$. Por tanto:

Carlos Sánchez China

$$\frac{\text{sen}(s\pi)}{s\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{s}{n}\right)^2\right) = \left(1 - \left(\frac{s}{1}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{s}{2}\right)^2\right) \dots \left(1 - \left(\frac{s}{n}\right)^2\right) \dots \quad [1.1.]$$

que puede expresarse, extrayendo factor común $s^2, s^3, s^4 \dots$, en la forma:

$$\frac{\text{sen}(s\pi)}{s\pi} = - \left[\left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots \right] s^2 + \left[\left(\frac{1}{1.2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2.3}\right)^2 + \dots \right] s^4 - \left[\left(\frac{1}{1.2.3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2.3.4}\right)^2 + \dots \right] s^6 + \dots$$

por otra parte, podemos considerar el desarrollo en serie de Taylor de la función

$$\begin{aligned} \text{sen}(s\pi) &= \frac{\text{sen}(0)}{0!} \cdot 0 + \frac{\text{sen}'(0)}{1!} s\pi + \frac{\text{sen}''(0)}{2!} (s\pi)^2 + \frac{\text{sen}'''(0)}{3!} (s\pi)^3 + \dots = 0 + s\pi - \frac{0}{2} (s\pi)^2 - \frac{1}{3!} (s\pi)^3 + \dots = \\ &= s\pi - \frac{1}{3!} (s\pi)^3 + \frac{1}{5!} (s\pi)^5 - \dots \end{aligned}$$

esto es:

$$\frac{\text{sen}(s\pi)}{s\pi} = \frac{s\pi}{s\pi} - \frac{1}{3!} \frac{(s\pi)^3}{s\pi} + \frac{1}{5!} \frac{(s\pi)^5}{s\pi} - \dots = 1 - \frac{\pi^2}{6} s^2 + \frac{\pi^4}{120} s^4 - \dots$$

si hacemos ahora la identificación de coeficientes entre el desarrollo obtenido mediante la factorización y el obtenido mediante Taylor, encontramos que

$$- \left[\left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots \right] = -\frac{\pi^2}{6} \rightarrow \left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots = \frac{\pi^2}{6} \rightarrow \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

el resultado obtenido por Euler es correcto, aunque fue criticado en su tiempo por diversos matemáticos, entre ellos los Bernoulli, ya que Euler no había probado previamente ni la convergencia ni que los únicos ceros de la función cociente utilizada fueran precisamente los indicados en el desarrollo de la factorización. En realidad, Euler no daría una argumentación exhaustiva hasta 1741.

01.2 Generalización

El resultado anterior $\zeta(2) = \pi^2 / 6$ puede generalizarse para los enteros positivos

Del Problema de Basilea a la Función Zeta de Riemann

pares, esto es, hallando una fórmula que permita calcular $\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Es en 1755 cuando Leonard Euler logra esta generalización, que muestra en su trabajo “*Institutiones calculi differentialis*”. El proceso, que describimos a continuación, lo exponemos aquí mediante dos teoremas y un corolario inmediato para ambos.

Teorema 1

Se verifica la expresión:

$$\pi \cdot \operatorname{ctg}(\pi s) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) \cdot s^{2n}$$

Demostración:

Partimos de la expresión de factorización de Euler:

$$\frac{\operatorname{sen}(s\pi)}{s\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{s}{k}\right)^2\right) = \left(1 - \left(\frac{s}{1}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{s}{2}\right)^2\right) \dots$$

tomamos logaritmos

$$\log \frac{\operatorname{sen}(s\pi)}{s\pi} = \log \operatorname{sen}(s\pi) - \log s\pi = \log \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{s}{k}\right)^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \log \left(1 - \left(\frac{s}{k}\right)^2\right)$$

encontramos por tanto que

$$\log \operatorname{sen}(s\pi) = \log s\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \log \left(1 - \left(\frac{s}{k}\right)^2\right)$$

derivamos la expresión obtenida:

$$\frac{d}{ds} \log \operatorname{sen}(s\pi) = \frac{d}{ds} \log s\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{ds} \log \left(1 - \left(\frac{s}{k}\right)^2\right) \rightarrow \frac{\cos(\pi s)}{\operatorname{sen}(\pi s)} \pi = \frac{1}{s} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{s^2}{k^2}}\right) \left(-\frac{2s}{k^2}\right)$$

quedando:

Carlos Sánchez China

$$\frac{\cos(\pi s)}{\operatorname{sen}(\pi s)} \pi s = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right)} \left(-\frac{2s^2}{k^2}\right)$$

Podemos considerar a $\frac{1}{\left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right)}$ como resultado de la suma infinita $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s^2}{k^2}\right)^n$, ya que

es una progresión geométrica de razón $\frac{s^2}{k^2}$: $\frac{1}{\left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s^2}{k^2}\right)^n$. Por tanto, al sustituir

se tiene:

$$\pi s \operatorname{ctg}(\pi s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right)} \left(-\frac{2s^2}{k^2}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s^2}{k^2}\right)^n \left(-\frac{2s^2}{k^2}\right) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s^2}{k^2}\right)^{n+1}$$

que podemos expresar en la forma:

$$\pi s \operatorname{ctg}(\pi s) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s^2}{k^2}\right)^n = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2}\right)^n s^{2n} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{2n}}\right) s^{2n} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) \cdot s^{2n}$$

o sea, finalmente:

$$\pi s \operatorname{ctg}(\pi s) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) \cdot s^{2n}$$

Teorema 2

Se verifica la expresión:

$$\pi \cdot s \operatorname{ctg}(\pi s) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2\pi)^{2n} \cdot \beta_{2n}}{2 \cdot (2n)!} \cdot s^{2n}$$

siendo β_{2n} los números de Bernoulli, que verifican

Del Problema de Basilea a la Función Zeta de Riemann

$$\sum_{q=0}^n \binom{n+1}{q} \beta_q = 0 \rightarrow \beta_0 = 1, \beta_1 = -1/2, \beta_2 = 1/6, \beta_3 = 0, \beta_4 = -1/30,$$

$$\beta_5 = 0, \beta_6 = 1/42, \dots$$

Demostración:

Partimos de la función cotangente, que trataremos de escribir en función de la exponencial:

$$\pi s \operatorname{ctg}(\pi s) = \pi s \frac{\cos(\pi s)}{\operatorname{sen}(\pi s)} = \pi s \frac{e^{i\pi s} + e^{-i\pi s}}{2} \frac{2i}{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}} = \pi s i \frac{e^{i\pi s} + e^{-i\pi s}}{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}} = \pi s i \frac{e^{2i\pi s} + 1}{e^{2i\pi s} - 1}$$

o bien:

$$\pi s \operatorname{ctg}(\pi s) = \pi s i \frac{e^{2i\pi s} - 1 + 2}{e^{2i\pi s} - 1} = \pi s i \left(1 + \frac{2}{e^{2i\pi s} - 1} \right) = \pi s i + \frac{2\pi s i}{e^{2i\pi s} - 1}$$

Si llamamos β_n a los coeficientes del desarrollo de Taylor-McLaurin de la expresión $\frac{s}{e^s - 1}$, es decir, $\frac{s}{e^s - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} s^n$, se tiene que

$$\frac{s}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} s^n \rightarrow s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} s^n \rightarrow 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} s^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} s^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} s^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} s^n$$

o sea:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^n \frac{\beta_q}{q!} \frac{1}{(n+1-q)!} s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^n \frac{\beta_q}{(n+1)!} \frac{(n+1)!}{q!(n+1-q)!} s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^n \frac{\beta_q}{(n+1)!} \binom{n+1}{q} s^n$$

y podemos escribir finalmente:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{q=0}^n \binom{n+1}{q} \beta_q s^n = \frac{1}{1!} \binom{1}{0} \beta_0 s^0 + \frac{1}{2!} \left[\binom{2}{0} \beta_0 + \binom{2}{1} \beta_1 \right] s^1 + \frac{1}{2!} \left[\binom{3}{0} \beta_0 + \binom{3}{1} \beta_1 + \binom{3}{2} \beta_2 \right] s^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left[\binom{4}{0} \beta_0 + \binom{4}{1} \beta_1 + \binom{4}{2} \beta_2 + \binom{4}{3} \beta_3 \right] s^3 + \frac{1}{4!} \left[\binom{5}{0} \beta_0 + \binom{5}{1} \beta_1 + \binom{5}{2} \beta_2 + \binom{5}{3} \beta_3 + \binom{5}{4} \beta_4 \right] s^4 +$$

Carlos Sánchez China

$$+\frac{1}{5!}\left[\binom{6}{0}\beta_0+\binom{6}{1}\beta_1+\binom{6}{2}\beta_2+\binom{6}{3}\beta_3+\binom{6}{4}\beta_4+\binom{6}{5}\beta_5\right]s^5+\dots$$

Para que se verifique esta igualdad los términos correspondientes a las sucesivas potencias de s deben ser nulos, exceptuando al término constante, que debe ser la unidad. Esto permite determinar los coeficientes $\beta_j, j=0,1,2,\dots$, llamados *números de Bernoulli*. En definitiva:

$$\frac{1}{1!}\left[\binom{1}{0}\beta_0\right]s^0=1 \rightarrow \beta_0=1$$

$$\frac{1}{2!}\left[\binom{2}{0}\beta_0+\binom{2}{1}\beta_1\right]=0 \rightarrow \beta_1=-1/2$$

$$\frac{1}{3!}\left[\binom{3}{0}\beta_0+\binom{3}{1}\beta_1+\binom{3}{2}\beta_2\right]=0 \rightarrow \beta_2=1/6$$

$$\frac{1}{4!}\left[\binom{4}{0}\beta_0+\binom{4}{1}\beta_1+\binom{4}{2}\beta_2+\binom{4}{3}\beta_3\right]=0 \rightarrow \beta_3=0$$

$$\frac{1}{5!}\left[\binom{5}{0}\beta_0+\binom{5}{1}\beta_1+\binom{5}{2}\beta_2+\binom{5}{3}\beta_3+\binom{5}{4}\beta_4\right]=0 \rightarrow \beta_4=-1/30$$

$$\frac{1}{6!}\left[\binom{6}{0}\beta_0+\binom{6}{1}\beta_1+\binom{6}{2}\beta_2+\binom{6}{3}\beta_3+\binom{6}{4}\beta_4+\binom{6}{5}\beta_5\right]=0 \rightarrow \beta_5=0$$

$$\frac{1}{7!}\left[\binom{7}{0}\beta_0+\binom{7}{1}\beta_1+\binom{7}{2}\beta_2+\binom{7}{3}\beta_3+\binom{7}{4}\beta_4+\binom{7}{5}\beta_5+\binom{7}{6}\beta_6\right]=0 \rightarrow \beta_6=1/42$$

... ..

... ..

Si aplicamos el desarrollo $\frac{s}{e^s-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} \cdot s^n$ al caso que nos ocupa:

Del Problema de Basilea a la Función Zeta de Riemann

$$\pi s \operatorname{ctg}(\pi s) = \pi s + \frac{2\pi s i}{e^{2i\pi s} - 1} = \pi s + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} (2\pi s i)^n$$

simplificamos:

$$\begin{aligned} \pi s \operatorname{ctg}(\pi s) &= \pi s + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} (2\pi s i)^n = \pi s + \frac{\beta_0}{0!} (2\pi s i)^0 + \frac{\beta_1}{1!} (2\pi s i)^1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} (2\pi s i)^n = \\ &= \pi s + \frac{1}{0!} (2\pi s i)^0 + \frac{-1/2}{1!} (2\pi s i)^1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} (2\pi s i)^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} (2\pi s i)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{2n}}{(2n)!} (2\pi s i)^{2n} = \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{-1}{2} (2\pi s i)^{2n} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2\pi)^{2n} \beta_{2n}}{2 \cdot (2n)!} s^{2n} \end{aligned}$$

En definitiva:

$$\pi s \operatorname{ctg}(\pi s) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2\pi)^{2n} \beta_{2n}}{2 \cdot (2n)!} s^{2n}$$

Corolario a los teoremas 1 y 2:

Se verifica de forma inmediata que

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n} \cdot \beta_{2n}}{2 \cdot (2n)!}$$

basta identificar las expresiones obtenidas en ambos teoremas 1 y 2.

Aplicación al cálculo del valor de la función para enteros pares:

Para $n = 1$:

$$\zeta(2) = \zeta(2.1) = (-1)^{1+1} \frac{(2\pi)^{2 \cdot 1} \cdot \beta_{2 \cdot 1}}{2 \cdot (2.1)!} = \frac{4\pi^2}{4} \cdot \beta_2 = \frac{\pi^2}{6} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Para $n = 2$:

$$\zeta(4) = \zeta(2.2) = (-1)^{2+1} \frac{(2\pi)^{2 \cdot 2} \cdot \beta_{2 \cdot 2}}{2 \cdot (2.2)!} = -\frac{16\pi^4}{48} \beta_4 = \frac{\pi^4}{90} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Carlos Sánchez China

Para $n = 3$:

$$\zeta(6) = \zeta(2.3) = (-1)^{3+1} \frac{(2\pi)^{2.3} \cdot \beta_{2.3}}{2 \cdot (2.3)!} = \frac{64\pi^6}{1440} \beta_6 = \frac{\pi^6}{945} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

... ..

02 La función zeta de Riemann

02.1. Definición:

Se define la función zeta en el semiplano $\pi = \{s \in \mathbb{C} / \text{real}(s) \geq 1 + \delta, \delta > 0\}$

$$\zeta : \pi \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\forall s \in \pi, \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad [02.1]$$

Tal función converge absoluta y uniformemente en el semiplano de la definición.

02.2. Converge absolutamente:

Por definición, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ convergerá absolutamente si $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right|$ es convergente.

Llamando $s = x + iy$, se tiene que $\left| \frac{1}{n^s} \right| = \left| \frac{1}{e^{Ln^s}} \right| = |e^{-sLn}| = |e^{-(x+iy)Ln}| = |e^{-xLn - iyLn}| =$

$$= |e^{-xLn} \cdot e^{-iyLn}| = |e^{-xLn}| \cdot |e^{-iyLn}| = \left| \frac{1}{e^{Ln^x}} \right| \cdot \left| \frac{1}{e^{iLn^y}} \right| = \left| \frac{1}{n^x} \right| \cdot 1 = \frac{1}{n^x}$$

Si $x = \text{real}(s) \geq 1 + \delta$, será $n^x \geq n^{1+\delta} \rightarrow \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}$, por lo cual:

Del Problema de Basilea a la Función Zeta de Riemann

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} &\text{ convergente} \end{aligned} \right\} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| \text{ convergente} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ converge absolutamente}$$

02.3. Convergencia uniforme:

Por el criterio de convergencia uniforme de Weierstrass, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ será uniformemente convergente en un conjunto $\pi \subseteq C$, si $\forall s \in \pi, \forall n \in N$, es $\left| \frac{1}{n^s} \right| \leq \alpha_n$ donde la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ es convergente, lo cual efectivamente ocurre (basta tomar $\alpha_n = \frac{1}{n^{1+\delta}}$), por lo visto antes, donde el conjunto π es el semiplano $\pi = \{s \in C / \text{real}(s) \geq 1 + \delta, \delta > 0\}$.

02.4. Ceros:

Veamos que la función zeta no puede anularse en ningún punto de su dominio de definición, $\{s \in C / \text{real}(s) \geq 1 + \delta, \delta > 0\}$, semiplano en el que el argumento, s , tiene parte real mayor estrictamente que la unidad.

Si multiplicamos la función por el inverso de 2^s y restamos, obtenemos un desarrollo donde aparecen todos los números naturales exceptuando los múltiplos de 2:

$$\zeta(s) - \frac{1}{2^s} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \frac{1}{2^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, n \neq 2 \rightarrow \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, n \neq 2$$

si ahora seguimos haciendo lo mismo con el inverso de 3^s :

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) - \frac{1}{3^s} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, n \neq 2, n \neq 3 \rightarrow \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, n \neq 2, n \neq 3$$

repetiendo consecutivamente el proceso ad infinitum se encuentra que

$$\left[\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \dots \right] \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, n \neq 2, n \neq 3 \dots n \neq p \dots = 1$$

Carlos Sánchez China

o sea:

$$\prod_{\rho_i \in P} \left(1 - \frac{1}{\rho_i^s}\right) \zeta(s) = 1 \rightarrow \zeta(s) = \frac{1}{\prod_{\rho_i \in P} \left(1 - \frac{1}{\rho_i^s}\right)} = \prod_{\rho_i \in P} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\rho_i^s}\right)} = \prod_{\rho_i \in P} \left(1 - \frac{1}{\rho_i^s}\right)^{-1}$$

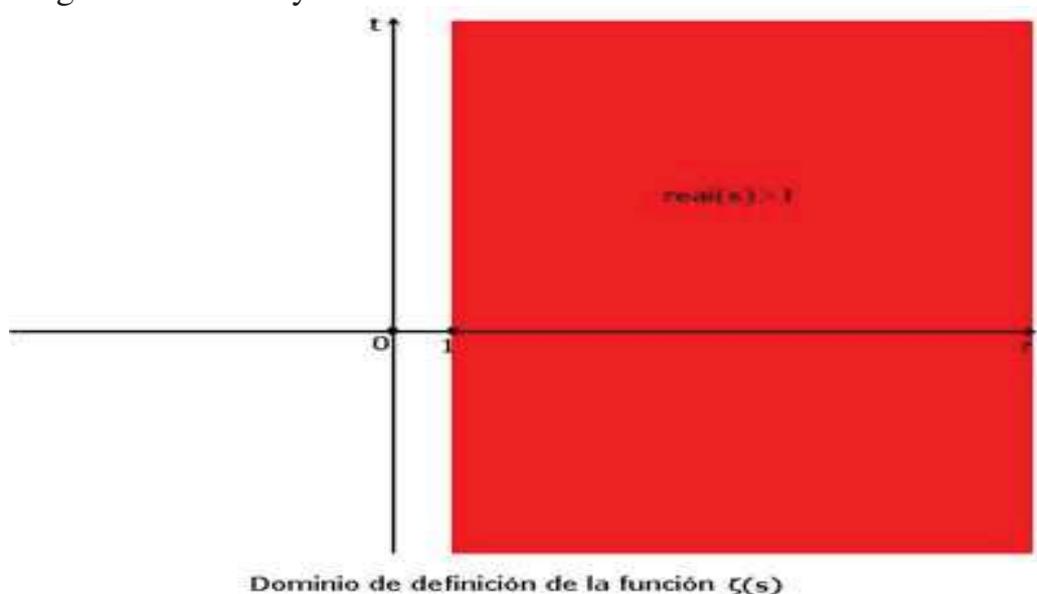
en definitiva:

$$\zeta(s) = \prod_{\rho_i \in P} (1 - \rho_i^{-s})^{-1} \quad [02.2]$$

Donde P es el conjunto de todos los números primos $\rho_i, i=1,2,\dots$

Siendo $\zeta(s)$ absolutamente convergente en el semiplano π y puesto que es igual a un producto de factores no nulos, es obvio que en este semiplano siempre será $\zeta(s) \neq 0$, es decir, la función zeta no tiene ceros en el semiplano π de Riemann.

En definitiva, en el dominio de definición, la función es analítica, sin ceros, con convergencia absoluta y uniforme.

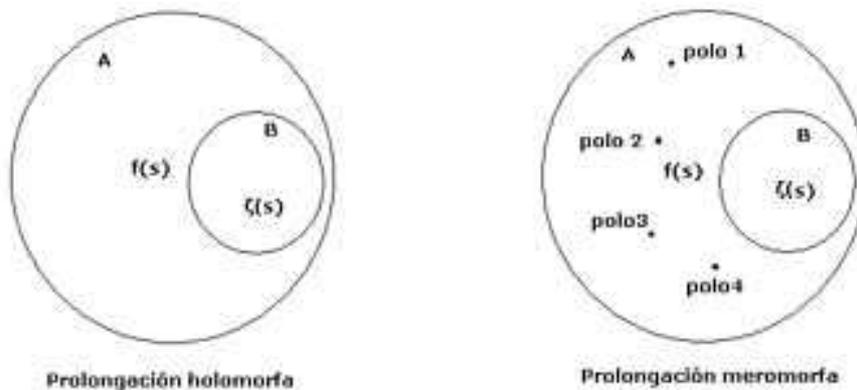


03 Extensión meromorfa de la función zeta al semiplano $\text{real}(s) > 0$:

Del Problema de Basilea a la Función Zeta de Riemann

03.1 Idea de prolongación o extensión analítica:

Sean dos dominios abiertos del campo complejo, A y B , tales que $B \subset A$. Y sea $\zeta : B \rightarrow C$ una función analítica definida en B . Se dice que $f : A \rightarrow C$ es *prolongación analítica de ζ al dominio A* si $f \equiv \zeta$ en el dominio B . Si no existen polos para la prolongación f se dice que tal prolongación de ζ al dominio A es una *prolongación holomorfa*, y caso de que tuviera un número finito de polos se dirá que es una *prolongación meromorfa*.



03.2. Prolongación de la función zeta:

Puede obtenerse una prolongación analítica de la función al semiplano $\text{real}(s) > 0$ expresando la función mediante una integral sobre el eje x . Veremos que se trata en dicho semiplano de una función meromorfa, con un único punto singular en $s = 1$.

En relación con la función *parte entera*:

Sea la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx, \quad [x]: \text{parte entera de } x, \quad \text{real}(s) > 0$$

Se tiene, usando sumatorios:

Carlos Sánchez China

$$\int_1^{\infty} \frac{[X]}{x^{s+1}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{n}{x^{s+1}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_n^{n+1} x^{-s-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{-s}}{-s} \Big|_n^{n+1} = \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{n^n} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) =$$

$$= \frac{1}{s} \left[\left(\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} \right) + \left(\frac{2}{2^s} - \frac{2}{3^s} \right) + \left(\frac{3}{3^s} - \frac{3}{4^s} \right) + \left(\frac{4}{4^s} - \frac{4}{5^s} \right) + \dots \right] = \frac{1}{s} \left[1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \right] = \frac{1}{s} \zeta(s)$$

por tanto:

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{[X]}{x^{s+1}} dx \quad [03.1]$$

En relación con la función *parte decimal*:

Consideremos la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx, \quad \{x\} : \text{parte decimal de } x, \text{ real}(s) > 0$$

puesto que la parte decimal de un número es la diferencia entre el número y su parte entera, se tiene:

$$\int_1^{\infty} \frac{x - [x]}{x^{s+1}} dx = \int_1^{\infty} \frac{x}{x^{s+1}} dx - \int_1^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx = \int_1^{\infty} x^{-s} dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{n}{x^{s+1}} dx = \int_1^{\infty} x^{-s} dx - \frac{1}{s} \zeta(s)$$

y siendo:

$$\int_1^{\infty} x^{-s} dx = \frac{1}{1-s} \frac{1}{x^{s-1}} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{1-s} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1} \right) = \frac{1}{s-1}$$

se tiene:

$$\int_1^{\infty} \frac{x - [x]}{x^{s+1}} dx = \int_1^{\infty} x^{-s} dx - \frac{1}{s} \zeta(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \zeta(s)$$

y finalmente:

$$\varphi(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \quad [03.2]$$

Del Problema de Basilea a la Función Zeta de Riemann

En relación con la serie alternada:

$$\zeta_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

pues la podemos expresar así:

$$\begin{aligned} \zeta_a(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \dots = \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots\right) - 2\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \frac{2}{2^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = (1 - 2^{1-s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \end{aligned}$$

Es decir:

$$\zeta_a(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s) \rightarrow \zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \zeta_a(s)$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \zeta_a(s), \quad \text{real}(s) > 0 \quad [03.3]$$

Si $0 < \text{real}(s) < 1$ entonces $\text{real}(1+s) > 1$, por lo que

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$$

existe en la banda $0 < \text{real}(s) < 1$. Tal expresión es, pues, extensión meromorfa de la función zeta en $\text{real}(s) > 0$, con una única singularidad ($s=1$).

Asimismo $\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \zeta_a(s)$ está también definida en la misma banda y es también extensión de la función zeta en $\text{real}(s) > 0$, ya que la serie alternada $\varphi_a(s)$ converge en ese semiplano.

La singularidad:

El polo de la función corresponde al caso de $s=1$, pues en este caso es

Carlos Sánchez China

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \text{ (serie armónica)}$$

Y, como sabemos, la serie armónica es divergente, ya que no cumple la condición de Cauchy para convergencia de series

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n, n+p > n_0 \rightarrow \left| \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} \right| < \varepsilon$$

puesto que si, por ejemplo, hacemos $n=2^m, p=2^m$ se tendría:

$$\left| \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} \right| = \left| \frac{1}{2^m+1} + \dots + \frac{1}{2^m+2^m} \right| > \frac{2^m}{2^m+2^m} = \frac{1}{2}, \text{ con lo que bastaría que tomásemos } \varepsilon=1/2 \text{ para que no se verifique la condición de convergencia de Cauchy.}$$

Así, pues, la función $\zeta(s)$ diverge si $s=1$, esto es, tiene un polo para $s=1$.

En donde, de la relación anterior con la serie alternada $\zeta_a(s)$, siendo ésta convergente, el único polo que aparece para la función zeta de Riemann corresponde al caso $1-2^{1-s}=0 \rightarrow s=x+iy=1 \rightarrow x=1, y=0$.

Residuo:

Considerando la expresión [03.2], $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$, se tiene:

$$\operatorname{res}(\zeta(s), 1) = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s) = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \frac{s}{s-1} - \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) s \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \lim_{s \rightarrow 1} s - 0 = 1$$

Así pues, la función zeta tiene un polo simple, con residuo 1, en $s=1$.

Los ceros:

En esta extensión meromorfa de la función, los ceros, caso de existir, estarían en principio solamente en la banda $0 \leq \operatorname{real}(s) \leq 1$, llamada *banda crítica*, pues, como ya hemos visto, no hay ceros en el semiplano $\operatorname{real}(s) > 1$ de la definición. Sin embargo, tanto Jacques Hadamard (1865-1963) como Charles-Jean De la Vallée Poussin

Del Problema de Basilea a la Función Zeta de Riemann

(1866-1962) probaron de forma independiente en 1896 que no hay ceros de la función zeta en las recta delimitadora de esta banda, es decir, se tiene que $\zeta(1+it) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, por lo que los posibles ceros, habrían de encontrarse en el interior: $0 < \text{real}(s) < 1$. Geodfrey Harold Hardy (1877-1947) probaría en 1914 que en la recta central de la banda crítica, $1/2+it$, existen infinitos ceros de la función zeta. Tal recta se denomina *recta crítica*.

En particular, si analizamos los dos puntos de corte de las rectas $1+it$ y $0+it$ con el eje real ($t=0$), encontramos respectivamente: $s=1$, polo simple de residuo unidad, y $s=0$, punto en el que la función zeta no se anula, como podemos ver a continuación usando la serie alternada:

Si consideramos la función alternada $\zeta_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$, se tiene que

$$\zeta_a(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1-1+1-1+1-1+1-1+\dots$$

por tanto:

$$1 - \zeta_a(0) = 1 - (1-1+1-1+1-1+\dots) = 1-1+1-1+1-1+\dots = \zeta_a(0) \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \zeta_a(0) = \zeta_a(0) \rightarrow \zeta_a(0) = 1/2$$

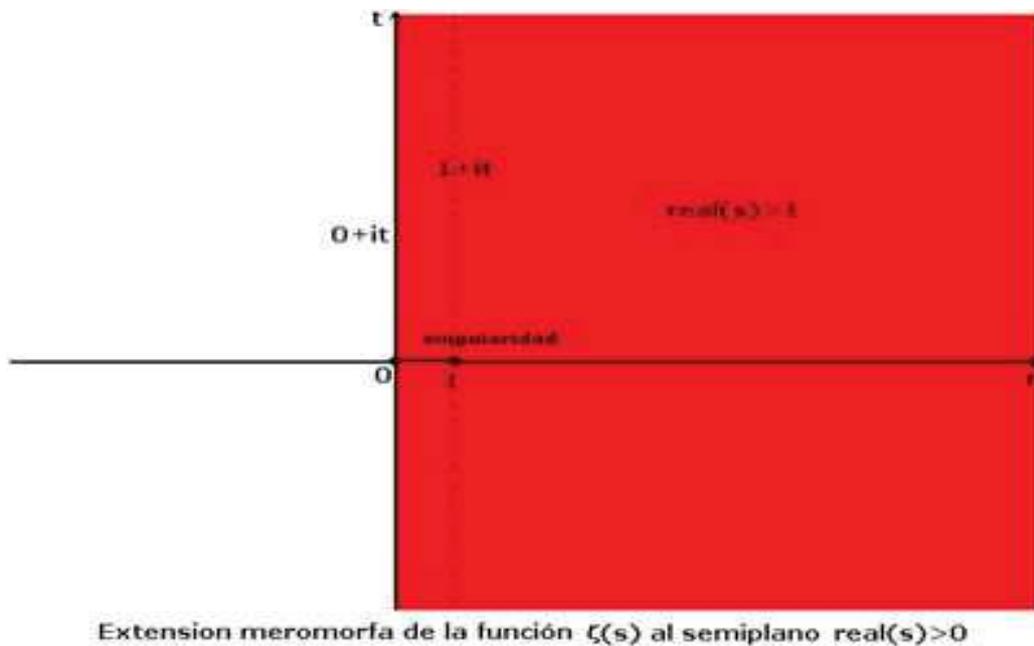
Y de la relación [03.3] con la función zeta:

$$\zeta(0) = \frac{1}{1-2^{1-0}} \zeta_a(0) = -\zeta_a(0) = -\frac{1}{2}$$

En definitiva

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

Carlos Sánchez China



04 Extensión de la función zeta a todo el plano complejo:

04.1. Buscando una ecuación funcional:

Podemos encontrar una ecuación funcional que permite la prolongación al plano complejo de la función.

Aunque ya en 1749 Euler había comprobado que una cierta ecuación funcional

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \varphi(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \cdot \varphi(1-s)$$

se verificaba para valores reales de s , sería en el siglo XIX cuando Bernhard Riemann lograría la primera demostración. Veamos a continuación un proceso de prueba en el que usamos la fórmula de Poisson para la función theta de Jacobi.

04.2. La función theta de Jacobi:

Se verifica para la función particular de Jacobi en la variable x ,

Del Problema de Basilea a la Función Zeta de Riemann

$$\vartheta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}$$

La relación

$$\vartheta(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \vartheta\left(\frac{1}{x}\right) \quad [04.1]$$

En efecto:

Si consideramos una transformación de Fourier de una función f

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-2\pi i k t} dt$$

y si la función f es adecuada, entonces tal transformada está bien definida y puede aplicarse la fórmula de sumación de Poisson

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-2\pi i k t} dt$$

teniéndose para el caso de la función $e^{-\pi n^2 x}$ que:

$$\vartheta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2 x} \cdot e^{-2\pi i k t} \cdot dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2 x - 2\pi i k t} \cdot dt$$

si modificamos el exponente en la integral:

$$\begin{aligned} -\pi t^2 x - 2\pi i k t &= -\pi t^2 x - 2\pi i k t + i^2 \frac{k^2}{x} \pi - i^2 \frac{k^2}{x} \pi = -\pi x \left(t^2 + 2i \frac{k}{x} t + i^2 \frac{k^2}{x^2} - i^2 \frac{k^2}{x^2} \right) = \\ &= -\pi x \left[\left(t + i \frac{k}{x} \right)^2 - i^2 \frac{k^2}{x^2} \right] \end{aligned}$$

quedando la expresión en la forma:

$$\vartheta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x \left[\left(t + i \frac{k}{x} \right)^2 - i^2 \frac{k^2}{x^2} \right]} \cdot dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi k^2 \frac{1}{x}} \cdot e^{-\pi x \left(t + i \frac{k}{x} \right)^2} \cdot dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\pi k^2 \frac{1}{x}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x \left(t + i \frac{k}{x} \right)^2} \cdot dt$$

Carlos Sánchez China

Hacemos un cambio de variables:

$$t + i\frac{k}{x} = z \rightarrow dt = dz \rightarrow \vartheta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\pi k^2 \frac{1}{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x z^2} \cdot dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\pi k^2 \frac{1}{x}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\pi x}} = \vartheta\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{x}}$$

por tanto: $\vartheta(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \vartheta\left(\frac{1}{x}\right)$

04.3. La ecuación funcional de Riemann:

Partimos de la definición de la función gamma de Euler:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} \cdot e^{-t} \cdot dt, \quad \text{real}(s) > 0$$

Que, para $\frac{s}{2}$, puede expresarse así:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{\frac{s}{2}-1} \cdot e^{-t} \cdot dt \quad \text{real}(s) > 0$$

Hacemos un cambio de variables en la integral ($t = \pi \cdot n^2 x$, $dt = \pi \cdot n^2 dx$), quedando

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} (\pi \cdot n^2 x)^{\frac{s}{2}-1} \cdot e^{-\pi \cdot n^2 x} \cdot \pi \cdot n^2 dx = \pi^{\frac{s}{2}} \cdot n^s \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \cdot e^{-\pi \cdot n^2 x} \cdot dx$$

de lo cual:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^s} = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \cdot e^{-\pi \cdot n^2 x} \cdot dx$$

y si consideramos la serie:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi \cdot n^2 x} \cdot dx$$

o bien

Del Problema de Basilea a la Función Zeta de Riemann

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi \cdot n^2 x} \cdot dx$$

Si consideramos la función Theta de Jacobi:

$$\theta(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-\pi \cdot n^2 x}$$

queda

$$\theta(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-\pi \cdot n^2 x} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi \cdot n^2 x} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi \cdot n^2 x} = \frac{\theta(x) - 1}{2} \rightarrow \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s) = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \cdot \frac{\theta(x) - 1}{2} \cdot dx$$

que por simplificar, hacemos $\theta(x) = 1 + 2\Psi(x)$ y la escribimos en la forma

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s) = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \cdot \Psi(x) \cdot dx$$

y que podemos expresar, partiendo el intervalo de integración, como suma de dos integrales:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s) = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \cdot \Psi(x) \cdot dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \cdot \Psi(x) \cdot dx \quad [04.2]$$

a fin de expresar de otro modo la primera de estas dos integrales, utilizamos la fórmula de Poisson, o sea:

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \theta\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 1 + 2\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 + 2\Psi\left(\frac{1}{x}\right)\right) \rightarrow \Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$$

que, al sustituir en dicha integral se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \cdot \Psi(x) \cdot dx &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \Psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \right] dx = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \left[\Psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \left(x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right) \right] dx = \\ &= \int_0^1 x^{\frac{s-3}{2}} \Psi\left(\frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right) dx = \int_0^1 x^{\frac{s-3}{2}} \Psi\left(\frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{2} \frac{x^{\frac{s-3}{2}+1}}{\frac{s-3}{2}+1} - \frac{1}{2} \frac{x^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} \Bigg|_0^1 = \end{aligned}$$

Carlos Sánchez Chinaea

$$= \int_0^1 x^{\frac{s-3}{2}} \Psi\left(\frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{s(s-1)}$$

Hacemos un último cambio de variables ($x = 1/u$, $dx = -du/u^2$):

$$\int_0^1 x^{\frac{s-3}{2}} \Psi\left(\frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{s(s-1)} = -\int_{\infty}^1 u^{-\frac{s+3}{2}-2} \Psi(u) du + \frac{1}{s(s-1)} = \int_1^{\infty} u^{-\frac{s-1}{2}-2} \Psi(u) du + \frac{1}{s(s-1)}$$

denominamos nuevamente x a la variable y sustituimos en [04.2]:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_1^{\infty} x^{\frac{s-1}{2}} \cdot \Psi(x) \cdot dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s-1}{2}} \cdot \Psi(x) \cdot dx + \frac{1}{s(s-1)}$$

O sea:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s) = \int_1^{\infty} \left(x^{\frac{s-1}{2}} + x^{\frac{s-1}{2}} \right) \cdot \Psi(x) \cdot dx + \frac{1}{s(s-1)}$$

Si cambiamos s por $1-s$ se verifica que

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \cdot \zeta(1-s) &= \int_1^{\infty} \left(x^{-\frac{1-s-1}{2}} + x^{-\frac{1-s-1}{2}} \right) \cdot \Psi(x) \cdot dx + \frac{1}{(1-s)(1-s-1)} = \\ &= \int_1^{\infty} \left(x^{\frac{s-1}{2}} + x^{\frac{s-1}{2}} \right) \cdot \Psi(x) \cdot dx + \frac{1}{s(s-1)} = \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s) \end{aligned}$$

Con lo que se obtiene la ecuación

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \cdot \zeta(1-s) \quad [04.3]$$

04.4. Otra expresión de la ecuación funcional:

Otra versión equivalente de esta ecuación funcional se obtiene fácilmente usando dos de las propiedades básicas de la función Gamma de Euler, las llamadas *Propiedad de Reflexión de Euler* y *Propiedad de duplicación de Legendre*.

Del Problema de Basilea a la Función Zeta de Riemann

Propiedad de Reflexión de Euler:

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}$$

que, para $x = \frac{1+s}{2}$ será:

$$\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1+s}{2}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi s}{2}\right)} \rightarrow \Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)} \quad [04.4]$$

Propiedad de duplicación de Legendre:

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \Gamma(2x)$$

que, para $x = \frac{s}{2}$ será:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{s-1}} \Gamma(s) \quad [04.5]$$

Así, si en la ecuación funcional de Riemann multiplicamos ambos miembros por $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$:

$$\pi^{\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \cdot \zeta(s) = \pi^{\frac{1-s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \cdot \zeta(1-s)$$

se tiene, al sustituir [04.5] en el miembro de la izquierda y [04.4] en el miembro de la derecha:

$$\pi^{\frac{s}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{s-1}} \Gamma(s) \cdot \zeta(s) = \pi^{\frac{1-s}{2}} \cdot \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)} \cdot \zeta(1-s)$$

quedando:

Carlos Sánchez China

$$\zeta(1-s) = (2\pi)^{-s} \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \cdot \zeta(s)$$

si, finalmente, cambiamos s por $1-s$:

$$\zeta(s) = (2\pi)^{s-1} \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \cdot \zeta(1-s)$$

o sea:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \cdot \zeta(1-s) \quad [04.6]$$

Si es $\operatorname{real}(s) < 0$ entonces $\operatorname{real}(1-s) > 1$.

Por tanto, es una prolongación de la función zeta en el semiplano $\operatorname{real}(s) < 0$, ya que permite obtener en dicho semiplano los valores de $\zeta(s)$ desde los valores $\Gamma(1-s)$ y $\zeta(1-s)$.

04.5. Ceros en el semiplano $\operatorname{real}(s) < 0$:

Por tanto, al prolongar la función, inicialmente definida en el semiplano de Riemann $\pi = \{s \in \mathbb{C} / \operatorname{real}(s) \geq 1 + \delta, \delta > 0\}$, a todo el plano complejo, los ceros, de existir, se encontrarían necesariamente en el semiplano complementario $\mathbb{C} - \pi$.

Ya hemos visto que $s_0 = 0$ no es un cero de la función zeta (pues $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$). Veamos la situación para $s_0 < 0$:

Para $\operatorname{real}(s_0) < 0$ es $\operatorname{real}(1-s_0) > 1$, por lo que $\Gamma(1-s_0) \neq 0$ y $\zeta(1-s_0) \neq 0$ y los únicos ceros posibles son los valores reales de s_0 que anulen al factor $\operatorname{sen}(\pi s_0 / 2)$. Esto es, los ceros son los valores reales de s_0 tales que $\operatorname{real}(s) < 0$ y $\operatorname{sen}(\pi s_0 / 2) = 0$, por lo que ha de ser $\pi \cdot s_0 / 2 = -k\pi$, $k=1,2,\dots$. Es decir, los valores de s_0 son los números reales negativos tales $s_0 = -2k$, $k=1,2,\dots$, luego $\varphi(-2k) = 0$, $k=1,2,\dots$

Del Problema de Basilea a la Función Zeta de Riemann

En definitiva, en este caso, los ceros son los enteros pares negativos:

$$\xi_k = -2k, k=1,2,\dots$$

Que se denominan “ceros triviales” de la función zeta. Los restantes ceros, caso de existir, estarían ya en la banda crítica $0 < \text{real}(s) < 1$ y se denominarían “ceros no triviales”.

05 Los ceros de la función $\zeta(s)$ sobre la recta crítica. La hipótesis de Riemann:

Veamos ahora una función $\varepsilon(s)$ que ya fue introducida por el mismo Riemann para el estudio de la función zeta:

$$\varepsilon(s) = \frac{\mathfrak{s}(1-s)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s)$$

o bien:

$$\varepsilon(1-s) = \frac{\mathfrak{s}(1-s)}{2} \pi^{-\frac{1-s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \cdot \zeta(1-s)$$

y por la ecuación funcional [04.3]:

$$\varepsilon(s) = \varepsilon(1-s)$$

Si consideramos los números complejos de parte real $1/2$, ($s = 1/2 + it$), se tendrá:

$$\varepsilon(1/2 + it) = \varepsilon(1 - (1/2 + it)) = \varepsilon(1/2 - it)$$

Por lo que definiendo la función real $\Phi(t)$ por

$$\Phi(t) = \varepsilon(1/2 + it), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Se cumple que

$$\Phi(t) = \Phi(-t)$$

Es decir, existe una función, $\Phi(t)$, real de variable real, que es par, entera y tal que sus ceros se corresponden con los ceros de la función zeta sobre la recta $1/2 + it$:

Carlos Sánchez China

$$\forall t_0 \in \mathbb{R} / \Phi(t_0) = 0 \rightarrow \varepsilon(1/2 + it_0) = 0 \rightarrow \frac{\varepsilon(1-s)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(1/2 + it_0) = 0 \rightarrow \zeta(1/2 + it_0) = 0$$

En definitiva, la función zeta es simétrica respecto al eje $t=0$ sobre la recta crítica $1/2+it$, teniendo en ella los ceros que se correspondan con los ceros de la función real $\Phi(t)$.

Aunque Geodfrey H. Hardy probó en 1914 que existen infinitos ceros de la función zeta sobre la recta crítica, nadie ha probado que no existan además otros ceros fuera de dicha recta.

Riemann formuló la hipótesis de que todos los ceros de la función zeta en la banda crítica habrían de estar necesariamente en la recta $1/2+it$. Es decir, que no hay otros ceros fuera de dicha recta. Esta conjetura no ha sido probada y su demostración es quizás el más importante problema abierto de la actualidad (Hipótesis de Riemann).

Existen diferentes argumentaciones para justificar la hipótesis, habiéndose encontrado ya computacionalmente millones de ceros sobre la recta crítica. Se puede argumentar mediante el estudio de variedades en campos finitos, mediante el análisis de la fórmula explícita de la ecuación funcional de Riemann, etc.. Sin embargo, la manera más directa de hacer un estudio de la hipótesis es, tal vez, mediante la evaluación del número de ceros de la función real $\Phi(t)$.

Se ha calculado que el número de ceros $N(t)$ que se encuentran en el interior del rectángulo $R(-1-it, 2-it, 2+it, -1+it)$ de perímetro LR viene dado por la evaluación de la integral de Euler, que se redondea al entero más próximo:

$$N(t)-1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{LR} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$$

(donde el 1 que figura en el miembro de la izquierda se debe a la existencia del polo simple en $s=1$)

Al tratarse $\Phi(t)$ de una función real y continua para t real (los valores de t se evalúan sobre la recta crítica $1/2+it$), habrá un cero sobre la recta crítica para cada cambio de signo de $\Phi(t)$. Si el número de cambios de signo se corresponde con la

Del Problema de Basilea a la Función Zeta de Riemann

evaluación de $N(t)$ se puede concluir que todos los ceros en el rectángulo antedicho satisfacen la hipótesis de Riemann, es decir, están en la recta crítica. De este modo se han encontrado millones de ceros de la función $\zeta(s)$ satisfaciendo la hipótesis de Riemann.

La hipótesis de Riemann es en realidad equivalente a la afirmación de que todos los máximos locales de la función $\Phi(t)$ son positivos y que todos los mínimos locales son negativos.

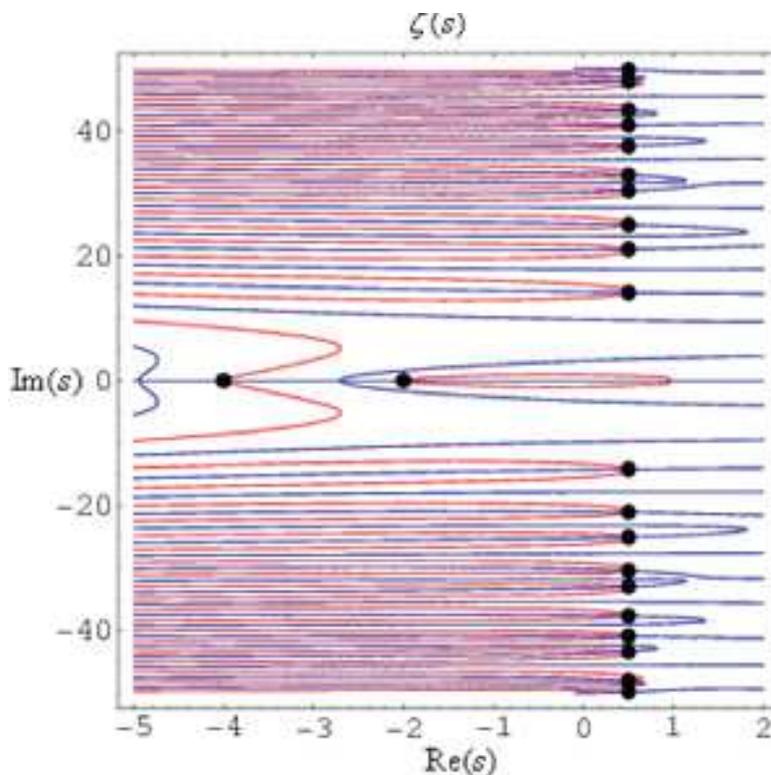


Imagen de la zona del plano complejo comprendida entre los puntos $(-5,0)$ y $(2,0)$ del eje real, y los puntos $(0,-50)$ y $(0,50)$ del eje imaginario, donde se muestran dos de los infinitos ceros triviales $(-2,0)$ y $(-4,0)$, y unos veinte de los infinitos ceros no triviales situados en la recta crítica $1/2+it$

<http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunctionZeros.html>

Carlos Sánchez China

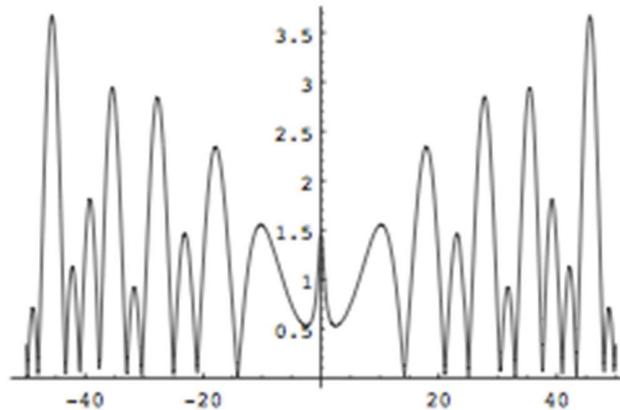


Imagen de un corte transversal sobre la recta $1/2+it$, que nos muestra

$$|(1/2+it)|, -50 \leq t \leq 50$$

<http://www.unizar.es/acz/05Publicaciones/Revistas/Revista57/067.pdf>

06 Otras relaciones elementales

06.1 La relación directa como factorización de diferencias inversas:

La primera relación a considerar es la expresión [02.2]:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in P} (1 - p^{-s})^{-1}$$

Donde P es el conjunto de todos los números primos $p_i, i=1,2,\dots$

06.2 Expresión como factorización de sumas:

Teniendo en cuenta que cada uno de los factores del producto anterior puede considerarse la suma de los términos de una progresión geométrica de primer término la unidad y razón p_i^{-s} , se tiene:

Del Problema de Basilea a la Función Zeta de Riemann

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_i^{-ns} = p_i^0 + p_i^{-s} + p_i^{-2s} + p_i^{-3s} + \dots = \frac{1}{1 - p_i^{-s}} = (1 - p_i^{-s})^{-1}$$

por tanto se tiene la expresión:

$$\zeta(s) = \prod_{p_i \in P} \sum_{n=0}^{\infty} p_i^{-ns} \quad [06.1]$$

06.3 Relación con la función contadora de números primos

Si llamamos $\pi(x)$ al total de los números primos inferiores a x , calculemos la integral siguiente a fin de encontrar una posible relación con la función zeta de Riemann:

$$\int_1^{\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{p_i}^{p_{i+1}} \frac{i}{x(x^s - 1)} dx = \sum_{i=1}^{\infty} i \int_{p_i}^{p_{i+1}} \left(\frac{x^{s-1}}{x^s - 1} - \frac{1}{x} \right) dx = \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{1}{s} \log(x^s - 1) - \log x \right) \Bigg|_{p_i}^{p_{i+1}} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{1}{s} \log(p_{i+1}^s - 1) - \log p_{i+1} - \frac{1}{s} \log(p_i^s - 1) + \log p_i \right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{s} \log(p_2^s - 1) - \log p_2 - \frac{1}{s} \log(p_1^s - 1) + \log p_1 \right) + \\ &+ 2 \cdot \left(\frac{1}{s} \log(p_3^s - 1) - \log p_3 - \frac{1}{s} \log(p_2^s - 1) + \log p_2 \right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{s} \log(p_4^s - 1) - \log p_4 - \frac{1}{s} \log(p_3^s - 1) + \log p_3 \right) + \dots \end{aligned}$$

ordenando esta última suma:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx &= - \left(\frac{\log(p_1^s - 1)}{s} + \frac{\log(p_2^s - 1)}{s} + \frac{\log(p_3^s - 1)}{s} + \dots \right) + (\log p_1 + \log p_2 + \log p_3 + \dots) = \\ &= - \left(\frac{\log(p_1^s - 1)}{s} + \frac{\log(p_2^s - 1)}{s} + \frac{\log(p_3^s - 1)}{s} + \dots \right) + \left(\frac{\text{slog } p_1}{s} + \frac{\text{slog } p_2}{s} + \frac{\text{slog } p_3}{s} + \dots \right) = \\ &= - \frac{1}{s} \left(\log \frac{p_1^s - 1}{p_1^s} + \log \frac{p_2^s - 1}{p_2^s} + \log \frac{p_3^s - 1}{p_3^s} + \dots \right) = - \frac{1}{s} \sum_{p_i} \log \frac{p_i^s - 1}{p_i^s} = - \frac{1}{s} \sum_{p_i} \log \left(1 - \frac{1}{p_i^s} \right) = \frac{1}{s} \sum_{p_i} \log \left(1 - \frac{1}{p_i^s} \right)^{-1} = \end{aligned}$$

Carlos Sánchez Chinaea

$$= \frac{1}{s} \log \prod_{p_i} \left(1 - \frac{1}{p_i^s} \right)^{-1} = \frac{1}{s} \log \zeta(s)$$

En definitiva:

$$\log \zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx \quad [06.2]$$

06.4 Relación con la función Gamma de Euler:

La función gamma se puede definir por la expresión integral de Euler

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \text{ que converge para } \text{real}(s) > 0$$

Hagamos el cambio de variables $t = nv$, $dt = ndv$, con lo cual será:

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \int_0^{\infty} (nv)^{s-1} e^{-nv} n dv = n^s \int_0^{\infty} v^{s-1} e^{-nv} dv \rightarrow \Gamma(s) \frac{1}{n^s} = \int_0^{\infty} v^{s-1} e^{-nv} dv \rightarrow \\ &\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(s) \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} v^{s-1} e^{-nv} dv \rightarrow \Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \int_0^{\infty} v^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nv} dv \end{aligned}$$

como es

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nv} = e^{-v} + e^{-2v} + e^{-3v} + \dots = \frac{e^{-v}}{1 - e^{-v}}$$

se tiene, finalmente $\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} v^{s-1} \frac{e^{-v}}{1 - e^{-v}} dv = \int_0^{\infty} \frac{v^{s-1}}{e^v - 1} dv$

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{v^{s-1}}{e^v - 1} dv \quad [06.3]$$

En realidad, esto nos indica que el producto de la función zeta de Riemann por la función gamma de Euler puede obtenerse como la transformada de Mellin de la función $f(x) = 1/e^x - 1$:

Del Problema de Basilea a la Función Zeta de Riemann

$$\Gamma(s) \cdot \zeta(s) = M \left\{ \frac{1}{e^x - 1} \right\} = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx$$

Bibliografía

Enunciado del problema por Mengoli, *Novae Quadraturae arithmeticae*:
<https://play.google.com/books/reader?id=f9eM5uQvRucC&printsec=frontcover&output=reader&hl=es&pg=GBS.PP1>

Demostración original de Euler en 1735, *De Summis Serierum Reciprocarum*:
<http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E041.pdf>

Generalización por Euler en 1755, *Institutiones calculi differentialis*:
<http://eulerarchive.maa.org/pages/E212.html>

Titchmarsh, E.C. *The theory of the Riemann Zeta Function*. Clarendon Press. Oxford 1988.

Ivic, A. *The Riemann zeta function*. Jhon Wiley, New York 1985.

S. China, C., *La función gamma de Euler. Un estudio breve*, <http://casan-chi.com/mat/funciongamma01.htm>

Bombieri, Enrico, *Problems of the Millennium: The Riemann hypothesis*,
http://www.claymath.org/sites/default/files/official_problem_description.pdf

Wolfram MathWorld, *Riemann Zeta Function Zeros*, <http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunctionZeros.html>

Calderón, Catalina, *La Función Zeta de Riemann*, <http://www.unizar.es/acz/05Publicaciones/Revistas/Revista57/067.pdf>

ALEPH SUB-CERO

SERIE DE DIVULGACIÓN

№₀ 2015 – I №₀

pp. 52 - 80

**QUANTIZACIÓN BRST-BFV DE TEORÍAS DE CALIBRACIÓN
(BRST-BFV quantization of gauge theories)**

Adunador: ALBERTO MEJÍAS¹

Recepción: Febrero 2015. Revisión y aceptación: Abril 2015.

Resumen. Se presenta una introducción didáctica a la quantización de teorías de calibración empleando el método hamiltoniano de BATALIN-FRADKIN-VILKOVISKY (BRST-BFV), que tiene como característica esencial ser independiente de la condición de calibración. Además, este método generaliza el método de FADDEEV-POPOV, ya que permite construir una teoría cuántica unitaria, a partir de cualquier teoría de calibración conocida. El procedimiento se ilustra con el cálculo del propagador para el rotor rígido bidimensional reformulado como una teoría de calibración.

Descriptor. Interacciones fundamentales, Teorías de calibración, Teoría cuántica unitaria, Quantización de teorías de calibración, supersimetría, Simetría BRST.

Abstract. We present a didactical introduction to the quantization of gauge theories using the Hamiltonian method of BATALIN-FRADKIN-VILKOVISKY (BRST-BFV). This method is independent of the gauge choice and generalizes the FADDEEV-POPOV method, since it allows the construction of a unitary quantum theory starting from any gauge theory. The method is illustrated with the calculation of the quantum mechanical propagator of the two dimensional rigid rotor, which is reformulated as a gauge theory.

Keywords. Fundamental interactions, gauge theories, unitary quantum theory, quantization of gauge theories, supersymmetry, BRST symmetry.

¹ ALBERTO R. MEJÍAS E. es Licenciado en Matemáticas, egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes (ULA) Mérida-Venezuela. Es profesor de Topología, jubilado de la Universidad de los Andes. alrame59@gmail.com

Quantización BRST-BFV de teorías de calibración

1 INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas fundamentales de la física teórica es la quantización de las teorías de calibración, ya que éstas abarcan todas las interacciones fundamentales desde la gravitación con la relatividad general, hasta el modelo estándar $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Existen varios métodos que se han propuesto para quantizar dichas teorías de calibración. Sin embargo, hasta ahora ninguno ha sido exitoso para obtener una teoría cuántica, físicamente consistente, de la gravitación. Entre éstos se encuentran, por ejemplo, el "método DIRAC" [1] y el "método de quantización por lazos" [2]. Uno de los métodos de quantización más exitosos es el llamado "BRST-BFV" (por los descubridores de la simetría BRST: BECHI, ROUET, STORA y TYUTIN, junto con los que desarrollaron el método de quantización: BATALIN, FRADKIN y VILKOVISKY) [3], ya que es posible aplicarlo desde las teorías más simples, como la de la partícula relativística, hasta teorías tan complicadas como la de supergravidad o las teorías topológicas.

Entre las ventajas que posee el método BRST-BFV se encuentran las siguientes: (i) su aplicación es muy sistemática, (ii) es independiente de las condiciones de calibración y (iii) produce una teoría cuántica unitaria, a partir de cualquier teoría de calibración conocida. Este método requiere de la introducción de variables adicionales llamadas "fantasmas". El objetivo es obtener una descripción más simple de la dinámica, al usar la integral de línea que define la evolución del sistema. Otra de sus características es que rompe la covariancia explícita de los modelos a los cuales se aplica, dado que es un método hamiltoniano. Esto tiene como consecuencia que en algunos casos la interpretación física de los resultados obtenidos sea menos transparente, como sucede en el caso de la relatividad general. Para resolver este problema BATALIN y VILKOVISKY (BV) [4] propusieron una versión lagrangeana del método, la cual resulta ser explícitamente covariante. Sin embargo, esta versión tiene el problema de que no existe una forma precisa de evaluar la medida de la integral funcional y, de aquí, al operador evolución del sistema; mientras que en el método BRST-BFV, éste se encuentra completamente determinado. De este modo las dos versiones se complementan.

En este artículo analizaremos el método hamiltoniano, dejando para un trabajo posterior, al formalismo lagrangeano [5].

ALBERTO MEJÍAS

En Sección 2, revisaremos el método DIRAC, dado que éste es un excelente punto de partida para comprender lo que es una teoría de calibración desde el punto de vista hamiltoniano y posteriormente proceder a su quantización.

En Sección 3 introducimos primero, la simetría BRST vista como un reflejo cuántico de la simetría de calibración. En seguida aplicamos esta simetría para construir el método de BRST-BFV. Dado el gran éxito que ha tenido este método, tanto recuperando resultados ya conocidos, como proporcionando una manera consistente de quantizar teorías donde los métodos previamente conocidos han fallado [6], es tentador aceptar la idea de promover la invariancia BRST al nivel de postulado fundamental para la quantización. Este postulado permite construir al lagrangeano cuántico completo como la función más general de los campos físicos y de los fantasmas, que sea invariante bajo BRST. Este procedimiento naturalmente refleja a nivel cuántico, la estrategia empleada para determinar al lagrangeano clásico a partir del principio de invariancia de calibración. Dentro de este contexto entonces, cobra gran importancia la pregunta de cómo reformular todos los esquemas previos de quantización en términos de dicha simetría.

Por último, en Sección 4 se presenta el ejemplo del rotor rígido bidimensional. Este ejemplo cumple tres propósitos que son: (i) ilustrar el método DIRAC, (ii) ilustrar el método BRST propiamente dicho y (iii) ilustrar la idea de que siempre es posible reformular una teoría con constricciones de segunda clase como una teoría de calibración, es decir únicamente con constricciones de primera clase [7] llevando a cabo su quantización según el método BRST-BFV. Una motivación más detallada de este punto de vista se da al final de Sección 3, donde ya se han presentado los antecedentes necesarios para su mejor comprensión.

2 QUANTIZACIÓN DIRAC

El método hamiltoniano de quantización BRST-BFV puede considerarse como una extensión del método DIRAC, por lo cual revisaremos primero a éste, tanto para fijar notación como para fijar ideas.

El primer punto a considerar, es comprender desde el punto de vista hamiltoniano, qué es lo que se entiende por una teoría de calibración.

Toda teoría de calibración está caracterizada por un lagrangeano singular, es decir,

Quantización BRST-BFV de teorías de calibración

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) = 0. \quad (2.1)$$

Esto significa que no todas las aceleraciones se encuentran determinadas por las ecuaciones de movimiento y, en consecuencia, nuestra teoría posee cierta arbitrariedad, la cual se ve reflejada en que las soluciones de las ecuaciones de movimiento contienen parámetros arbitrarios. De este modo, los observables de la teoría serán solamente aquellas combinaciones de variables dinámicas que son independientes de dichos parámetros arbitrarios. Esto precisamente es lo que se entiende por un objeto invariante por calibración. Aquí valdría la pena preguntarse si la aseveración recíproca es correcta; es decir, si toda teoría cuyo lagrangeano es singular, es una teoría de calibración. Como veremos a continuación la respuesta es negativa.

Ec. (2.1) nos dice, por otra parte, que no todos los momentos $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ están determinados por las velocidades, es decir, que existen m'_1 relaciones del tipo

$$\phi(p, q)_{A_1} \approx 0 \quad (2.2)$$

donde \approx significa que estas relaciones son cero una vez que se hayan evaluado todos los corchetes POISSON donde ellas aparezcan. Llamaremos 'constricciones primarias' a estas relaciones. El número de constricciones primarias independientes es igual a la dimensión de la matriz en (2.1) menos el rango de la misma. A este número lo denotaremos por m_1 .

A continuación, por simplicidad, supondremos que todas las constricciones primarias son independientes y que son bosónicas, aunque el formalismo también puede desarrollarse en casos más generales [8]. Las constricciones (2.2) definen una subvariedad del espacio de fase llamada superficie de restricción, sobre la cual está restringido el movimiento.

La siguiente etapa en el análisis es introducir el hamiltoniano canónico

$$H_0 = \dot{q}^j p_j - L. \quad (2.3)$$

El hamiltoniano definido en (2.3) no está unívocamente determinado como

ALBERTO MEJÍAS

una función de momentos y coordenadas, ya que las variaciones en estas variables no son todas independientes sino que deben estar restringidas para preservar las constricciones primarias (2.2). En consecuencia el hamiltoniano (2.3) está bien definido únicamente sobre la superficie de restricción y, por lo tanto, existe arbitrariedad para extenderlo fuera de ésta. Así podemos definir un nuevo hamiltoniano dado por

$$H_1 = H_0 + \lambda^{A_1} \phi_{A_1}, \quad (2.4)$$

donde A_1 marca a las constricciones primarias independientes y los λ^{A_1} son multiplicadores LAGRANGE, que son arbitrarios hasta este momento.

El paso siguiente en la determinación de la consistencia del método, es asegurarse de que la superficie de restricción se preserve en el tiempo. Esto implica pedir que $\dot{\phi}_{A_1} \approx 0$; es decir, que

$$\{\phi_{A_1}, H_1\} = V_{A_1}^{B_1} \phi_{B_1} + V_{A_1}^{A_2} \phi_{A_2} \approx 0, \quad (2.5)$$

donde $\{A, B\}$ es el corchete POISSON de las cantidades A y B . En esta etapa podrían aparecer nuevas constricciones llamadas secundarias, que son independientes de las primarias. Si en el proceso se obtienen constricciones secundarias, es necesario pedir que éstas también se conserven en el tiempo, como resultado de lo cual todavía puede surgir otra generación de constricciones. El proceso se continúa hasta que ya no se encuentren nuevas constricciones.

Una vez que se tenga la colección completa de constricciones, se definen las variables de primera clase como aquellas que tienen corchetes POISSON ≈ 0 con todas las constricciones. Es decir, F es de primera clase si

$$\{F, \phi_A\} = V_A^B(p, q)\phi_B, \quad (2.6)$$

con el índice $A = 1, \dots, M$, donde $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$, y m_n es el número de constricciones de la n -ésima generación. Las cantidades de segunda clase son todas aquellas que no satisfacen esta condición. En consecuencia, es posible definir como constricciones de primera clase, G_a , a todas aquellas que satisfagan la relación

$$\{G_a, \phi\} = C_{aB}^C(p, q)\phi_C \quad (2.7)$$

con $a = 1, \dots, p$. De este modo, las funciones de estructura $C_{aB}^C(p, q)$, pueden depender de las coordenadas y los momentos; es decir, no necesariamente se tiene un álgebra LIE.

Quantización BRST-BFV de teorías de calibración

En el caso de las constricciones de primera clase no es posible determinar los multiplicadores LAGRANGE asociados a ellas y éstos son los parámetros arbitrarios que aparecen en la solución de las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, para el caso de constricciones de segunda clase, χ_α , es posible determinar dichos multiplicadores debido a la existencia de la matriz

$$C_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} \quad (2.8)$$

cuyo determinante es diferente de cero y por lo tanto invertible. Esto permite mostrar que todos los multiplicadores LAGRANGE asociados a estas constricciones pueden ser determinados. En consecuencia, cuando se tienen sólo constricciones de segunda clase no existe libertad de calibración aun cuando el lagrangeano sea singular.

Así, desde el punto de vista hamiltoniano, una teoría de calibración es aquella que tiene al menos una restricción de primera clase.

En lo que respecta a las constricciones de segunda clase, suponiendo que son bosónicas, la matriz (2.8) implica que éstas deben de ser de un número par, dado que, de lo contrario, esta matriz no sería invertible ya que es antisimétrica.

Las constricciones de segunda clase siempre pueden ser tratadas como de primera clase, si uno incluye variables adicionales al problema, de tal manera que la matriz $C_{\alpha\beta}$ no sea invertible. Posteriormente veremos un ejemplo de cómo se puede llevar a cabo esta extensión. Así que, *de aquí en adelante, consideraremos que existen solamente constricciones de primera clase.*

De todas las constricciones de primera clase, de acuerdo al hamiltoniano H_1 , sólo las primarias son generadoras de transformaciones de calibración, ya que sólo ellas tienen asociado un multiplicador LAGRANGE. Sin embargo, DIRAC postuló que todas las constricciones de primera clase, incluyendo las secundarias y las de orden superior, generan transformaciones de calibración. Este postulado se conoce como la conjetura de DIRAC y es válida en todos los sistemas físicos conocidos. Sin embargo, existen sistemas un poco patológicos que son contraejemplos de esta conjetura.

Hasta ahora existen varias demostraciones de la conjetura de DIRAC bajo ciertas restricciones [8]. Como aquí trataremos sistemas que tienen algún contenido

ALBERTO MEJÍAS

físico, asumiremos que la conjetura de DIRAC es válida, es decir, postularemos que el cambio de una función arbitraria de momentos y coordenadas $F(p, q)$ bajo una transformación de calibración, está dado por

$$\delta F = \{F, \epsilon^a G_a\}, \quad (2.9)$$

donde recordamos que el índice a rotula a todas las constricciones de primera clase.

El parámetro de la transformación, $\epsilon^a(q, p, t)$, puede depender de las coordenadas del espacio de fase y del tiempo, aunque lo más común es que se le considere sólo como función del tiempo. Si tomamos en cuenta que todas las constricciones de primera clase son generadores de transformaciones de calibración podemos escribir, en lugar del hamiltoniano H_1 , otro hamiltoniano que tome en cuenta la arbitrariedad inherente al extenderlo fuera de la superficie de restricción. Este hamiltoniano se conoce como el hamiltoniano extendido y está dado por

$$H_0 = H_1 + \lambda^a G_a \quad (2.10)$$

Las ecuaciones de movimiento, sobre la superficie de restricción, asociadas a este hamiltoniano son

$$\dot{q} = \{q, H_E\} = \frac{\partial H_0}{\partial p} + \lambda^a \frac{\partial G_a}{\partial p} \quad (2.11a)$$

$$\dot{p} = \{p, H_E\} = -\frac{\partial H_0}{\partial q} - \lambda^a \frac{\partial G_a}{\partial q} \quad (2.11b)$$

Las ecuaciones de movimiento anteriores, junto con las constricciones $G_a \approx 0$ pueden obtenerse a partir de la acción

$$S = \int_a^b (p\dot{q} - H_0 - \lambda^a G_a) \quad (2.12)$$

variando con respecto a p , q y λ^a . Esta acción va a ser importante cuando queramos hacer contacto con el método de cuantización usando integrales de línea.

Como los n multiplicadores LAGRANGE λ^a son arbitrarios, se puede imponer n condiciones de calibración para determinarlos

$$N_a(\lambda, p, q) = 0.$$

Ya que deseamos que dichas condiciones fijen completamente la calibración, éstas deben satisfacer la relación

$$\det\{G_a, N_b\} = 0$$

de manera tal, que la matriz $\{G_a, N_b\}$ sea invertible y de este modo puedan deter-

Quantización BRST-BFV de teorías de calibración

minarse todos los multiplicadores LAGRANGE. Debe notarse que el imponer condiciones de calibración es equivalente a transformar al conjunto (G_a, N_b) en constricciones de segunda clase.

A nivel cuántico, los pasos fundamentales del método DIRAC son los siguientes.

El primer paso es promover las constricciones de primera clase a nivel de operadores en el espacio HILBERT del problema. luego se postula que un estado $|\psi\rangle$ es *físico*, sólo si es aniquilado por éstas:

$$\hat{G}_a |\psi\rangle = 0. \quad (2.13a)$$

Aquí \hat{G}_a denota a la versión cuántica de las constricciones de primera clase introducidas previamente, donde se han reemplazado las variables clásicas por sus respectivos operadores lo que, en general, produce problemas de ordenamiento que deben ser resueltos imponiendo algún criterio adicional.

El segundo paso es establecer que los observables de nuestra teoría son todos aquellos operadores hermíticos del espacio de fase, invariantes bajo una transformación de calibración, es decir, que conmutan con todas las constricciones de primera clase:

$$\hat{F} = \hat{F}^\dagger \text{ es observable} \Leftrightarrow \delta \hat{F} = [\hat{F}, \epsilon^a \hat{G}_a] = 0. \quad (2.13b)$$

Como vemos, una de las grandes ventajas del método DIRAC es que no es necesario fijar una calibración para obtener una teoría cuántica. Sin embargo, este método no provee automáticamente una solución a algunos problemas que naturalmente aparecen en la formulación de cualquier teoría cuántica, como son los siguientes:

- (i) la versión cuántica de las relaciones (2.7), aplicada a nuestras constricciones de primera clase, debe ser consistente con las condiciones (2.13a) que definen un estado físico. Esto se logra forzando a que en el lado derecho de la Ec. (2.7), el operador que representa a las funciones de estructura aparezca a la izquierda del operador que representa a las constricciones. Sin embargo, al implementar esto podrían aparecer términos adicionales (anomalías) que no fuesen proporcionales a las constricciones. Dichos términos son un reflejo del problema de ordenamiento y esta situación puede presentarse cuando las funciones de estruc-

ALBERTO MEJÍAS

tura dependen de los momentos y las coordenadas.

(ii) El segundo problema importante es que el método DIRAC proporciona los estados físicos del sistema, pero no nos da una regla para definir el producto escalar que permita llevar a cabo la interpretación probabilística de la teoría cuántica.

(iii)

Como veremos más adelante, el método BRST-BFV mantiene las ventajas del método DIRAC proporcionando en muchos casos una guía para resolver los problemas anteriores.

3 EL MÉTODO BRST-BFV

La idea básica de este método consiste en extender el espacio de fase del problema promoviendo los multiplicadores LAGRANGE a nivel de coordenadas e introduciendo nuevas variables canónicas, que se denominan fantasmas, con estadística opuesta a las ya existentes. Dicha extensión se realiza hasta implantar de manera exacta, una transformación de supersimetría global que incorpora la simetría de calibración original. Esta resulta ser la simetría BRST, que explicaremos con más detalle en esta sección.

Una vez que el sistema original se ha completado con estas propiedades generales, se postula que la correspondiente medida de la integral funcional está dada por la medida LIOUVILLE correspondiente a todas las variables canónicas involucradas. Así, una vez integrados los fantasmas, se obtiene la medida correcta en las variables originales del sistema que define al producto escalar necesario para la interpretación de la teoría. Este procedimiento tiene la virtud de ser sistemático y, en más de un caso, ha producido correcciones no-triviales e inesperadas al método de FADDEEV-POPOV que, usualmente, es el más utilizado para quantizar teorías de calibración [8].

Los fantasmas fueron introducidos por primera vez por FEYNMAN [9], con el fin de mantener la unitaridad de una teoría YANG-MILLS. Se les dió el nombre de fantasmas porque, a pesar de ser escalares bajo transformaciones de coordenadas, no tienen estadística de bosón, es decir, violan el teorema de espín-estadística, por lo cual no son observables. Estos campos adquirieron más sentido cuando FADDEEV y POPOV [10] mostraron que los fantasmas podían obtenerse como resultado de un cálculo correcto de la medida de la integral de línea y por esto se les dió el nombre de fantasmas FADDEEV-POPOV. Posteriormente, con el trabajo de BECCHI-ROUET-

Quantización BRST-BFV de teorías de calibración

STORA [3] y TYUTIN [11], éstos adquirieron un carácter más formal, ya que se mostró que eran parte esencial de una nueva simetría, que ahora se conoce con el nombre de simetría BRST.

La simetría BRST tiene dos características esenciales:

- (i) es el residuo de la simetría de calibración una vez que la calibración se ha fijado, es decir, es una simetría que prevalece aun a pesar de que se haya seleccionado una calibración;
- (ii) a diferencia de la simetría de calibración, esta simetría es de carácter global, es decir, el parámetro de la transformación no depende de la posición. Además, este parámetro es un número GRASSMANN, por lo cual la simetría BRST es un tipo de supersimetría, ya que la transformación relaciona bosones con fermiones. Las variables GRASSMANN pueden considerarse como el límite clásico de campos fermiónicos⁺, que están quantizados con anticonmutadores con el objeto de satisfacer la estadística FERMI-DIRAC. En efecto, si consideramos el límite clásico ($\hbar \rightarrow 0$) del anticonmutador $\{\psi_a, \psi_b\} = \hbar\delta_{ab}$, obtenemos que el álgebra satisfecho por las variables $\theta_a = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \psi_a$, está dado por $\theta_a\theta_b + \theta_b\theta_a = 0$. En particular $\theta_a^2 = 0$. Las relaciones anteriores definen la estructura básica de un álgebra GRASSMANN. Para una discusión más detallada de las propiedades de este tipo de álgebra se recomienda consultar a [12].

Como un ejemplo de la simetría BRST consideremos el caso de la electrodinámica, cuyo lagrangeano es

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.2)$$

Este lagrangeano es invariante bajo las transformaciones de calibración locales

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda \quad (3.3)$$

El lagrangeano efectivo en la calibración LORENTZ es

$$L_{\text{eff}} = L + L_{gf} + L_{FPG} \quad (3.4)$$

con

$$L_{gf} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2, \quad (3.5)$$

ALBERTO MEJÍAS

$$L_{FPG} = -i\partial^\mu \bar{c} \partial_\mu c \quad (3.6)$$

donde L_{gf} impone la condición de calibración LORENTZ y L_{FPG} es el lagrangeano de los fantasmas que en este caso simple se desacoplan. El lagrangeano efectivo ya no es invariante bajo las transformaciones (3.3), sin embargo, es invariante bajo las siguientes transformaciones:

$$\delta A_\mu = -\frac{\omega}{g} \partial_\mu c, \quad (3.7a)$$

$$\delta \bar{c} = -i \frac{\omega}{g \xi^\epsilon} \partial^\mu A_\mu, \quad (3.7b)$$

$$\delta c = 0 \quad (3.7c)$$

De las ecuaciones anteriores vemos que dicha transformación es del tipo supersimétrico, dado que relaciona fantasmas, que son fermiones, con el campo bosónico A_μ . En consecuencia, el parámetro de la transformación ω debe ser un número GRASSMANN impar. Estas transformaciones se conocen con el nombre de transformaciones BRST.

Del teorema de NOETHER sabemos que dada una simetría existe una carga conservada, en este caso la carga BRST. En el formalismo lagrangeano de las ecuaciones anteriores dicha carga está dada por

$$Q_{BRST} = \frac{1}{g} \int d^3x \left[c \nabla \cdot E - \frac{1}{g} \dot{c} \partial^\mu A_\mu \right] \quad (3.8)$$

Esta expresión es lineal en los fantasmas y, en consecuencia, es una variable grassmaniana impar. Consideraremos a esta propiedad como de carácter fundamental. Para implementar esta idea introducimos el concepto de paridad GRASSMANN, $\epsilon(z)$, de la variable z , que toma los valores 0 ó 1 según z sea par o impar en los generadores del álgebra GRASSMANN, respectivamente. De este modo tenemos que $\epsilon(Q_{BRST}) = 1$.

El problema ahora es construir una expresión general para esta carga dentro del formalismo hamiltoniano de una teoría de calibración, sin fijar una calibración específica. Para hacer esto agrandamos el espacio de fase (p, q) considerando a los multiplicadores LAGRANGE, λ^a , asociados a las constricciones de primera clase como nuevas variables canónicas. Por lo tanto, es necesario también, agregar a sus

Quantización BRST-BFV de teorías de calibración

momentos conjugados π_a , de tal modo que

$$\{\lambda^b, \pi_a\} = -\{\pi_a, \lambda^b\} = \delta_a^b \quad (3.9)$$

Para que la teoría original no se modifique es necesario considerar que estos momentos van a ser nuevas constricciones de primera clase $\pi_a \approx 0$. Así, el conjunto total de constricciones es

$$C_a = \{\pi_a, G_a\} \quad (3.10)$$

con $A = 1, \dots, 2n$, donde n es el número de constricciones de primera clase sin tomar en cuenta a los momentos conjugados de los multiplicadores LAGRANGE.

Como siguiente paso introducimos los fantasmas η^A y consideramos que también son variables canónicas, a las cuales asociamos sus momentos canónicos conjugados, que llamaremos antifantasmas

$$\{\eta^B, \mathcal{P}_A\} = \{\mathcal{P}_A, \eta^B\} = -\delta_A^B \quad (3.11)$$

donde $\epsilon(\mathcal{P}_A) = \epsilon(\eta^A) = 1$, $(\eta^A)^* = \eta^A$, y $(\mathcal{P}_A)^* = -\mathcal{P}_A$. Imponemos además, que las nuevas variables canónicas η^A y \mathcal{P}_A tengan corchetes POISSON cero, con el resto de las variables $Z_\Delta = (p_i, q^i, \lambda^a, \pi_a)$:

$$\{\eta^A, Z_\Delta\} = \{\mathcal{P}_A, Z_\Delta\} = 0. \quad (3.12)$$

El espacio de fase extendido, con coordenadas $(Z_\Delta, \eta^A, \mathcal{P}_A)$, equipado con esta estructura de corchetes POISSON, se denomina superespacio de fase. Además de la paridad GRASSMAN, es conveniente definir en este superespacio una estructura adicional \mathcal{G} , que denominaremos número fantasma. Esto lo hacemos atribuyendo a cada una de las variables básicas un número fantasma de la siguiente manera:

$$\mathcal{G}(Z_\Delta) = 0, \quad \mathcal{G}(\eta^A) = 1, \quad \mathcal{G}(\mathcal{P}_A) = -1. \quad (3.13)$$

Además requerimos que el número fantasma de un producto de variables, sea igual a la suma de los números fantasmas de sus componentes.

La carga BRST se construye requiriendo que genere las transformaciones de calibración asociadas a las constricciones de primera clase dadas en la Ec. (3.10), al

ALBERTO MEJÍAS

orden más bajo en una expansión en serie de potencias de los fantasmas. Por otra parte, con base en la expresión (3.8), consideraremos que dicha carga es real, tiene número fantasma $\mathcal{G}(\Omega) = 1$ y paridad GRASSMANN $\epsilon(\Omega) = 1$. Con estas condiciones la carga BRST queda completamente determinada a orden más bajo, donde debe tener la forma

$$\Omega = \eta^A C_A + \text{términos de orden superior.} \quad (3.14)$$

Los términos de mayor orden quedan determinados por la propiedad de nilpotencia

$$\{\Omega, \Omega\} = 0. \quad (3.15)$$

Para entender mejor esta propiedad, tomemos en cuenta que Ω genera las transformaciones BRST, entonces una segunda variación de una función arbitraria está dada por

$$\delta^{(2)} F = \{\{F, \Omega\}, \Omega\}. \quad (3.16)$$

Empleando en (3.16) la superidentidad JACOBI

$$\{\{F_1, F_2\}, F_3\} + (-)^{\epsilon F_1(\epsilon F_2 + \epsilon F_3)} \{\{F_2, F_3\}, F_1\} + (-)^{\epsilon F_3(\epsilon F_1 + \epsilon F_2)} \{\{F_3, F_1\}, F_2\} = 0, \quad (3.17)$$

válida para cuando se tienen cantidades con paridad GRASSMANN arbitraria, se obtiene

$$\delta^{(2)} F = -\frac{1}{2} \{\{\Omega, \Omega\}, F\}. \quad (3.18)$$

Así, vemos que si Ω es nilpotente, una transformación BRST queda completamente determinada por la primera variación. La propiedad de nilpotencia determina a Ω hasta una transformación BRST, dado que

$$\{\Omega, \Omega\} = 0 \Rightarrow \{\Omega', \Omega'\} = 0, \quad (3.19a)$$

con

$$\Omega' = \Omega + \{K, \Omega\}, \quad (3.19a)$$

para K arbitraria. Una solución de la condición de nilpotencia (3.15), que toma en cuenta a (3.14) y las condiciones $\mathcal{G}(\Omega) = 1$ y $\epsilon(\Omega) = 1$, está dada por

$$\begin{aligned} \Omega = & \eta^A C_A + \eta^B \eta^C U_{BC}^{(1)} \mathcal{P}_A + \eta^C \eta^D \eta^E U_{CDE}^{(2)} \mathcal{P}_A \mathcal{P}_B + \dots \\ & + \eta^{B_1} \dots \eta^{B_{n+1}} U_{B_1 \dots B_{n+1}}^{(n)} \mathcal{P}_{A_1} \dots \mathcal{P}_{B_n B}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

con

$$U_{BC}^{(1)} = -\frac{1}{2} C_{CB}^A, \quad (3.21)$$

donde las C_{AB}^C son las funciones de estructura dadas en (2.7). Las funciones de es-

Quantización BRST-BFV de teorías de calibración

estructura de segundo orden, $U_{B_1 B_2 B_3}^{(2) A_1 A_2}$, se calculan de la expresión

$$U_{B_1 B_2 B_3}^{(2) A_1 A_2} C_{A_2} = \{U_{[B_1 B_2] A_1}^{(1)}, C_{B_3}\} + 2U_{[B_1 B_2] D}^{(1)} U_{B_3 D}^{(1) A_1}. \quad (3.22)$$

Las expresiones para las funciones de estructura de mayor orden pueden encontrarse en [131]. Para algunas teorías conocidas, como por ejemplo las que describen al modelo estándar $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ y la gravitación de EINSTEIN, el desarrollo de Ω llega sólo hasta orden uno.

Una vez calculada la carga BRST, se definen los observables del sistema como aquellas cantidades con número fantasma igual a cero y que son invariantes bajo BRST, es decir que tienen corchetes POISSON cero con Ω . La dinámica del sistema queda determinada por el hamiltoniano BRST. Éste se encuentra definido por la condición de que al orden más bajo en los fantasmas debe reducirse al hamiltoniano canónico. Además, debe tener paridad GRASSMANN cero, ser real y con número fantasma igual a cero. Por último, debe preservar la invariancia BRST del sistema de tal manera que

$$\{H_{\text{BRST}}, \Omega\} = 0. \quad (3.23)$$

Bajo estas condiciones, a primer orden en los fantasmas, el hamiltoniano BRST está dado por

$$H_{\text{BRST}} = H_0 + \eta^A V_A^B \mathcal{P}_B + \text{"más"} \quad (3.24)$$

donde "más" significa términos de, al menos, cuatro fantasmas [13].

Para completar la descripción del método BRST-BFV, nos falta ahora, determinar cuál es el equivalente de las condiciones cuánticas (2.13), sobre los estados físicos del sistema y cuál es el equivalente de los observables definidos en el método DIRAC. Dado que en el método BRST-BFV los generadores de transformaciones de calibración (originalmente representados por las constricciones de primera clase), se han extendido al generador Ω de las transformaciones BRST, es natural suponer que el equivalente de las condiciones (2.13) corresponde a

$$\hat{\Omega}|\psi\rangle = 0, \quad (3.25a)$$

$$F = F^\dagger \text{ es observable} \Leftrightarrow [\hat{\Omega}, \hat{F}] = 0, \quad (3.25b)$$

con $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}^\dagger$. Sin embargo, las Ecs. (3.25) no describen únicamente a los estados físicos

ALBERTO MEJÍAS

sicos y a los observables del sistema. Los estados físicos se obtienen por una identificación adicional de las soluciones de (3.25a) y también están sujetos a una condición sobre el número fantasma. Para obtener estas condiciones adicionales primero observamos que, dada la nilpotencia de $\hat{\Omega}$ ($\hat{\Omega}^2 = 0$, cuánticamente), un estado de la forma $\hat{\Omega}\chi$ con χ arbitraria, satisface a (3.25a). Entonces, cualquier estado que se pueda escribir como

$$\psi = \psi' + \hat{\Omega}\chi, \quad (3.26)$$

es solución de (3.25a) si ψ' es solución. Por lo tanto un estado físico será realmente la clase de equivalencia definida por (3.26).

En el caso de los observables también existe una clase de equivalencia, ya que cualquier operador de la forma $[\hat{\Omega}, \hat{K}]$, con \hat{K} arbitraria satisface a (3.25b). Así, un observable de la forma

$$\hat{F} = \hat{F}' + [\hat{\Omega}, \hat{K}], \quad (3.27)$$

donde \hat{F}' es solución de (3.25b), también es solución de esta ecuación.

Además, como los fantasmas no son observables, por violar el teorema de espín-estadística, se exige que todos los observables \hat{F} deben tener número fantasma cero y, además, deben satisfacer

$$[\hat{\Omega}, \hat{G}] = 0. \quad (3.28)$$

Esto implica que todos los estados físicos deben poseer el mismo número fantasma, ya que en caso contrario deberían existir operadores que conectaran estados con número de fantasma diferente y por lo tanto éstos no cumplirían la condición (3.28).

Un postulado adicional de BRST-BFV, es asumir que el número fantasma de los estados físicos es igual a cero, es decir,

$$\hat{G}|\psi\rangle = 0. \quad (3.29)$$

El siguiente paso consiste en evaluar el operador evolución del sistema, utilizando el método BRST-BFV. Tomando en cuenta que este operador es unitario, una vez que hemos introducido los fantasmas, podemos tomar la representación de éste, en términos de la integral FEYNMAN de línea. Además debemos considerar que los estados de interés físico, son aquellos aniquilados por la carga BRST; en consecuencia, sólo es necesario considerar elementos de matriz del operador evolución entre estos estados. Esto implica que debemos imponer condiciones de contorno en

Quantización BRST-BFV de teorías de calibración

la integral de línea, que sean BRST-invariantes. Esta condición no garantiza unicidad en las condiciones de contorno, dado que tenemos la libertad de seleccionar una clase de equivalencia de estados físicamente permisibles, además de que podemos elegir la representación en que deseamos trabajar (momentos o coordenadas). Existen, al menos, tres tipos de condiciones de frontera adecuadas [13] y, nosotros, elegiremos una representación que hace contacto con el método FADDEEV-POPOV. En esta representación las constricciones se clasifican de manera análoga a (3.10) y los fantasmas se ordenan de la siguiente manera:

$$\eta^A = (-i)^{\epsilon_a+1} \mathcal{P}^a, \quad \mathcal{P}_A = ((i)^{\epsilon_a+1} \bar{\mathcal{C}}_a, \bar{\mathcal{P}}_a) \quad (3.30)$$

Las variables \mathcal{C}^a , $\bar{\mathcal{C}}_a$ son reales y, respectivamente, conjugadas de $\bar{\mathcal{P}}_a$, \mathcal{P}^a , que son puramente imaginarias, de tal modo que se satisfacen los siguientes corchetes POISSON:

$$\{\mathcal{C}^a, \bar{\mathcal{C}}_b\} = \{\mathcal{C}^a, \mathcal{P}^b\} = \{\bar{\mathcal{C}}_a, \bar{\mathcal{P}}_b\} = \{\bar{\mathcal{P}}_a, \mathcal{P}^b\} = 0 \quad (3.31a)$$

$$\{\bar{\mathcal{P}}_a, \mathcal{C}^b\} = -\delta_a^b = \{\mathcal{P}^b, \bar{\mathcal{C}}_a\} \quad (3.31b)$$

Estamos denotando por ϵ_a a la paridad GRASSMANN de la construcción G_a . Las condiciones de contorno a tiempo final τ_2 y tiempo inicial τ_1 , que son BRST-invariantes para este conjunto de variables, son

$$\mathcal{C}^a(\tau_2) = \mathcal{C}^a(\tau_1) = 0, \quad (3.32a)$$

$$\bar{\mathcal{C}}_a(\tau_2) = \bar{\mathcal{C}}_a(\tau_1) = 0, \quad (3.32b)$$

$$\pi_a(\tau_2) = \pi_a(\tau_1) = 0, \quad (3.32c)$$

donde recordamos que π_a denota a los momentos canónicos conjugados asociados a los multiplicadores LAGRANGE λ^a . Estas condiciones de frontera son BRST-invariantes en general, dado que, en términos de estas variables la carga BRST puede escribirse como

$$\Omega = \mathcal{C}^a G_a - (i)^{\epsilon_a+1} \mathcal{P}^a \pi_a + \text{"más"},$$

donde "más" contiene al menos a un antifantasma y dos fantasmas. Así, la variación de \mathcal{C} se cancela debido a (3.32a) y la variación de $\bar{\mathcal{C}}$ se cancela por (3.32c). Por último, la variación de π es automáticamente igual a cero.

Es claro que aún falta fijar las condiciones de contorno de las restantes varia-

ALBERTO MEJÍAS

bles dinámicas, lo que dependerá específicamente, del problema en cuestión. Una vez determinadas éstas, el operador evolución está dado por la acción cuántica efectiva

$$Z_\Psi = \int \mathcal{D}_\mu \exp(iS_{\text{eff}}), \quad (3.33a)$$

donde \mathcal{D}_μ es la medida LIOUVILLE correspondiente a todas las variables canónicas introducidas y

$$S_{\text{eff}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (\dot{q}^i p_i - \lambda^a \dot{\pi}_a + \dot{\eta}^A \mathcal{P}_A - H_{\text{eff}}). \quad (3.33b)$$

El hamiltoniano efectivo H_{eff} no se encuentra unívocamente definido, ya que como mencionamos en (3.27), todo observable en BRST-BFV queda indeterminado hasta un operador de la forma $\{\Omega, K\}$. Por lo tanto podemos definir al hamiltoniano efectivo como

$$H_{\text{eff}} = H_{\text{BRST}} - \{\Psi, \Omega\}, \quad (3.34)$$

donde Ψ se conoce como la condición de calibración fermiónica. Usualmente ésta se escoge de la forma

$$\Psi = (i)^{\epsilon_a + 1} \bar{\mathcal{C}}_a \chi^a + \bar{\mathcal{P}}_a \lambda^a, \quad (3.35)$$

donde las χ^a son funciones arbitrarias de las variables canónicas, que no involucran fantasmas ni antifantasmas y son tales que $(\chi^a)^* = (i)^{\epsilon_a} \chi_a$.

Una de las propiedades fundamentales de (3.33) es su invariancia ante transformaciones infinitesimales de Ψ , lo que quiere decir que la integral de línea es independiente de la elección de calibración (teorema de FRADKIN-VILKOVISKY [3]). Esto permite realizar diversas pruebas de consistencia de las teorías de calibración sin imponer alguna condición de calibración particular. Sin embargo, no es posible utilizar el valor $\Psi = 0$, ya que en este caso la integral no se encuentra bien regularizada [8].

Antes de detallar el ejemplo que hemos escogido para ilustrar de una manera simple el método BRST, es conveniente hacer algunas consideraciones con el objeto de poner dicho ejemplo en la perspectiva adecuada.

En general, los sistemas de interés en física poseen constricciones, tanto de

Quantización BRST-BFV de teorías de calibración

primera, como de segunda clase y, en particular, las teorías de calibración, consideradas como el paradigma de una teoría física, sólo tienen el primer tipo de constricciones.

Estrictamente hablando, todos los sistemas con constricciones de primera clase pueden reducirse a sistemas que poseen únicamente constricciones de segunda clase, una vez fijada la calibración. Más aún, en principio sería posible resolver dichas constricciones de forma tal que se identificaran los verdaderos grados de libertad del sistema. Sin embargo, este proceso puede resultar imposible en la práctica. Un camino a seguir en este caso es trabajar con las constricciones introduciendo los respectivos corchetes DIRAC. No obstante, en muchos casos de interés físico, la realización cuántica de estos corchetes se vuelve muy complicada. En otras ocasiones, aunque cualquiera de los procedimientos arriba mencionados sea factible, podría no resultar conveniente su implantación debido al hecho de que algunas simetrías importantes de la teoría ya no son manifiestas, como es el caso de la partícula libre relativística, por ejemplo.

Por otra parte, la construcción de la integral de línea para los verdaderos grados de libertad de un sistema, es un problema aún no resuelto, en general. Frente a esta situación podemos adoptar el punto de vista opuesto, que consiste en pensar que cualquier sistema físico con constricciones puede escribirse como un sistema que contiene solamente constricciones de primera clase, es decir, como una teoría de calibración. Una forma de lograr esto es agregando un par de variables canónicas por cada par existente, de constricciones de segunda clase y cuidando que el hamiltoniano total se modifique de tal manera que no se produzcan nuevas constricciones en el proceso de establecer que éstas sean consistentes con la evolución temporal del sistema.

Esta idea de transformar todas las constricciones en constricciones de primera clase, es también consistente con la idea de promover la invariancia bajo transformaciones BRST, al nivel de postulado fundamental, para proceder a la quantización correcta de cualquier sistema físico.

Si aceptamos este postulado, entonces cobra gran importancia la pregunta de cómo describimos teorías con constricciones de segunda clase de acuerdo al método BRST-BFV. En este caso la integral funcional está perfectamente definida, puesto que la medida correspondiente es la LIOUVILLE en el conjunto de variables

ALBERTO MEJÍAS

canónicas que cierra bajo BRST.

Otra ventaja de este modo de proceder es que las simetrías originales del sistema siempre quedan manifiestas. Recientemente, este punto de vista se ha empleado exitosamente en la quantización de teorías de calibración originalmente anómalas, y se ha hecho contacto con ideas alternativas previamente propuestas para lograr una quantización correcta de ellas [14].

El ejemplo del rotor rígido que discutimos en la siguiente sección ilustra las ideas mencionadas anteriormente, de una manera simple y transparente. Como sucede con todos los ejemplos sencillos, existen varios métodos alternativos para su discusión. En este caso, la quantización, empleando constricciones de segunda clase y corchetes DIRAC no presenta ningún problema y la obtención de los verdaderos grados de libertad es trivial.

Se trata entonces de enfatizar la ilustración del método BRST-BFV, en un contexto simple que, además, posee todos los ingredientes básicos del punto de vista expuesto en los párrafos anteriores y cuyo verdadero potencial se aprecia realmente en sistemas más complicados como los citados en [14].

4 QUANTIZACIÓN BRST-BFV DEL ROTOR RÍGIDO

Como un ejemplo específico e ilustrativo del método de quantización BRST-BFV consideremos el problema del rotor rígido. Éste no es un sistema que inicialmente posee invariancia de calibración, pero lo podemos convertir en uno de este tipo, adicionando nuevas variables canónicas.

Para comenzar, consideremos la descripción del rotor rígido bidimensional según el método DIRAC.

El lagrangeano es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \lambda(r - a); \quad (4.1)$$

donde hemos usado coordenadas polares r y θ y λ es un multiplicador LAGRANGE. Los momentos canónicos asociados a este sistema son

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}; \quad (4.2)$$

con lo que el hamiltoniano total resulta

Quantización BRST-BFV de teorías de calibración

$$H_T = H_0 + \lambda(r - a) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \lambda(r - a). \quad (4.3)$$

De acuerdo al método DIRAC tenemos una constricción primaria dada por

$$\xi_1 = r - a \approx 0, \quad (4.4)$$

cuya conservación en el tiempo, da lugar a una constricción secundaria ξ_2

$$\dot{\xi}_1 = \{ r - a, H_T \} = \frac{p_r}{m} \Rightarrow \xi_2 = p_r \approx 0. \quad (4.5)$$

La constricción secundaria ξ_2 no origina nuevas constricciones y permite evaluar al multiplicador LAGRANGE, que resulta ser

$$\lambda = \frac{p_\theta^2}{mr^3} \quad (4.6)$$

Esto quiere decir que nuestro par de constricciones (4.4) y (4.5) son de segunda clase, como es fácil mostrarlo al evaluar la matriz $C_{\alpha\beta}$:

$$\{\xi_\alpha, \xi_\beta\} = C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Con el objeto de emplear el método DIRAC en sistemas que poseen constricciones de segunda clase, es necesario construir nuevos corchetes POISSON que mantengan las propiedades algebraicas de éstos, pero que sean consistentes con el hecho de imponer las constricciones de manera fuerte, es decir como identidades. Estos son los llamados corchetes DIRAC, que están definidos por

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \xi_\alpha\} C^{\alpha\beta} - \{\xi_\beta, B\}, \quad (4.8)$$

donde $C^{\alpha\beta}$ denota a la matriz inversa de $C_{\alpha\beta}$. Estos corchetes son los que van a ser promovidos a conmutadores o anticonmutadores al momento de quantizar y, dado que satisfacen la propiedad esencial

$$\{A, \xi_\alpha\}_D = 0 \quad \text{para toda } A, \quad (4.9)$$

podemos considerar a las constricciones de segunda clase ξ_1 y ξ_2 como identidades fuertes. Esto implica que nuestro hamiltoniano total (4.3) se reduce a

$$H_{TD} = \frac{p_\theta^2}{2ma^2} \quad (4.10)$$

ALBERTO MEJÍAS

que es el hamiltoniano natural que describe al rotor rígido. Además obtenemos $\{\theta, p_\theta\}_D = 1$, lo que nos garantiza que θ y p_θ resultan ser las variables canónicas conjugadas adecuadas.

El problema ahora es cómo aplicar el método de quantización BRST-BFV a este sistema, ya que no contamos con constricciones de primera clase. Existen al menos dos soluciones a este problema: la primera es considerar que de las dos constricciones ζ_1 y ζ_2 , sólo una de ellas es una restricción, mientras que a la otra la podemos considerar como una condición de calibración. Dado que el método BRST-BFV es independiente de la elección de calibración, podemos calcular al propagador del sistema utilizando la acción funcional en esta calibración. La segunda solución, que utilizaremos a continuación, consiste en transformar las dos constricciones de segunda clase en constricciones de primera clase, añadiendo dos nuevas variables canónicas. Así, agregamos a nuestro sistema las variables canónicamente conjugadas (q, π) , de forma tal que nuestras nuevas constricciones de primera clase sean

$$\phi_1 = r - a + q \approx 0, \quad \phi_2 = p_r - \pi \approx 0, \quad (4.11)$$

que se reducen a las constricciones originales (4.4) y (4.5) cuando $q = 0$ y $\pi = 0$. El hamiltoniano (4.3) debe ser modificado de forma tal que las nuevas constricciones (4.11) se mantengan en el tiempo sin que se generen nuevas constricciones. La forma de lograr esto, es imponer que el nuevo hamiltoniano total sea una variable de primera clase, o sea, que satisfaga (2.6). Un hamiltoniano que cumple esta condición y que además, se reduce a (4.3) cuando $q = 0 = \pi$, es

$$\tilde{H}_T = \frac{1}{2m} \left[(p_r - \pi)^2 + \frac{p_\theta^2}{(r+q)^2} \right] + \lambda(r + q - a). \quad (4.12)$$

Este hamiltoniano está indeterminado hasta un múltiplo de las constricciones de primera clase, por lo cual podemos definir un hamiltoniano extendido

$$\tilde{H}_E = \tilde{H}_T + \lambda^\alpha \phi_\alpha, \quad (4.13)$$

con $\tilde{H}_T = \frac{1}{2m} \left[(p_r - \pi)^2 + \frac{p_\theta^2}{(r+q)^2} \right]$.

Asociado al hamiltoniano extendido, tenemos el lagrangeano

$$\tilde{L}_E = p_i \dot{q}_i - \tilde{H}_E$$

Quantización BRST-BFV de teorías de calibración

$$= p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + \pi \dot{q} - \frac{1}{2m} \left[(p_r - \pi)^2 + \frac{p_\theta^2}{(r+q)^2} \right] - \lambda(r+q-a) - \sigma(p_r - \pi) \quad (4.14)$$

Las ecuaciones de movimiento provenientes de este lagrangeano son invariantes bajo las siguientes transformaciones de calibración, generadas por las constricciones:

$$\delta p_r = -\epsilon^1(\tau), \quad \delta p_\theta = 0, \quad \delta \pi = -\epsilon^1(\tau), \quad \delta \lambda = -\dot{\epsilon}^1(\tau), \quad (4.15a)$$

$$\delta r = -\epsilon^2(\tau), \quad \delta \theta = 0, \quad \delta q = -\epsilon^2(\tau), \quad \delta \sigma = -\dot{\epsilon}^2(\tau), \quad (4.15b)$$

Así, hemos construido una teoría de calibración para el rotor rígido. Como un paso previo a la aplicación del método BRST-BFV a este sistema, es necesario identificar claramente las condiciones de contorno que permiten resolver en forma única el sistema de ecuaciones provenientes del lagrangeano (4.14). Estas condiciones de contorno serán subsecuentemente utilizadas en el cálculo del propagador del sistema, en la formulación de la integral funcional.

Dado que tenemos una teoría de calibración, las variables dinámicas estarán únicamente determinadas por las condiciones iniciales del problema siempre que fijemos la calibración asociada a las transformaciones (4.15). Con este objeto y para hacer contacto posterior con la formulación BRST-BFV, escogemos la calibración no-canónica determinada por las condiciones $\dot{\lambda} = 0$ y $\dot{\sigma} = 0$ [15].

La forma del lagrangeano (4.14) sugiere la conveniencia de introducir las siguientes variables canónicas

$$\xi = \frac{1}{2}(r-q), \quad \pi_\xi = p_r - \pi \quad (4.16a)$$

$$Q = r+q, \quad \pi_Q = \frac{1}{2}(p_r + \pi) \quad (4.16b)$$

que reemplazan a las variables r, p_r, q, π . De este modo, el lagrangeano (4.14) se transforma en

$$\tilde{L}_E = p_\theta \dot{\theta} + \pi_\xi \dot{\xi} + \pi_Q \dot{Q} - \frac{1}{2m} \left[\pi_\xi^2 + \frac{p_\theta^2}{Q^2} \right] - \lambda(Q-a) - \sigma \pi_\xi \quad (4.17)$$

Las ecuaciones de movimiento resultan dadas por

ALBERTO MEJÍAS

$$\dot{\theta} - \frac{p_{\theta}}{mQ^2} = 0, \quad \dot{\xi} - \frac{\pi_{\xi}}{m} - \sigma = 0, \quad \dot{Q} = 0, \quad (4.18a)$$

$$\dot{p}_{\theta} = 0, \quad \dot{\pi}_{\xi} = 0, \quad \dot{\pi}_Q - \frac{p_{\theta}^2}{mQ^3} + \lambda = 0 \quad (4.18b)$$

$$Q = a, \quad \pi_{\xi} = 0, \quad \dot{\lambda} = \dot{\sigma} \quad (4.18c)$$

donde la última ecuación incluye la variación con respecto a los multiplicadores LAGRANGE, junto con la elección de la calibración no-canónica.

De las Ecs. (4.18) concluimos que

$$\ddot{\theta} = 0, \quad \ddot{\xi} = 0, \quad \ddot{\pi}_Q = 0. \quad (4.19)$$

Para obtener solución única, de estas ecuaciones, debemos fijar las variables respectivas en los extremos $\tau = \tau_1$ y $\tau = \tau_2$. En otras palabras, las condiciones de contorno del sistema son

$$z(\tau_1) = z_1, \quad z(\tau_2) = z_2, \quad (4.20)$$

donde z es cualquiera de las variables θ, ξ, π_Q .

La solución de cada una de las Ecs. (4.19) y (4.20) está dada por

$$z(\tau) = z_1 + (z_2 - z_1) \frac{(\tau - \tau_1)}{(\tau_2 - \tau_1)} \quad (4.21)$$

y todas las restantes variables canónicas, junto con los multiplicadores LAGRANGE, quedan determinadas por las constricciones, las condiciones de contorno (4.20) y las ecuaciones de movimiento (4.18). En efecto, resulta

$$Q = a, \quad \pi_{\xi} = 0, \quad p_{\theta} = \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{(\tau_2 - \tau_1)} a^2, \quad (4.22a)$$

$$\sigma = \frac{(\xi_2 - \xi_1)}{(\tau_2 - \tau_1)}, \quad \lambda = \frac{m(\theta_2 - \theta_1)^2}{(\tau_2 - \tau_1)} a - \frac{(\pi_{Q_2} - \pi_{Q_1})}{(\tau_2 - \tau_1)}. \quad (4.22b)$$

De este modo hemos obtenido la solución explícita de las Ecs (4.18) en la calibra-

Quantización BRST-BFV de teorías de calibración

ción no canónica $\dot{\lambda} = 0$, $\dot{\sigma} = 0$, en virtud de fijar correctamente las condiciones de contorno, de las respectivas variables.

Si queremos que las Ecs. (4.18) sean estrictamente un extremo de la acción $S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \bar{L}_E d\tau$, con las condiciones de contorno (4.20), debemos escribir los términos cinéticos en ésta, de tal manera que las derivadas con respecto al tiempo, aparezcan sobre las variables que se están fijando en los extremos. Así entonces, la parte correspondiente de la acción resulta ser

$$p_\theta \dot{\theta} + \pi_\xi \dot{\xi} - Q \dot{\pi}_Q \quad (4.23)$$

Observemos que para recuperar exactamente el problema original, descrito por el hamiltoniano (4.3) más las constricciones (4.4) y (4.5) con el valor (4.6) para el multiplicador LAGRANGE λ , debemos escoger $\xi_1 = \xi_2 = \frac{1}{2}a$ y $\pi_{Q_1} = \pi_{Q_2} = 0$ en las soluciones (4.22).

A continuación calcularemos el operador evolución del sistema, empleando el método BRST-BFV, descrito en la sección anterior.

Para el caso particular del rotor rígido tenemos

$$C_A = (\pi_\lambda, \pi_\sigma, Q - a, \pi_\xi), \quad (4.24a)$$

$$\eta^A = (-i\mathcal{P}^1, -i\mathcal{P}^2, \mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2), \quad \mathcal{P}_A = (i\bar{\mathcal{C}}_1, i\bar{\mathcal{C}}_2, \bar{\mathcal{P}}_1, \bar{\mathcal{P}}_2) \quad (4.24b)$$

con lo que la carga BRST resulta ser

$$\Omega = -i\mathcal{P}^1\pi_\lambda - i\mathcal{P}^2\pi_\sigma + \mathcal{C}^1(Q - a) + \mathcal{C}^2\pi_\xi. \quad (4.25)$$

Tomando la condición de calibración fermiónica

$$\Psi = \bar{\mathcal{P}}_1\lambda + \bar{\mathcal{P}}_2\sigma, \quad (4.26)$$

el hamiltoniano efectivo resulta

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2m} \left(\pi_\xi^2 + \frac{p_\theta^2}{Q^2} \right) + i\bar{\mathcal{P}}_1\mathcal{P}^1 + i\bar{\mathcal{P}}_2\mathcal{P}^2 + \lambda(Q - a) + \sigma\pi_\xi. \quad (4.27)$$

ALBERTO MEJÍAS

donde $H_{\text{BRST}} = H_0$, en este caso. La acción clásica efectiva es,

$$S_{\text{eff}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(p_\theta \dot{\theta} + \pi_\xi \dot{\xi} - \dot{\pi}_Q Q - \dot{\pi}_\lambda \lambda - \dot{\pi}_\sigma \sigma - \mathcal{P}^1 \dot{\bar{\mathcal{C}}}_1 - \mathcal{P}^2 \dot{\bar{\mathcal{C}}}_2 + \dot{\mathcal{C}}^1 \bar{\mathcal{P}}_1 + \dot{\mathcal{C}}^2 \bar{\mathcal{P}}_2 \right. \\ \left. - \frac{p_\theta^2}{2mQ^2} - \frac{\pi_\xi^2}{2m} - i\bar{\mathcal{P}}_1 \mathcal{P}^1 - i\bar{\mathcal{P}}_2 \mathcal{P}^2 - \lambda(Q - a) - \sigma \pi_\xi \right) \quad (4.28)$$

y la integral de línea queda definida por

$$Z_\Psi = \int \mathcal{D}\mathcal{P}^1 \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_1 \mathcal{D}\mathcal{C}^1 \mathcal{D}\bar{\mathcal{C}}_1 \mathcal{D}\mathcal{P}^2 \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}}_2 \mathcal{D}\mathcal{C}^2 \mathcal{D}\bar{\mathcal{C}}_2 \\ \mathcal{D}\pi_\xi \mathcal{D}\xi \mathcal{D}p_\theta \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\pi_\lambda \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}\pi_\sigma \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi_Q \mathcal{D}Q \exp[iS_{\text{eff}}] \quad (4.29)$$

Las condiciones de frontera para la integral de trayectoria son

$$\mathcal{C}^1(\tau_1) = \mathcal{C}^2(\tau_1) = \mathcal{C}^1(\tau_2) = \mathcal{C}^2(\tau_2) = \bar{\mathcal{C}}_1(\tau_1) = \bar{\mathcal{C}}_2(\tau_1) = \bar{\mathcal{C}}_1(\tau_2) = \bar{\mathcal{C}}_2(\tau_2) = 0, \quad (4.30a)$$

$$\pi_\lambda(\tau_1) = \pi_\lambda(\tau_2) = \pi_\sigma(\tau_1) = \pi_\sigma(\tau_2) = 0, \quad (4.30b)$$

$$\theta(\tau_1) = \theta_1, \quad \theta(\tau_2) = \theta_2, \quad \xi(\tau_1) = \xi(\tau_2) = a/2, \quad \pi_Q(\tau_1) = \pi_Q(\tau_2) = 0. \quad (4.30c)$$

Las Ecs. (4.30c) corresponden precisamente a las condiciones de contorno obtenidas previamente en (4.20) con la elección indicada después de (4.23). El hecho de que éstas se mantengan se debe a que los fantasmas se acoplan solamente entre ellos y no con las coordenadas originales del problema. Usando la expresión (4.25) para el generador Ω , es posible verificar que todas las condiciones de contorno (4.30) son efectivamente invariantes bajo BRST.

Ahora procederemos a calcular la integral de línea (4.29). Las integrales funcionales sobre los fantasmas son idénticas para los subíndices uno y dos, por lo que mostraremos como se calcula esta integral para el caso genérico:

$$I_{\text{F}} = \int \mathcal{D}\mathcal{P} \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}} \mathcal{D}\mathcal{C} \mathcal{D}\bar{\mathcal{C}} \exp \left[i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(-\mathcal{P} \dot{\bar{\mathcal{C}}} + \dot{\mathcal{C}} \bar{\mathcal{P}} - i\bar{\mathcal{P}} \mathcal{P} \right) \right]. \quad (4.31)$$

Integrando por partes con respecto a los dos primeros términos en la exponencial, vemos que el resultado de integrar funcionalmente sobre \mathcal{C} y $\bar{\mathcal{C}}$ son dos deltas funcionales de $\dot{\mathcal{P}}$ y $\dot{\bar{\mathcal{P}}}$, lo cual permite realizar las integraciones restantes sobre \mathcal{P} y $\bar{\mathcal{P}}$. Tomando en cuenta que estas variables no están fijadas en los extremos,

Quantización BRST-BFV de teorías de calibración

se obtiene

$$I_F = \int d\mathcal{P}_0 d\bar{\mathcal{P}}_0 \exp[\bar{\mathcal{P}}_0 \mathcal{P}_0 T], \quad (4.32)$$

con $T = \tau_2 - \tau_1$. Las integrales (4.32) son ahora del tipo BEREZIN [16], definidas por

$$\int d\mathcal{P}\mathcal{P} = 1, \quad \int d\mathcal{P} = 0. \quad (4.33)$$

De este modo se obtiene finalmente

$$I_F = T \quad (4.34)$$

Así, una vez integrados los fantasmas, la acción efectiva cuántica es

$$Z_\Psi = T^2 \int \mathcal{D}\pi_\xi \mathcal{D}\xi \mathcal{D}p_\theta \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\pi_\lambda \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}\pi_\sigma \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi_Q \mathcal{D}Q \exp \left[i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(p_\theta \dot{\theta} + \pi_\xi \dot{\xi} - \dot{\pi}_Q Q - \dot{\pi}_\lambda \lambda - \dot{\pi}_\sigma \sigma - \frac{p_\theta^2}{2mQ^2} - \frac{\pi_\xi^2}{2m} - \lambda(Q - a) - \sigma \pi_\xi \right) \right]. \quad (4.35)$$

Para la integral funcional sobre λ y π_λ , tenemos

$$I_\lambda = \int \mathcal{D}\pi_\lambda \mathcal{D}\lambda \exp \left[i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(-\dot{\pi}_\lambda \lambda - \lambda [Q - a] \right) \right]. \quad (4.36)$$

Con la partición del intervalo $T = N\epsilon$, podemos escribir I_λ como

$$I_\lambda = \int d\pi_{\lambda_1} \cdots d\pi_{\lambda_{N-1}} d\pi_{\lambda_0} \cdots d\pi_{\lambda_{N-1}} \exp \left[-i \sum_{n=0}^{N-1} \left([\pi_{\lambda_{n+1}} - \pi_{\lambda_n}] + \epsilon \lambda_n [Q_n - a] \right) \right],$$

donde se tomó en cuenta que π_λ está fijo en los extremos y por esa razón existe una integral de más sobre λ . Dada la condición de contorno (4.30b), al integrar sobre π_λ se obtiene

$$\begin{aligned} I_\lambda &= \int d\lambda_0 \cdots d\lambda_{N-1} \delta(\lambda_1 - \lambda_0) \cdots \delta(\lambda_{N-1} - \lambda_{N-2}) \exp \left[-i \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon \lambda_n [Q_n - a] \right] \\ &= \int d\lambda_0 \exp \left[-i \lambda_0 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (Q - a) \right]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Las integrales funcionales sobre σ y π_σ , Q y π_Q , ξ y π_ξ son muy similares a la anterior, dando como resultado final una integral, ya no funcional, con respecto a las variables que no están fijas en los extremos. En el caso de la integración sobre ξ , cuyos valores fijos en los extremos, son diferentes de cero, se obtiene el término adicional $\exp i\pi_{\xi_0} [\xi(2) - \xi(1)]$ que es igual a uno, en nuestro caso particular. De es-

ALBERTO MEJÍAS

te modo resulta

$$Z_{\Psi} = T^2 \int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}p_{\theta} d\lambda_0 d\sigma_0 dQ_0 d\pi_{\xi_0} \exp \left[-i (\lambda_0 [Q_0 - a] + \sigma_0 \pi_{\xi_0} \frac{\pi_{\xi_0}^2}{2m}) T + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (p_{\theta} \dot{\theta} - \frac{p_{\theta}^2}{2mQ_0^2}) \right]. \quad (4.38)$$

Con los cambios de variable $\bar{\lambda}_0 = \lambda_0 T$ y $\bar{\sigma}_0 = \sigma_0$ se obtienen dos funciones delta asociadas a los dos primeros términos en la exponencial:

$$Z_{\Psi} = \int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}p_{\theta} dQ_0 d\pi_{\xi_0} \delta(\pi_{\xi_0}) \delta(Q_0 - a) \times \exp \left[-i \left(\frac{\pi_{\xi_0}^2}{2m} \right) T + i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (p_{\theta} \dot{\theta} - \frac{p_{\theta}^2}{2mQ_0^2}) \right].$$

Finalmente, integrando sobre Q_0 y π_{ξ_0} se obtiene

$$Z_{\Psi} = \int \mathcal{D}p_{\theta} \mathcal{D}\theta \exp \left[i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (p_{\theta} \dot{\theta} - \frac{p_{\theta}^2}{2mQ_0^2}) \right]. \quad (4.39)$$

Esta integral funcional es la que se tiene que realizar normalmente para el cálculo del propagador del rotor rígido y puede encontrarse, por ejemplo, en [17], dando como resultado

$$Z_{\Psi} = \langle \theta_2 \tau_2 | \theta_1 \tau_1 \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \exp \left[in(\theta_2 - \theta_1) - i \frac{n^2}{2ma^2} (\tau_2 - \tau_1) \right]. \quad (4.40)$$

Así, hemos ilustrado el método de cuantización de BRST-BFV en el marco de una teoría bastante simple como lo es el rotor rígido en dos dimensiones, formulado como una teoría de calibración, mostrando de una manera explícita, el cálculo del operador evolución del sistema. Es necesario enfatizar que la efectividad y potencial del método BRST-BFV se manifiesta realmente en teorías más complicadas, como, por ejemplo, en el caso de supergravedad [8] o de teorías topológicas [18], como la gravedad en 2 + 1 dimensiones [19]. Otra de sus grandes ventajas es que puede aplicarse a teorías con constricciones reducibles, siendo el primer método de cuantización que ha permitido tratar consistentemente este tipo de constricciones [20]. Otras aplicaciones del método pueden encontrarse en [8, 21, 22]. Por último, pode-

Quantización BRST-BFV de teorías de calibración

mos mencionar que es posible dar una interpretación geométrica a los fantasmas, logrando así un mayor entendimiento de lo que significa quantizar una teoría de calibración [23].

REFERENCIAS

1. P.A.M. DIRAC, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yashiva University Press (1964).
2. A. ASHTEKAR, *Lectures on Non-perturbative Canonical Gravity*, World Scientific (1991).
3. C. BECCHI, A. ROUET y R. STORA, *Phys. Lett.* **52B** (1974) 344; E. S. FRADKIN y G. A. VILKOVISKY, CERN Report TH2332 (1977); I. A. BATALIN y G.A. VILKOVISKY, *Phys. Lett.* **B69** (1977) 309; E.S. FRADKIN y T.E. FRADKINA, *Phys. Lett.* **B72** (1977) 343.
4. I. A. BATALIN y G. A. VILKOVISKY, *Phys. Lett.* **B102** (1981) 27.
5. J. D. VERGARA, (en preparación).
6. R. E. KALLOSH, *Nucl. Phys.* **B141** (1978) 141; G. CURCI, R. FERRARI, *Nuovo Cimento*, **A32** (1976) 151.
7. Ö. F. DAYI, *Ann. Phys. (NY)* **217** (1992) 217.
8. M. HENNEAUX y C. TEITELBOIM, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press (1992).
9. R. P. FEYNMAN, *Acta Phys. Pol.* **XXIV** (1063) 697.
10. L. D. FADDEEV y V. N. POPOV. *Phys. Lett.* **B25** (1967) 29.
11. I. V. TYUTIN, Preprint FIAN (P. N. Lebedev Physical Institute) No. 39 (1975).
12. B. DEWITT, *Supermanifolds*, Cambridge University Press, Cambridge (1992).

ALBERTO MEJÍAS

13. M. HENNEAUX, *Phys.Rep.* **129** (1985) 1.
14. T. FUJIWARA, Y. IGARASHI y J. KUBO, *Phys. Lett.* **B251** (1990) 427; S. MIYAKE y K. SHISUYA, *Mod. Phys. Lett.* **A4** (1989) 2675; M. MOSHE y Y. OZ, *Phys. Lett.* **B224** (1989) 145; L. D. FADDEEV y S. SHATASHVILI, *Phys. Lett.* **B167** (1986) 225.
15. C. TEITELBOIM, *Phys.Rev.* **D25** (1982) 3159.
16. F. A. BEREZIN, *The method of second quantization*. Academic Press, New York (1966).
17. H. KLEINERT, *Path Integrals*, World Scientific, Singapore 1990.
18. D. BIRMINGHAM, M. BLAU, M. RAKOWSKI y G. THOMPSON, *Phys. Rep.* **209** (1991) 129.
19. G. GONZÁLEZ y J. PULLIN, *Phys. Rev.* **D42** (1990) 3395.
20. J. THIERRY-MIEG, *Nud. Phys.* **B335** (1990) 334.
21. N. NAKANISHI y I. OJIMA, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity*, World Scientific, Singapore (1990).
22. D. M. GILMAN y I. V. TYUTIN, *Quantization of Fields with Constraints*, Springer-Verlag, Berlin (1990).
23. L. BONORA y P. COLLA-RAMUSINO, *Commun. Math. Phys.* **87** (1983) 589.
24. A. GARCÍA ZENTENO, L. F. URRUTIA, J. D. VERGARA y R. P. MARTÍNEZ, *Revista Mexicana de Física* **40**, No. 3 (1994) 476.

ALEPH SUB – CERO

SERIE DE DIVULGACIÓN

№ 0 2015 – I № 0

pp. 81 - 102

**UNA PROPIEDAD MULTIPLICATIVA DE LA DERIVADA EN
FUNCIONES DE CLASE C^1**

(A multiplicative property of the derivative in C^1 class functions)

Tobías de Jesús Rosas Soto¹

Recepción: Mayo 2015. Revisión y aceptación: Junio 2015.

Resumen. Este artículo tiene como idea principal mostrar al estudiante de Matemática que es posible hacer investigación con estructuras simples, motivándolo así a realizar investigación desde el inicio de sus estudios. Se estudia una propiedad multiplicativa de la derivada en ciertas funciones, es decir, dada una función $f(x)$ de clase C^1 ($f(x) \in C^1$), con $f(x) \neq e^x$, se prueba que existe una familia de funciones $\mathcal{F}_{f(x)} = \{g(x) \in C^1: (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g'(x)\}$ si y solo si hay solución para la integral $\int \frac{f'(x)}{f'(x)-f(x)} dx$. Además, se muestran algunas propiedades de dicha familia. Se prueba que $\mathcal{F}_{f(x)}$ es un \mathbb{R} -módulo cíclico generado por la función $e^{\int \frac{f'(x)}{f'(x)-f(x)} dx}$ y que la función derivación es un automorfismo del \mathbb{R} -módulo $\mathcal{F}_{f(x)}$ y del grupo $G = (\langle e^{2x} \rangle, +)$, donde “+” denota la suma clásica de funciones. Se presentan algunas particularidades que cumplen algunas funciones. Se calcula la familia $\mathcal{F}_{f(x)}$ de ciertas funciones clásicas $f(x)$ tales como x^n , $ax + b$, $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$.

Palabras claves: Derivada, funciones de clase C^1 , ecuaciones diferenciales, módulos, investigación matemática.

¹ Tobías de Jesús Rosas Soto. Departamento de Matemática, Facultad Experimental de Ciencias, Universidad del Zulia. Obtuvo su Doctorado en la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Barquisimeto, Venezuela. tjrosas@gmail.com.

Tobías de Jesús Rosas Soto

Abstract. This article has as main idea show to the student of mathematics that is possible to do research with simple structures, thus motivating them to do research from the beginning of their studies. We study a multiplicative property of the derivative in certain functions, i.e., given a function $f(x)$ of class \mathcal{C}^1 ($f(x) \in \mathcal{C}^1$), with $f(x) \neq e^x$, is proof that there is a family of functions $\mathcal{F}_{f(x)} = \{g(x) \in \mathcal{C}^1: (f(x).g(x))' = f'(x)g'(x)\}$ if and only if there is solution to the integral $\int \frac{f'(x)}{f'(x)-f(x)} dx$. In addition, some properties of this family are displayed. It proves that $\mathcal{F}_{f(x)}$ is a cyclic \mathbb{R} -modulo generated by the function $e^{\int \frac{f'(x)}{f'(x)-f(x)} dx}$ and that the derivative function is an automorphism both the \mathbb{R} -modulo $F_{f(x)} = (\langle e^{2x} \rangle, \cdot)$ and the group $G = (\langle e^{2x} \rangle, +)$, where "+" denotes the classical sum of functions. Some particularities of some functions are presented. It is calculated the $\mathcal{F}_{f(x)}$ family of some classical functions $f(x)$ such as x^n , $ax + b$, $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$.

Key words: Derivative, \mathcal{C}^1 class functions, differential equations, modules, mathematical research.

1. Introducción.

Gran parte del trabajo de un matemático es realizar nuevas investigaciones que ayuden al desarrollo teórico y aplicado de la Matemática, y otras áreas del saber. Por ende, en la formación de los nuevos profesionales de esta ciencia se busca incentivar la vocación por la investigación. Sin embargo, un buen número de matemáticos tienden, quizás sin percatarse, a desmotivar al estudiante a realizar dicha actividad desde los principios de sus estudios debido al nivel de exigencia en la complejidad de las estructuras matemáticas que deben estar presentes en la misma.

Una propiedad multiplicativa de la derivada en funciones de clase \mathcal{C}^1

Existen investigaciones que han mostrado resultados interesantes en alguna rama de la Matemática, donde gran número de las herramientas usadas en la misma son de un nivel matemático bastante elemental (ver [x]). Esto da cabida a la idea principal de este trabajo, el cual busca mostrar a los estudiantes de Matemática que es posible hacer investigación utilizando estructuras y nociones básicas de la misma. En nuestro caso particular nos enfocaremos esencialmente en cierta propiedad multiplicativa de la derivada, que cumplen algunas funciones \mathcal{C}^1 . Además, haremos uso de otras nociones básicas tales como grupos, homomorfismos y endomorfismo de grupos, módulos y otros.

Este trabajo busca dar una respuesta a la siguiente pregunta: ¿Existen funciones $f(x), g(x) \in \mathcal{C}^1$ tal que $[f(x)g(x)]' = f'(x) \cdot g'(x)$? Se muestra que dada una función $f(x) \in \mathcal{C}^1$, con $f(x) \neq e^x$, existe una familia de funciones definida por

$$\mathcal{F}_{f(x)} = \{g(x) \in \mathcal{C}^1: (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g'(x)\}.$$

Mostrando: que \mathcal{F} es un \mathbb{R} -módulo cíclico generado por la función $e^{\int \frac{f'(x)}{f'(x)-f(x)} dx}$ y por tanto $(\mathcal{F}, +)$ es un grupo; que la función derivación es un endomorfismo del grupo $G = (\langle e^{2x} \rangle, +)$, donde “+” denota la suma de funciones. Se muestran ciertas peculiaridades en algunas funciones, como por ejemplo, $f(x) = e^{ax}$ con $a \in \mathbb{R}$. Se muestra $\mathcal{F}_{h(x)}$ para funciones clásicas, $h(x) \in \{x^n, ax + b, \text{sen}(x), \text{cos}(x)\}$.

Tobías de Jesús Rosas Soto

Finalmente, el artículo está constituido por cuatro secciones. La primera sección está conformada por los conceptos y resultados preliminares que permitirán el desarrollo del trabajo. La segunda sección contempla los resultados principales del artículo. La tercera sección, contiene el cálculo de ciertas familias de funciones asociadas a una función clásica. Por último, la cuarta sección presenta una visión más amplia de la interrogante planteada en este trabajo, dejando esta como problema abierto de investigación para futuros trabajos.

2. Preliminares.

Las nociones que se presentarán a continuación son resultados básicos relacionados con las materias de Cálculo, Ecuaciones Diferenciales, Álgebra abstracta, los cuales serán necesarios para el desarrollo y comprensión del presente artículo.

Recordemos que al tener una ecuaciones diferenciales lineal homogénea de primer orden con coeficientes funcionales, $p(x)f'(x) + q(x)f(x) = 0$, se utiliza el factor $e^{\int \frac{q(x)}{p(x)} dx}$ para valores de x tales que $p(x) \neq 0$, llamado *factor integrante*, para encontrar la solución de la ecuación, la cual es dada por $f(x) = ce^{\int \frac{q(x)}{p(x)} dx}$ con $c \in \mathbb{R}$.

Otra noción básica de la Matemática de la que haremos uso es la estructura de grupo, homomorfismo y automorfismo de grupos. Recordemos que dado un

Una propiedad multiplicativa de la derivada en funciones de clase \mathcal{C}^1

conjunto G y una operación binaria “ $*$ ” definida sobre G , la dupla $(G,*)$ es un grupo si se cumple lo siguiente:

1. Para todo $a, b \in G$, se tiene que $a * b \in G$.
2. Existe un $e \in G$ tal que $e * a = a * e = a$ para toda $a \in G$.
3. Para todo $a, b, c \in G$ se tiene que $a * (b * c) = (a * b) * c$.
4. Para todo $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Por otro lado, dados dos grupo $(G,*)$ y $(W,*)$, si se puede definir una función $\varphi: G \rightarrow W$ tal que $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$, entonces φ se dice un *homomorfismo* de grupos. En particular, si $W = G$ a φ se le llama un *endomorfismo* y si además es biyectiva se denomina *automorfismo*.

Ahora recordemos que dado un anillo K . Un K -módulo (a la izquierda) es un grupo aditivo S junto con una función $\varphi: K \times S \rightarrow S$ dada por $\varphi(k, s) = ks$ tal que para todo $k, h \in K$ y $s, w \in S$ se cumple lo siguiente:

1. $\varphi(k, s + w) = \varphi(k, s) + \varphi(k, w)$.
2. $\varphi(k + h, s) = \varphi(k, s) + \varphi(h, s)$.
3. $\varphi(k, hs) = \varphi(kh, s)$.

Si tenemos dos K -módulos, digamos R y T , entonces una función $\psi: R \rightarrow T$ se dice un *homomorfismo de módulos* si y solo si para todo $r, w \in R$ y $k \in K$ cumple que

1. $\psi(r + w) = \psi(r) + \psi(w)$.
2. $\psi(kr) = k\psi(r)$.

Tobías de Jesús Rosas Soto

Si $T = R$, entonces ψ se dice *endomorfismo de módulos* y si además es biyectiva, entonces se dice ψ se dice un *automorfismo de módulos*.

Por último, sea R un K -módulo y $r \in R$. Si para todo $w \in R$ existe un $k \in K$ tal que $w = kr$, entonces R se dice un K -módulo *cíclico* y denota por $R = \langle r \rangle$, es decir, $R = \{kr : k \in K\}$.

3. Resultados y pruebas.

Dos propiedades básicas que todo matemático sabe, desde el desarrollo de un curso básico de cálculo, son las siguientes: *el límite del producto de dos funciones es el producto de los límites*, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right] \quad (1)$$

y la derivada de una función está dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (2)$$

Sin embargo, a pesar de estar definida a través de un límite, la derivada del producto de dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, está dada por la siguiente fórmula:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \quad (3)$$

Una propiedad multiplicativa de la derivada en funciones de clase \mathcal{C}^1

Esta fórmula se puede deducir claramente de (1) y (2), tomando en cuenta que $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Ahora, una pregunta peculiar, dada la propiedad del límite expresada en (1), sería: ¿existen funciones $f(x)$ y $g(x)$, de tipo \mathcal{C}^1 y distintas de cero, que cumplan la siguiente propiedad?

$$[f(x)g(x)]' = f'(x) \cdot g'(x) \quad (4)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones presentes en (3) y (4) es claro que, para dar respuesta a nuestra pregunta, basta resolver la siguiente igualdad:

$$f'(x)g'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \quad (5)$$

De esto se puede obtener, de forma elemental, que

$$g'(x)[f'(x) - f(x)] - g(x)f'(x) = 0 \quad (6)$$

Notemos que en (6) tenemos una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes funcionales que, de tener solución, nos está indicando que basta encontrar una solución de ella para obtener una respuesta a la pregunta antes planteada. Si

$$f'(x) - f(x) = 0 \text{ para todo } x \in \text{Dom}(f' - f), \quad (7)$$

Tobías de Jesús Rosas Soto

entonces el paso a seguir es determinar qué funciones $f(x)$ satisfacen (7). Fácilmente, mediante el uso del factor integrante $e^{f(x)}$, se obtiene que la solución de (7) es $f(x) = ke^x$, con $k \in \mathbb{R}$. Luego, sustituyendo en (6) el valor de $f(x)$ se tiene que $kg(x)e^x = 0$. Como $k \neq 0$, pues se supuso que $f(x) \neq 0$, entonces $g(x)$ es la función nula dado que $e^x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto demuestra la siguiente proposición:

Proposición 3.1: *No existe función $g(x) \in \mathcal{C}^1$, con $g(x)$ distinta de la función nula, tal que $[g(x)ke^x]' = g'(x)ke^x$, con $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Siguiendo el mismo orden de ideas, supongamos que

$$f'(x) - f(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in \text{Dom}(f' - f), \quad (8)$$

entonces la ecuación (6) se transforma en

$$g'(x) - g(x) \frac{f'(x)}{f'(x) - f(x)} = 0. \quad (9)$$

Aplicando el factor integrante $e^{-\int \frac{f'(x)}{f'(x) - f(x)} dx}$ se tiene que la solución de (9) está dada por:

$$g(x) = ke^{\int \frac{f'(x)}{f'(x) - f(x)} dx}, \text{ con } k \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

Una propiedad multiplicativa de la derivada en funciones de clase \mathcal{C}^1

entonces la función $g(x)$ existe si y solo si existe la solución de la integral

$\int \frac{f'(x)}{f'(x)-f(x)} dx$. Así,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{f(x)} &= \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1: (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g'(x) \right\} = \\ &= \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1: g(x) = ke^{\int \frac{f'(x)}{f'(x)-f(x)} dx}, k \in \mathbb{R} \right\}.\end{aligned}$$

Esto nos demuestra el siguiente teorema:

Teorema 3.1: Dada una función $f(x)$ de clase \mathcal{C}^1 , tal que $f'(x) - f(x) \neq 0$ para todo $x \in \text{Dom}(f' - f)$, entonces existe una familia de funciones $\mathcal{F}_{f(x)}$ definida por:

$$\mathcal{F}_{f(x)} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1: (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g'(x) \right\},$$

donde $g(x) := ke^{\int \frac{f'(x)}{f'(x)-f(x)} dx}$ con $k \in \mathbb{R}$. Además, $\mathcal{F}_{f(x)} \neq \{0\}$ si y solo si existe la solución de la integral $\int \frac{f'(x)}{f'(x)-f(x)} dx$.

Ahora, notemos que si tomamos $q(x), g(x) \in \mathcal{F}_{f(x)}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces $kg(x), q(x) + g(x) \in \mathcal{F}_{f(x)}$. Efectivamente:

$$\begin{aligned}\{[q(x) \pm g(x)]f(x)\}' &= [q(x)f(x) \pm g(x)f(x)]' = [q(x)f(x)]' \pm [g(x)f(x)]' \\ &= q'(x)f'(x) \pm g'(x)f'(x) = [q(x) \pm g(x)]'f'(x)\end{aligned}$$

Tobías de Jesús Rosas Soto

y

$$[kg(x)f(x)]' = k[g(x)f(x)]' = kg'(x)f(x) = [kg(x)]'f'(x)$$

Por otro lado, como $[q(x)f(x)]' = q'(x)f'(x)$ y $[g(x)f(x)]' = g'(x)f'(x)$, es claro que

$$q(x) = k_0 e^{\int \frac{f'(x)}{f'(x)-f(x)} dx} \quad \text{y} \quad g(x) = k_1 e^{\int \frac{f'(x)}{f'(x)-f(x)} dx},$$

con $k_0, k_1 \in \mathbb{R}$ y, por tanto, $q(x) = \frac{k_0}{k_1} g(x)$ de manera que tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.2: Dada una función $f(x)$ de clase \mathcal{C}^1 , tal que $f'(x) - f(x) \neq 0$ para todo $x \in \text{Dom}(f' - f)$, entonces la familia de funciones $\mathcal{F}_{f(x)}$ definida por:

$$\mathcal{F}_{f(x)} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1 : (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g'(x) \right\},$$

donde toda función $g(x) := k e^{\int \frac{f'(x)}{f'(x)-f(x)} dx}$ con $k \in \mathbb{R}$, es un \mathbb{R} -módulo cíclico generado por $e^{\int \frac{f'(x)}{f'(x)-f(x)} dx}$.

Corolario 3.1: Dada una función $f(x)$ de clase \mathcal{C}^1 , tal que $f'(x) - f(x) \neq 0$ para todo $x \in \text{Dom}(f' - f)$, entonces la familia de funciones $\mathcal{F}_{f(x)}$ es un grupo bajo la suma clásica de funciones.

Una propiedad multiplicativa de la derivada en funciones de clase \mathcal{C}^1

Por otro lado, si tenemos una función $f(x)$ con $f(x) = k$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$, con $x \in \mathbb{R}$, y una función cualquiera $g(x)$, entonces para que se cumpla la ecuación (4) debe pasar que

$$k g'(x) = [f(x)g(x)]' = 0. g'(x) = 0$$

De aquí tenemos que $k = 0$ o $g'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si estamos en la primera opción se cumple $\mathcal{F}_{f(x)} = \{g(x) \in \mathcal{C}^1: g'(x) \neq 0, \forall x \in \text{Dom}(g')\}$. En la segunda opción se tendría que $g(x)$ es constante y, por tanto, $\mathcal{F}_{f(x)} = \mathbb{R}$. Esto nos muestra el siguiente resultado:

Proposición 3.2: Sea $f(x) = k$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$, con $k \in \mathbb{R}$ (función constante), entonces se cumple

1. Si $k \neq 0$, entonces $\mathcal{F}_{f(x)} = \mathbb{R}$.
2. Si $k = 0$, entonces $\mathcal{F}_{f(x)} = \{g(x) \in \mathcal{C}^1: g'(x) \neq 0, \forall x \in \text{Dom}(g')\}$.

Ahora, sean la función $f(x) \in \mathcal{C}^1$, tal que $f'(x) - f(x) \neq 0$, con su familia asociada $\mathcal{F}_{f(x)}$, y dos funciones $g(x), h(x) \in \mathcal{F}_{f(x)}$, cabe preguntarse ¿cuándo $g(x)h(x) \in \mathcal{F}_{f(x)}$? Claramente debe ocurrir que

$$\{[g(x)h(x)]f(x)\}' = [g(x)h(x)]'f'(x),$$

Por otro lado, asociando a conveniencia se tiene que

$$\{[g(x)h(x)]f(x)\}' = g'(x)[h(x)f(x)] + h'(x)f'(x)g(x)$$

Tobías de Jesús Rosas Soto

y

$$\{[g(x)h(x)]f(x)\}' = h'(x)[g(x)f(x)] + g'(x)f'(x)h(x)$$

De manera que,

$$g'(x)[h(x)f(x)] + h'(x)f'(x)g(x) = h'(x)[g(x)f(x)] + g'(x)f'(x)h(x)$$

De donde se tiene

$$f'(x)[h'(x)g(x) - g'(x)h(x)] + f(x)[g'(x)h(x) - h'(x)g(x)] = 0$$

Por lo tanto, $[f'(x) - f(x)][h'(x)g(x) - g'(x)h(x)] = 0$ y como $f'(x) - f(x) \neq 0$, entonces se tiene que $h'(x)g(x) - g'(x)h(x) = 0$.

Ahora, si $g(x), f(x) \neq 0$ para todo $x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ obtenemos que

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

de donde, mediante un proceso de integración por cambio de variable, se obtiene que $h(x) = kg(x)$, donde $k = e^r$, con $r \in \mathbb{R}$. Esto demuestra el siguiente lema,

Una propiedad multiplicativa de la derivada en funciones de clase \mathcal{C}^1

Lema 3.1: Dada una función $f(x) \in \mathcal{C}^1$, tal que $f'(x) - f(x) \neq 0$, con su familia asociada $\mathcal{F}_{f(x)}$, y dos funciones $g(x), h(x) \in \mathcal{F}_{f(x)}$, entonces $g(x)h(x) \in \mathcal{F}_{f(x)}$ si y solo si $h(x) = kg(x)$, donde $k = e^r$, con $r \in \mathbb{R}$.

Corolario 3.2: Sea la función $f(x) \in \mathcal{C}^1$, tal que $f'(x) - f(x) \neq 0$, con su familia asociada $\mathcal{F}_{f(x)}$, y sea $g(x) \in \mathcal{F}_{f(x)}$, entonces $k[g(x)]^2 \in \mathcal{F}_{f(x)}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Notemos ahora la siguiente particularidad de la función exponencial. Sean $w(x) = e^{ax}$ y $h(x) = e^{bx}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$(e^{ax}e^{bx})' = ae^{ax}be^{bx} \Leftrightarrow (a+b)e^{ax}e^{bx} = abe^{ax}e^{bx} \Leftrightarrow a+b = ab,$$

es decir, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Claramente $a, b \neq 1$. Luego aplicando el Teorema 3.1 tenemos que haciendo $f(x) = e^{ax}$, entonces

$$\mathcal{F}_{e^{ax}} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1 : g(x) = ke^{-\int \frac{ae^{ax}}{ae^{ax}-e^{ax}} dx}, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Solucionando la integral $\int \frac{ae^{ax}}{ae^{ax}-e^{ax}} dx$ tenemos que

$$\mathcal{F}_{e^{ax}} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1 : g(x) = re^{\left(\frac{a}{a-1}\right)x}, r \in \mathbb{R} \right\}$$

donde $r = ke^c$ ($c \in \mathbb{R}$). Esto muestra la siguiente proposición:

Tobías de Jesús Rosas Soto

Proposición 3.3: Dada la función $f(x) = e^{ax}$, con $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, entonces

$$\mathcal{F}_{e^{ax}} = \{g(x) \in \mathcal{C}^1: g(x) = re^{bx}, r \in \mathbb{R}\}$$

con $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

Es importante observar que si tomamos $a, b \in \mathbb{N}$, entonces $a = b = 2$. Así,

$$\mathcal{F}_{e^{2x}} = \{g(x) \in \mathcal{C}^1: g(x) = re^{2x}, r \in \mathbb{R}\},$$

De manera que, por el Teorema 3.2, $\mathcal{F}_{e^{2x}}$ es un \mathbb{R} -módulo cíclico generado por la función e^{2x} , es decir, $\mathcal{F}_{e^{2x}} = \langle e^{2x} \rangle$. Además, notemos que $(ke^{2x}te^{2x})' \in \langle e^{2x} \rangle$ y, por tanto, la función derivación $\mathcal{D}: \mathcal{F}_{\langle e^{2x} \rangle} \rightarrow \mathcal{F}_{\langle e^{2x} \rangle}$, dada por $\mathcal{D}(f(x)) = f'(x)$ es un automorfismo de \mathbb{R} -módulo, ya que $\mathcal{D}[f(x) + g(x)] = \mathcal{D}(f(x)) + \mathcal{D}(g(x))$ y $\mathcal{D}(kf(x)) = k\mathcal{D}(f(x))$, con $k \in \mathbb{R}$. Además si $f(x), g(x) \in \mathcal{F}_{\langle e^{2x} \rangle}$, es claro que $f(x) = ce^{2x}$ y $g(x) = de^{2x}$ con $c, d \in \mathbb{R}$ y, por tanto, si $\mathcal{D}(f(x)) = \mathcal{D}(g(x))$, entonces se tiene que $c = d$, de manera que $f(x) = g(x)$, de donde se obtiene que \mathcal{D} es inyectiva. Luego, si claro que para $f(x) = ce^{2x}$ su pre-imagen a través de \mathcal{D} está dada por $\mathcal{D}^{-1}(f(x)) = \frac{c}{2}e^{2x}$. En particular, la función derivación es un automorfismo del grupo $G = (\langle e^{2x} \rangle, +)$, donde “+” denota la suma clásica de funciones. Esto demuestra el siguiente lema:

Lema 3.2: La función derivación cumple las siguientes propiedades:

1. Es un automorfismo del \mathbb{R} -módulo $\mathcal{F}_{e^{2x}}$.
2. Es un automorfismo del grupo $G = (\langle e^{2x} \rangle, +)$.

Una propiedad multiplicativa de la derivada en funciones de clase \mathcal{C}^1

Preguntémonos ahora ¿qué forma debe tener una función $f(x) \in \mathcal{C}^1$ para que cumpla que

$$[e^{f(x)}f(x)]' = [f'(x)]^2 e^{f(x)}$$

Como $[e^{f(x)}f(x)]' = f'(x)f(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{f(x)}$, y suponiendo que $e^{f(x)} \neq 0$, tenemos que

$$[f'(x)]^2 = f'(x)[f(x) + 1]$$

Asumiendo que $f'(x) \neq 0$, entonces tenemos que $f'(x) - f(x) = 1$. Luego usando el factor integrante e^{-x} se obtiene que $f(x) = ce^x - 1$, con $c \in \mathbb{R}$. Esto demuestra la validez de la siguiente proposición:

Proposición 3.4: La función $f(x) = ce^x - 1$, con $c \in \mathbb{R}$, cumple que $e^{f(x)} \in \mathcal{F}_{f(x)}$.

$\mathcal{F}_{f(x)}$ para algunas funciones $f(x)$ clásicas.

A pesar de que el cálculo de integrales pueda verse como un procedimiento innecesario en este tipo de manuscritos, se presentarán la metodología y algunos pasos para la resolución de las integrales que aparecerán a lo largo de esta sección,

Tobías de Jesús Rosas Soto

dado que este trabajo va dirigido principalmente a estimular la investigación en los estudiantes desde sus inicios en el aprendizaje de la Matemática.

Comenzaremos por una función clásica bastante elemental $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, n\}$, de manera que $f'(x) - f(x) \neq 0$. Así, por el Teorema 3.1 basta resolver la integral

$$\int \frac{nx^{n-1}}{nx^{n-1} - x^n} dx$$

Para obtener la familia de funciones \mathcal{F}_{x^n} . Calculemos la solución:

$$\int \frac{nx^{n-1}}{nx^{n-1} - x^n} dx = n \int \frac{1}{n-x} dx = -n \ln(n-x) + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. De manera que

$$\mathcal{F}_{x^n} = \{g(x) \in \mathcal{C}^1: g(x) = ke^c \frac{1}{(n-x)^n}, \text{ con } k, c \in \mathbb{R}\}$$

Ahora trabajaremos con la función $f(x) = ax + b$, con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a-b}{a}\right\}$. Se puede verificar fácilmente que $f'(x) - f(x) \neq 0$. Por tanto, basta resolver la integral dada por $\int \frac{a}{a-(ax+b)} dx$. Haciendo el cambio de variable $u = -ax + (a+b)$ se obtiene que

Una propiedad multiplicativa de la derivada en funciones de clase \mathcal{C}^1

$$\int \frac{a}{a - (ax + b)} dx = \ln \left(\frac{1}{-ax + (a + b)} \right) + c$$

es decir,

$$\mathcal{F}_{ax+b} = \{g(x) \in \mathcal{C}^1: g(x) = ke^c \frac{1}{-ax + (a + b)} \text{ con } k, a, b, c \in \mathbb{R},\}$$

para $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a-b}{a} \right\}$.

Para el cálculo de la integral $\int \frac{f'(x)}{f'(x)-f(x)} dx$ en los siguientes casos clásicos de $f(x) = \text{sen}(x)$ y $f(x) = \text{cos}(x)$ utilizaremos en programa Wolfram Mathematica (online integrator), dado que si bien dicha integral se puede calcular (para ambos casos) aplicando métodos de integración estandarizados como: senos y cosenos en el denominador; y fracciones parciales. Las cuentas son un poco extensas y tediosas.

Trabajemos el caso de $f(x) = \text{sen}(x)$ para $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{N}$. Es claro entonces que $f'(x) - f(x) = \text{cos}(x) - \text{sen}(x) \neq 0$, de manera que para obtener $\mathcal{F}_{\text{sen}(x)}$ basta calcular la integral

$$\int \frac{\text{cos}(x)}{\text{cos}(x) - \text{sen}(x)} dx$$

Aplicando el programa mencionado tenemos que

Tobías de Jesús Rosas Soto

$$\int \frac{\cos(x)}{\cos(x) - \sin(x)} dx = \frac{1}{2}(x - \ln(\sin(x) - \cos(x))) + c$$

Así,

$$\mathcal{F}_{\sin(x)} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1: g(x) = ke^c \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sin(x) - \cos(x)} \text{ con } k, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Trabajemos ahora $f(x) = \cos(x)$ para $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{N}^-$. Es claro entonces que $f'(x) - f(x) = -\sin(x) - \cos(x) \neq 0$, de manera que para obtener $\mathcal{F}_{\cos(x)}$ basta calcular la integral

$$\int \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$$

Utilizando el programa mencionado tenemos que

$$\int \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx = \frac{1}{2}(x - \ln(\sin(x) + \cos(x))) + c$$

Así,

$$\mathcal{F}_{\cos(x)} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1: g(x) = ke^c \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sin(x) + \cos(x)} \text{ con } k, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Una propiedad multiplicativa de la derivada en funciones de clase \mathcal{C}^1

Por último, veamos que para $f(x) = \ln(x)$ se cumple que

$$f'(x) - f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x) = \ln(e^{-x}) - \ln(x) = \ln\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$$

Sin embargo, $\mathcal{F}_{\ln(x)} = \{0\}$ ya que la integral $\int \frac{1}{1-x \ln(x)} dx$ no tiene solución.

Observaciones

Hasta ahora se ha mostrado que dada una función $f(x) \in \mathcal{C}^1$ se puede encontrar funciones $g(x) \in \mathcal{C}^1$ tal que se cumple (4) bajo ciertas condiciones. Sin embargo, dada la relación existente entre las funciones derivación e integración es válido preguntarse si para $f(x) \in \mathcal{C}^1$ existe una función $h(x) \in \mathcal{C}^1$ tal que:

$$\int f(x)h(x)dx = \int f(x)dx \int h(x)dx \quad (11)$$

y hacer un estudio de $h(x)$ si existe. Además, si $h(x)$ cumple (11) ¿es posible que $h(x)$ también cumpla (4)? o ¿existe alguna función que cumpla (4) y (11) al mismo tiempo? De existir ¿qué forma tendría? Estas preguntas pueden dar pie a un estudio un poco más amplio de la idea que se trata de exponer en este trabajo y además el mismo podría generar nuevas incógnitas.

Tobías de Jesús Rosas Soto

Por otro lado, todo el estudio presentado fue realizado en una sola variable x . Sin embargo, sería interesante estudiar si dada una función $f(x) \in C^1$ se puede encontrar una función $g(y) \in C^1$ tal que la función $F(x, y) = f(x)g(y)$ cumpla que:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy = f'(x)g'(y)$$

El estudio de esta ecuación quizás podría tener alguna aplicación en la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Agradecimiento

Se agradece a todos los árbitros que tengan en bien la evaluación del presente trabajo. Además, se agradece especialmente al Dr. Carlos Núñez quien aportara una valiosa idea para formular la introducción de este manuscrito.

Referencias.

- [1] Herstein, I. N. (1990). Álgebra Moderna. Edit. TRILLAS. Mexico, D. F. ISBN 968-24-3965-5.
- [2] Hungerford, Thomas W. (1974) Algebra. Edit. Springer-Verlag. New York, U.S.A. ISBN 3-540-90518-9.

Una propiedad multiplicativa de la derivada en funciones de clase \mathcal{C}^1

- [3] Leithold, L. (1973). El Cálculo con Geometría analítica. Edit. HARLA S. A. de C. V. Mexico, D. C.
- [4] Nagle, R. K. y Saff, E. B. (1992) Fundamentos de ecuaciones diferenciales. Edit. Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington, Delaware, U.S.A. ISBN 0-021-51836-8.
- [5] Rosas, T. and Pacheco, W. (2014). Orthocentric systems in Minkowski planes. *Beiträge zur Algebra und Geometrie (BZAG)*. DOI 10.1007/s13366-014-0214-6. ISSN 0138-4821.
- [6] Rosas, Tobías. (2014). C-ortocentros y sistemas C-ortocéntricos en planos de Minkowski. Aleph Sub-cero. Serie de divulgaciones II, Pág. 104-132.
- [7] Rosas, Tobías. (2014). Sistemas Ortocéntricos en planos de Minkowski y euclidianidad. Tesis Doctoral. Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Barquisimeto, Venezuela.

ALEPH SUB – CERO
SERIE DE DIVULGACIÓN

№₀ 2015 – I №₀
pp. 103 - 125

QUANTIZACIÓN BRST
(BRST Quantization)
Adunador: **ALBERTO MEJÍAS**¹

Recepción: Mayo 2015. Revisión y aceptación: Junio 2015.

Resumen. Se intenta una exposición amigable del formalismo BRST de cuantización.

Descriptores. Fibrados, Teoría Cuántica de Campos Topológica, Teoría de Cuerdas, Supersimetría, Teoría de Calibración.

Abstract. It try to a friendly exhibition of the BRST formalism of quantización.

Keywords. Bundles, Topological Quantum Field Theory, String Theory, Supersymmetry, Gauge Theory.

0 INTRODUCCIÓN

En Física Teórica, **quantización BRST** (donde BRST se refiere a **BECCHI, ROUET, STORA** y **TYUTIN**) es un, relativamente riguroso, enfoque matemático para cuantizar a una teoría de campos con una simetría de calibración. Las reglas de cuantización, en marcos de referencia de Teoría Cuántica de Campos (QFT) anteriores, parecían "recetas" o "heurística" más que demostraciones, sobre todo en QFT no abeliana, donde el uso de "campos fantasmas" con superficialmente, extrañas propiedades, es casi inevitable por razones técnicas relacionadas con renormalización y cancelación de anomalías. La supersimetría BRST fue introducida a me-

¹ ALBERTO R. MEJÍAS E. es Licenciado en Matemáticas, egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes (ULA) Mérida-Venezuela. Es profesor de Topología, jubilado de la Universidad de los Andes. alrame59@gmail.com.

Alberto Mejías

diados de los años setenta y se interpretó rápidamente para justificar la introducción de estos fantasmas FADDEEV-POPOV y su exclusión de los estados "físicos" asintóticos, al realizar los cálculos QFT. La obra de otros autores unos años más tarde, relaciona el operador BRST a la existencia de una alternativa rigurosa a las integrales de línea, al quantizar a una teoría de calibración.

Sólo a finales de los años 1980, cuando QFT fue reformulada en lenguaje de haces fibrados para su aplicación a problemas en la topología acerca de variedades de baja dimensión, se hizo evidente que la "transformación" BRST es fundamentalmente de carácter geométrico. En este sentido, "quantización BRST" llega a ser más que una forma alternativa de llegar a los fantasmas de cancelación de anomalías. Es una perspectiva diferente sobre qué es lo que representan los campos fantasmas, por qué funciona el método FADDEEV-POPOV y cómo se relaciona con el uso de la mecánica hamiltoniana para construir un marco perturbacional. La relación entre invariancia calibracional e "Invariancia BRST" obliga a la elección de un sistema hamiltoniano cuyos estados se componen de "partículas" según las reglas familiares del formalismo de quantización canónico. Esta condición de consistencia esotérica, por lo tanto, se aproxima mucho a la explicación de cómo surgen en física, quanta y fermiones.

En ciertos casos, en particular gravedad y supergravedad, BRST debe ser reemplazado por un formalismo más general, el formalismo BATALIN-VILKOVISKY.

1 RESUMEN TÉCNICO.

Quantización BRST (o formalismo BRST) es un enfoque geométrico-diferencialista para realizar cálculos perturbacionales libres de anomalías, consistentes, en una teoría de calibración no abeliana. La forma analítica de la "transformación" BRST y su relevancia para renormalización y cancelación de anomalías fueron descritos por CARLO MARIA BECCHI, ALAIN ROUET y RAYMOND STORA en una serie de trabajos que culminaron en el de 1976: "Renormalization of gauge theories".

La transformación equivalente y muchas de sus propiedades fueron descubiertas independientemente por IGOR VIKTOROVICH TYUTIN. Su importancia para la quantización canónica rigurosa de una teoría YANG-MILLS y su correcta aplicación

QUANTIZACIÓN BRST

al espacio FOCK de las configuraciones de campo instantáneas, fue explicada por KUGO TAICHIRO y OJIMA IZUMI. La obra posterior de muchos autores, en particular, THOMAS SCHÜCKER y EDWARD WITTEN, ha aclarado el significado geométrico del operador BRST y campos relacionados y destacado su importancia para teoría cuántica de campos topológica y teoría de cuerdas.

En el enfoque BRST, se selecciona un procedimiento adecuado de ajuste de calibración para el principio de acción de una teoría de calibración, utilizando la geometría diferencial del fibrado de calibración en el que existe la teoría de campos. Luego se cuantiza la teoría para obtener un sistema hamiltoniano en el cuadro de interacción de tal manera que los campos "virtuales" introducidos por el procedimiento de ajuste de calibración, resuelvan las anomalías de calibración sin figurar en los estados asintóticos de la teoría. El resultado es un conjunto de reglas FEYNMAN para su uso en una expansión perturbacional de una serie DYSON de la S-matriz, que garantiza que es unitaria y renormalizable en cada orden de bucle, en definitiva, una técnica de aproximación coherente, para hacer predicciones físicas sobre los resultados de experimentos de dispersión.

1.1 BRST Clásico

Está relacionado con una variedad supersimpléctica donde operadores puros se clasifican por números enteros fantasmas y se tiene una cohomología BRST.

2 TRANSFORMACIONES DE CALIBRACIÓN EN QFT

Desde una perspectiva práctica, una teoría cuántica de campos se compone de un principio de acción y un conjunto de procedimientos para realizar los cálculos perturbacionales. Hay otros tipos de "chequeos de cordura" que se pueden realizar en una teoría cuántica de campos, para determinar si caben fenómenos cualitativos como confinamiento de quarks y libertad asintótica. Sin embargo, la mayoría de los éxitos predictivos de la teoría cuántica de campos, desde la electrodinámica cuántica (QED), hasta la actualidad, se han cuantizado mediante la comparación de cálculos de S-matriz, contra los resultados de experimentos de dispersión.

En los primeros días de QFT, se podría haber dicho que las prescripciones de

Alberto Mejías

quantización y renormalización eran parte del modelo, tanto como la densidad lagrangeana, especialmente cuando dependían del poderoso, pero matemáticamente, mal definido, formalismo de integral de línea. Rápidamente quedó claro que QED era casi "mágica" en su maleabilidad relativa y que la mayoría de las formas que uno podría imaginar para extenderla, no producirían cálculos racionales. Sin embargo, una clase de teorías de campos seguía siendo prometedora: teorías de calibración, en las cuales los objetos en la teoría representan clases de equivalencia de configuraciones de campos, físicamente indistinguibles, dos cualesquiera de las cuales están relacionadas por una transformación de calibración. Esto generaliza la idea QED de un cambio local de fase a un, más complicado, grupo LIE.

QED misma, es una teoría de calibración, como lo es la relatividad general, aunque esta última ha demostrado ser resistente a la quantización, hasta el momento, por razones relacionadas con renormalización. Otra clase de teorías de calibración con un grupo de calibración no abeliano, comenzando con la teoría YANG-MILLS, llegaron a ser susceptibles de quantización en la década de 1960 y principios de los setenta, en gran parte debido a la labor de LUDWIG D. FADDEEV, VICTOR POPOV, BRYCE DEWITT y GERARDUS 'T HOOFT. Sin embargo, seguían siendo muy difíciles de trabajar hasta la introducción del método BRST. El método BRST proporcionó técnicas de cálculo y pruebas de renormalizabilidad necesarias para extraer resultados precisos de las teorías YANG-MILLS "intactas" y aquellas en las que el mecanismo HIGGS conduce a la ruptura espontánea de la simetría. Representantes de estos dos tipos de sistemas YANG-MILLS —cromodinámica cuántica (QCD) y teoría electrodébil (EWT)— aparecen en el modelo estándar de física de partículas.

Ha demostrado ser bastante más difícil probar la *existencia* de una teoría cuántica de campos no abeliana, en un sentido riguroso, que obtener predicciones precisas con esquemas de cálculo semi-heurístico. Esto es porque analizar a una teoría cuántica de campos requiere dos perspectivas matemáticamente entrelazadas: un sistema lagrangeano basado en el funcional acción, compuesto por *campos* con valores distintos en cada punto de espaciotiempo y operadores locales que actúan sobre ellos y un sistema hamiltoniano en el escenario DIRAC, compuesto por *estados* que caracterizan a todo el sistema en un momento dado y operadores de campo

QUANTIZACIÓN BRST

que actúan sobre ellos. Lo que hace esto tan difícil en una teoría de calibración, es que los objetos de la teoría no son realmente campos locales en espaciotiempo; son campos locales dextro-invariantes en el fibrado principal de calibración y diferentes secciones locales a través de una porción del fibrado de calibración, relacionados por transformaciones *pasivas*, producen diferentes escenarios DIRAC.

Por otra parte, una descripción del sistema como un todo, en términos de un conjunto de campos, contiene muchos grados de libertad redundantes; las distintas configuraciones de la teoría, son clases de equivalencia de configuraciones de campos, de modo que dos descripciones que se relacionan mutuamente por una transformación de calibración *activa*, son realmente la misma configuración física. Las "soluciones" de una teoría de calibración quantizada, existen, no en un simple espacio de campos con valores en cada punto en espaciotiempo, sino en un espacio cociente (o cohomología) cuyos elementos son clases de equivalencia de configuraciones de campos. Oculto en el formalismo BRST, está un sistema para parametrizar las variaciones asociadas con todas las posibles transformaciones de calibración activas, considerando correctamente, su irrelevancia física durante la conversión de un sistema lagrangeano a un sistema hamiltoniano.

2.1 *Ajuste de Calibración y Teoría de Perturbaciones*

El principio de invariancia de calibración es esencial para construir una teoría cuántica de campo realizable. Pero generalmente no es factible realizar un cálculo perturbacional en una teoría de calibración sin, primero, "ajustar la calibración" —añadiendo términos a la densidad lagrangeana del principio de acción, que "rompe la simetría de calibración" para suprimir estos "virtuales" grados de libertad. La idea de ajuste de calibración se remonta al enfoque de calibración LORENTZ para electromagnetismo, que suprime la mayoría de los grados de libertad excesivos, en el potencial cuatro, conservando la invariancia LORENTZ manifiesta. La calibración LORENTZ es una gran simplificación en relación con el enfoque MAXWELL de campo-intensidad para la electrodinámica clásica e ilustra por qué es útil tratar con exceso de grados de libertad, en la representación de los objetos de una teoría, en la etapa lagrangeana, antes de pasar a la mecánica hamiltoniana mediante la transformación LEGENDRE.

Alberto Mejías

La densidad del hamiltoniano se relaciona con la derivada LIE, de la densidad del lagrangeano, con respecto a un campo vectorial horizontal, tempoide, unitario en el fibrado de calibración. En un contexto mecánico-quántico, es convencionalmente, reajustada por un factor $i\hbar$. Integrándola por partes, sobre una sección transversal tempoide, recupera la forma del integrando familiar de la quantización canónica. Porque la definición del hamiltoniano consiste en un campo vectorial tempórico unitario, en el espacio base, un levantamiento horizontal al espacio fibrado y una superficie espacioide, "normal" (en la métrica MINKOWSKI) al campo vectorial tempórico unitario en cada punto de la variedad base, es dependiente de la conexión y la elección del marco LORENTZ y dista mucho de ser definida a nivel total. Pero, es un ingrediente esencial en el marco perturbacional de la teoría cuántica de campos, en el cual entra el hamiltoniano quantizado mediante series DYSON.

Para fines perturbacionales, juntamos las configuraciones de todos los campos de nuestra teoría, en una sección transversal entera, tridimensional, horizontal, espacioide de P , en un objeto (un estado FOCK) y luego describimos la "evolución" de este estado, en el tiempo, usando la estampa de interacción. El espacio FOCK es generado por los estados propios de multi-partículas de la porción "imperturbada" o de "no-interacción" \mathcal{H}_0 , del hamiltoniano \mathcal{H} . Por lo tanto, la descripción instantánea de cualquier estado FOCK es una suma ponderada de amplitudes complejas de estados propios de \mathcal{H}_0 . En la estampa de interacción, relacionamos estados FOCK en diferentes tiempos, prescribiendo que cada estado propio del hamiltoniano imperturbado, experimenta una velocidad constante de rotación de fase, proporcional a su energía (el correspondiente valor propio del hamiltoniano imperturbado).

Por lo tanto, en la aproximación de orden cero, el conjunto de ponderales que caracterizan a un estado FOCK, no cambia con el tiempo, pero sí, la configuración del campo correspondiente. En mayores aproximaciones, también cambian los ponderales; experimentos en el acelerador de partículas, en física de alta energía, alcanzan a las mediciones de la tasa de cambio en estas ponderaciones (o, más bien, integrales de ellas, sobre distribuciones que representan la indeterminación de las condiciones iniciales y finales de un evento de dispersión). La serie DYSON capta el efecto de la discrepancia entre \mathcal{H}_0 y el verdadero hamiltoniano \mathcal{H} , en la forma de

QUANTIZACIÓN BRST

una serie de potencias en la constante de acoplamiento g ; es el principal instrumento para hacer predicciones cuantitativas de una teoría cuántica de campos.

Para utilizar la serie DYSON para calcular algo, se necesita algo más que una densidad lagrangeana invariante por calibración; también se necesitan las prescripciones de cuantización y ajuste de calibración que entran en las reglas FEYNMAN de la teoría. La serie DYSON produce infinitas integrales de diversos tipos, cuando se aplica al hamiltoniano de una particular QFT. Esto es, en parte, porque todas las teorías cuánticas de campo utilizables hasta la fecha, deben ser consideradas teorías de campos efectivas, que describen solamente las interacciones en un cierto rango de escalas de energía, que podemos investigar experimentalmente y, por tanto vulnerables a divergencias ultravioletas. Éstas son tolerables mientras puedan ser manejadas mediante técnicas estándar de renormalización; No son tan tolerables cuando se traducen en una serie infinita de renormalizaciones infinitas o, peor aún, en una predicción obviamente incontrolada tal como una anomalía de calibración no cancelada. Hay una relación profunda entre renormalizabilidad e invariancia de calibración, que se pierde fácilmente en el curso de intentos para obtener reglas FEYNMAN manejables, mediante ajustes de calibración.

2.2 *Enfoques pre-BRST para ajustar la calibración*

Las prescripciones tradicionales para el ajuste de calibración de electrodinámica del continuo, seleccionan un único representante de cada clase de equivalencia relacionada por transformaciones de calibración, utilizando una ecuación de restricción tal como la calibración LORENTZ $\partial^\mu A_\mu = 0$. Este tipo de prescripción puede ser aplicado a una teoría de calibración abeliana como QED, aunque resulta algo difícil explicar el por qué se llevan las identidades WARD de la teoría clásica, hasta la teoría cuántica —en otras palabras, el por qué los diagramas FEYNMAN que contienen fotones virtuales, longitudinalmente polarizados, internos, no contribuyen a cálculos de S-matriz. Este enfoque tampoco se generaliza a grupos de calibración no abelianos, como el SU(2) de las teorías YANG-MILLS y electrodébil y el SU(3) de la cromodinámica cuántica. Padece de ambigüedades GRIBOV y de la dificultad de definir una restricción de ajuste de calibración que es, en algún sentido, "ortogonal" a cambios físicamente significativos, en la configuración del campo.

Alberto Mejías

Enfoques más sofisticados no intentan aplicar una restricción de la función delta a los grados de libertad de la transformación de calibración. En lugar de "ajustar" la calibración a una particular "superficie de restricción" en el espacio de configuración, se puede romper la libertad de la calibración con un término adicional, no invariante por calibración, agregado a la densidad lagrangeana. Para poder reproducir los logros del ajuste de calibración, este término se escoge de modo que sea minimal para la elección de la calibración que corresponda a la restricción deseada y dependa cuadráticamente de la desviación de la calibración de la superficie de restricción. Por la aproximación de la fase estacionaria en que se basa la integral FEYNMAN de línea, la contribución dominante a los cálculos perturbacionales, provendrá de las configuraciones del campo en la vecindad de la superficie de restricción.

La expansión perturbacional asociada con este lagrangeano, utilizando el método de cuantización funcional, generalmente se conoce como calibración $R\xi$. Se reduce, en el caso de una calibración abeliana $U(1)$, al mismo conjunto de reglas FEYNMAN que se obtiene con el método de cuantización canónica. Pero hay una diferencia importante: la libertad de calibración, rota, aparece en la integral funcional como un factor adicional en la normalización total. Este factor sólo se puede sacar de la expansión perturbacional (e ignorarlo), cuando la contribución al lagrangeano de una perturbación sobre los grados de libertad, es independiente de la configuración "física" del campo. Esta es la condición que no se logra sostener para grupos de calibración no abelianos. Si uno ignora el problema e intenta utilizar las reglas FEYNMAN obtenidas de cuantización funcional "intuitiva", se encuentra con que los cálculos de uno contienen anomalías inamovibles.

El problema de cálculos perturbacionales en QCD, se resolvió mediante la introducción de campos adicionales conocidos como fantasmas FADDEEV-POPOV, cuya contribución al lagrangeano ajustado por calibración, compensa la anomalía introducida por el acoplamiento de perturbaciones "físicas" y "virtuales" del campo de calibración no abeliano. Desde la perspectiva de cuantización funcional, las perturbaciones "virtuales" de la configuración del campo (las transformaciones de calibración) forman un subespacio del espacio de todas las perturbaciones (infinitesimales); en el caso no abeliano, la inmersión de este subespacio en el espacio más

QUANTIZACIÓN BRST

grande, depende de la configuración alrededor de la cual ocurre la perturbación. El término fantasma en el lagrangeano representa al determinante funcional del jacobiano de esta inmersión y las propiedades del campo fantasma son dictadas por el exponente deseado sobre el determinante, para corregir la medida funcional sobre los ejes restantes de perturbación "física".

3 ENFOQUE MATEMÁTICO BRST

La construcción BRST [1], [2], se aplica a una situación de una acción hamiltoniana de un grupo LIE, conexo, compacto, G , sobre un espacio de fase M .

Sean \mathfrak{g} el álgebra LIE de G y $0 \in \mathfrak{g}^*$ un valor regular de la aplicación momento $\Phi: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Sea $M_0 = \Phi^{-1}(0)$. Supóngase que la G -acción sobre M_0 es libre y propia y considérese al espacio $\widetilde{M} = M_0/G$ de G -órbitas en M_0 , que también es conocido como cociente de reducción simpléctica $\widetilde{M} = M//G$.

En primer lugar, utilizando la secuencia regular de funciones que definen a M_0 dentro de M , se construye a un complejo KOSZUL

$$\Lambda \mathfrak{g} \otimes C^\infty(M).$$

La diferencial, δ , en este complejo es una rara $C^\infty(M)$ -derivación lineal del $C^\infty(M)$ -álgebra graduado $\Lambda \mathfrak{g} \otimes C^\infty(M)$. Esta extraña derivación se define mediante la extensión del homomorfismo de álgebra LIE $\mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$, de la acción de hamiltoniana. El complejo KOSZUL resultante es el complejo KOSZUL del $S(\mathfrak{g})$ -módulo $C^\infty(M)$, donde $S(\mathfrak{g})$ es el álgebra simétrico de \mathfrak{g} y la estructura modular proviene de un homomorfismo de anillo $S(\mathfrak{g}) \rightarrow C^\infty(M)$, inducido por la acción hamiltoniana $\mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$.

Alberto Mejías

Este complejo KOSZUL es una resolución del $S(\mathfrak{g})$ -módulo $C^\infty(M_0)$; i. e.

$$H^j(\Lambda \mathfrak{g} \otimes C^\infty(M), \delta) = \begin{cases} C^\infty(M_0), & j=0; \\ 0, & j \neq 0. \end{cases}$$

Luego, se considera al complejo de cocadena CHEVALLEY-EILENBERG para el complejo KOSZUL $\Lambda \mathfrak{g} \otimes C^\infty(M)$, considerado como un dg módulo sobre el álgebra LIE \mathfrak{g} :

$$K^{i,\cdot} = C^i(\Lambda \mathfrak{g} \otimes C^\infty(M)) = \Lambda^i \mathfrak{g}^* \otimes \Lambda \mathfrak{g} \otimes C^\infty(M).$$

La diferencial "horizontal" $d: K^{i,\cdot} \rightarrow K^{i+1,\cdot}$, viene definida, sobre los coeficientes

$$\Lambda \mathfrak{g} \otimes C^\infty(M),$$

por la acción de \mathfrak{g} sobre $\Lambda \mathfrak{g}^*$, como la derivada exterior de formas diferenciales dextro invariantes sobre el grupo LIE G , cuyo algebra LIE es \mathfrak{g} .

Sea $\text{Tot}(K)$ un complejo tal que

$$\text{Tot}(K)^n = \bigotimes_{i-j=n} K^{i,j},$$

con una diferencial $D = d + \delta$.

Los grupos de cohomología de $(\text{Tot}(K), D)$ se calculan usando una secuencia espectral asociada al complejo doble $(K^{i,\cdot}, d, \delta)$

El primer término de la secuencia espectral, determina la cohomología de la diferencial "vertical" δ :

$$E_1^{i,j} = H^j(K^{i,\cdot}, \delta) = \Lambda^i \mathfrak{g}^* \otimes C^\infty(M_0), \quad \text{si } j = 0;$$

QUANTIZACIÓN BRST

= 0, en cualquier otro caso.

El primer término de la secuencia espectral se puede interpretar como el complejo de las formas diferenciales verticales

$$(\Omega_{\text{vert}}(M_0), d_{\text{vert}})$$

para el haz fibrado $M_0 \rightarrow \tilde{M}$.

El segundo término de la secuencia espectral determina la cohomología de la diferencial "horizontal" d sobre $E_1^{\cdot, \cdot}$:

$$E_2^{i,j} \cong H^i(E_1^{\cdot, j}, d) = C^\infty(M_0)^g = C^\infty(\tilde{M}), \quad \text{si } i = j = 0 \quad \text{y cero en cualquier otro caso.}$$

La secuencia espectral colapsa en el segundo término, por lo que $E_\infty^{i,j} = E_2^{i,j}$, que está concentrado en el grado cero. Por tanto,

$$H^p(\text{Tot}(K), D) = C^\infty(M_0)^g = C^\infty(\tilde{M}), \quad \text{si } p = 0 \text{ y } 0 \text{ en cualquier otro caso.}$$

4 EL OPERADOR BRST Y EL ESPACIO FOCK ASINTÓTICO

Hay que hacer dos observaciones importantes sobre el operador BRST.

En primer lugar, en vez de trabajar con el grupo de calibración G , se puede utilizar solamente la acción del álgebra de calibración \mathfrak{g} sobre los campos (funciones sobre el espacio de fase).

En segundo lugar, la variación de cualquier "forma exacta BRST" $s_B X$, con respecto a una transformación local de calibración $d\lambda$, es

$$[i_{\delta\lambda}, s_B] s_B X = i_{\delta\lambda}(s_B s_B X) + s_B(i_{\delta\lambda}(s_B X)) = s_B(i_{\delta\lambda}(s_B X)),$$

que es, ella misma, una forma exacta.

Lo más importante para el formalismo perturbacional hamiltoniano (que se

Alberto Mejías

lleva a cabo, no en el haz fibrado, sino en una sección local), es que añadir un término exacto BRST a una densidad lagrangeana invariante por calibración, conserva la relación $sBX = 0$. Como veremos, esto implica que hay un operador relacionado QB en el espacio de estado para el que $[Q_B, \mathcal{H}] = 0$, i. e. el operador BRST en estados FOCK, es una carga conservada del sistema hamiltoniano. Esto implica que el operador evolución, en un cálculo de la serie DYSON, no hará evolucionar a una configuración de campo que cumpla $Q_B|\Psi_i\rangle = 0$, en una configuración posterior con $Q_B|\Psi_f\rangle \neq 0$ (o viceversa).

Otra manera de considerar la nilpotencia del operador BRST, es decir que su imagen (el espacio de formas exactas BRST) se encuentra completamente, dentro de su núcleo (el espacio de formas cerradas BRST). (El "verdadero" Lagrangeano, supuesto invariante bajo transformaciones de calibración locales, está en el núcleo del operador BRST, pero no en su imagen). El argumento precedente establece que podemos limitar nuestro universo de condiciones iniciales y finales a "estados" asintóticos —configuraciones de campo en la infinidad tempoidal, donde la interacción lagrangeana se "extingue"— que se encuentran en el núcleo de QB y aún, obtener una matriz de dispersión, unitaria. (Los estados BRST cerrados y exactos se definen de manera similar a los campos BRST cerrados y exactos; los estados cerrados son aniquilados por QB , mientras que los estados exactos son aquellos que pueden obtenerse aplicando QB a alguna configuración de campo arbitraria).

También podemos suprimir a los estados que se encuentran dentro de la imagen de QB , al definir a los estados asintóticos de nuestra teoría —pero el razonamiento es un poco más sutil. Puesto que hemos postulado que el "verdadero" lagrangeano de nuestra teoría es invariante por calibración, los verdaderos "estados" de nuestro sistema hamiltoniano son las clases de equivalencia bajo transformación de calibración local; en otras palabras, dos estados iniciales o finales en el cuadro del hamiltoniano, que difieren sólo por un estado BRST exacto, son físicamente equivalentes. Sin embargo, el uso de una prescripción BRST de ruptura de calibración exacta, no garantiza que la interacción hamiltoniana preservará a cualquier particular subespacio de configuraciones cerradas de campo, que podamos llamar "ortogonales" al espacio de configuraciones exactas. (Éste es un punto crucial, a

QUANTIZACIÓN BRST

menudo mal manejado en los libros de texto de QFT. No hay un producto interno a priori, en las configuraciones de campo, incorporado en el principio de acción; construimos un tal producto interno como parte de nuestro aparato perturbacional hamiltoniano).

Consecuentemente, nos enfocaremos en el espacio vectorial de las configuraciones cerradas BRST, en un instante particular, con la intención de convertirlo en un espacio FOCK de estados intermedios, adecuado para la perturbación hamiltoniana. Con este fin, lo dotaremos con operadores escalonados para las configuraciones propias de energía-momento (partículas) de cada campo, con reglas de (anti)conmutación adecuadas, así como de un producto de interno semi-definido positivo. Requerimos que el producto interno sea singular exclusivamente a lo largo de las direcciones que corresponden a estados propios BRST exactos del hamiltoniano imperturbado. Esto asegura que uno pueda elegir libremente, desde dentro de las dos clases de equivalencia de las configuraciones de campo asintóticas, correspondientes a particulares estados propios iniciales y finales del hamiltoniano libre de campos (intacto), cualquier par de estados FOCK BRST cerrados que quiera.

Las deseadas prescripciones de quantización también proporcionarán un espacio *cuociente* FOCK, isomorfo a la **cohomología BRST**, en el cual cada clase de equivalencia BRST cerrada de estados intermedios (que difieren solamente por un estado exacto), está representada por un estado que no contiene cuantos de los campos exactos BRST. Este es el espacio FOCK que queremos para los estados *asintóticos* de la teoría; Aunque, generalmente, no lograremos elegir la particular configuración final de campo, a la cual la dinámica *lagrangiana* ajustada por calibración habría evolucionado esa configuración inicial, la singularidad del producto interno a lo largo de los grados de libertad BRST exactos, asegura que obtendremos las entradas correctas para la matriz física de dispersión. (En realidad, probablemente estaríamos construyendo un espacio KREIN para los estados FOCK BRST cerrados, intermedios, con el operador de inversión de tiempo jugando el rol de "simetría fundamental" que relaciona a los productos internos invariantes LORENTZ y semi-definidos positivos. El espacio de estado asintótico, presumiblemente, es el espacio HILBERT obtenido como cuociente de los estados BRST exactos de este espacio KREIN).

Alberto Mejías

En suma, no aparecerá ningún campo introducido como parte de un procedimiento BRST de ajuste de calibración, en estados asintóticos de la teoría ajustada por calibración. Sin embargo, esto no implica lo que podemos hacer sin estos campos "virtuales" en los estados intermedios de un cálculo perturbacional! Esto es porque los cálculos perturbacionales se realizan en el cuadro de interacción. Implícitamente, involucran estados iniciales y finales del hamiltoniano de no-interacción \mathcal{H}_0 , gradualmente convertidos en estados del hamiltoniano completo, de acuerdo con el teorema adiabático "iniciando" al hamiltoniano de interacción (el acoplamiento de calibración). La expansión de la serie DYSON, en términos de diagramas FEYNMAN, incluirán vértices que aparean partículas "físicas" (aquellas que pueden aparecer en los estados asintóticos del hamiltoniano libre) a partículas "virtuales" (Estados de campos que existen fuera del núcleo de sB o dentro de la imagen de sB) y vértices que aparean partículas "virtuales" entre ellas.

4.1 *La respuesta Kugo-Ojima a cuestiones de unitaridad*

Comúnmente se acredita a T. KUGO e I. OJIMA, el descubrimiento del principal criterio de confinamiento de color en QCD. Su papel en la obtención de una correcta versión del formalismo BRST en el marco lagrangeano, parece ser menos ampliamente apreciado. Es esclarecedor revisar su variante de la transformación BRST, que hace hincapié en las propiedades hermiteanas de los campos recién introducidos, antes de proceder desde un ángulo totalmente geométrico. Aquí, abajo, se da la densidad lagrangeana ajustada por calibración; los dos términos entre paréntesis forman el acoplamiento entre calibración y sectores fantasmas y el término final se convierte una ponderación gaussiana para la medida funcional sobre el campo auxiliar B .

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{matter}}(\psi, A_{\mu}^a) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} - i((\partial^{\mu} c^{-a}) D_{\mu}^{ab} c^b + (\partial^{\mu} A_{\mu}^a)) + \frac{1}{2} \alpha_0 B$$

El campo fantasma FADDEEV–POPOV, c , es el único entre los nuevos campos de nuestra teoría ajustada por calibración, que tiene un significado geométrico más allá de los requisitos formales del procedimiento BRST. Es una versión de la fórmula MAURER–CARTAN sobre $V\mathcal{E}$, que relaciona a cada campo vectorial vertical

QUANTIZACIÓN BRST

dextro-invariante $\delta\lambda \in V\mathfrak{E}$, con su representación (salvo una fase) como un campo \mathfrak{g} -valuado. Este campo debe entrar en las fórmulas para transformaciones de calibración infinitesimales, sobre objetos (tales como fermiones ψ , bosones de calibración A_μ y el fantasma c mismo) que llevan una representación no trivial del grupo de calibración. Por tanto, la transformación BRST respecto a $\delta\lambda$, es: ψ

$$\delta\psi_i = \delta\lambda D_i c$$

$$\delta A_\mu = \delta\lambda D_\mu c$$

$$\delta c = -\delta\lambda \frac{g}{2} [c, c]$$

$$\delta\bar{c} = i\delta\lambda B$$

$$\delta B = 0.$$

Aquí hemos omitido los detalles del sector materia ψ y dejado no especificada a la forma del operador WARD sobre él; Estos no son importantes en la medida representación del álgebra de calibración sobre los campos de materia, es consistente con su acoplamiento a δA_μ . Las propiedades de los otros campos que hemos añadido son fundamentalmente analíticas más bien que geométricas. El sesgo que hemos introducido hacia las conexiones con $\partial^\mu A_\mu = 0$ depende de la calibración y no tiene ninguna significación geométrica particular. El anti-fantasma \bar{c} no es más que un multiplicador LAGRANGE para el término de ajuste de calibración y las propiedades del campo escalar B son enteramente dictadas por la relación $\delta\bar{c} = i\delta\lambda B$. (Los nuevos campos son todos hermiteanos en las convenciones KUGO-OJIMA, pero el parámetro $\delta\lambda$ es un c -número "anti-conmutativo" anti-hermiteano. Esto se traduce en alguna incomodidad innecesaria con respecto a las fases y el paso de parámetros infinitesimales a través de operadores; Esto se resolverá con un cambio de convenios en el tratamiento geométrico que sigue más abajo).

Ya sabemos, de la relación del operador BRST con la derivada exterior y el

Alberto Mejías

fantasma FADDEEV-POPOV con la forma MAURER–CARTAN, que el fantasma c corresponde (salvo una fase) a una 1-forma sobre $V\mathfrak{E}$, \mathfrak{g} -valuada. Para que la integración de un término como $-i(\partial^\mu \bar{c})D_\mu c$, sea significativa, el anti-fantasma \bar{c} debe llevar las representaciones de estos dos álgebras LIE —el ideal vertical $V\mathfrak{E}$ y el álgebra de calibración \mathfrak{g} — dual de los llevados por el fantasma. En términos geométricos, \bar{c} debe ser dual, por fibras, a \mathfrak{g} y un rango corto de ser una forma superior de $V\mathfrak{E}$. Asimismo, el campo auxiliar B debe llevar la misma representación de \mathfrak{g} (salvo una fase) que \bar{c} , así como la representación del dual de $V\mathfrak{E}$, en su representación trivial sobre A_μ —i. e. B es una forma superior \mathfrak{g} -dual por fibras, sobre $V\mathfrak{E}$.

Centrémonos en los estados de una partícula de la teoría, en el límite adiabáticamente desacoplado $g \rightarrow 0$. Hay dos tipos de quantos en el espacio FOCK del hamiltoniano ajustado por calibración, que esperamos que se encuentren enteramente fuera del núcleo del operador BRST: los del anti-fantasma FADDEEV-POPOV \bar{c} y el bosón de calibración polarizado hacia adelante. Esto es porque ninguna combinación de campos que contengan a \bar{c} es aniquilada por sB y hemos añadido al lagrangeano, un término de ruptura de calibración que es igual, salvo una divergencia, a

$$s_B(\bar{c} (i\partial_\mu A_\mu - \frac{1}{2} \alpha_0 s_B \bar{c})).$$

Asimismo, existen dos tipos de quantos que se encuentran totalmente en la imagen del operador BRST: los del fantasma FADDEEV-POPOV, c y el campo escalar B , que es "engullido" al completar el cuadrado en la integral funcional para convertirse en el bosón de calibración polarizado hacia atrás. Estos son los cuatro tipos de quantos "virtuales" que no aparecerán en los estados asintóticos de un cálculo perturbacional —si tenemos nuestras reglas de cuantización, apropiadas.

En aras de la invariancia POINCARÉ en $-i(\partial^\mu \bar{c})D_\mu c$, se toma al anti-fantasma como un escalar LORENTZ. Sin embargo, su ley de (anti-)conmutación con respecto

QUANTIZACIÓN BRST

a c —i. e. su prescripción de quantización, que ignora al teorema de espín-estadística, dando estadística FERMI-DIRAC a una partícula spin-0— vendrá dada por el requisito de que el producto interno en nuestro espacio FOCK de estados asintóticos, sea singular a lo largo de las direcciones correspondientes a los operadores ascenso y disminución de una combinación de campos BRST-exactos y no BRST-cerrados. Esta última afirmación es clave para "Quantización BRST", en contraposición a la mera "simetría BRST" o " transformación BRST".

(Necesita ser completada en el lenguaje de cohomología BRST, en relación con el tratamiento KUGO-OJIMA del espacio FOCK asintótico).

5 FIBRADOS DE CALIBRACIÓN Y EL IDEAL VERTICAL

Con el fin de hacer la justicia al método BRST, debemos cambiar de la panorámica de "campos álgebra-valorados en el espacio MINKOWSKI" típica de los textos de teoría cuántica de campos (y de la exposición anterior) al lenguaje de los haces fibrados, en el cual hay dos formas muy diferentes de considerar a una transformación de calibración: como un cambio de sección local (también conocido en relatividad general, como una transformación pasiva) o como la regrediencia de la configuración del campo a lo largo de un difeomorfismo vertical del fibrado principal. Es el último tipo de transformación de calibración que entra en el método BRST. A diferencia de una transformación pasiva, está bien definida globalmente, sobre un fibrado principal con cualquier grupo estructural sobre una variedad arbitraria. (Sin embargo, para la concreción y pertinencia con respecto a QFT convencional, este artículo se apegará al caso de un fibrado de calibración, principal, con fibra compacta sobre un espacio MINKOWSKI 4-dimensional.)

Un fibrado principal, de calibración P sobre una 4-variedad M , es localmente isomorfo a $U \times F$, donde $U \subset \mathbb{R}^4$ y la fibra F es isomorfa a un grupo LIE G , el grupo de calibración de la teoría de campos (esto es un isomorfismo de estructuras de variedades, no de estructuras de grupo; no hay ninguna superficie especial en P , correspondiente a $1 \in G$. Así que es más correcto decir que la fibra F es G -torsora). Así, el fibrado de calibración principal (físico) está relacionado con el G -fibrado principal (matemático), pero tiene más estructura. Su propiedad más básica como

Alberto Mejías

haz fibrado es la "proyección al espacio base", $\pi: P \rightarrow M$, que define las direcciones "verticales" en P (aquellas que están dentro de la fibra $\pi^{-1}(p)$ sobre cada punto $p \in M$). Como fibrado de calibración, tiene una acción por la izquierda, de G a P , que respeta la estructura de la fibra y como fibrado principal tiene también una acción por la derecha, de G a P , que también respeta la estructura de la fibra y conmuta con la levo-acción.

La levo-acción del grupo estructural G sobre P corresponde a un simple cambio de sistema de coordenadas en una fibra individual. La dextro-acción (global) $Rg: P \rightarrow P$, para un g fijo en G , corresponde a un automorfismo real de cada fibra y por ende a una aplicación de P a sí mismo. A fin de calificar a P como G -fibrado principal, la dextro-acción global de cada $g \in G$, debe ser un automorfismo respecto a la estructura de variedad, de P , con una dependencia tersa, de g —i. e. un difeomorfismo $P \times G \rightarrow P$.

La existencia de la dextro-acción global del grupo estructural, escoge una clase especial de objetos geométricos dextro-invariantes en P —aquellos que no cambian cuando son regredidos a lo largo de Rg para todos los valores de g en G . Los objetos invariantes más importantes sobre un fibrado principal son los campos vectoriales dextro-invariantes, que forman un ideal \mathfrak{E} del álgebra LIE de los difeomorfismos infinitesimales, sobre P . Los campos vectoriales sobre P que son dextro-invariantes y verticales, forman un ideal $V\mathfrak{E}$, de \mathfrak{E} , que tiene una relación con todo el fibrado P , análoga a la del álgebra LIE \mathfrak{g} del grupo de calibración G con la fibra individual G -torsora, F .

La teoría de "campos" de interés, se define en términos de un conjunto de "campos" (aplicaciones tersas, a varios espacios vectoriales) definidos sobre un fibrado principal de calibración P . Diferentes campos llevan diferentes representaciones del grupo de calibración G y, tal vez, de otros grupos de simetría de la variedad como el grupo POINCARÉ. Se puede definir al espacio Pl de polinomios locales en estos campos y sus derivadas. Se presume que la densidad lagrangeana fundamental de la teoría, se encuentra en el subespacio Pl_0 de polinomios a valores re-

QUANTIZACIÓN BRST

ales que son invariantes bajo cualquier grupo de simetrías de no calibración, intactas. También se presume que es invariante no sólo bajo la acción por la izquierda (transformaciones pasivas de coordenadas) y la dextro-acción global del grupo calibración, sino que, también, bajo transformaciones de calibración locales — regredencia a lo largo del difeomorfismo infinitesimal asociado a una elección arbitraria de campo vectorial vertical dextro-invariante $\epsilon \in V\mathcal{E}$.

Identificar las transformaciones de calibración locales, con un particular subespacio de campos vectoriales en la variedad P , nos dota de un mejor marco para lidiar con infinitesimales infinito-dimensionales: geometría diferencial y cálculo exterior. El cambio de un campo escalar bajo regredencia a lo largo de un automorfismo infinitesimal, es capturado en la derivada LIE y la noción de retener solamente al término lineal en la escala del campo vectorial se implementa separándolo en la derivada interno y la derivada exterior. (En este contexto, "formas" y cálculo exterior se refieren, exclusivamente, a grados de libertad que son duales a campos vectoriales sobre el fibrado de calibración, no a grados de libertad expresados en índices tensoriales (griegos) sobre la variedad base o índices matriciales (romanos) en el álgebra de calibración.)

La derivada LIE sobre una variedad es una operación bien definida a nivel global, de una manera que no lo es la derivada parcial. La generalización correcta del Teorema de CLAIRAUT a la no trivial estructura de variedad de P , viene dada por el corchete LIE de campos vectoriales y la nilpotencia de la derivada exterior. Y obtenemos un instrumento esencial para el cómputo: el teorema de STOKES generalizado, que nos permite integrar por partes y separar al término superficie mientras el integrando se despliega rápidamente en direcciones en donde hay una frontera abierta. (Esto no es una suposición trivial, pero puede tratarse mediante técnicas de renormalización como regularización dimensional mientras el término superficial pueda hacerse invariante por calibración.)

6 FORMALISMO BRST

En física teórica, el formalismo BRST es un método de aplicar constricciones de primera clase. Las letras BRST representan a BECCHI, ROUET, STORA y (in-

Alberto Mejías

dependientemente) TYUTIN que descubrieron a este formalismo. Es un método sofisticado para lidiar con teorías de física cuántica con invariancia por calibración. Por ejemplo, los métodos BRST se aplican, a menudo, a teoría de calibración y a relatividad general quantizada.

6.1 Versión Cuántica

El espacio de estados no es un espacio HILBERT (ver abajo). Este espacio vectorial es tanto \mathbb{Z}_2 -graduado como \mathbb{R} -graduado. Si se quiere, se puede considerar como un espacio vectorial $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}$ -graduado. La gradación previa es la paridad, que puede ser par o impar. La última gradación es el número fantasma. Tenga en cuenta que es \mathbb{R} y no \mathbb{Z} porque, a diferencia del caso clásico, podemos tener números fantasmas no enteros. Los operadores que actúan sobre este espacio son también $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}$ -graduados, en la manera obvia. En particular, Q es impar y tiene número fantasma 1.

Sea H_n el subespacio de todos los estados con número fantasma n . Entonces, Q restringido a H_n , asigna H_n a H_{n+1} . Puesto que $Q^2 = 0$, tenemos un complejo de cocadena que describe a una cohomología.

Los estados físicos son identificados como elementos de cohomología del operador Q , es decir, como vectores en $\text{Ker}(Q_{n+1})/\text{Im}(Q_n)$. La teoría BRST, de hecho, está vinculada a la resolución estándar en cohomología del álgebra LIE.

Recuérdese que el espacio de estados es \mathbb{Z}_2 -graduado. Si A es un operador graduado puro, entonces la transformación BRST aplica A a $[Q, A)$ donde $[,)$ es el supercommutador. Los operadores BRST invariantes son operadores para los que $[Q, A) = 0$. Puesto que los operadores también son graduados por números fantasmas, esta transformación BRST también forma una cohomología para los operadores ya que $[Q, [Q, A)) = 0$.

QUANTIZACIÓN BRST

Aunque el formalismo BRST es más general que el ajuste de calibración FADDEEV-POPOV, en el caso especial donde se deriva de él, el operador BRST también es útil para obtener el jacobiano correcto asociada a las constricciones que ajustan por calibración, a la simetría.

El BRST es una supersimetría. Genera al superálgebra LIE con una parte par cero-dimensional y una parte impar uno-dimensional generada por Q . $[Q, Q] = \{Q, Q\} = 0$ donde $[,]$ es el supercorchete LIE (es decir, $Q^2 = 0$). Esto significa que Q actúa como una antiderivación.

Puesto que Q es Hermiteano y su cuadrado es cero, pero Q mismo es distinto de cero, esto significa que el espacio vectorial de todos los estados previos a la reducción cohomológica, tiene una norma indefinida! Lo cual implica que no es un espacio HILBERT.

Para flujos más generales que no pueden ser descritos por constricciones de primera clase, ver formalismo BATALIN-VILKOVISKY.

6.2 Ejemplo

Para el caso especial de teorías de calibración (de la clase generalmente descrita por secciones de un G -fibrado principal) con una forma de conexión cuántica A , una **carga BRST** (a veces también, una carga BRS) es un operador generalmente denotado por Q .

Supongamos que las condiciones de ajuste de calibración \mathfrak{g} -valuadas, vienen dadas $G = \xi \partial_\mu A_\mu$, donde ξ es un número positivo que determina la calibración. Hay muchos otros ajustes de calibración posibles, pero no serán cubiertos aquí. Los campos son la forma de conexión \mathfrak{g} -valuada A , campos escalares \mathfrak{g} -valuados con estadísticas fermiónicas b y c y un campo escalar \mathfrak{g} -valuado con estadística bosónica B . c se relaciona con las transformaciones de calibración mientras b y B tratan con los ajustes de calibración. Hay realmente algunas sutilezas asociadas con el ajuste de calibración debido a las ambigüedades GRIBOV, que no serán consideradas aquí.

Alberto Mejías

$$QA = Dc,$$

donde D es la derivada covariante.

$$Qc = \frac{i}{2}[c, c]_L$$

donde $[,]_L$ es el corchete LIE, NO el conmutador.

$$QB = 0$$

$$Qb = B$$

Q es una antiderivación.

La densidad lagrangeana BRST

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} \text{Tr}[F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] + \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[BB] - \frac{1}{g^2} \text{Tr}[BG] - \frac{\xi}{g^2} \text{Tr}[\partial^\mu b D_\mu c]$$

Mientras que la densidad lagrangeana no es invariante BRST, su integral sobre todo el espacio-tiempo, la acción, si lo es.

El operador Q se define como

$$Q = c^i(L_i - f_{ik}^j b_j c^k),$$

donde c^i, b_i son los fantasmas y antifantasmas (los campos con un número fantasma negativo) FADDEEV – POPOV, respectivamente, L_i son los generadores infinitesimales del grupo LIE y f_{ik}^j son sus constantes de estructura.

7 REFERENCIAS

[1] J. M. FIGUEROA-O'FARRILL and T. KIMURA, Geometric BRST Quantization, Commun. Math. Phys. (1991)

[2] B. KOSTANT and S. STERNBERG, Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite-dimensional Clifford algebras, Ann. Phys. 176 (1987), no. 1, 49-113

QUANTIZACIÓN BRST

- [3] https://wikipedia.org/wiki/BRST_quantization(2014)

UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA – DPTO. DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
REVISTA ALEPH SUB-CERO SERIE DE DIVULGACIÓN MATEMÁTICA
FORMATO DE ARBITRAJE EXTERNO

Título del Artículo: _____

Código: _____

Arbitraje

CRITERIOS	EXCELENTE	MUY BUENO	BUENO	REGULAR	DEFICIENTE	OBSERVACIONES
Pertinencia del título.						
Adecuada elaboración del resumen.						
Claridad y coherencia del discurso.						
Adecuada organización interna.						
Calidad de las referencias bibliográficas.						
Aportes al conocimiento del objeto.						
Apreciación general.						

Resultado del Arbitraje

<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>

El trabajo evaluado puede ser publicado sin ninguna modificación.

El trabajo evaluado puede ser publicado con ligeras modificaciones.

El trabajo evaluado puede ser publicado con importantes modificaciones.

El trabajo evaluado no puede ser publicado.

Observaciones:

Datos del árbitro:

Apellidos y Nombres: _____

Lugar de trabajo: _____ Categoría: _____

e-mail: _____ teléfono: _____



UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA
REVISTA ALEPH SUB-CERO, SERIE DE DIVULGACIÓN
MATEMÁTICA, Dpto. DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
San Cristóbal, Edo. Táchira - Venezuela

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

Dr. Carlos Enrique Núñez Rincón

Editor y demás miembros del Comité Editorial de la Revista Aleph Sub-Cero, Serie de Divulgación Matemática.

Universidad Nacional Experimental del Táchira, San Cristóbal, Táchira, Venezuela

Cumpliendo con los requisitos detallados en las Normas a seguir por los Autores, envío(amos) a Uds. el artículo intitulado: _____

para su publicación en Aleph Sub-Cero, Serie de Divulgación Matemática. Sobre el manuscrito en cuestión, declaro(amos) que:

1. Se trata de un artículo original, cuyo tema de investigación está vinculado a: la matemática, la física o la informática; al tiempo que cumple con las normas vigentes para la publicación de artículos que se detallan en cada número.
2. Es un artículo original, que previamente no ha sido enviado a revisión ni se encuentra publicado, parcial ni totalmente, en ninguna otra revista científica, nacional o extranjera.
3. No existen compromisos ni obligaciones financieras con organismos estatales ni privados que puedan afectar el contenido, resultados o conclusiones de la presente publicación.
4. En caso de ser publicado, el(los) autor(es) autoriza(n) la reproducción parcial o total del artículo, siempre y cuando se respete la normativa de propiedad intelectual y que se reconozcan los créditos del (de los) autor(es).

A continuación presento (el) los nombre(s) y firma(s) de el(los) autor(es), que certifica(n) la aprobación y conformidad con el artículo enviado y los puntos antes señalados:

Autor: _____ e-mail: _____

Co-autor: _____ e-mail: _____

Co-autor: _____ e-mail: _____

El teléfono del autor principal, que será en adelante la persona de contacto, es: _____

**PROFESORES DEL DEPARTAMENTO
DE MATEMATICA Y FISICA – UNET**

№ 2015 – I №

Aldana M. Alexander. Instructor	Molina G. Ramón M.Sc. Dr.- Asociado
Barazarte Gerson. M.Sc. Asociado	Mora Adelaida, M.Sc. Asistente
Barrientos Reinaldo, M.Sc.-Agregado	Moreno Olga, M.Sc.- Asistente.
Becerra Lorenzo, M.Sc. – Asociado.	Núñez Carlos. M.Sc. Dr. - Titular.
Borrero Alicia Msc. Asistente	Ontiveros Efrén, Asistente.
Bravo Antonio, M.Sc. Dr.- Asociado	Ortega Jhon, M.Sc. - Agregado.
Cárdenas Yelitza, Instructora	Parada Gloria. M.Sc. Agregada.
Carrizal Blanca, Instructora.	Pardo Susana, M.Sc.-Asistente.
Casanova Berlitz. Asistente	Paredes Gilberto M.Sc, Agregado.
Chacón Gerardo. M.Sc.- Agregado	Peña Tania M.Sc. – Agregada
Chacón R. Miguel Arturo. Titular	Pérez Leonardo M.Sc. Agregado.
Contreras C. Luis F. M.Sc.- Asociado	Pérez Jenny, Instructora
Contreras Fernando M.Sc.-Asociado	Porras Yazmira, M.Sc.-Asociada.
Díaz Janneth A. M.Sc. Dra.- Asociada	Rivera Hender, M.Sc. – Asistente.
Díaz Leidy, M.Sc. Asistente.	Roa Mary Luz, Instructora
Escola Giovanni. Instructor.	Sanabria Irma M.Sc, Asociada
Gámez Blanca. M.Sc.- Agregada	Saldivia de N. Carmen Msc, Asociada
Gandica Elizabeth, Agregada.	Soto Hernán – Instructor
González Javier, M.Sc. Dr. Asociado	Suárez Omar, M.Sc. Asistente
González Alfredo, M.Sc. Asistente	Torres Ángela E. M.Sc- Titular
Guerrero Atilio, M.Sc. Dr. Asociado	Valera Jorge M.Sc. – Asistente
Guerrero José, Instructor	Velásquez Edwin, Instructor
Guerrero Néstor, Instructor.	Villarreal Luis, Instructor
Guerra Karyna, M.Sc. – Asistente.	Zambrano, Juan Carlos - Asistente
Guillén Blanca, M.Sc.- Agregada	Zambrano, Aleyani del V. Instructor
Hernández Pablo, Agregado	
Luna Ch. Celis José. Asistente	
Labrador, José. M.Sc.-Instructor.	
Leal, Laura. Mgtr. Instructora.	
López Jorge, Instructor.	
Moncada Jeraldine, M.Sc. Asistente.	
Molina Alexander, M.Sc. Agregado	
Molina William, M.Sc. Asistente.	

XO

2015 – I
Enero - Junio