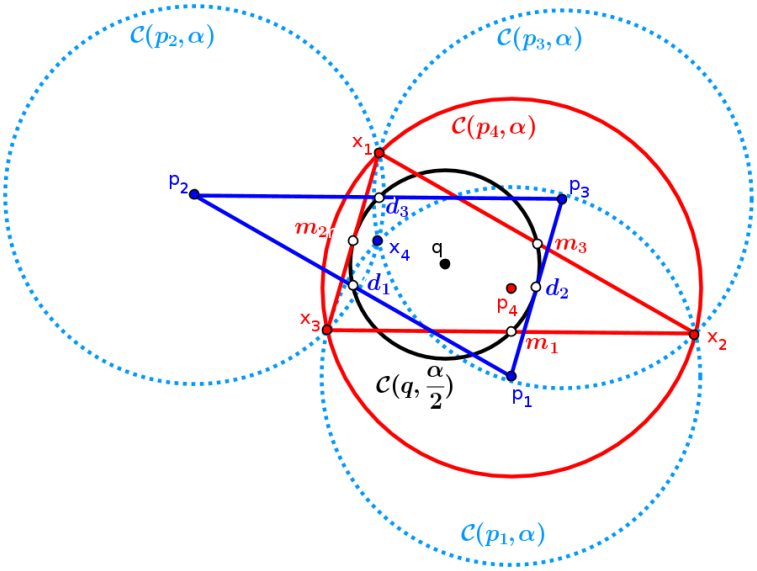
UNIVERSIDAD NACIONAL
EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA
VICERECTORADO ACADÉMICO
DECANATO DE EXTENSIÓN
DPTO. DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
San Cristóbal, Edo. Táchira - Venezuela

ALEPH SUB - CERO



$\aleph_0$

SERIE DE DIVULGACIÓN 2014 – II

Julio - Diciembre
ISSN: 1856 – 2752

MATEMÁTICA

REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TACHIRA - UNET
PARAMILLO SAN CRISTOBAL - TACHIRA

RECTOR
Ing. Raúl Casanova

VICERECTOR ACADEMICO
Dr. José Contreras.

VICERECTOR ADMINISTRATIVO
Ing. Martín Paz

SECRETARIA
Arqto. Elcy Núñez

DECANO DE DOCENCIA
Ing. Silverio Bonilla

DECANO DE INVESTIGACION
Arqto. Luis Villanueva

DECANO DE POSTGRADO
Dr. Miguel García

DECANO DE EXTENSION
Ing. José Molina

DECANO DE DESARROLLO ESTUDIANTIL
Lcda. Lisette Santos

JEFE DEL DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y FISICA
Dr. Atilio Guerrero

Julio - Diciembre 2014 - II

$\aleph_0$ ALEPH SUB - CERO 2014 – II $\aleph_0$
JULIO – DICIEMBRE

ALEPH SUB CERO – SERIE DE DIVULGACIÓN. Revista de publicación semestral editada por docentes adscritos al Departamento de Matemática y Física de la Universidad Nacional Experimental del Táchira – UNET.

Objetivo. El objetivo de esta publicación, es la divulgación de artículos vinculados a: la matemática, la física, la informática, entre otras disciplinas científicas. Está dirigida y abierta a profesores, estudiantes y público en general.

Cada autor es el único responsable por el contenido de su artículo.

Todo artículo es sometido a arbitraje externo.

Dirección: Universidad Nacional Experimental del Táchira, telf. 0276-3530422, http://www.unet.edu.ve/. Departamento de Matemática y Física, apdo. 436. "Departamento de Matemática y Física" matyfis@unet.edu.ve, Paramillo, San Cristóbal - Táchira – Venezuela.

Se autoriza la reproducción parcial o total del contenido de los artículos editados, siempre que se cite la fuente.

EDITOR GENERAL
Dr. Ramón Mirabal M. - UNET
e-mail: rmirabal@unet.edu.ve

EDITOR SERIE DE DIVULGACION
Dr. Carlos E. Núñez R. - UNET
e-mail: nunezrcar@gmail.com

COMITÉ EDITORIAL
Dr. Ramón Mirabal - UNET - rmirabal12000@gmail.com
Lic. M.Sc. Reinaldo Barrientos - UNET - rey1971@gmail.com
Dr. Ramón Molina – UNET - remolinag61@gmail.com
Dr. Carlos Núñez - UNET - nunezrcar@gmail.com

UNET: http://subcero.unet.edu.ve/ Contacto: jhernandez@unet.edu.ve

Aleph Sub Cero está indexada y certificada en Revistas Venezolanas de Ciencia y Tecnología (REVENCYT). Código RVA009.
http://www.revencyt.ula.ve revencyt@ula.ve revencyt@gmail.com

Depósito Legal: p.p. 200502TA2017
ISSN: 1856 – 2752

La Revista Aleph Sub-Cero se edita de manera ininterrumpida a partir de Diciembre de 1975. Desde el año 2009, sólo se edita de manera electrónica.

CONTENIDO 2014 - II

Pág.

TIPS. …… 2

Agradecimiento. ……..……..……..……..…… 3

Normas a seguir por los Autores. ……..……..…….. 4

CATEGORÍAS Y TRANSCRIPCIÓN
INTER-FÍSICA-TOPOLOGÍA-LÓGICA-INFORMÁTICA
CATEGORIES AND TRANSCRIPT INTER-PHYSICS-TOPOLOGY-LOGIC-COMPUTATION
Alberto Mejías. ULA, Venezuela. ……..……..…….. 5

$C-$ ORTOCENTROS Y SISTEMAS $C-$ ORTOCÉNTRICOS
EN PLANOS DE MINKOWSKI
$C-$ ORTHOCENTERS AND $C-$ ORTHOCENTRIC SYSTEMS IN MINKOWSKI PLANES
Tobías de Jesús Rosas Soto, LUZ, Venezuela ……..……. 104

LÓGICA QUÁNTICA OPERATORAL
OPERATORAL QUANTUM LOGIC
Alberto Mejías. ULA, Venezuela. ……..……..……..…….. 133

SIMETRÍA Y CIENCIA
SYMMETRY AND SCIENCE
Graciela Benzal y Carmen Torrente. ……...……..… 176

CONVEXIDAD, DUALIDAD Y EFECTOS
CONVEXITY, DUALITY AND EFFECTS
Alberto Mejías. ULA, Venezuela. ……..……..…….. 203

SOBRE EL PRODUCTO TENSORIAL DE ESPACIOS VECTORIALES
ON THE TENSOR PRODUCT OF VECTOR SPACES
Carlos S. Chinea, "Isidro de Arcenegui y Carmona", Sevilla, España. ……..……..….. 231

EDMUND HUSSERL Y LA FENOMENOLOGÍA DEL NÚMERO NATURAL
EDMUND HUSSERL AND THE PHENOMENOLOGY OF THE NATURAL NUMBER
Joaquín González, Miami Fl. USA. ……. 261

TEORÍA CATEGORIAL DE DUALIDADES
Con Aplicaciones a Dominios, Convexidad y la Mónada de Distribuciones.
CATEGORIAL DUALITIES THEORY
With applications to Domains, Convexity, and the Distribution Monad
Alberto Mejías. ULA, Venezuela. ……..……..…….. 270

Certificación REVENCYT 2013. ……..…….. 307

Formato de arbitraje. ……..…… 308

Declaración de originalidad y cesión de derechos. ……..……. 311

Cada autor es el único responsable por el contenido de su artículo.

TIPS

- ✓ Cientos de recursos gratuitos en la biblioteca online de Ciencias de la UNESCO.

En el evento de este año del Día Mundial de la Ciencia para la Paz y el Desarrollo, la UNESCO anunció el lanzamiento de una biblioteca científica online, disponible para estudiantes de todo el mundo. El proyecto se lleva a cabo con la colaboración de los laboratorios Roche y Nature Education, con el propósito de acercar a los jóvenes a contenidos científicos y tecnológicos de calidad.

http://wwwhatsnew.com/2014/11/21/cientos-de-recursos-gratuitos-en-la-biblioteca-online-de-ciencias-de-la-unesco/

Enviado vía Flipboard

- ✓ El increíble descubrimiento del primer cero de la historia.

En su número del mes de diciembre la revista de la Smithsonian incluirá un relato muy especial, el de la odisea vivida por un matemático en la búsqueda del origen del número más importante de todos los inventados por la humanidad: el cero. Para localizar esta primera expresión tuvo que internarse en el corazón de la **jungla camboyana**.

http://www.abc.es/cultura/arte/20141121/abci-primer-cero-escrito-historia-201411211748.html

Enviado vía Flipboard

- ✓ Petróleo de esquisto, el nuevo fenómeno energético –

Una fiebre mundial. Estados Unidos no está solo en esta carrera que puede cambiar el panorama geopolítico global.
http://www.bbc.co.uk/mundo/noticias/2013/01/130107_eeuu_petroleo_y_crecimiento_mj

BBC Mundo

Hay tres tipos de matemáticas: las que comprendemos, las que no comprendemos y las que desconocemos! Crecientemente, se hace más y más difícil determinar qué es elemental y qué no es elemental.

FREDERICK A. VALENTINE
***Convex Sets**, 1964*

...la ciencia moderna se ha hecho tan técnica que sólo un pequeño número de especialistas son capaces de dominar las matemáticas utilizadas en su descripción.

***HISTORIA DEL TIEMPO** Del Big Bang a los Agujeros Negros*
Stephen Hawking 1988

El Editor y el Comité Editorial de la Revista **ALEPH SUB-CERO**, agradecen a todos los que de una u otra forma colaboraron con la culminación de esta publicación.

RESPALDO: Vicerrector Académico - UNET
Decano de Extensión - UNET

CERTIFICACION: REVENCYT

2014 - II

Julio - Diciembre

$\aleph_0$ ALEPH SUB – CERO $\aleph_0$

Normas a seguir por los Autores

Publicación de Divulgación Matemática del Departamento de Matemática y Física de la Universidad Nacional Experimental del Táchira, está abierta a trabajos realizados por profesores, estudiantes y público en general.

Los trabajos deben enviarse escritos con el procesador de palabras "Word" y su editor de ecuaciones con el editor de fórmulas Math Type en caso que lo requiera el artículo, fuente Times New Roman 14, con interlineado 1,5 líneas, a: **Comité Editorial Revista Aleph Sub-Cero – Serie de Divulgación Matemática**, e-mail nunezrcar@gmail.com. Además, debe enviar una copia en formato PDF.

El Editor y el Comité Editorial se reservan el derecho de publicación de los trabajos, los cuales son evaluados de acuerdo a las siguientes consideraciones:

- ✓ Carácter divulgativo del tema.
- ✓ Contenido. Se determina si el Tema posee algún tipo de originalidad ya sea en contenido o en la presentación.
- ✓ Precisión, claridad y profundidad en la presentación del Tema.
- ✓ Rigor metodológico, debe ceñirse a las normas sobre publicación de corte científico. En cuanto a título, bibliografía, citas bibliográficas, entre otros aspectos. Se sugiere utilizar las Normas APA.
- ✓ Título en inglés y español, resumen en inglés y español, palabras claves.
- ✓ Observaciones del Comité.
- ✓ Observaciones del Arbitraje Externo.
- ✓ El artículo no puede ser publicado en cualquier otro medio.

Todo trabajo puede ser ***aceptado, devuelto al autor para correcciones o rechazado***. Se concederá al autor de artículo la certificación correspondiente.

ALEPH SUB – CERO
SERIE DE DIVULGACIÓN
$\aleph_0$ 2014 – II $\aleph_0$
pp. 5 - 103

CATEGORÍAS Y TRANSCRIPCIÓN INTER-FÍSICA-TOPOLOGÍA-LÓGICA-INFORMÁTICA

(Categories and transcript inter-physics-topology-logic-computation)

Adunador: Alberto Mejías[1]

Las ciencias tienen una tendencia natural hacia la diversificación y especialización… Sin embargo, afortunadamente, hay una cantidad considerable de terreno común, ideas, conceptos y construcciones similares. Estos proporcionan una base para una Teoría General de Estructuras.

JIŘÍ ADÁMEK, HORST HERRLICH & GEORGE E. STRECKER
ABSTRACT AND CONCRETE CATEGORIES, 2012

Recepción: Julio 2014. Revisión y aceptación: Septiembre 2014

Resumen. Existe una red de analogías entre Física, Topología, Lógica e Informática. En esta exposición, se precisan algunas de estas analogías, utilizando el concepto de 'categoría monoidal simétrica cerrada'. No se asume ningún conocimiento previo de Teoría de Categorías, Teoría de Demostración o Informática.

Descriptores: Categorías, Teoría Quántica, Informática Quántica, Topología, Lógica.

Abstract. There is a network of analogies between Physics, Topology, Logic and Computation. In this expository paper, we make some of these analogies precise using the concept of 'closed symmetric monoidal category'. We assume no prior knowledge of Category Theory, Proof Theory or Computer Science.

Key words: Categories, Quantum Theory, Quantum Computation, Topology, Logic.

---

[1] Alberto R. Mejías E. es Licenciado en Matemáticas, egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes (ULA) Mérida-Venezuela. Es profesor de Topología jubilado de la Universidad de los Andes. alrame59@gmail.com

Alberto Mejías

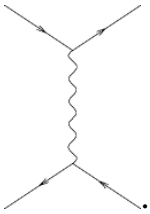
1 Introducción

Teoría de Categorías es un formalismo muy general, pero hay una cierta forma especial, en la que los físicos usan a las categorías, que resulta tener estrechos análogos en Topología, Lógica e Informática.

Una categoría tiene *objetos* y *morfismos*, que representan *cosas* y las *maneras de ir entre las cosas*.

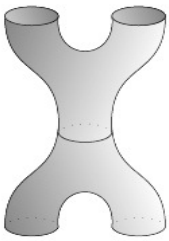
En Física, los objetos son, a menudo, *sistemas físicos* y los morfismos son *procesos* que convierten a un estado de un sistema físico en un estado de otro sistema –tal vez el mismo. En Física Quántica, a menudo, esto se formaliza considerando *espacios HILBERT* como objetos y *operadores lineales* como morfismos.

Alrededor de 1949, FEYNMAN [57] notó de que, en Teoría Quántica de Campos, es útil dibujar operadores lineales como diagramas:



Esto permite razonar sobre ellos gráficamente. Podemos deformar un diagrama sin alterar al operador que representa: lo que importa es la topología, no la geometría.

En la década de 1970, PENROSE notó que las generalizaciones de los diagramas FEYNMAN, se presentan a lo largo de la Teoría Quántica y podrían llevar a revisiones en nuestra comprensión de espaciotiempo [78]. En la década de 1980, quedó claro que en estos diagramas subyace una poderosa analogía entre Física Quántica y Topología. Es decir, un operador lineal se comporta de manera muy semejante a un 'cobordismo' que es una variedad n-dimensional que va entre variedades de una dimensión menos:



En Teoría de Cuerdas se explota esta analogía mediante la sustitución de los

diagramas FEYNMAN de Teoría Quántica de Campos Ordinaria, por cobordismos 2-dimensionales, que representan a las láminas mundi trazadas por cuerdas, con el paso del tiempo.

La analogía entre operadores y cobordismos también es importante en Gravedad Quántica por Bucles y –sobre todo– en la disciplina más puramente matemática, 'Teoría Quántica de Campos Topológica'.

Mientras tanto, por separado, logicistas habían comenzado a usar categorías donde los objetos representan *proposiciones* y los morfismos, *demostraciones*. La idea es que una demostración es un proceso que va desde una proposición (la hipótesis) a otra (la conclusión).

Posteriormente, informáticos comenzaron a utilizar categorías donde los objetos representan *tipos de datos* y los morfismos, *programas*. También empezaron a utilizar 'diagramas de flujo' para describir programas. Abstractamente, estos son muy parecidos a los diagramas FEYNMAN.

Logicistas e informáticos nunca estuvieron muy alejados unos de otros. De hecho, la 'correspondencia CURRY-HOWARD' que relaciona demostraciones con programas, ha sido muy conocida, al menos desde la década de 1970, con raíces que se remontan a mucho antes [35], [52]. Pero, es sólo en los años noventa que logicistas e informáticos se encontraron con los físicos y los topologistas. Una razón es el aumento del interés en Criptografía Quántica e Informática Quántica [28]. Con esto, la gente comenzó a pensar en procesos quánticos como formas de procesamientos de información y a aplicar ideas provenientes de la Informática. Entonces se comprendió que la tímida analogía entre organigramas y diagramas FEYNMAN podría hacerse más precisa y potente con la ayuda de Teoría de Categorías [3].

Por ahora hay una extensa red de analogías de interconexión entre Física, Topología, Lógica e Informática. Sugieren que la investigación en el área de superposición común, en realidad conlleva a construir una nueva ciencia: *una Ciencia General de Sistemas y Procesos*. La creación de esta ciencia será muy difícil. Hay buenas razones para ello, pero también malas. Una mala razón es que campos diferentes, usan diferentes terminologías y notaciones.

La piedra de Rosetta (Rashid) original, creada en el año 196 A.C., contiene versiones de un mismo texto en tres idiomas: demótico egipcio, escritura jeroglífica

y griego clásico. Su redescubrimiento por soldados de Napoleón, permitió a los egiptólogos modernos, descifrar a los jeroglíficos. Esto permitió un aumento enorme en la comprensión de la cultura del antiguo Egipto.

En la actualidad, los sistemas deductivos en Lógica Matemática, parecen jeroglíficos a muchos físicos. Asimismo, Teoría Quántica de Campos es un idioma extraño para muchos Informáticos y así sucesivamente. Entonces, hay necesidad de una nueva piedra de Rosetta para ayudar a los investigadores intentar traducir entre distintos campos. La Tabla 1 muestra nuestra conjetura en cuanto a lo que podría parecer esta piedra de Rosetta inter- Física-Topología-Lógica-Informática (IFTLI).

Teoría de Categorías	Física	Topología	Lógica	Informática
objeto	sistema	variedad	proposición	tipo de datos
morfismo	proceso	cobordismo	demostración	programa

Tabla 1: La Piedra de Rosetta IFTLI (versión reducida).

El resto de este trabajo se extiende sobre esta tabla, comparando cómo se utilizan categorías en Física, Topología, Lógica e Informática. Infortunadamente, entre estos distintos campos, se consideran ligeramente diferentes tipos de categorías.

Aunque muchos físicos no lo saben, en Física Quántica se ha hecho amplio uso de 'categorías monoidales simétricas compactas'. En Teoría de Nudos se usa 'categorías monoidales trenzadas compactas' que son ligeramente más generales. Sin embargo, quedó claro en la década de 1990, que estos instrumentos más generales también son útiles en Física.

En Lógica e Informática solían centrarse en 'categorías cartesianas cerradas' donde 'cartesiana' puede considerarse, aproximadamente, antónimo de 'quántica'; sin embargo, gracias a trabajos sobre Lógica Lineal e Informática Quántica, algunos logicistas e informáticos han bajado su insistencia en cartesianidad: ahora consideran al tipo más general de 'categorías monoidales simétricas cerradas'.

En Sección 2 se explican estos conceptos, cómo iluminan la analogía entre Física y Topología y cómo trabajar con ellos usando diagramas de cuerdas. No se asume ningún conocimiento previo de Teoría de Categorías, sólo la voluntad de aprender.

En Sección 3 se explica cómo las categorías monoidales simétricas cerradas

corresponden a un pequeño fragmento de Lógica Proposicional Ordinaria, que también pasa a ser un fragmento de la Lógica Lineal de GIRARD [43].

En Sección 4 explicamos cómo las categorías monoidales simétricas cerradas corresponden a un modelo simple de computación.

Cada una de estas secciones se inicia con algún material de contexto.

En sección 5, se concluye presentando una versión mayor (más elaborada) de la ansiada, piedra de Rosetta.

El tratamiento aquí expuesto, de los cuatro temas: Física, Topología, Lógica e Informática, está condenado a parecer esquemático, estrechamente enfocado e idiosincrásico, a los practicantes de estos temas. La excusa es que ¡se desea enfatizar ciertas analogías sin decir nada más que lo absolutamente necesario! Para compensar esto, se incluyen varias referencias para aquellos que deseen profundizar.

2 Analogía entre Física y Topología

2.1 *Contexto*

Actualmente las mejores teorías físicas son Relatividad General y Modelo Estándar de Física de Partículas. La primera describe a la gravedad sin considerar a la Teoría Quántica; la segunda describe a las otras fuerzas, considerando a la Teoría Quántica, pero ignora a la gravedad. Así, nuestra visión del mundo es profundamente esquizofrénica. El campo donde los físicos luchan para resolver este problema se llama *gravedad quántica*, puesto que se cree ampliamente que la solución requiere tratar a la gravedad en una forma que considere a la Teoría Quántica. Nadie está seguro de cómo hacerlo, pero hay una semejanza sorprendente entre dos de los principales abordajes: Teoría de Cuerdas y Gravedad Quántica por Bucles. Ambos se basan en la analogía entre la física y la topología que se muestra en Tabla 2.

A la izquierda tenemos un ingrediente básico de Teoría Quántica: la categoría **Hilb** cuyos objetos son espacios HILBERT, que describen *sistemas* físicos y cuyos morfismos son operadores lineales, que describen *procesos* físicos. A la derecha tenemos una estructura básica en Topología Diferencial: la categoría n**Cob**. Aquí los objetos son variedades (n – 1)-dimensionales, que describen *espacios* y cuyos morfismos son cobordismos n-dimensionales, que describen a *espaciotiempos*.

Física	Topología
Espacio Hilbert (sistema)	variedad (n–1)-dimensional (espacio)
operador entre espacios Hilbert (proceso)	cobordismo entre variedades (n – 1)-dimensionales (espaciotiempo)
composición de operadores	composición de cobordismos
operador identidad	cobordismo identidad

Tabla 2: Analogía entre Física y Topología

Como veremos, **Hilb** y n**Cob** comparten muchas características estructurales. Por otra parte, ambas son muy diferentes de la categoría más familiar, **Set**, cuyos objetos son conjuntos y cuyos morfismos son funciones. En otras partes se ha argumentado extensamente, que esto es importante para una mejor comprensión de gravedad quántica [10] e, incluso, de Fundamentos de Teoría Quántica [11].

La idea es que **Hilb** es más semejante a n**Cob** que a **Set**; tal vez deberíamos dejar de pensar en un proceso quántico como función de un conjunto de estados a otro. En cambio, quizá, deberíamos considerar cómo se asemeja a un 'espaciotiempo' que va entre espacios de dimensión menor en uno.

Esta idea puede parecer extraña, pero el ejemplo más simple es algo muy práctico, utilizado por los físicos usualmente: un diagrama FEYNMAN. Este es un grafo 1-dimensional que va entre colecciones 0-dimensionales, de puntos, con los bordes y vértices rotulados adecuadamente.

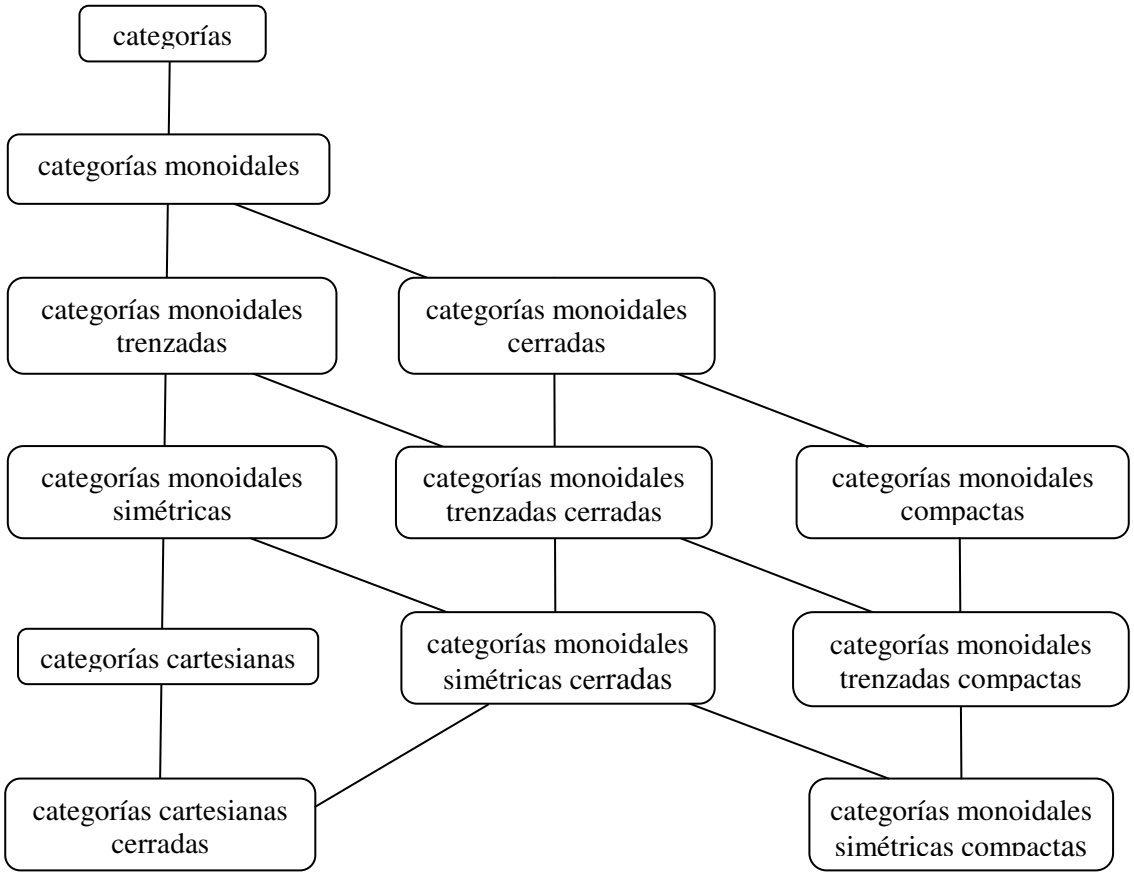
Los diagramas FEYNMAN son entidades topológicas, pero describen a operadores lineales. En Teoría de Cuerdas se utilizan cobordismos 2-dimensionales, equipados con estructura extra –laminas mundi de cuerdas– para hacer un trabajo similar.

En Gravedad Quántica por Bucles se usan generalizaciones, 2d, de diagramas FEYNMAN llamados 'espumas espinales' (Inglés: 'spin foams') [9]. En Teoría Quántica de Campos Topológica se utilizan cobordismos de dimensiones superiores [13].

En cada caso, los procesos son descritos por morfismos en una clase especial de categorías: 'categorías monoidales simétricas compactas'.

A continuación, no nos distraeremos en enigmas de la teoría quántica o la gravedad quántica. En vez de eso, asumimos otro abordaje, simplemente explicando algunos conceptos básicos de Teoría de Categorías y mostrando cómo **Set**, **Hilb**, ***n*Cob** y categorías de marañas (Inglés; categories of tangles) dan ejemplos. Un tema recurrente, sin embargo, es que **Set** es muy diferente de los otros ejemplos.

Para ayudar al lector a navegar con seguridad por el mar de la jerga, he aquí un diagrama de los conceptos que se explicarán en esta sección:



La categoría **Set** es cartesiana cerrada, mientras que **Hilb** y ***n*Cob** son monoidales simétricas compactas.

2.2 *Categorías*

Teoría de Categorías surgió alrededor de 1945, con EILENBERG y MAC LANE [40], definiendo 'categorías', 'funtores' entre categorías, y 'transformaciones naturales' entre funtores. Actualmente hay muchas introducciones al tema [34], [72], [75], incluyendo algunas gratuitas disponibles en línea [20], [46]. No obstante, comencemos por el principio:

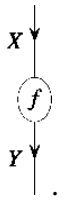
Definición 1. *Una* **categoría C** *es un par ordenado* ($ob(\mathbf{C})$, $hom(\mathbf{C})$) *tal que*:

- $ob(\mathbf{C})$ es *una clase de elementos llamados los* **objetos** *de* **C**. *Si X es un objeto de* **C**, *por abuso de notación, escribimos* $X \in \mathbf{C}$.
- $hom(\mathbf{C})$ es *una clase de elementos llamados los* **morfismos** de **C**, *tales que,*
  - *para cada par ordenado* (X, Y), *de objetos* de **C**, *existe una clase* $hom(X, Y)$ *de elementos de* $hom(\mathbf{C})$, *llamados los* **morfismos** de X a Y, *tales que*
    - *si* $f \in hom(X, Y)$, *se denota por* $f: X \to Y$;
    - *los morfismos son componibles: si* $f: X \to Y$ *y* $g: Y \to Z$, *existe un* **morfismo compuesto de** g **con** f: $gf: V \to X$, *a veces también escrito* $g \circ f$;
    - *la composición es asociativa:* $(hg)f = h(gf)$ *siempre que cada lado de la igualdad esté bien definido;*
    - *para todos los objetos X, existe un morfismo identidad* $1_X: X \to X$, *que es* **unidad** *con respecto a la composición, tanto* **a la izquierda** *como* **a la derecha**: *si* $f: X \to Y$, *entonces* $f1_X = f = 1_Y f$;
  - *para cada* $f \in hom(\mathbf{C})$, *existe un par ordenado* (X, Y), *de objetos* de **C**, *tal que* $f \in hom(X, Y)$.

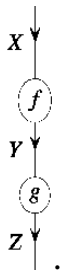
Definición 2. *Un morfismo* $f: X \to Y$ *es un* **isomorfismo** *si tiene un* inverso; *es decir, existe otro morfismo* $g: Y \to X$, *tal que* $gf = 1_X$ *y* $fg = 1_Y$.

Una categoría es el marco más simple donde podemos hablar de sistemas (objetos) y procesos (morfismos). Para visualizar a estos, podemos usar 'diagramas FEYNMAN' de una especie muy primitiva. En aplicaciones al álgebra lineal, estos diagramas se llaman a menudo 'redes espinales' (Ingles: spin networks), pero los teorizantes de categorías los llaman 'diagramas de cuerdas' (Ingles: string diagrams), y ese es el término que utilizaremos. El término 'cuerda' aquí tiene poco que ver con Teoría de Cuerdas; en cambio, la idea es que los objetos de nuestra categoría marcan 'cuerdas' o 'cables':

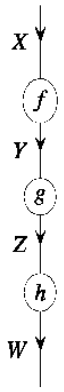
y los morfismos f: $X \to Y$, marcan 'cajas negras' con un cable de entrada de tipo X y un cable de salida del tipo Y:



Componemos dos morfismos conectando la salida de una caja negra a la entrada de la siguiente. Así, el compuesto de f: $X \to Y$ y g: $Y \to Z$ se ve así:

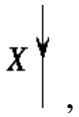


La asociatividad de la composición, está implícita:



es nuestra notación para tanto $h(gf)$ como $(hg)f$.

Del mismo modo, si dibujamos el morfismo identidad 1_X: $X \to X$ como un trozo de cable de tipo X:



,

entonces las leyes de unidad a la izquierda y a la derecha también están implícitas.

Hay innumerables ejemplos de categorías, pero nos centraremos en cuatro:

- **Set**: la categoría donde los objetos son conjuntos.
- **Hilb**: la categoría donde los objetos son espacios HILBERT finito-dimensionales.
- ***n*Cob**: la categoría donde los morfismos son cobordismos *n*-dimensionales.
- **Tang** $_k$: la categoría donde los morfismos son marañas *k*-codimensionales.

Como veremos, las cuatro son categorías monoidales simétricas cerradas, al menos cuando *k* es suficientemente grande. Sin embargo, la más familiar del lote, es decir **Set**, es la que queda por fuera: es 'cartesiana'.

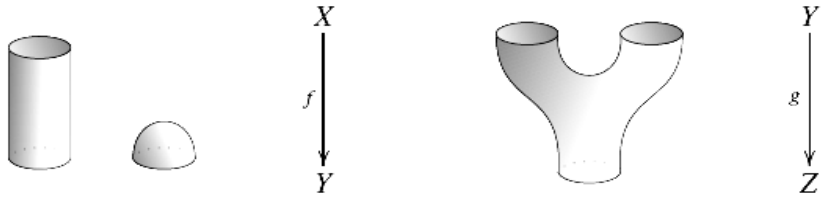
Tradicionalmente, las matemáticas se han fundamentado en la categoría **Set**, donde los objetos son *conjuntos* y los morfismos son *funciones*. Así que, cuando se estudian los sistemas y procesos en Física, es tentador especificar a un sistema dando su conjunto de estados y a un proceso, dando una función de los estados de un sistema a los estados de otro. Sin embargo, en Física Quántica se hace algo sutilmente diferente: se usan categorías donde los objetos son *espacios HILBERT* y los morfismos son *operadores lineales acotados*. Se especifica a un sistema dando un espacio HILBERT, pero este espacio HILBERT no es realmente, el conjunto de los estados del sistema: un estado es en realidad un rayo en el espacio Hilbert. Asimismo, un operador lineal acotado no es precisamente una función de los estados de un sistema a los estados de otro.

En la práctica cotidiana de la física quántica, lo que realmente importa no son los conjuntos de estados y funciones entre ellos, sino el espacio HILBERT y los operadores. Una de las virtudes de Teoría de Categorías es que nos libera del enfoque 'conjunto-céntrico' de las matemáticas tradicionales y permite ver a la Física Quántica en sus propios términos. Como veremos, esto arroja nueva luz sobre los dilemas que siempre han plagado a la comprensión del reino quántico [11].

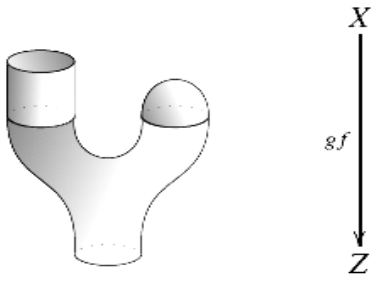
Para evitar problemas técnicos que nos llevarían muy lejos, asumiremos a **Hilb** como la categoría donde los objetos son *espacios HILBERT finito-dimensionales* y los morfismos son *operadores lineales* (automáticamente acotados en este caso). Los espacios HILBERT finito-dimensionales bastan para algunos propósitos; los infinito-dimensionales son a menudo importantes, pero tratarlos correctamente, re-

queriría algunas importantes extensiones de las ideas que queremos explicar aquí.

En Física también se utilizan categorías donde los objetos representan opciones de *espacios* y los morfismos representan opciones de *espaciotiempos*. La más simple es n**Cob**, donde los objetos son variedades $(n - 1)$-dimensionales y los morfismos son *cobordismos n-dimensionales*. Glosando sobre algunas sutilezas, que un tratamiento cuidadoso discutiría [81], un cobordismo f: $X \rightarrow Y$ es una variedad n-dimensional cuyo borde es la unión disjunta de las variedades $(n - 1)$-dimensionales X y Y. Aquí hay un par de cobordismos en el caso n = 2:



Los componemos pegando la 'salida' de uno a la 'entrada' del otro. Así, en el anterior ejemplo gf: $X \rightarrow Z$, luce como:

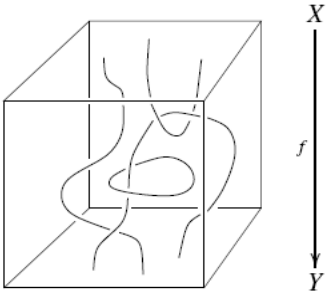


Otro tipo de categoría importante en física, tiene objetos que representan *colecciones de partículas* y morfismos que representa a sus *líneas mundi* e *interacciones*. Los diagramas FEYNMAN son el ejemplo clásico, pero en estos diagramas los 'bordes' no se toman literalmente como trayectorias de partículas.

Un ejemplo con vínculos más estrechos con Topología es $\mathbf{Tang}_k$. Muy *a grosso modo*, un objeto de $\mathbf{Tang}_k$ es una colección de puntos en un cubo k-dimensional, mientras que un morfismo es una 'maraña': una colección de bucles[2] y arcos tersamente incrustados en un cubo $(k + 1)$-dimensional, tales que los bucles se encuentran en el interior del cubo, mientras que los arcos tocan el borde del cubo solamente en sus partes superior e inferior y sólo con sus extremos. Un poquito más

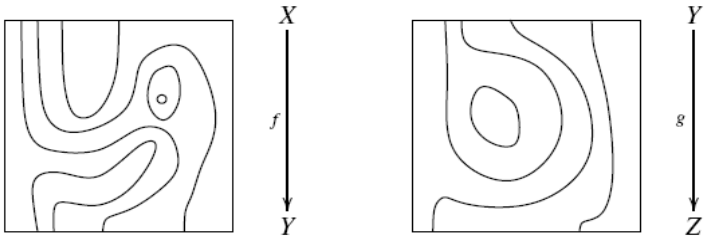
[2] Un bucle es una imagen homeomorfa (una copia elástica) de la circunferencia.

precisamente, las marañas son 'clases de isotopía' de tales arcos y bucles empotrados: esta relación de equivalencia significa que sólo importa la topología de la maraña, no su geometría. Componemos marañas, adjuntando un cubo a otro, de tope a fondo. Se pueden hallar definiciones más precisas en muchas fuentes, al menos para $k = 2$, que dan marañas en cubos 3d [42], [58], [81], [89], [97], [101]. Y, ya que una imagen vale por mil palabras, aquí hay una imagen de un morfismo en $\mathbf{Tang}_2$:

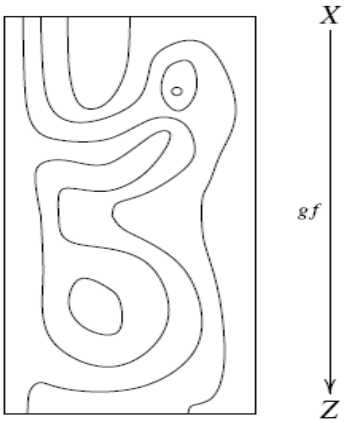


Nótese que podemos pensar en un morfismo en $\mathbf{Tang}_k$ como un cobordismo 1-dimensional empotrado en un cubo k-dimensional. Por esta razón $\mathbf{Tang}_k$ y $n\mathbf{Cob}$ se comportan de manera similar en algunos aspectos.

Aquí hay dos morfismos componibles, en $\mathbf{Tang}_1$:



y aquí está su compuesto:



Puesto que sólo importa la topología de las marañas, somos libres de aplastar

a este rectángulo en un cuadrado, si queremos, pero no necesitamos hacerlo.

A menudo es útil considerar marañas decoradas de diversas maneras.

Por ejemplo, en una maraña 'orientada', cada arco y bucle está dotado con una orientación. Podemos indicar esto dibujando una flechita en cada curva en la maraña. En aplicaciones a la física, estas curvas representan líneas mundi de partículas y las flechas indican si la partícula va hacia adelante o hacia atrás en el tiempo, siguiendo la idea de FEYNMAN de que las antipartículas son partículas yendo hacia atrás en el tiempo.

También podemos considerar marañas 'enmarcadas'. Aquí cada curva es sustituida por una 'cinta'. En aplicaciones a la física, esto hace un seguimiento de cómo se retuerce cada partícula. Esto es especialmente importante para los fermiones, donde un giro de 2π actúa no trivialmente. Matemáticamente, las marañas que mejor se comportan son tanto orientadas como enmarcadas [13], [89], y estas son las que deberíamos de usar para definir $\mathbf{Tang}_k$.

La categoría n**Cob** también tiene una versión orientada enmarcada. Sin embargo, estos detalles apenas tendrán importancia en lo que está por venir.

Es difícil hacer mucho con categorías, sin discutir las asignaciones entre ellas. Una asignación entre categorías, particularmente interesante, es un 'funtor':

Definición 3. *Un* **funtor** $\boldsymbol{F}$: $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$*, de una categoría* **C** *a una categoría* **D** *es una asignación que manda:*

- *cada objeto* $X \in \mathbf{C}$ *a un objeto* $\boldsymbol{F}(X) \in \mathbf{D}$*,*
- *cada morfismo* f: $X \to Y$*, en* **C** *a un morfismo* $\boldsymbol{F}(f)$: $f(X) \to \boldsymbol{F}(Y)$*, en* **D***, de tal manera que:*
  - $\boldsymbol{F}$ **preserva las identidades**: *para cualquier objeto* $X \in \mathbf{C}$*,* $\boldsymbol{F}(1_X) = 1_{\boldsymbol{F}(X)}$*;*
  - $\boldsymbol{F}$ **preserva la composición**: *para cualquier par de morfismos* f: $X \to Y$*,* g: $Y \to Z$*, en* **C***,* $\boldsymbol{F}(f\,g) = \boldsymbol{F}(g)\boldsymbol{F}(f)$.

En las secciones siguientes, veremos que funtores y transformaciones naturales son útiles para determinar estructuras adicionales en categorías. He aquí un uso distinto para funtores: podemos pensar en un funtor $\boldsymbol{F}$: $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$, como una imagen o 'representación' de **C** en **D**. La idea es que $\boldsymbol{F}$ puede asignar objetos y morfismos en alguna categoría 'abstracta' **C**, a objetos y morfismos en una categoría más 'con-

creta' **D**.

Por ejemplo, considere un grupo abstracto G. Esto es lo mismo que una categoría con un objeto y con todos los morfismos invertibles. El objeto es poco interesante, así que podemos llamarlo sólo •, pero los morfismos son los elementos de $\boldsymbol{G}$ y los componemos multiplicándolos. Desde esta perspectiva, una **representación** de $\boldsymbol{G}$ en un espacio HILBERT finito-dimensional, es lo mismo que un funtor $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{G} \to$ **Hilb**. Igualmente, una **acción** de $\boldsymbol{G}$ sobre un conjunto es igual a un funtor $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{G} \to$ **Set**. Ambas nociones son maneras de hacer más concreto a un grupo abstracto.

Desde la tesis de 1963 de LAWVERE, sobre Semántica Funtorial [69], la idea de funtores como representaciones se ha vuelto omnipresente. Sin embargo, la terminología varía de campo a campo. Siguiendo a LAWVERE, logicistas, a menudo, llaman a la categoría **C** una 'teoría' y llaman al funtor $\boldsymbol{F}$: **C** → **D** un 'modelo' de esta teoría. Otros matemáticos llamarían a $\boldsymbol{F}$ un 'álgebra' de la teoría. En este trabajo, la opción predeterminada de **D** es generalmente, la categoría **Set**.

En física, es al funtor $\boldsymbol{F}$: **C** → **D,** lo que se llama la 'teoría'. Aquí la opción predeterminada de **D** es la categoría que llamamos **Hilb** o una categoría similar, de espacios HILBERT infinito-dimensionales. Por ejemplo, tanto las 'teorías conformales de campos' [85] como las teorías quánticas de campos topológicas [8] pueden ser vistas como funtores de este tipo.

Si pensamos en funtores como modelos, las transformaciones naturales son asignaciones entre modelos:

Definición 4. *Dados dos funtores F, F':* **C** → **D***, una* **transformación natural** α: $\boldsymbol{F} \Longrightarrow \boldsymbol{F}'$*, asigna a cada objeto X en* **C,** *un morfismo α_X: $\boldsymbol{F}(X) \to \boldsymbol{F}'(X)$ tal que para cualquier morfismo f: $X \to Y$, en* **C***, la ecuación $F(f) = F'(f)\,\alpha_X$, se cumple en* **D***. En otras palabras, el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{F}(X) \arrow[r, "\boldsymbol{F}(f)"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & \boldsymbol{F}(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\
\boldsymbol{F}'(X) \arrow[r, "\boldsymbol{F}'(f)"'] & \boldsymbol{F}'(Y)
\end{tikzcd}$$

(Ir de lado y luego hacia abajo es igual que ir hacia abajo y luego de lado).

Definición 5. *Un* **isomorfismo natural** *entre funtores* $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}'$: $C \to D$, *es una transformación natural* α: $\boldsymbol{F} \Longrightarrow \boldsymbol{F}'$, *tal que* α_X *es un isomorfismo para cada* $X \in \mathbf{C}$. *Por ejemplo, supongamos que* $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}'$: $\boldsymbol{G} \to \mathbf{Hilb}$, *son funtores, donde* $\boldsymbol{G}$ *es un grupo considerado como una categoría con un objeto, digamos:* •. *Entonces, como ya se mencionó,* $\boldsymbol{F}$ *y* $\boldsymbol{F}'$ *son sólo representaciones secretas de* $\boldsymbol{G}$, *en los espacios* HILBERT $\boldsymbol{F}(\bullet)$ *y* $F'(\bullet)$. *Una transformación natural* $\alpha\boldsymbol{F} \Longrightarrow \boldsymbol{F}'$, *entonces, es lo mismo que un* **operador de entrecruzamiento** *de una representación a otra: es decir, un operador lineal*

$$A: \boldsymbol{F}(\bullet) \to \boldsymbol{F}(\bullet)$$

que satisface

$$A\boldsymbol{F}(g) = \boldsymbol{F}(g)A$$

para todos los elementos g del grupo $\boldsymbol{G}$.

2.3 *Categorías Monoidales*

En física, a menudo, es útil pensar en dos sistemas asentados lado a lado como formando un único sistema. En topología, la unión disjunta de dos variedades es otra variedad por derecho propio. En lógica, la conjunción de dos declaraciones es otra declaración. En informática podemos combinar dos tipos de datos en un único 'tipo producto'. El concepto de 'categoría monoidal' unifica todos estos ejemplos en un marco único.

Una categoría monoidal $\mathbf{C}$ tiene un funtor $\otimes$: $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, que asocia a dos objetos X, Y para dar un nuevo objeto $X \otimes Y$. Para precisar esto, definimos el producto cartesiano de categorías:

Definición 6. *El* **producto cartesiano** $\mathbf{C} \times \mathbf{C}'$ *de las categorías* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{C}'$, *es una categoría tal que:*

- *un objeto es un par* (X, X') *que consta de un objeto* $X \in \mathbf{C}$ *y un objeto* $X' \in \mathbf{C}'$*;*
- *un morfismo de* (X, X') *a* (Y, Y'), *es un par* (f, f') *que consiste en un morfismo* $f: X \to Y$ *y un morfismo* $f': X' \to Y'$*;*
- *la composición se hace componente a componente:* $(g, g')(f, f') = (gf, g'f')$*;*

- *los morfismos identidad se definen componente a componente:* $1_{(X, X')} = (1_X, 1_{X'})$.

Las categorías monoidales fueron definidas por MAC LANE [71] en 1963. La sutileza de la definición radica en el hecho que $(X \otimes Y) \otimes Z$ y $X \otimes (Y \otimes Z)$ no son generalmente iguales. En cambio, debemos especificar un isomorfismo entre ellos, llamado el 'asociador'. Del mismo modo, mientras que una categoría monoidal tiene un objeto 'unidad' I, no es generalmente válido que $I \otimes X$ y $X \otimes I$ sean iguales a X. Por esto, conviene especificar isomorfismos $I \otimes X \cong$ X y X $\otimes I \cong$ X. Para ser manejables, todos estos isomorfismos deberán cumplir ciertas condiciones:

Definición 7. *Una* **categoría monoidal** *consiste de:*

- *una categoría* **C**,
- *un funtor* **producto tensorial** $\otimes$: $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$,
- *un* **objeto unidad** $\boldsymbol{I} \in \mathbf{C}$,
- *un isomorfismo natural llamado el* **asociador**, *que asigna a cada trío de objetos* $X, Y, Z \in \mathbf{C}$, *un isomorfismo*

$$a_{X, Y, Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z),$$

- *isomorfismos naturales llamados el* **levo-unitor** *y* **dextro-unitor**, *que asignan a cada objeto* $X \in \mathbf{C}$, *isomorfismos*

$$l_{\boldsymbol{X}}: I \otimes X \to X,$$

$$r_{\boldsymbol{X}}: X \otimes I \to X,$$

tales que:

  - *para todo* $X, Y \in C$ *se cumple la* **ecuación triangular**:

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes I) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X, I, Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes 1_Y"'] & & X \otimes (I \otimes Y) \arrow[dl, "1_X \otimes l_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

  - *para todo* $\boldsymbol{W}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathbf{C}$, *se cumple la* **ecuación pentagonal**

$$
\begin{tikzcd}
 & ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "a_{W \otimes X, Y, Z}"'] \arrow[dr, "a_{W, X, Y} \otimes 1_Z"] & \\
(W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[ddr, "a_{W, X, Y \otimes Z}"'] & & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[d, "a_{W, X \otimes Y, Z}"] \\
 & & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[dl, "1_W \otimes a_{X, Y, Z}"] \\
 & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z) &
\end{tikzcd}
$$

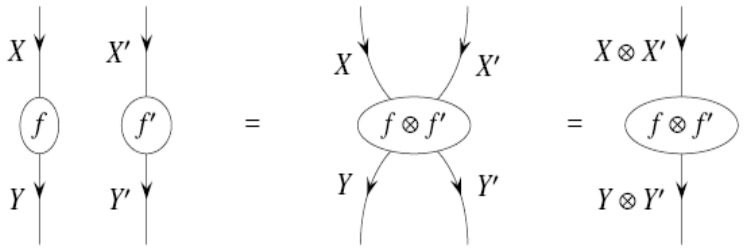
Cuando tenemos un producto tensorial de cuatro objetos, hay cinco maneras de asociarlos usando paréntesis y, a primera vista, el asociador nos permite construir dos isomorfismos desde $((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z$ hasta $W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)$. Sin embargo, la ecuación pentagonal dice que estos isomorfismos son iguales. Cuando tenemos productos tensoriales de aún más objetos, hay aún más formas de asociarlos usando paréntesis y aún más isomorfismos entre ellos, construidos a partir del asociador. Sin embargo, MAC LANE demostró que la identidad pentagonal implica que estos isomorfismos son todos iguales. Del mismo modo, si asumimos también la ecuación triangular, todos los isomorfismos con el mismo origen y destino, construidos a partir del asociador, las leyes de la levo- y la dextro unidad, son iguales.

En una categoría monoidal podemos tener procesos en ‘paralelo’ así como en ‘serie’.

El procesamiento en serie es sólo composición de morfismos, que funciona en cualquier categoría. Pero en una categoría monoidal podemos también tensoriar morfismos $f\colon X \to Y$ y $f'\colon X' \to Y'$ ' y obtener un ‘proceso en paralelo’

$$f \otimes f'\colon X \otimes X' \to Y \otimes Y'.$$

Podemos representar esto de varias maneras:

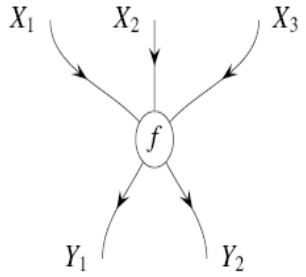


.

Más generalmente, podemos representar a cualquier morfismo

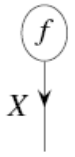
$$f\colon X_1 \otimes \ldots \otimes X_n \;\rightarrow\; Y_1 \otimes \ldots \otimes Y_m,$$

como una caja negra con n cables de entrada y m cables de salida:



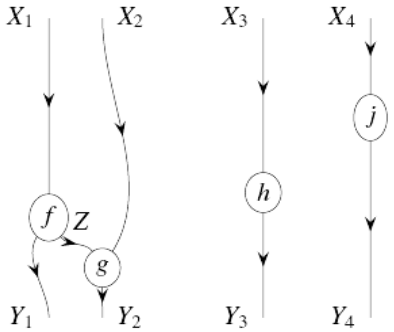
.

Dibujamos al objeto unidad I como un espacio en blanco. Así, por ejemplo, dibujamos un morfismo $f\colon I \rightarrow X$, como sigue:



.

Componiendo y tensoriando morfismos, podemos construir cuadros elaborados que se asemejan a los diagramas FEYNMAN:

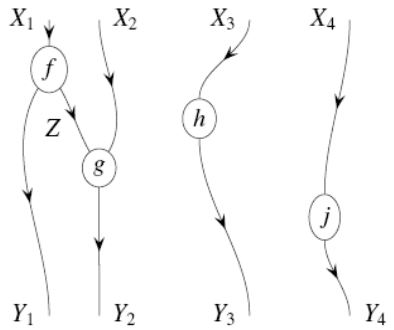


.

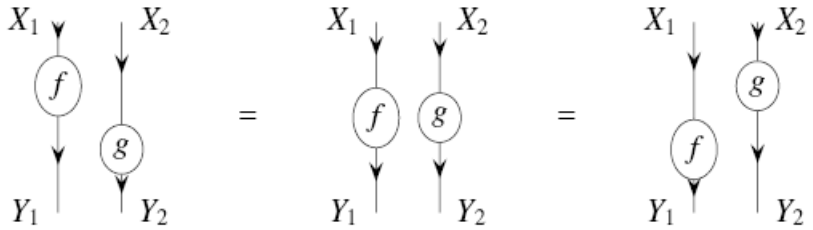
Las leyes que rigen a una categoría monoidal permiten relegar asociadores y unitores al dibujar tales cuadros, sin que haya problemas. La razón es que el Teo-

rema de Coherencia, de MAC LANE, establece que cualquier categoría monoidal es 'equivalente', en un sentido adecuado, a una donde todos los asociadores y unitores son morfismos identidad [71].

También se puede deformar la imagen en una amplia variedad de formas, sin alterar al morfismo que describe. Por ejemplo, el morfismo de arriba es igual a éste:



Todo el que utiliza diagramas de cuerdas para cálculos en categorías monoidales comienza por preocuparse por las reglas del juego: *¿precisamente cómo* podemos deformar a las representaciones, sin cambiar los morfismos que describen? En lugar de indicar precisamente las reglas –lo cual es un poco técnico– le exhortamos a explorar por sí mismo, lo que está permitido y lo qué no. Por ejemplo, mostrar que se pueden deslizar las cajas negras hacia arriba y hacia abajo así:



Para un tratamiento formal de las normas que rigen a los diagramas de cuerdas, ver los escritos originales de JOYAL y STREET [55] y el libro de YETTER [101].

Ahora pasemos a los ejemplos. Aquí es crucial advertir que la misma categoría, a menudo, puede ser dotada con diferentes productos tensoriales, resultando diferentes categorías monoidales:

- Hay una manera de hacer de **Set** una categoría monoidal donde $X \otimes Y$ es el producto cartesiano $X \times Y$ y el objeto unidad es cualquier conjunto de un solo elemento. Nótese que este producto tensorial no es estrictamente asociativo, ya

que $(x, (y, z)) \neq ((x, y), z)$; pero, existe un isomorfismo natural $(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z)$ y este es nuestro asociador. Consideraciones similares dan los levo- y dextro unitores. En esta categoría monoidal, el producto tensorial de $f: X \to Y$ y $f': X' \to Y'$, es la función

$$f \times f': X \times X' \to Y \times Y'$$
$$(x, x') \mapsto (f(x), f'(x')).$$

También hay manera de hacer de **Set** una categoría monoidal, donde $X \otimes Y$ es la unión disjunta de X y Y, que denotaremos por $X + Y$. Aquí el objeto unidad es el conjunto vacío. Otra vez, como con todos estos ejemplos, se satisfacen las leyes asociativa y de la levo/dextro-unidad, salvo isomorfismo natural. En esta categoría monoidal, el producto tensorial de $f: X \to Y$ y $f': X' \to Y'$, es la función

$$f + f': X + X' \to Y + Y'$$
$$x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in X, \\ f'(x), & \text{si } x \in X'. \end{cases}$$

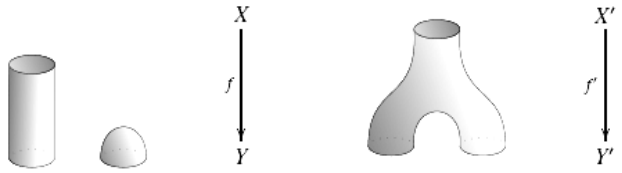
Sin embargo, en lo que sigue, cuando hablamos de **Set** *como una categoría monoidal, utilizamos siempre el producto cartesiano.*

- Hay una manera de configurar **Hilb** como una categoría monoidal con el producto tensorial habitual de espacios HILBERT: $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \cong \mathbb{C}^{nm}$. En este caso, el objeto unidad I se puede tomar como un espacio HILBERT 1-dimensional, por ejemplo $\mathbb{C}$.

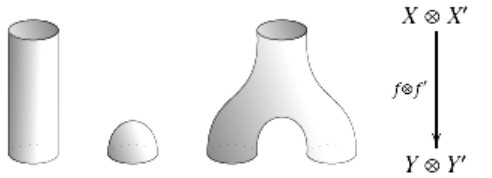
También hay una manera de hacer de **Hilb** una categoría monoidal donde el producto tensorial es la suma directa: $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m \cong \mathbb{C}^{n+m}$. En este caso, el objeto unidad es el espacio HILBERT cero dimensional $\{0\}$.

Sin embargo, en lo que sigue, cuando hablamos de **Hilb** *como categoría monoidal, utilizamos siempre el producto tensorial habitual!*

- El producto tensorial de objetos y morfismos en n**Cob** está dado por la unión disjunta. Por ejemplo, el producto tensorial de estos dos morfismos:

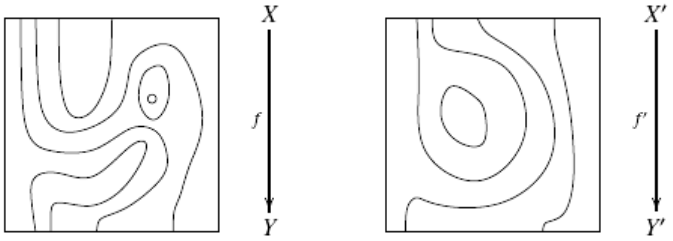


es este:



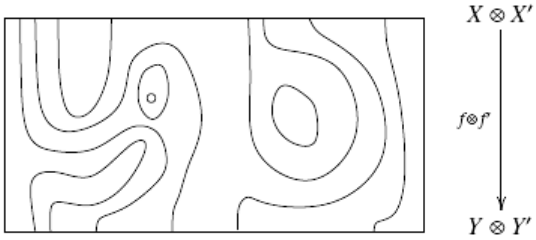
.

- La categoría $\mathbf{Tang}_k$ es monoidal cuando k ≥ 1, donde el producto tensorial está dado por la unión disjunta. Por ejemplo, dadas estas dos marañas:



,

su producto tensorial luce como esto:



El ejemplo de **Set**, con su producto cartesiano, es diferente de los otros tres ejemplos principales, porque el producto cartesiano de conjuntos $X \times X'$ viene equipado con funciones llamadas 'proyecciones' a los conjuntos X y X':

$$X \xleftarrow{p} X \times X' \xrightarrow{p'} X'.$$

Nuestros otros principales ejemplos carecen de estas funciones –aunque **Hilb** convertido en una categoría monoidal, usando ⊕, tiene proyecciones. Además, cada conjunto tiene una única función al conjunto de un solo elemento:

$$!_X : X \to I.$$

Una vez más, nuestros otros ejemplos principales carecen de esta característica, aunque **Hilb**, convertida en una categoría monoidal usando ⊕, la tiene. Una característica interesante de la mecánica quántica es que hacemos de **Hilb** una categoría monoidal usando ⊗ en vez de ⊕, aunque este último enfoque podría conducir a una categoría más semejante a **Set**.

Podemos aislar las características especiales del producto cartesiano de conjuntos y sus proyecciones, obteniendo una definición que se aplica a cualquier categoría:

Definición 8. *Dados los objetos X y X' en alguna categoría, decimos que un objeto $X \times X'$, equipado con morfismos*

$$X \xleftarrow{p} X \times X' \xrightarrow{p'} X'$$

es un **producto cartesiano** *(o simplemente, un* **producto***) de X por X', si para cada objeto Q y morfismos f y f'*

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ X & & X', \end{tikzcd}$$

existe un único morfismo g: $Q \to X \times X'$, que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "f'"] & \\ X & X \times X' \arrow[l, "p"] \arrow[r, "p'"'] & X'. \end{tikzcd}$$

(Es decir, $f = pg$ y $f' = p'g$). Decimos que una categoría tiene **productos binarios** *si cada par de objetos tiene un producto.*

El producto puede que no exista y puede no ser único, pero cuando existe es único, salvo un isomorfismo canónico. Esto justifica nuestro hablar de 'el' producto de objetos X y Y cuando existe y que lo denotamos como $X \times Y$.

La definición de producto cartesiano, mientras que es absolutamente fundamental, da un poco de miedo a primera vista. Para ilustrar su poder, hagamos algo al respecto: combinar dos morfismos f: $X \to Y$ y f': $X \to Y'$ en un solo morfismo

$$f \times f' : X \times X' \to Y \times Y'.$$

La definición de producto cartesiano dice cómo construir un morfismo de este tipo a partir de un par de morfismos: a saber, morfismos de $X \times X'$ a Y y Y'. Si tomamos a estos como fp y $f'p'$, obtenemos $f \times f'$:

$$\begin{tikzcd} & X \times X' \arrow[dl, "fp"'] \arrow[d, "f \times f'"] \arrow[dr, "f'p'"] & \\ Y & Y \times Y' \arrow[l, "p"] \arrow[r, "p'"'] & Y'. \end{tikzcd}$$

.

Ahora, aislemos las características especiales del conjunto de un elemento:

Definición 9. *Un objeto* 1 *en la categoría* **C** *es* **terminal***, si para cualquier objeto* $Q \in$ **C,** *existe un morfismo único de* Q *a* 1*, que se denota como* $!_Q: Q \to 1$.

Una vez más, un objeto terminal puede no existir y puede no ser único, pero es único, salvo un isomorfismo canónico. Por esta razón podemos hablar de 'el' objeto terminal de una categoría y denotarlo con un símbolo específico, 1.

Hemos introducido el concepto de productos binarios. También se puede hablar de productos n-arios para otros valores de n; pero, una categoría con productos binarios tiene productos n-arios para todo $n \geq 1$, ya que podemos construir a estos como productos binarios iterados. El caso $n = 1$ es trivial, puesto que el producto de un objeto es sólo ese objeto mismo (salvo isomorfismo canónico). El caso restante es $n = 0$. El producto cero-ario de objetos, si existe, es sólo el objeto terminal. Así, tenemos la siguiente definición:

Definición 10. *Una categoría tiene productos finitos si tiene productos binarios y un objeto terminal.*

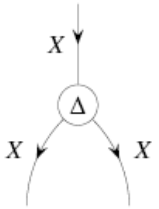
Una categoría con productos finitos siempre se puede configurar como una categoría monoidal eligiendo un producto específico $X \times Y$ como producto tensorial $X \otimes Y$ y elegir un objeto terminal específico como objeto unidad. ¡Toma un poco de trabajo demostrar esto! Una categoría monoidal de este tipo se llama **cartesiana**.

En una categoría cartesiana, podemos 'duplicar y eliminar información'. En general, la definición de productos cartesianos da una manera de combinar dos morfismos $f_1: Q \to X$ y $f_2: Q \to Y$, en un solo morfismo de Q a $X \times Y$. Si tomamos $Q = X = Y$ y a f_1 y f_2 como la identidad, obtenemos el morfismo **diagonal** o **duplicación**:

$$\Delta_X: \boldsymbol{X} \to X \times X.$$

En la categoría **Set,** se puede comprobar que éste aplica cada elemento $x \in X$, al par

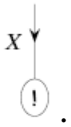
(x, x). En general, podemos sacar la diagonal de la siguiente manera:



Del mismo modo, llamamos a la única asignación al objeto terminal,

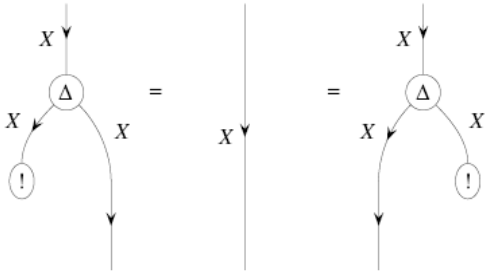
$$!_X : \boldsymbol{X} \to 1,$$

el morfismo **supresión** y lo dibujamos como sigue:



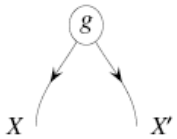
Nótese que dibujamos al objeto unidad como un espacio vacío.

¡Es un hecho fundamental sobre categorías cartesianas, que duplicar algo y luego suprimir cualquier copia, es lo mismo que no hacer nada en absoluto! En los diagramas de cuerdas, esto se expresa como:

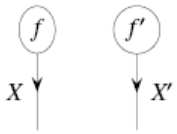


La demostración se deja como un ejercicio para el lector.

Muchas de las características desconcertantes de la teoría quántica, provienen de la no cartesianidad del producto tensorial habitual en **Hilb**. Por ejemplo, en una categoría cartesiana, todo morfismo



en realidad es de la forma

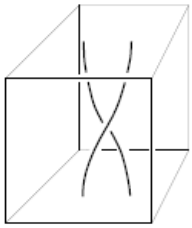


En el caso de **Set**, esto dice que cada punto del conjunto $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}'$ viene de un punto de $\boldsymbol{X}$ y un punto de $\boldsymbol{X}'$. En física, esto diría que cada estado g del sistema combinado $\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{X}'$ se construye mediante la combinación de estados de los sistemas $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{X}'$ $\boldsymbol{X}$. El teorema BELL [19] establece que eso *no* es válido en Teoría Quántica. La razón es que en Teoría Quántica se utiliza la categoría monoidal ¡no cartesiana! **Hilb.**

Además, en Teoría Quántica *no podemos*, libremente, duplicar o eliminar información. WOOTTERS y ZUREK [100] demostraron un teorema preciso a este efecto, centrado en la duplicación: el 'Teorema de No Clonación'. También se puede probar un 'Teorema de No Supresión'. Una vez más, estos resultados dependen del producto tensorial, no cartesiano, en **Hilb**.

2.4 *Categorías Monoidales Trenzadas*

En Física, a menudo hay un proceso que nos permite 'conmutar' dos sistemas moviéndolos uno alrededor del otro. En topología, hay una maraña que describe al proceso de conmutar dos puntos:



.

En Lógica, podemos cambiar el orden de dos proposiciones en una conjunción: la proposición '$\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$' es isomorfa a '$\boldsymbol{Y}$ y $\boldsymbol{X}$'. En Informática, hay un sencillo programa que cambia el orden de dos porciones de datos. Una categoría monoidal en la cual podemos hacer a este tipo de cosas se llama 'trenzada' (Inglés: 'braided')

Definición 11. *una categoría monoidal trenzada consiste en:*

- *una categoría monoidal* **C***,*
- *un isomorfismo natural llamado el* **trenzado** (Inglés: **braiding**)**,** *que asigna a cada par de objetos X, Y* $\in$ **C** *un isomorfismo*

$$b_{X,\,Y}\colon X \otimes Y \to Y \otimes X,$$

tal que, para todo $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in$ **C***, se cumplen las ecuaciones hexagonales:*

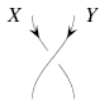
$$
\begin{tikzcd}
 & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[dr, "b_{X,\,Y} \otimes 1_Z"] & \\
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[ur, "a^{-1}_{X,\,Y,\,Z}"] \arrow[d, "b_{X,\,Y \otimes Z}"'] & & (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[d, "a_{Y,\,X,\,Z}"] \\
(Y \otimes Z) \otimes X & & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[dl, "1_Y \otimes b_{X,\,Z}"] \\
 & Y \otimes (Z \otimes X) \arrow[ul, "a^{-1}_{Y,\,Z,\,X}"] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[dr, "1_X \otimes b_{Y,\,Z}"] & \\
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[ur, "a_{X,\,Y,\,Z}"] \arrow[d, "b_{X \otimes Y,\,Z}"'] & & X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[d, "a^{-1}_{X,\,Z,\,Y}"] \\
Z \otimes (X \otimes Y) & & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[dl, "b_{X,\,Z} \otimes 1_Y"] \\
 & (Z \otimes X) \otimes Y \arrow[ul, "a_{Z,\,X,\,Y}"] &
\end{tikzcd}
$$

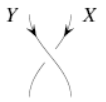
La primera ecuación hexagonal establece que conmutar al objeto X con $Y \otimes Z$, todos a la vez, es igual que conmutarlo con Y y luego con Z (con algunos asocia-

dores usados para mover los paréntesis). La segunda es similar: establece que conmutar $X \otimes Y$ con Z, todos a la vez, es lo mismo que hacerlo en dos pasos.

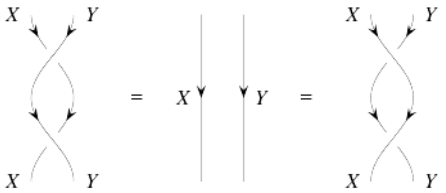
En diagramas de cuerdas, representamos al trenzado $b_{X,\,Y}$: $X \otimes Y \to X \otimes Y$, así:



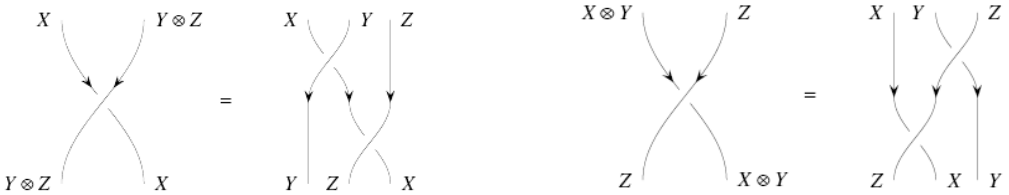
y a su inversa $b^{-1}_{X,\,Y}$ *así:*



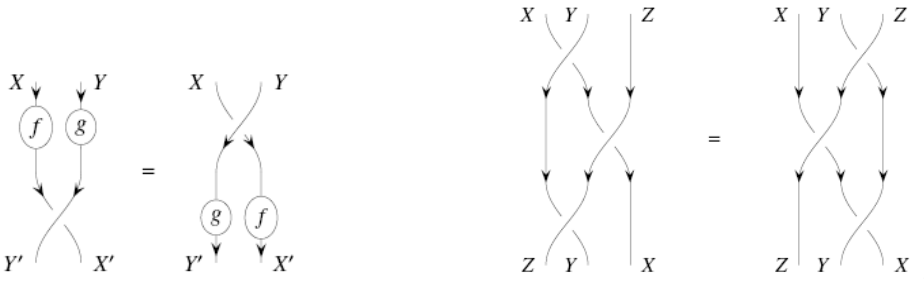
Esta es una buena notación, porque muestra que las ecuaciones establecen que $b_{X,\,Y}$ y $b^{-1}_{X,\,Y}$ son inversas 'topológicamente válidas':



He aquí las ecuaciones hexagonales como diagramas de cuerdas:



Para practicar, te instamos a probar las siguientes ecuaciones:



Si te quedas atascado, aquí hay algunas ideas. La primera ecuación se deduce

de la naturalidad del trenzado. La segunda se llama **ecuación YANG-BAXTER** y se desprende de una combinación de la naturalidad y las ecuaciones hexagonales [56].

A continuación, se dan algunos ejemplos. Puede haber muchas maneras diferentes para dar una categoría monoidal, un trenzado o ninguno. Sin embargo, la mayoría de nuestros ejemplos favoritos vienen con conocidos trenzados 'estándar':

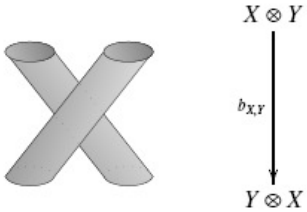
- Automáticamente, cualquier categoría cartesiana se convierte en trenzada y en **Set**, con su producto cartesiano, este trenzado estándar está dado por:

$$b_{X,\,Y}\colon X \times Y \to Y \times X$$
$$(x,\ y) \mapsto (y, x).$$

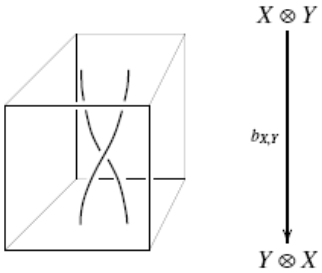
- En **Hilb** con su producto tensorial habitual, el trenzado estándar está dado por:

$$b_{X,\,Y}\colon X \otimes Y \to Y \otimes X$$
$$x \otimes y \mapsto y \otimes x.$$

- La categoría monoidal n**Cob** tiene un trenzado estándar donde $b_{X,\,Y}$ es difeomorfo a la unión disjunta de cilindros $X \times [0, 1]$ y $Y \times [0, 1]$. Para 2**Cob** este trenzado se ve de la siguiente manera cuando X y Y son circunferencias:



- La categoría monoidal $\mathbf{Tang}_k$ tiene un trenzado estándar cuando k ≥ 2. Para k = 2, esto se ve como sigue cuando X y Y son, cada uno, un solo punto:



El ejemplo de $\mathbf{Tang}_k$ ilustra un patrón importante. $\mathbf{Tang}_0$ es sólo una categoría, porque en el espacio 0-dimensional sólo podemos hacer procesos en 'serie': es decir, componer morfismos. $\mathbf{Tang}_1$ es una categoría monoidal, porque en el espacio 1-dimensional también podemos hacer procesos en 'paralelo': es decir, tenso-

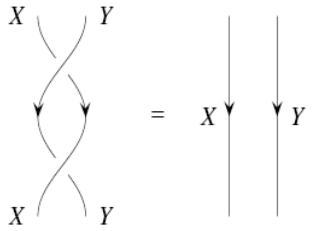
riar morfismos. $\mathbf{Tang}_2$ es una categoría monoidal trenzada, porque en el espacio bidimensional hay espacio para mover un objeto alrededor de otro. A continuación veremos lo que sucede cuando el espacio tiene 3 o más dimensiones.

2.5 *Categorías Monoidales Simétricas*

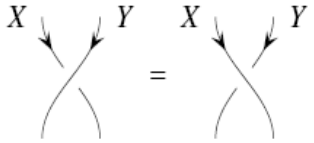
A veces conmutar dos objetos y conmutarlos otra vez, es lo mismo que no hacer nada en absoluto. De hecho, esta situación es muy familiar. Así, las primeras categorías monoidales trenzadas a descubrir, fueron las 'simétricas' [71]:

Definición 12. *Una* **categoría monoidal simétrica** *es una categoría monoidal trenzada donde el trenzado satisface* $b_{X,\,Y} = b^{-1}_{X,\,Y}$.

Así, en una categoría monoidal simétrica,



o, equivalentemente:



Cada categoría cartesiana se convierte automáticamente, en una categoría monoidal simétrica, así que **Set** es simétrica. También es fácil comprobar que **Hilb**, n**Cob** son categorías monoidales simétricas. Así es $\mathbf{Tang}_k$ para $k \geq 3$.

Curiosamente, $\mathbf{Tang}_k$ 'se estabiliza' en $k = 3$: incrementar el valor de k más allá de este valor, sólo da una categoría equivalente a $\mathbf{Tang}_3$. La razón es que podemos desatar todos los nudos en el espacio 4-dimensional; adición de dimensiones extra no tiene ningún efecto real. De hecho, $\mathbf{Tang}_k$ para $k \geq 3$ es equivalente a 1**Cob**. Esto es parte de un conjeturado patrón más grande llamado la 'tabla periódica' de las n-categorías [13]. Algo de esto se muestra en Tabla 3.

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$k = 0$	conjuntos	categorías	2-categorías
$k = 1$	monoides	categorías monoidales	2-categories monoidal
$k = 2$	monoides conmutativos	categorías monoidales trenzadas	2-categorías monoidales trenzadas
$k = 3$	”	categorías monoidales simétricas	2-categorías monoidales silépticas
$k = 4$	”	”	2-categorías monoidales simétricas
$k = 5$	”	”	”
$k = 6$	”	”	”

Tabla 3: Tabla Periódica: descripciones conjeturadas de $(n + k)$-categorías con solamente un j-morfismo $j < k$.

Una n-categoría tiene, no sólo morfismos entre objetos, sino, también, 2-morfismos entre morfismos, 3-morfismos entre 2-morfismos y así sucesivamente hasta n-morfismos. En topología podemos utilizar n-categorías para describir superficies enmarañadas de dimensiones superiores [14] y en física, las podemos utilizar para describir no sólo partículas, sino también, cuerdas y membranas de dimensiones superiores [13], [15]. La piedra de Rosetta que estamos describiendo se refiere sólo a la columna $n = 1$, de la tabla periódica. Así que, probablemente, es sólo un fragmento de una piedra de Rosetta n-categorial, más grande, aun no descubierta.

2.6 *Categorías Cerradas*

En mecánica quántica, se puede codificar a un operador lineal $f: X \to Y$, en un estado quántico, usando una técnica llamada ‘teleportación por compuerta’ [47]. En topología, hay una manera de tomar cualquier maraña $f: X \to Y$ y darle vuelta a la entrada para hacerla parte de la salida. En lógica, podemos tomar una demostración que va de alguna hipótesis X a alguna conclusión Y y convertirla en una demostración que va desde ninguna hipótesis a la conclusión ‘X implica Y’. En infor-

mática, podemos tomar cualquier programa que toma entradas de tipo X y produce salidas de tipo Y y pensar en él como en un nuevo tipo de datos: un 'tipo de función'. El concepto subyacente que unifica todos estos ejemplos es el concepto de 'categoría cerrada'.

Para cualesquiera objetos X y Y en una categoría **C**, hay un conjunto de morfismos de X a Y, denotado $hom(X, Y)$. En una categoría cerrada también hay un *objeto* de morfismos de X a Y, denotado por $X \multimap Y$. (también se utilizan otras notaciones). En este caso hablamos de un 'hom interno', ya que el objeto $X \multimap Y$ habita dentro de **C**, en vez de 'afuera', en la categoría de conjuntos.

Las categorías cerradas fueron introducidas en 1966, por EILENBERG y KELLY [39]. Aunque estos autores fueron capaces de definir una estructura cerrada para cualquier categoría, resulta que el hom interno se entiende más fácilmente para las categorías monoidales. La razón es que cuando nuestra categoría tiene un producto tensorial, es cerrada precisamente cuando los morfismos de $X \otimes Y$ a Z, están en correspondencia natural uno-a-uno con los morfismos desde Y hasta $X \multimap Z$. En otras palabras, es cerrada cuando se tiene un isomorfismo natural

$$hom(X \otimes Y, Z) \cong hom(Y, X \multimap Z) \qquad f \mapsto \tilde{f}.$$

Por ejemplo, en la categoría **Set**, si tomamos $X \otimes Y$ como el producto cartesiano $X \times Y$ entonces $X \multimap Z$ es sólo el conjunto de funciones de X a Z y tenemos una correspondencia uno a uno entre

- las funciones f que comen elementos de $X \times Y$ y escupen elementos de Z

y

- las funciones $\tilde{f}$ que comen elementos de Y y escupen funciones de X a Z.

Esta correspondencia va como sigue:

$$\tilde{f}(x)(y) = f(x, y).$$

Antes de considerar a otros ejemplos, debemos hacer totalmente precisa la definición de 'categoría monoidal cerrada'. Para esto debemos señalar que para cualquier categoría **C**, hay un funtor

$$\mathbf{hom}: \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathrm{Set}\,.$$

Definición 13. *La* **categoría opuesta** $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ *de una categoría* **C** *tiene los mismos ob-*

jetos que **C**, *pero un morfismo* $f\colon x \to y$, *en* $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ *es un morfismo* $f\colon y \to x$ *en* **C** *y el compuesto* gf *en* $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ *es el compuesto* fg *en* **C**.

Definición 14. *Para cada categoría* **C,** *el* **funtor hom**

$$\mathrm{hom}\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$$

envía cualquier objeto $(X, Y) \in \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C}$ *al conjunto* $hom(X, Y)$ *y envía cualquier morfismo* $(f, g) \in \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C}$ a la función

$$\mathbf{hom}(f, g)\colon hom(X , Y) \to hom(X', Y'), \qquad h \mapsto ghf,$$

cuando $f\colon X' \to X$ *y* $g\colon Y \to Y'$ *son morfismos en* **C**.

Definición 15. *Una categoría monoidal* **C** *es* **levo-cerrada** *si hay un* funtor **hom interno**

$$\multimap\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C},$$

junto con un isomorfismo natural c, llamado **encurrymiento** *que asigna a los objetos* $X, Y, Z \in$ C, *una biyección*

$$c_{X, Y, Z}\colon hom(X \otimes Y, Z) \xrightarrow{\sim} hom(X, Y \multimap Z).$$

Es **dextro-cerrada** *si hay un si hay un funtor hom interno, como antes, y un isomorfismo natural:*

$$c_{X, Y, Z}\colon hom(X \otimes Y, Z) \xrightarrow{\sim} hom(Y, X \multimap Z).$$

El término 'encurrymiento' (Inglés: 'currying') se utiliza, principalmente en informática, en atención al trabajo de CURRY [35].

En el resto de esta sección sólo se consideran categorías monoidales *dextro*-cerradas. Por suerte, no hay diferencia real entre levo- y dextro-cerrada para una categoría monoidal trenzada, ya que el trenzado da un isomorfismo $X \otimes Y \cong Y \otimes X$.

En todos nuestros ejemplos, las categorías monoidales serán cerradas; pero, como veremos, una vez más, **Set** es diferente del resto:

- La categoría cartesiana **Set** es cerrada, donde $X \multimap Y$ es sólo el conjunto de funciones de X a Y. En **Set** o cualquier otra categoría cartesiana cerrada, el hom interno $X \multimap Y$, generalmente se denota por Y^X. Para minimizar el número de diferentes notaciones y destacar las analogías entre contextos diferentes, no haremos esto: utilizaremos siempre $X \multimap Y$. Para tratar a **Set** como levo-cerrada, definimos la ver-

sión CURRY (*encurryda*) de f: $X \times Y \to Z$ como antes:

$$\tilde{f}(x)(y) = f(x, y).$$

Para tratarla como dextro-cerrada, en su lugar, la definimos por

$$\tilde{f}(y)(x) = f(x, y).$$

Esto parece un poco incómodo, pero estará bien para los diagramas de cuerdas.

- La categoría monoidal simétrica **Hilb** con su producto tensorial, generalmente es cerrada, con $X \multimap Y$ el conjunto de los operadores lineales de X a Y, convertido en un espacio HILBERT, de forma estándar. En este caso tenemos un isomorfismo

$$X \multimap Y \cong X^* \otimes Y,$$

donde X^* es el espacio dual del espacio HILBERT X, es decir, el conjunto de los operadores lineales f: $X \to \mathbb{C}$, convertido en un espacio HILBERT, de la manera habitual.

- La categoría monoidal $\mathbf{Tang}_k$ ($k \geq 1$) es cerrada. Como con **Hilb**, tenemos

$$X \multimap Y \cong X^* \otimes Y$$

donde X^* es la versión de orientación invertida de X.

- La categoría monoidal simétrica n**Cob** también es cerrada; otra vez

$$X \multimap Y \cong X^* \otimes Y,$$

donde X^* es la $(n - 1)$-variedad X con su orientación invertida.

A excepción de **Set**, todos estos ejemplos son, en realidad, 'compactas'. Esto básicamente significa que $X \multimap Y$ es isomorfo a $X^* \otimes Y$, donde X^* es un objeto llamado el 'dual' de X. Pero para hacer esto preciso, tenemos que definir al 'dual' de un objeto en una categoría monoidal arbitraria. Para hacer esto, generalicemos a partir del caso de **Hilb**.

Como ya se mencionó, cada objeto $X \in$ **Hilb** tiene un dual X^* formado por todos los operadores lineales f: $X \to I$, donde el objeto unidad I es sólo, $\mathbb{C}$. Por tanto, hay un operador lineal

$$e_X: X \otimes X \to I \qquad\qquad x \otimes f \mapsto f(x),$$

llamado la **counidad** de X. Además, el espacio de todos los operadores lineales de X a $Y \in$ Hilb puede ser identificado con $X^* \otimes Y$. Así, También hay un operador lineal llamado la **unidad** de X:

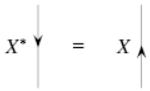
$$i_X\colon I \to X^* \otimes X, \qquad ¢ \mapsto ¢1_X,$$

que envía cualquier número complejo ¢ al correspondiente múltiplo del operador identidad.

La importancia de la unidad y la counidad se aclara si consideramos algunas ideas de FEYNMAN.

En física, si X es el espacio HILBERT de estados internos de alguna partícula, X^* es el espacio HILBERT para la antipartícula correspondiente.

FEYNMAN se dio cuenta de que es esclarecedor considerar a las antipartículas como partículas yendo hacia atrás en el tiempo. Por tanto, dibujamos un cable marcado X^*, como un cable marcado X, pero con una flecha señalando 'hacia atrás' en el tiempo: es decir, hacia arriba en vez de hacia abajo:



(Aquí debemos admitir que la mayoría de los físicos utilizan la convención opuesta, donde el tiempo marcha hacia arriba de la página. Puesto que leemos de arriba hacia abajo, preferimos que el tiempo corra hacia abajo de la página.)

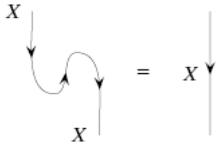
Si dibujamos X^* como a X yendo hacia atrás en el tiempo, podemos dibujar a la unidad, como un **capelo**:

y a la counidad, como una **copa**:

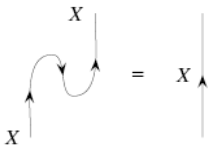
.

En los diagramas FEYNMAN, éstos describen la *creación* y *aniquilación* de pares virtuales partícula-antipartícula.

Luego resulta que la unidad y la counidad satisfacen dos ecuaciones, las **ecuaciones zigzag**:



y



.

La verificación de éstas es un recreativo ejercicio en álgebra lineal, que dejamos al lector. Si escribimos estas ecuaciones como diagramas conmutativos, necesitamos

incluir algunos asociadores y unitores y llegan a ser un poco intimidantes:

$$\begin{tikzcd}
 & X \otimes (X^* \otimes X) \arrow[dr, "a^{-1}_{X,\, X^*,\, X}"] & \\
X \otimes I \arrow[ur, "1_X \otimes i_X"] \arrow[dr, "r_X"'] & & (X \otimes X^*) \otimes X) \arrow[d, "e_X \otimes 1_X"] \\
 & X & I \otimes X \arrow[l, "l_X"]
\end{tikzcd}$$

,

$$\begin{tikzcd}
 & (X^* \otimes X) \otimes X^* \arrow[dr, "a_{X^*,\, X,\, X^*}"] & \\
I \otimes X^* \arrow[ur, "i_X \otimes 1_X"] \arrow[dr, "l_X"'] & & X^* \otimes (X \otimes X^*) \arrow[d, "1_{X^*} \otimes e_X"] \\
 & X^* & X^* \otimes I \arrow[l, "r_{X^*}"]
\end{tikzcd}$$

;

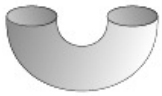
pero, en realidad dicen que los zigzags en los diagramas de cuerdas, pueden ser enderezados.

Esto es particularmente patente en ejemplos como $\mathbf{Tang}_k$ y $n\mathbf{Cob}$. Por ejem-

plo, en 2**Cob**, tomando a X como la circunferencia, la unidad se ve así:

$$I \xrightarrow{i_X} X^* \otimes X \quad ;$$

mientras que la counidad luce como:



$$X \otimes X^* \xrightarrow{e_X} I \quad .$$

En este caso, las identidades zigzag dicen que podemos enderezar a un trozo de tubo cimbrado.

Ahora estamos listos para algunas definiciones:

Definición 16. *Dados objetos X^* y X en una categoría monoidal, llamamos a X^* un* **dextro-dual** *de X y a X un* **levo-dual** *de X^*, si hay morfismos*

$$i_X : I \to X^* \otimes X \qquad y \qquad e_X : X \otimes X^* \to I,$$

llamados la **unidad** *y la* **counidad***, respectivamente, que satisfacen a las ecuaciones zigzag.*

Se puede demostrar que 'el' levo- o dextro-dual de un objeto, es único, salvo isomorfismo canónico. Así, usualmente hablaremos de 'el' dextro- o levo-dual de un objeto, cuando existe.

Definición 17. *Una categoría monoidal* **C** *es* **compacta***, si todos los objetos $X \in$* **C***, tienen tanto levo- como dextro-dual.*

A menudo, se utiliza el término 'autónoma' en lugar de 'compacta'. Muchos autores reservan el término 'compacta' para el caso donde **C** es simétrica o por lo menos trenzada; así, los levo-duales son iguales a los dextro-duales y las cosas se simplifican [42]. Para aumentar la confusión, las categorías monoidales simétricas compactas, a menudo se llaman simplemente, 'categorías cerradas compactas'.

Una explicación parcial para esta última parte de la terminología, es que cualquier categoría monoidal compacta, automáticamente, es cerrada. Por ello, definimos al hom interno en objetos, por

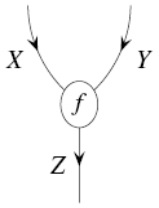
$$X \multimap Y = X^* \otimes Y.$$

Entonces debemos mostrar que la operación * se extiende naturalmente, a un funtor *: **C**→ **C**, por lo que $\multimap$ es, en realidad, un funtor.

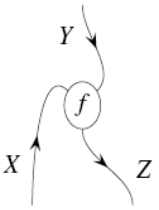
Por último, debemos comprobar que existe un isomorfismo natural

$$hom(X \otimes Y, Z) \cong hom(Y, X^* \otimes Z).$$

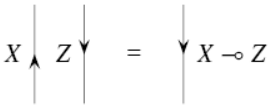
En términos de diagramas de cuerdas, este isomorfismo toma a cualquier morfismo



y tuerce al cable de entrada con la etiqueta X para convertirlo en salida:

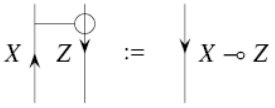


Ahora, en una categoría monoidal compacta, tenemos:



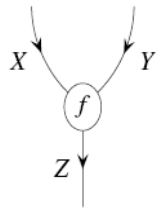
.

Pero, en general, las categorías monoidales cerradas no permiten flechas apuntando hacia arriba. Así que, para éstas, dibujar el hom interno es más que un desafío. Podemos utilizar el mismo estilo de notación mientras añadimos un aderezo –una **gaza**– que une a dos cables:



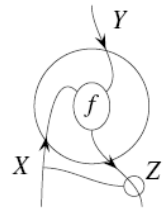
Sólo si la categoría monoidal cerrada es compacta, podemos eliminar la gaza.

Supongamos que estamos trabajando con una categoría monoidal cerrada. Puesto que dibujamos un morfismo f: $X \otimes Y \to Z$ así:



,

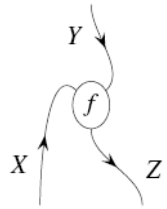
podemos representar su versión encurryda $\tilde{f}: Y \to X \multimap Z$, doblando hacia abajo al cable de entrada X, para hacerlo parte de la salida:



Adviértase que, donde doblamos al cable X, apareció un capelo como este:

.

Las categorías monoidales cerradas, realmente, no tienen un capelo si no son compactas. Entonces, dibujamos una burbuja que envuelve a f y la gaza, que evita que hagamos cualquier manipulación ilegal. En el caso compacta, tanto la burbuja y como la gaza son innecesarios, así podemos dibujar $\tilde{f}$ así:



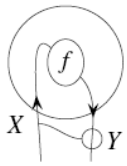
Un caso especial importante de encurrymiento da el **nombre** de un morfismo $f: X \to Y$,

$$\ulcorner f \urcorner : I \to X \multimap Y.$$

Éste se obtiene encurryendo al morfismo

$$f r_x : I \to X \multimap Y.$$

En los diagramas de cuerdas, dibujamos a $\ulcorner f \urcorner$ como sigue:



.

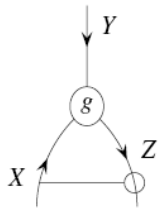
En la categoría **Set**, el objeto unidad es el conjunto de un solo elemento, 1. Así que, un morfismo de este objeto a un conjunto Q, escoge un punto de Q. En particular, el nombre $\ulcorner f \urcorner$: $1 \to X \multimap Y$, elige al elemento de $X \multimap Y$, correspondiente a la función f: $X \to Y$. Más generalmente, en cualquier categoría cartesiana cerrada el objeto unidad es el objeto terminal 1 y un morfismo de 1 a un objeto Q, se llama un **punto** de Q. Así que, incluso en este caso, podemos decir que el nombre de un morfismo f: $X \to Y$ es un punto de $X \multimap Y$.

Para **Hilb** es similar; aunque en este ejemplo es compacta, no cartesiana. En **Hilb**, el objeto unidad es justo $\mathbb{C}$. Así, un morfismo no nulo de I a cualquier espacio HILBERT Q, escoge a un vector no nulo en Q, que podemos normalizar para obtener a un **estado** en Q: es decir, un vector unitario. En particular, el nombre de un morfismo no nulo, f: $X \to Y$, da un estado en $X^* \otimes Y$. Este método de codificación de operadores como estados, es la base de la 'teleportación por compuertas' [47].

El encurrymiento es una biyección, así que también podemos **descurryr**:

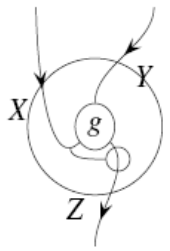
$$c^{-1}_{X,Y,Z}\colon hom(Y, X \multimap Z) \to hom(X \otimes Y, Z), \qquad g \mapsto \underset{\sim}{g}.$$

Puesto que representamos a un morfismo g: $Y \to X \multimap Z$, como:



,

dibujamos su versión 'descurryda' $\underset{\sim}{g}$: $X \otimes Y \to Z$ doblando la salida X hasta convertirla en una entrada:



.

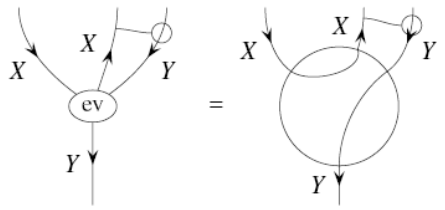
Una vez más, debemos poner una burbuja alrededor de la 'copa' formada cuando doblamos al cable Y, si no estamos en una categoría monoidal compacta.

Un buen ejemplo de descurrymiento es el morfismo **evaluación**:

$$\mathrm{ev}_{X,Y}\colon X \otimes (X \multimap Y) \to Y.$$

Éste se obtiene descurryendo a la identidad $1_{X \multimap Y}\colon (X \multimap Y) \to (X \multimap Y)$.

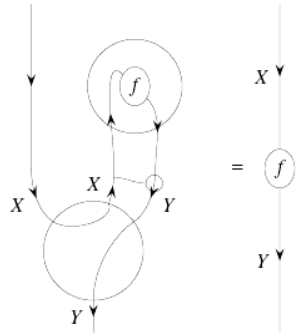
En **Set**, $\mathrm{ev}_{X,Y}$ toma cualquier función de X a Y y la evalúa en cualquier elemento de X, para dar un elemento de Y. En términos de diagramas de cuerdas, el morfismo evaluación luce como:



En cada categoría monoidal cerrada, podemos recuperar a un morfismo, a partir de su nombre, usando evaluación. Más precisamente, el siguiente diagrama es conmutativo:

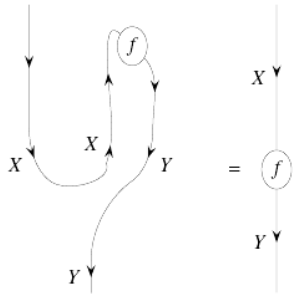
$$\begin{tikzcd}
X \otimes I \arrow[d, "1_X \otimes \ulcorner f \urcorner"'] & X \arrow[l, "r^{-1}"'] \arrow[d, "f"] \\
X \otimes (X \multimap Y) \arrow[r, "\mathrm{ev}_{X,Y}"'] & Y
\end{tikzcd}$$

O, en términos de diagramas de cuerdas:



Dejamos la demostración de esto como un ejercicio. En general, se debe utilizar la naturalidad del encurrymiento. En el caso especial de una categoría monoidal com-

pacta ¡hay una bonita demostración gráfica! Simplemente reviente las burbujas y retire la gaza:



El resultado es consecuencia de una de las identidades zigzag.

En nuestra rápida introducción a los diagramas de cuerdas, no hemos tenido tiempo para ilustrar cómo se convierten estos diagramas en una herramienta poderosa para resolver problemas concretos. Así que, aquí están algunos puntos de partida para seguir estudiando:

- Las representaciones de grupos LIE juegan un papel fundamental en Física Quántica, especialmente en Teoría de Calibración, de Campos. Cada grupo LIE tiene una categoría monoidal simétrica compacta de representaciones finito-dimensionales. En su libro ***Group Theory***, CVITANOVIC [36], desarrolla detalladas descripciones en diagramas de cuerdas, de estas categorías de representación de los grupos LIE clásicos SU(n), SO(n), SU(n) y también de los más 'exóticos', grupos LIE excepcionales. Su libro también ilustra cómo esta tecnología puede usarse para simplificar los cálculos difíciles en Teoría de Calibración, de Campos.
- Los grupos quánticos son una generalización de los grupos que aparecen en física 2d y 3d. La gran diferencia es que un grupo quántico tiene una categoría monoidal *trenzada* compacta de representaciones finito-dimensionales. ***Knots and Physics*** de KAUFFMAN [59], es una excelente introducción a de cómo aparecen los grupos quánticos en Teoría de Nudos y en Física; está lleno de diagramas de cuerdas. Para más detalles sobre grupos quánticos y categorías monoidales trenzadas, ver el libro de KASSEL [58].
- KAUFFMAN y LINS [60] han escrito un hermoso tratamiento por diagramas de cuerdas, de la categoría de representaciones del grupo quántico más simple, $SU_q(2)$. También lo usan para construir algunas famosas invariantes de 3-variedades, asociadas a teorías quánticas topológicas de campos 3d y 4d: las invariantes WITTEN-RESHETIKHIN-TURAEV, TURAEV-VIRO y CRANE-YETTER. En este ejemplo, los diagramas de cuerdas, a menudo, se llaman 'redes espinales q-deformadas' (Inglés: 'q-

deformed spin networks') [91]. Para generalizaciones a otros grupos quánticos, consúltese los textos más avanzados por TURAEV [97] y BAKALOV y KIRILLOV [16]. El ingrediente clave es una clase especial de categorías monoidales trenzadas compactas llamado 'categorías tensoriales modulares'.

- KOCK [64] ha escrito una buena introducción a las teorías quánticas topológicas de campos, 2d, que utiliza métodos diagramáticos para trabajar con 2**Cob**.
- ABRAMSKY, COECKE y colaboradores [2], [3], [4], [30], [32], [33] han desarrollado diagramas de cuerdas como una herramienta para la comprensión de computación quántica. La introducción más fácil es *Kindergarten quantum mechanics* por COECKE [31].

2.7 *Categorías de Dagas*

Nuestra discusión sería tristemente, incompleta sin admitir algo importante: *nada hemos hecho hasta ahora, con espacios Hilbert, usando el producto interno*. Por tanto, no hemos tocado todavía, la esencia de la Teoría Quántica.

Todo lo que hemos dicho sobre **Hilb** se aplica igualmente bien a **Vect**: la categoría de los *espacios vectoriales* finito-dimensionales y los operadores lineales. Tanto **Hilb** como **Vect** son categorías monoidales simétricas compactas. De hecho, estas categorías monoidales simétricas compactas son 'equivalentes' en cierto sentido preciso [72].

Entonces, ¿qué diferencia a **Hilb**? En cuanto a la Teoría de Categorías, lo especial es que podemos tomar al adjunto en el espacio HILBERT, de cualquier operador lineal $f\colon X \to Y$, entre espacios HILBERT finito-dimensionales, consiguiendo un operador $f^{\dagger}\colon Y \to X$. Esta capacidad de 'revertir' morfismos hace de **Hilb** una categoría de daga:

Definición 18. *Una* **categoría de dagas** *es una categoría* **C** *tal que, para cualquier morfismo* $f\colon X \to Y$, *en* **C,** *hay un morfismo específico* $f^{\dagger}\colon Y \to X$ *tal que*

$$(g\,f)^{\dagger} = f^{\dagger}\,g^{\dagger}$$

para cada par de morfismos componibles f *y* g *y, además,*

$$(f^{\dagger})^{\dagger} = f$$

para cada morfismo f.

Equivalentemente, **C** es una categoría de dagas si existe un funtor †: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}^{\mathbf{op}}$, que es la identidad sobre los objetos y satisface $(f^{\dagger})^{\dagger} = f$ para cada morfismo.

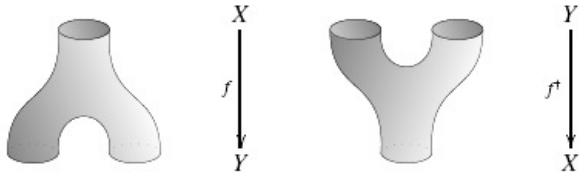
De hecho, todos nuestros ejemplos favoritos de categorías, excepto **Set** se pueden convertir en categorías de dagas:

- Es imposible hacer de **Set** una categoría de dagas, puesto que hay una función del conjunto vacío al conjunto de 1 elemento, pero no al revés.
- La categoría **Hilb** se convierte en una categoría de dagas como sigue. Dado cualquier morfismo $f: X \to Y$, en **Hilb**, hay un morfismo $f^\dagger: Y \to X$, el **adjunto en el espacio HILBERT** de f, definido por

$$\langle f^\dagger \psi, \phi \rangle = \langle \psi, f\phi \rangle$$

para cada $\phi \in X$, $\psi \in Y$.

- Para cualquier k, la categoría $\mathbf{Tang}_k$ se convierte en una categoría de dagas donde se obtiene a $f^\dagger: Y \to X$, reflejando a $f: X \to Y$ en la dirección vertical y luego cambiando la dirección de las flechas que denotan las orientaciones de los arcos y circunferencias.
- Para cualquier n, la categoría n**Cob** se convierte en una categoría de dagas donde se obtiene a $f^\dagger: Y \to X$, intercambiando la entrada y salida de $f: X \to Y$ y, luego, intercambiando la orientación de cada componente conexo de f. Otra vez, una imagen vale por mil palabras:



En aplicaciones a la física, esta operación daga corresponde a 'intercambiar el pasado y el futuro'.

En todas las categorías de dagas, anteriores, la estructura de dagas interactúa de forma agradable con la estructura monoidal y también, cuando existe, con el trenzado. Se puede escribir una lista de axiomas que caracterizan cómo funciona esto [2], [3], [87]. Así, parece que la capacidad de 'revertir' morfismos es otra forma en que las categorías con un sabor quántico, difieren de la categoría de conjuntos y funciones. Esto tiene implicaciones importantes para los fundamentos de la Teoría Quántica [11] y también para la Teoría Quántica Topológica de Campos [13], donde las categorías de dagas parecen ser parte de una historia más grande que involucra 'n-categorías con duales' [14]. Sin embargo, esta historia es aún mal entendida –hay mucho más trabajo que hacer.

3 Lógica

3.1 *Contexto*

Las categorías monoidales simétricas cerradas aparecen, no sólo en Física y Topología, sino también en Lógica. Explicaremos cómo. –Para establecer el escenario, vale la pena esbozar algunas ideas de la lógica del siglo XX.

Los logicistas modernos estudian muchos sistemas de razonamiento al lado de la Lógica Clásica Ordinaria. Por supuesto, incluso la Lógica Clásica viene en diversos grados de fortaleza. Primero está el 'Cálculo Proposicional', que permite razonar con proposiciones abstractas X, Y, Z,... y estos conectivos lógicos:

Conjunción:	y (et)	$\wedge$
Opción:	o (vel)	$\vee$
Implicación:	implica	$\Rightarrow$
Negación:	no	$\neg$
Validación:	válida	$\top$
Invalidación:	falaz	$\perp$

Luego está el 'cálculo de predicados' que también admite variables como x, y, z, …, predicados como P(x) y $Q(x, y, z)$ y los símbolos 'para todo' ($\forall$) y 'existe' ($\exists$), que permiten cuantificar a las variables. También existen sistemas de orden superior que permitan cuantificar a los predicados y así sucesivamente.

Para mantener las cosas simples, nos limitamos principalmente al cálculo proposicional en lo que sigue. Pero incluso aquí ¡hay muchas alternativas a la 'versión clásica'!

Los más estudiados de estos sistemas alternativos son *más débil*es que la lógica clásica: hacen más difícil o incluso imposible de demostrar cosas que normalmente damos por sentadas. Una razón es que algunos logicistas niegan que ciertos principios familiares, sean realmente válidos. Pero también hay razones más sutiles. Una es que estudiar sistemas de reglas de menor fuerza, permite un estudio detallado de, precisamente, cuáles métodos de razonamiento son necesarios para demostrar qué resultados. Otra razón - la que más nos interesa aquí - es que quitar las reglas familiares y luego agregarlas una a una, arroja luz sobre la conexión entre ló-

gica y teoría de categorías.

Por ejemplo, alrededor de 1907, BROUWER [49] empezó a defender al 'intuicionismo. Como parte de esto, levantó dudas sobre la ley del tercero excluido, que establece a una regla que dice que de $\neg \neg X$, deducimos X. Un problema con este principio, es que las demostraciones que lo usan no son 'constructivas'. Por ejemplo, podemos probar por contradicción que una ecuación tiene una solución, pero aún así no dan idea de cómo construir la solución. Para BROUWER, esto significaba que el principio era inválido.

Alguien que crea que la ley del tercero excluido es válida, está obligado a estudiar lógica intuicionística. Pero hay otra razón para el estudio de este sistema. A saber: ¡realmente no perdemos nada desechando la ley del tercero excluido! En cambio, obtenemos una distinción fina: la distinción entre una demostración directa de X y una demostración por contradicción, que produce simplemente $\neg \neg X$. Si no nos importa esta distinción somos libres de ignorarla, pero no pasa nada por tenerla en cuenta.

En la década de 1930, esta idea fue precisada por GÖDEL [45] y GENTZEN [94]. Mostraron que podemos integrar la lógica clásica a la lógica intuicionística. De hecho, encontraron una asignación de cualquier fórmula X en el cálculo proposicional, a una nueva fórmula X°, tal que X es demostrable clásicamente si y sólo si X° es demostrable intuicionísticamente. (Más impresionantemente, esta asignación también funciona para el cálculo de predicados).

Más tarde, todavía otra razón para estar interesado en la lógica intuicionística, llegó a ser evidente: su conexión con teoría de categorías. De una forma muy simple, esta conexión funciona de la siguiente manera. Supongamos que tenemos un conjunto de proposiciones X, Y, Z,... que obedecen a las leyes del cálculo proposicional intuicionístico. Podemos crear una categoría **C** en la que estas proposiciones son objetos y, a lo sumo, hay un morfismo de cualquier objeto X a cualquier objeto Y: un solo morfismo cuando X implica Y y no lo contrario.

Una categoría, con, a lo sumo, un morfismo de cualquier objeto a cualquier otro, se llama un **preorden**. En el cálculo proposicional, a menudo se consideran iguales a dos proposiciones cuando ambas se implican mutuamente. Si hacemos esto, obtenemos un especial tipo de preorden: uno donde los objetos isomorfos son

automáticamente, iguales. Este tipo especial de preorden se llama un **conjunto parcialmente ordenado** o **conjuntopo** (Inglés: **poset**) para abreviar. Los conjuntopos abundan en lógica, precisamente porque ofrecen un marco simple para la comprensión de la implicación.

Si partimos de un conjunto de proposiciones que obedecen al cálculo proposicional intuicionístico, la categoría **C** resultante es mejor que un mero conjuntopo: también es cartesiana, con $X \wedge Y$ como producto de X por Y y $\top$ como objeto terminal! Para ver esto, tenga en cuenta que cualquier proposición Q tiene un único morfismo a $X \wedge Y$ si tiene morfismos a X y a Y. Esto es simplemente una forma elegante de decir que Q implica a $X \wedge Y$, cuando implica a X e implica a Y. También es fácil ver que $\top$ es terminal: cualquier cosa implica a la validez. Mejor aún, la categoría **C** es cartesiana cerrada, con $X \Rightarrow Y$ como el hom interno. La razón es que $X \wedge Y$ implica Z syss Y implica $X \Rightarrow Z$. Esto produce automáticamente la propiedad básica de los hom internos:

$$hom(\mathrm{X} \otimes \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) \cong \mathrm{hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{X} \multimap \mathrm{Z}).$$

En efecto, si el lector está desconcertado por la diferencia entre 'X implica Y' y $X \Rightarrow Y$, ahora podemos explicar esto más claramente: el primero involucra al conjuntopo $hom(X, Y)$ (que tiene un elemento cuando X implica Y y de ninguna otra manera), mientras que el segundo es el hom interno, un objeto en **C**.

Entonces, **C** es un conjuntopo cartesiano cerrado. Pero, también tiene una propiedad más agradable, gracias a la presencia de $\vee$ y $\perp$. Hemos visto que $\wedge$ y $\top$ hacen de **C,** una categoría cartesiana; $\vee$ y $\perp$ satisfacen exactamente, análogas reglas, pero con las implicaciones revertidas y, así, que hacen que $\mathbf{C}^{op}$ sea cartesiana ¡Y eso es todo! En particular, la negación no da nada más, ya que podemos definir $\neg X$ como $X \Rightarrow \perp$ y, luego, siguen todas sus propiedades intuicionísticamente válidas. Así, el tipo de categoría que obtenemos del cálculo proposicional intuicionístico, tomando a las proposiciones como objetos y a las implicaciones como morfismos, es precisamente, un **álgebra HEYTING**: conjuntopo cartesiano cerrado **C** tal que $\mathbf{C}^{op}$ también es cartesiano.

Categorías y Transcripción Inter-Física-Topología-Lógica-Informática

HEYTING, un estudiante de BROUWER, introdujo los álgebras HEYTING, en lógica intuicionística, antes de que las categorías, ni siquiera, fueran descubiertas. Así, que usó un lenguaje muy diferente para definirlos. Sin embargo, el enfoque teórico-categorial de los álgebras HEYTING ilustra la conexión entre categorías cartesianas cerradas y lógica. También proporciona más evidencia de que el descarte de la ley del tercero excluido es un ensayo interesante.

Ya hemos explicado los conceptos básicos de categorías cartesianas cerradas pero, no dicho lo que pasa cuando la *opuesta* de una categoría, también es cartesiana; en las secciones siguientes, daremos un paso drástico y limitaremos nuestra discusión de la lógica, aún más. Desechamos a $\vee$ y a $\perp$ y nos concentramos sólo en el fragmento del cálculo proposicional que involucra a $\wedge$, $\top$ y a $\Rightarrow$.

Hasta aquí, resulta que, hay cosas interesantes que decir –y formas interesantes de modificar las reglas habituales. Esto será el tema principal de las secciones a venir. Pero, para configurar el escenario, tenemos que decir algo sobre la Teoría de la Demostración.

Teoría de la Demostración es la rama de la Lógica Matemática que trata a las demostraciones como entidades matemáticas, dignas de estudio por derecho propio. Nos permite profundizar en el cálculo proposicional estudiando no sólo *si* alguna hipótesis *X*, implica *o no* alguna conclusión *Y*, sino a todo el *conjunto de las demostraciones* que llevan de *X* a *Y*. Esto equivale a estudiar no sólo conjuntopos (o preórdenes), sino categorías que permiten varios morfismos desde un objeto a otro.

En el enfoque por HILBERT, de una demostración, hubo muchos axiomas y sólo una regla para deducir nuevos teoremas: *modus ponen*s, que dice que de *X* y '*X* implica *Y*' podemos deducir Y. La mayor parte de la moderna Teoría de la Demostración, se centra en otro enfoque, el 'Cálculo Secuental', debido a GENTZEN [94]. En este enfoque hay pocos axiomas, pero muchas reglas de inferencia.

Una excelente introducción al cálculo secuental es el libro *Proof and Types* de GIRARD, LAFONT y TAYLOR, disponible gratuitamente en línea [44]. Aquí debemos contentarnos con algunas observaciones incompletas. Un 'secuente' es algo como esto:

$$X_1,\ldots, X_m \vdash Y_1,\ldots, Y_n$$

donde X_i y Y_j son proposiciones. Leemos este secuente entendiendo que *todas* las proposiciones X_i, tomadas en conjunto, pueden ser usadas para probar al menos *una* de las proposiciones Y_j. Este convenio de extraño parecer, da al cálculo secuental, una buena simetría, como pronto veremos.

En el cálculo secuental, una 'regla de inferencia' es algo que produce nuevos secuentes a partir de los viejos. Por ejemplo, aquí está la regla de **levo-debilitamiento**:

$$\frac{X_1,\ldots, X_m \vdash Y_1,\ldots,Y_n}{X_1,\ldots, X_m, A \vdash Y_1,\ldots,Y_n}.$$

Esto dice que del secuente por encima de la línea podemos conseguir al secuente por debajo de la línea: podemos agregar la proposición extra A, sin problemas. Gracias al convenio de extraño parecer, ya mencionado, esta regla tiene una versión en imagen especular llamada de **dextro-debilitamiento**:

$$\frac{X_1,\ldots, X_m \vdash Y_1,\ldots,Y_n}{X_1,\ldots, X_m \vdash Y_1,\ldots,Y_n, A}.$$

De hecho, toda configuración GENTZEN tiene esta simetría especular. Por ejemplo, la regla llamada de **levo-contracción**:

$$\frac{X_1,\ldots, X_m, A, A \vdash Y_1,\ldots,Y_n}{X_1,\ldots, X_m, A \vdash Y_1,\ldots,Y_n},$$

tiene una contraparte especular llamada de **dextro-contracción**:

$$\frac{X_1,\ldots, X_m \vdash Y_1,\ldots,Y_n, A, A}{X_1,\ldots, X_m \vdash Y_1,\ldots,Y_n, A}.$$

Así mismo, esta regla para la conjunción 'y':

$$\frac{X_1,\ldots, X_m, A \vdash Y_1,\ldots,Y_n}{X_1,\ldots, X_m, A \wedge B \vdash Y_1,\ldots,Y_n},$$

tiene una contraparte especular para la opción 'o':

$$\frac{X_1,\ldots, X_m \vdash Y_1,\ldots,Y_n, A}{X_1,\ldots, X_m \vdash Y_1,\ldots,Y_n, A \vee B}.$$

Logicistas, ahora, se dan cuenta de que esta simetría especular puede ser entendida en términos de la dualidad entre una categoría y su opuesta.

GENTZEN utiliza secuentes para escribir reglas de inferencia para el cálculo

proposicional clásico y también, para el cálculo de predicados clásico. Ahora, en estas formas de lógica se tiene

$$X_1,\ldots, X_m \vdash Y_1,\ldots, Y_n$$

si y sólo si

$$X_1 \wedge \ldots \wedge X_m \vdash Y_1 \vee \ldots \vee \mathrm{Y}_n.$$

Entonces, ¿por qué GENTZEN usa secuentes con una *lista* de proposiciones a cada lado del símbolo $\vdash$, en vez de sólo una simple proposición?

La razón es que esto permite usar reglas de inferencia que tienen la 'propiedad subformular'. Ésta determina que cada proposición en el secuente por encima de la línea aparece como parte de una proposición en el secuente debajo de la línea. Así, una prueba construida a partir de tales reglas de inferencia, se convierte en un 'árbol' donde todas las proposiciones más arriba del árbol son subformulas de las de abajo. Esta idea tiene consecuencias de gran alcance.

Por ejemplo, en 1936 ¡GENTZEN pudo demostrar la consistencia de los axiomas PEANO, de la aritmética! Su prueba esencialmente, utiliza inducción sobre los árboles (los lectores familiarizados con el Segundo Teorema GÖDEL, de Incompleción, deben de reasegurarse de que este tipo de inducción no se puede realizar en la aritmética PEANO).

La regla más famosa que *no tiene* la propiedad subformular es la 'regla de supresión':

$$\frac{X_1,\ldots, X_m \vdash Y_1,\ldots,\mathrm{Y}_k, A \qquad X_{m+1},\ldots, X_n, A \vdash Y_{k+1},\ldots,\mathrm{Y}_\ell}{X_1,\ldots, X_n \vdash Y_1,\ldots,\mathrm{Y}_\ell}.$$

De los dos secuentes en la parte superior, la regla de supresión nos da el secuente de abajo. Tenga en cuenta que el paso intermedio A, no aparece en el secuente de abajo. Es 'suprimido'. Así, la regla de supresión carece de la propiedad subformular. Pero, uno de los grandes logros de GENTZEN, fue demostrar que cualquier demostración en el cálculo proposicional (o, incluso, en el de predicados) clásico que se pueda hacer *con* la regla de supresión, también se puede hacer *sin* ella. Esto se llama 'eliminación de la supresión'.

Gentzen escribió también reglas de inferencia adecuadas para los cálculos proposicionales y de predicados intuicionísticos. Estas reglas carecen de la simetría

especular del caso clásico. Pero en la década de 1980, esta simetría fue restablecida por el descubrimiento por GIRARD de la 'Lógica Lineal' [43].

La Lógica Lineal permite hacer un seguimiento de cuantas veces utilizamos una premisa dada, para llegar a una conclusión determinada. Para lograr esto, GIRARD introdujo algunos nuevos conectivos lógicos. Para empezar, él introdujo conectivos 'lineales' denotados por $\otimes$ y $\multimap$ y una constante lógica denotada por I. Estos actúan un poco como $\wedge$, $\Rightarrow$ y $\top$. Sin embargo, cumplen las reglas correspondientes a una categoría monoidal simétrica en lugar de una categoría cartesiana cerrada. En particular, de X podemos probar ni $X \otimes X$ ni I. Así, no podemos libremente 'duplicar' y 'borrar' proposiciones usando estos nuevos conectivos. Esto se refleja en el hecho de que la lógica lineal descarta las reglas GENTZEN, de contracción y de debilitamiento.

Por sí mismo, esto puede parecer insoportablemente restrictivo. Sin embargo, GIRARD también mantuvo a los conectivos $\wedge$, $\Rightarrow$ y $\top$ en su sistema, satisfaciendo las normas usuales. Introdujo una operación llamada 'exponencial' !, que convierte a una proposición X en una 'colección arbitraria de copias de X'. Así, por ejemplo, de $!X$, podemos probar 1 y X y $X \otimes X$ y $X \otimes X \otimes X$ y así sucesivamente.

La lógica lineal, en su plenitud, tiene aún más conectivos de los que hemos descrito aquí. A primera vista parece barroca y peculiar. También viene en versiones clásica e intuicionística. Pero, *al igual que la lógica clásica puede ser embutida en la lógica intuicionística, la lógica intuicionística puede ser embutida en lógica lineal intuicionística* [43]. Así, no perdemos ningún poder deductivo. En cambio, adquirimos la capacidad de hacer distinciones más finas.

En lo que sigue, discutimos el fragmento de lógica lineal intuicionística que involucra sólo a $\otimes$, $\multimap$ e I. Esto se llama 'lógica lineal intuicionística multiplicativa' [48], [82]. Resulta ser el sistema de lógica conveniente para categorías monoidales simétricas cerradas –ni más ni menos.

3.2 *Demostraciones como Morfismos*

En Sección 2 se describen categorías con diferente cantidad de estructuras adicionales, a partir de categorías puras y simples y elaborando nuestro camino hasta

categorías monoidales, categorías monoidales trenzadas, categorías monoidales simétricas y así sucesivamente. Nuestro tratamiento sólo arañó la superficie de una taxonomía enormemente rica. De hecho ¡cada tipo de categoría, con estructuras adicionales, corresponde a un sistema lógico con sus propias reglas de inferencia!

Para ver esto, pensaremos en *proposiciones* como *objetos* en alguna categoría y en *demostraciones* como dando *morfismos*. Supongamos que X y Y son proposiciones. Entonces, podemos pensar en una demostración que parte de la hipótesis X y lleva a la conclusión Y, como dando un morfismo $f\colon X \to Y$. (en Sección 3.3 veremos que un morfismo es en realidad una clase de equivalencia de demostraciones –pero, por ahora, vamos a pulirnos sobre este tema).

Escribamos $X \vdash Y$ cuando, a partir de admitir X, hay una demostración que lleva a la conclusión Y. Una regla de inferencia es una manera de obtener nuevas demostraciones de las viejas. Por ejemplo, en casi todos los sistemas lógicos, si hay una demostración que conduce de X a Y y una demostración de Y a Z, entonces hay una demostración que conduce de X a Z. Escribimos esta regla de inferencia de la siguiente manera:

$$\frac{X \vdash Y \qquad Y \vdash Z}{X \vdash Z} \quad .$$

Podemos llamar a esto, **regla de supresión**, ya que nos permite 'suprimir' al paso intermedio Y. Es un caso especial de la regla GENTZEN, de supresión, mencionada en la sección anterior. Debería recordarnos a la composición de morfismos en una categoría: si tenemos un morfismo $f\colon X \to Y$ y un morfismo $g\colon Y \to Z$, obtenemos un morfismo $g\,f\colon X \to Z$.

Además, en casi todos los sistemas de lógica hay una demostración que conduce de X a X. Podemos escribir esto como una regla de inferencia que comienza con *nada* y concluye la existencia de una demostración de X a partir de X:

$$\frac{}{X \vdash X} \quad .$$

Esta regla debe recordarnos que todos los objetos en una categoría tienen un morfismo identidad: para cualquier objeto X, obtenemos automáticamente, un morfismo $1_X\colon X \to X$. Ciertamente, esta regla, a veces, se llama la **regla de identidad**.

Si seguimos esta línea de pensamiento, podemos tomar la definición de una categoría monoidal simétrica cerrada y extraer un conjunto de reglas de inferencia.

Cada regla es una manera de conseguir nuevos morfismos desde lo viejo en una categoría monoidal simétrica cerrada. Existen varias maneras superficialmente diferentes, pero en última instancia, equivalentes, para el listado de estas reglas. Aquí hay una:

$$\frac{}{X \vdash X}\ (\mathrm{i}) \qquad \frac{X \vdash Y \qquad Y \vdash Z}{X \vdash Z}\ (\circ)$$

$$\frac{W \vdash X \qquad Y \vdash Z}{W \otimes Y \vdash X \otimes Z}\ (\otimes) \qquad \frac{W \vdash (X \otimes Y) \otimes Z}{W \vdash X \otimes (Y \otimes Z)}\ (\mathrm{a})$$

$$\frac{X \vdash I \otimes Y}{X \vdash Y}\ (\mathrm{l}) \qquad \frac{X \vdash Y \otimes I}{X \vdash Y}\ (\mathrm{d})$$

$$\frac{W \vdash X \otimes Y}{W \vdash Y \otimes X}\ (\mathrm{b}) \qquad \frac{X \otimes Y \vdash Z}{Y \vdash X \multimap Z}\ (\mathrm{c}) \quad .$$

Las líneas dobles significan que la regla inversa también se cumple.

Hemos dado una marca a cada regla, escrita a la derecha entre paréntesis. Como ya se ha explicado, las reglas (i) y ($\circ$) provienen de la presencia de morfismos identidad y composición en cualquier categoría. Las reglas ($\otimes$), (a), (l) y (d) provienen del tensoriado, el asociador y los levo- y dextro-unitores en una categoría monoidal. La regla (b) viene del trenzado en una categoría monoidal trenzada y la regla (c) proviene del encurrymiento en una categoría monoidal cerrada.

Ahora, la gran pregunta: *¿Qué significa todo esto en términos de lógica?* Estas normas describen a un pequeño fragmento del cálculo proposicional. Para ver esto, deberíamos leer al conectivo $\otimes$ como 'y', al conectivo $\multimap$ como 'implica' y a la proposición I como 'válida'.

Con esta interpretación, la regla (c) dice que podemos volver una demostración que lleva de la hipótesis 'Y y X' a la conclusión Z en una demostración desde X a 'Y implica Z'. También dice que podemos hacer lo contrario. Esto es válido en lógica clásica, intuicionística y lineal y así son todas las otras reglas. Las reglas (a) y (b) dicen que 'y' es asociativa y conmutativa. La regla (l) dice que cualquier demostración que conduce de la suposición X a la conclusión 'válida y Y' se puede convertir a una demostración que conduce de X a Y y viceversa. La regla (d) es similar.

¿Qué hacemos con estas reglas? ¡Las utilizamos para construir 'deduccio-

nes'!

He aquí, un ejemplo sencillo:

$$\dfrac{\dfrac{}{X \multimap Y \vdash X \multimap Y}\,(\mathrm{i})}{X \otimes (X \multimap Y) \vdash Y}\,(\mathrm{c}^{-1}).$$

Primero utilizamos la regla de identidad y luego, la inversa de la regla de encurrymiento. Al final, obtenemos

$$X \otimes (X \multimap Y) \vdash Y.$$

Esto debería recordarnos los morfismos evaluación que tenemos en una categoría monoidal cerrada:

$$\mathrm{ev}_{XY}\colon X \otimes (X \multimap Y) \to Y.$$

En términos lógicos, el punto es que podemos probar Y de X y 'X implica Y'. Este hecho viene en práctica tan a menudo, que provoca abreviar la deducción anterior como una regla de inferencia extra –una regla derivada de nuestra lista básica:

$$\dfrac{}{X \otimes (X \multimap Y) \vdash Y}\,(\mathrm{ev}).$$

Esta regla se denomina **modus ponens** o **regla de separación**.

En general, una deducción es un árbol construido a partir de reglas de inferencia. Cuando utilizamos las reglas ($\circ$) ó ($\otimes$) salen ramas. Aquí hay un ejemplo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(A \otimes B) \otimes C \vdash A \otimes (B \otimes C)}\,(\mathrm{i})}{(A \otimes B) \otimes C \vdash A \otimes (B \otimes C)}\,(\mathrm{a}) \qquad A \otimes (B \otimes C) \vdash D}{(A \otimes B) \otimes C \vdash D}\,(\circ).$$

De nuevo, podemos abreviar esta deducción como una regla derivada. De hecho, esta regla es reversible:

$$\dfrac{A \otimes (B \otimes C) \vdash D}{(A \otimes B) \otimes C \vdash D}\,(\alpha).$$

Para dar un ejemplo más sustancial, supongamos que queremos demostrar que

$$(X \multimap Y) \otimes (Y \multimap Z) \vdash X \multimap Z.$$

La deducción de esto, no cabría en la página si no usamos nuestras abreviaturas:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X \otimes (X \multimap Y) \vdash Y}\,(\mathrm{ev}) \qquad \dfrac{}{(Y \multimap Z) \vdash (Y \multimap Z)}\,(\mathrm{i})}{(X \otimes (X \multimap Y)) \otimes (Y \multimap Z) \vdash Y \otimes (Y \multimap Z)}\,(\otimes) \qquad \dfrac{}{Y \otimes (Y \multimap Z) \vdash Z}\,(\mathrm{ev})}{(X \otimes (X \multimap Y)) \otimes (Y \multimap Z) \vdash Z}}{X \otimes ((X \multimap Y) \otimes (Y \multimap Z)) \vdash Z)}\,(\alpha^{-1})}{(X \multimap Y) \otimes (Y \multimap Z) \vdash (X \multimap Z)}\,(\mathrm{c})$$

Puesto que cada una de las reglas usadas en esta deducción vienen de una manera de conseguir nuevos morfismos a partir de otros en una categoría monoidal cerrada (no hemos utilizado nunca, el trenzado), se deduce que en cada una de tales categorías, tenemos morfismos internos de composición:

$$\bullet_{XYZ} : (X \multimap Y) \otimes (Y \multimap Z) \to X \multimap Z.$$

Éstos juegan el mismo papel para el hom interno que la composición ordinaria

$$\circ\colon hom(X\,,Y) \times hom(Y\,,Z) \to hom(X\,,Z),$$

juega para el hom ordinario.

Podemos seguir haciendo más deducciones en este sistema de lógica; pero, lo realmente interesante, es lo que omite. Para empezar, omite el conectivo 'o' y la proposición 'falaz'. También omite dos reglas de inferencia que normalmente damos por sentadas –a saber, la **contracción:**

$$\dfrac{X \vdash Y}{X \vdash Y \otimes Y}\,(\Delta)$$

y el **debilitamiento**:

$$\dfrac{X \vdash Y}{X \vdash I}\,(!),$$

que están estrechamente relacionadas a la duplicación y al borrado en una categoría cartesiana. La omisión de estas reglas es una característica distintiva de la lógica lineal [43]. La palabra 'lineal' debería de recordarnos a la categoría **Hilb**. Como se señala en la sección 2.3, esta categoría con su producto tensorial habitual, es no cartesiana, así que no permite la duplicación ni el borrado. Pero, ¿qué significa omitir estas reglas, *en términos de lógica*?

La Lógica Ordinaria se ocupa de proposiciones, así que hemos estado considerando al anterior sistema de lógica, de la misma manera. La Lógica Lineal se ocupa no sólo de las proposiciones, sino también de otros recursos –por ejemplo, las cosas físicas. A diferencia de las proposiciones en la lógica ordinaria, normalmente no podemos duplicar o borrar a estos otros recursos. En la lógica clásica, si sabe-

mos que una proposición X es válida, podemos usar a X muchas o pocas veces según queramos cuando tratamos de probar una proposición Y. Pero si tenemos un vaso de leche, no podemos usarla para hacer pasteles y luego, usarla nuevamente, para hacer mantequilla. Ni podemos hacerla desaparecer sin dejar rastro: incluso, si la vertemos por el desagüe, tiene que ir a algún lugar.

De hecho, estas ideas son familiares en Química. Considere lo siguiente:

H_2 = una molécula de hidrógeno,
O_2 = una molécula de oxígeno,
H_2O = una molécula de agua.

Podemos quemar hidrógeno, combinando una molécula de oxígeno con dos de hidrógeno para obtener dos moléculas de agua. Un teorizante de categorías podría describir esta reacción como un morfismo:

$$f\colon O_2 \otimes (H_2 \otimes H_2) \to H_2O \otimes H_2O.$$

Un logicista lineal podría escribir:

$$O_2 \otimes (H_2 \otimes H_2) \vdash H_2O \otimes H_2O,$$

para indicar la existencia de un tal morfismo. Pero, no podemos duplicar o borrar moléculas, así que, por ejemplo

$$H_2 \nvdash H_2 \otimes H_2$$

y

$$H_2 \nvdash I,$$

donde I es la unidad del producto tensorial: no yodo, sino 'ninguna molécula, en absoluto'.

En definitiva, las reacciones químicas ordinarias son morfismos en una categoría monoidal simétrica, cuyos objetos son colecciones de moléculas. Como los químicos normalmente lo conciben, esta categoría no es cerrada. Por tanto, obedece a un sistema de lógica aún más limitado que el que hemos estado discutiendo, un sistema que carece del conectivo $\multimap$. Para conseguir una categoría cerrada –en realidad, una compacta– conviene recordar a uno de los grandes descubrimientos de la física del siglo XX: la *antimateria*. Esto es nos permite definir $Y \multimap Z$ como un 'anti-Y y Z':

$$Y \multimap Z = Y^* \otimes Z.$$

Así se cumple la regla de encurrymiento:

$$\frac{Y \otimes X \vdash Z}{X \vdash Y^* \otimes Z}.$$

Muchos químicos no piensan en antimateria muy a menudo –pero, los físicos de partículas, sí. No acostumbran usar la notación de lógica lineal o de teoría de categorías, pero ellos saben perfectamente bien, que ya que un neutrino y un neutrón pueden chocar y transformarse en un protón y un electrón:

$$v \otimes n \vdash p \otimes e,$$

Entonces un neutrón puede convertirse en un antineutrino junto con un protón y un electrón:

$$n \vdash v^* \otimes (p \otimes e).$$

Esto es un espécimen de la regla de encurrymiento, regla (c).

3.3 *Teorías Lógicas a partir de Categorías*

Hemos esbozado cómo surgen naturalmente, diferentes sistemas lógicos, de diferentes tipos de categorías. Para ilustrar esta idea, hemos introducido un sistema lógico con reglas de inferencia que provienen de maneras de conseguir nuevos morfismos a partir de otros, en una *categoría monoidal simétrica cerrada*. Se podría sustituir a muchos otros tipos de categorías aquí y tener otros sistemas lógicos.

Para precisar la conexión entre Teoría de Demostración y Teoría de Categorías, ahora describimos una receta para conseguir una teoría lógica de cualquier categoría monoidal simétrica cerrada. Para ello, ahora usaremos $X \vdash Y$ para designar al *conjunto* de demostraciones –o. en realidad, las clases de equivalencia de demostraciones– que conducen a la conclusión Y, de la suposición X. Este es un cambio de perspectiva. Anteriormente escribiríamos $X \vdash Y$ cuando este conjunto de pruebas era no vacío; de lo contrario escribiríamos $X \nvdash Y$. La ventaja de tratar a $X \vdash Y$ como un conjunto, es que este conjunto es precisamente, lo que llamaría un teorizante de categorías $hom(X, Y)$: un conjunto de morfismos en una categoría.

Si denotamos por $X \vdash Y$ a un conjunto de morfismos, una regla de inferencia se convierte en una función de un producto de conjuntos de morfismos, a un único conjunto de morfismos. Por ejemplo, la regla de supresión

$$\frac{X \vdash Y \qquad Y \vdash Z}{X \vdash Z}\ (\circ)$$

se convierte en otra forma de hablar de la función composición

$$\circ_{XYZ}\colon hom(X\,,Y) \times hom(Y,Z) \to hom(X\,,Z);$$

mientras que la regla de identidad

$$\frac{}{X \vdash X}\ (\mathrm{i})$$

se convierte en otra forma de hablar de la función

$$i_X\colon 1 \to hom(X\,,X),$$

que envía al único elemento del conjunto 1, al morfismo identidad de X. (Nota: el conjunto 1 es un producto *cero-uple* de conjuntos de morfismos.)

A continuación, si consideramos que las reglas de inferencia son ciertas funciones de productos de conjuntos de morfismos, a conjuntos de morfismos, las deducciones se convierten en funciones más complicadas del mismo tipo, construidas a partir de estos básicos. Por ejemplo, esta deducción:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{X \otimes I \vdash X \otimes I}\ (\mathrm{i})}{X \otimes I \vdash X}\ (\mathrm{d}) \qquad \dfrac{}{Y \vdash Y}\ (\mathrm{i})}{(X \otimes I) \otimes Y \vdash X \otimes Y}\ (\otimes)$$

especifica a una función de 1 a $hom((X \otimes I) \otimes Y, X \otimes Y)$, construida a partir de las funciones básicas indicadas por las etiquetas en cada paso. Esta deducción:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{(X \otimes I)\otimes Y \vdash (X \otimes I)\otimes Y}\ (\mathrm{i})}{(X \otimes I)\otimes Y \vdash X \otimes (I \otimes Y)}\ (\mathrm{a}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{I \otimes Y \vdash I \otimes Y}\ (\mathrm{i})}{I \otimes Y \vdash Y}\ (\mathrm{d}) \qquad \dfrac{}{X \vdash X}\ (\mathrm{i})}{X \otimes (I \otimes Y) \vdash X \otimes Y}\ (\otimes)}{(X \otimes I)\otimes Y \vdash X \otimes Y}\ (\circ)$$

da otra función de 1 a $hom((X \otimes I) \otimes Y, X \otimes Y)$.

Si consideramos que las deducciones dan funciones de esta manera, se plantea la cuestión de cuándo dos de estas funciones son iguales. En el ejemplo que acabamos de mostrar, la ecuación triangular en la definición de categoría monoidal (Definición7):

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes I) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\,I,\,Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes 1_Y"'] & & X \otimes (I \otimes Y) \arrow[dl, "1_X \otimes l_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

,

dice que estas dos funciones *son* iguales. En efecto, la ecuación triangular es precisamente la afirmación de que ¡estas dos funciones coinciden! (Dejamos esto como un ejercicio para el lector.)

Así que: aunque dos deducciones puedan parecer muy diferentes, pueden dar la misma función de un producto de conjuntos de morfismos a un conjunto de morfismos, si exigimos que estos sean conjuntos de morfismos en una categoría monoidal simétrica cerrada. Por esta razón consideramos a $X \multimap Y$, como a un conjunto de *clases de equivalencia* de demostraciones, en vez de demostraciones: nos obliga nuestro deseo de usar teoría de categorías. Podríamos conseguir todo esto utilizando una 2-categoría con demostraciones como morfismos y 'equivalencias entre demostraciones' como 2-morfismos [84]. Esto nos llevaría más a la derecha en la tabla periódica (Tabla 3). Pero permítasenos contenernos y hacer algunas definiciones que formalizan lo que hemos hecho hasta el momento.

De ahora en adelante, llamaremos a los objetos X, Y,... 'proposiciones', aunque hemos visto que pueden representar recursos más generales. Además, puramente en aras de la brevedad, usamos el término 'demostración' que significa 'clase de equivalencia de demostraciones. La relación de equivalencia debe ser lo suficientemente gruesa como para que se cumplan las ecuaciones en las siguientes definiciones:

Definición 19. *Una* **teoría monoidal cerrada** *consiste de:*

- *Una colección de* **proposiciones**. *La colección debe contener una proposición* I *y, si* X *y* Y *son proposiciones, entonces* $X \otimes Y$ *y* $X \multimap Y$, *también lo son.*
- *Para cada par de proposiciones* X, Y, *un conjunto* $X \vdash Y$ *de* **demostraciones** *que llevan de* X *a* Y. *Si* $f \in X \vdash Y$, *esto se escribe* $f\colon X \to Y$.
- Ciertas funciones, escritas como **reglas de inferencia:**

$$\frac{}{X \vdash X}\ (\mathrm{i}) \qquad \frac{X \vdash Y \qquad Y \vdash Z}{X \vdash Z}\ (\circ)$$

$$\frac{W \vdash X \qquad Y \vdash Z}{W \otimes Y \vdash X \otimes Z}\ (\otimes) \qquad \frac{W \vdash (X \otimes Y) \otimes Z}{W \vdash X \otimes (Y \otimes Z)}\ (\mathrm{a})$$

$$\frac{X \vdash I \otimes Y}{X \vdash Y}\ (\mathrm{l}) \qquad \frac{X \vdash Y \otimes I}{X \vdash Y}\ (\mathrm{d})$$

$$\frac{X \otimes Y \vdash Z}{Y \vdash X \multimap Z}\ (\mathrm{c}).$$

Una línea doble significa que la función es invertible. Así, por ejemplo, para cada trío X, Y, Z, tenemos una función

$$\circ_{X,Y,Z}\colon (X \vdash Y) \times (Y \vdash Z) \to (X \vdash Z)$$

y una biyección

$$c_{X,Y,Z}\colon (X \otimes Y \vdash Z) \to (Y \vdash X \multimap Z).$$

- *Algunas ecuaciones que deben ser obedecidas por las reglas de inferencia. Las reglas de inferencia* ($\circ$) *y* (i) *deben obedecer a las ecuaciones que describen a la asociatividad y las leyes de la levo- y dextro-unidad. La regla* ($\otimes$) *debe obedecer a una ecuación que diga que es un funtor. Las reglas* (a), (l), (d), *y* (c) *deben obedecer a las ecuaciones que dicen que son transformaciones naturales. Las reglas* (a), (l), (d) *y* ($\otimes$) *también debe obedecer a las ecuaciones triangular y pentagonal.*

Definición 20. *Una teoría monoidal trenzada cerrada es una teoría monoidal cerrada con esta regla de inferencia adicional:*

$$\frac{W \vdash X \otimes Y}{W \vdash Y \otimes X}\ (\mathrm{b}).$$

Exigimos que esta regla dé una transformación natural que satisfaga las ecuaciones hexagonales.

Definición 21. *Una* **teoría monoidal simétrica cerrada** *es una teoría monoidal trenzada cerrada donde la regla* (b) *es su propia inversa.*

Estas son sólo las definiciones habituales de varios tipos de categorías cerradas –monoidales, monoidales trenzadas y monoidales simétricas– escritas en un estilo nuevo. Este nuevo estilo nos permite *construir dichas categorías a partir de*

sistemas lógicos. Para hacer esto, tomamos a los objetos como proposiciones y a los morfismos como clases de equivalencia de demostraciones, donde la relación de equivalencia es generada por las ecuaciones referidas en las definiciones anteriores.

Sin embargo, las ventajas de este nuevo estilo, sólo aparecen cuando profundizamos en la Teoría de Demostración y generalizamos las expresiones que hemos estado considerando:

$$X \vdash Y$$

a 'secuentes' como:

$$X_1,\ldots, X_n \vdash Y.$$

Libremente, podemos pensar en un tal secuente como significando

$$X_1 \otimes \ldots \otimes X_n \vdash Y.$$

La ventaja de los secuentes, es que nos permiten usar reglas de inferencia que –salvo la regla de supresión y la de identidad– tienen la 'propiedad subformular' mencionada a finales de Sección 3.1.

Formulada en términos de estas reglas de inferencia, la lógica de las categorías cerradas monoidales simétricas lleva el nombre de 'Lógica Lineal Intuicionística Multiplicativa' o MILL, para abreviar, (Inglés: Multiplicative Intuitionistic Linear Logic) [48], [82]. Hay un teorema de 'eliminación de la supresión' para MILL, que dice que, con una adecuada selección de otras reglas de inferencia, la regla de supresión llega a ser redundante: cualquier demostración que se puede hacer con ella, se puede hacer sin ella. Esto es notable, puesto que la regla de supresión corresponde a la *composición de morfismos* en una categoría. Una consecuencia es que en la categoría monoidal simétrica cerrada libre sobre cualquier conjunto de objetos, el conjunto de morfismos entre dos objetos cualesquiera, es *finito*. También hay un procedimiento de decisión de cuándo dos morfismos son iguales. Para obtener detalles, ver la tesis de TRIMBLE [95] y los escritos por JAY [54] y SOLOVIEV [90]. Véase también Teorema de coherencia para categorías monoidales simétricas cerradas de KELLY y MAC LANE [61] y el teorema correspondiente para las categorías monoidales simétricas compactas [62].

MILL es sólo uno de varios sistemas lógicos estrechamente relacionados. La mayoría incluyen características adicionales, pero algunos restan características. He aquí sólo algunos pocos ejemplos:

- Teorías algebraicas. En su famosa tesis, LAWVERE [69] definió a una **teoría algebraica** como una categoría cartesiana donde cada objeto es una *n*-ésima potencia

cartesiana $X \times \cdots \times X$ (n ≥ 0) de un objeto específico X. Mostró cómo tales categorías se pueden considerar como teorías lógicas de un tipo simple –como las que previamente habían sido estudiadas en 'Álgebra Universal' [25]. Esta obra inició el acercamiento categorial a la lógica, que se ha estado esbozando aquí. El libro de CROLE [34] da una suave introducción a teorías algebraicas, así como algunos sistemas lógicos más ricos. Más generalmente, podemos considerar a cualquier categoría cartesiana como una teoría algebraica generalizada.

- Lógica Lineal Intuicionística (ILL). ILL suplementa a MILL con las operaciones familiares de la lógica intuicionística, así como una operación ! que convierte cualquier proposición (o recurso) X, en una 'indefinida colección de copias de X'. De nuevo, hay una buena interpretación teórico-categorial. La tesis de BIERMAN [23], da una buena panorámica que incluye una prueba eliminación de supresión para ILL y una demostración del resultado, originalmente debido a GIRARD, de que la lógica intuicionista puede embutirse en ILL.
- Lógica lineal (LL). Para una Lógica Lineal completa, el artículo de revisión, en línea, de DI COSMO y MILLER [37] es un buen punto para empezar. Para más información, pruebe el documento original por GIRARD [43] y el libro por TROELSTRA [96]. El artículo de revisión por BLUTE y SCOTTS [24], sirve como una piedra de Rosetta para Lógica Lineal y Teoría de Categorías, así como las notas de conferencias por SCHALK [82].
- Lógica intuicionística (IL). El Libro clásico por LAMBEK y SCOTT [67] sigue siendo una excelente introducción a Lógica Intuicionística y Categorías Cartesianas Cerradas. El artículo de revisión en línea de MOSCHOVAKIS [77] contiene muchas sugerencias para lectura adicional.

Para concluir, precisemos que lo que una 'regla de inferencia' aporta en la configuración que hemos descrito. Hemos dicho que da una función de un producto de conjuntos de morfismos, a un conjunto de morfismos. Mientras que esto es válido, no es la última palabra sobre el tema. Después de todo, en lugar de tratar a las proposiciones que aparecen en una regla de inferencia, como fijas podemos tratarlos como variables. Así, una regla de inferencia es, realmente, un 'esquema' para obtener nuevas demostraciones a partir de otras. ¿Cómo podemos formalizar esta idea?

Primero debemos tener claro que $X \vdash Y$ no es sólo un conjunto: es un conjunto que depende funtorialmente de X y Y. Como se señaló en Definición14, hay

un funtor, el 'funtor **hom**'

$$\mathbf{hom}: \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathrm{Set},$$

que envía a (X, Y) al conjunto de morfismos $hom(X, Y) = X \vdash Y$. Para parecer logicistas, escribamos a este funtor como $\vdash$.

Visto desde esta perspectiva, la mayoría de nuestras reglas de inferencia son *transformaciones naturales*. Por ejemplo, la regla (a) es una transformación natural entre dos funtores de $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C}^{3}$ a **Set**, a saber: los funtores

$$(W, X, Y, Z) \mapsto W \vdash (X \otimes Y) \otimes Z$$

y

$$(W, X, Y, Z) \mapsto W \vdash X \otimes (Y \otimes Z).$$

Esta transformación natural convierte a cualquier demostración

$$f: W \to (X \otimes Y) \otimes Z$$

en la demostración

$$a_{X,Y,Z}\, f: W \to X \otimes (Y \otimes Z).$$

El hecho de que esta transformación sea *natural*, significa que cambia de una manera sistemática según variamos W, X, Y y Z. El cuadrado conmutativo de la definición de transformación natural, Definición 4, hace a esto preciso.

Las reglas (l), (d), (b) y (c) dan transformaciones naturales de una manera muy semejante. La regla ($\otimes$) da una transformación natural entre dos funtores de $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C}$ a **Set**, a saber:

$$(W, X, Y, Z) \mapsto (W \vdash X) \times (Y \vdash Z)$$

y

$$(W, X, Y, Z) \mapsto (W \otimes X) \vdash (Y \otimes Z)$$

Esta transformación natural envía cada elemento $(f, g) \in hom(W, X) \times hom(Y, Z)$ *a* $f \otimes g$.

Las reglas de identidad y de supresión son diferentes: *no dan* transformaciones naturales, debido a que la línea superior de estas reglas tiene un número distinto de variables que la línea de abajo. La regla (i) dice que para cada $X \in \mathbf{C}$, hay una función

$$i_X : 1 \to X \vdash X,$$

que escoge al morfismo identidad 1_X. ¿Qué significaría para ésta, ser natural en X? La regla ($\circ$) dice que para cada trío $X, Y, Z \in \mathbf{C}$, hay una función

$$\circ : (X \vdash Y) \times (Y \vdash Z) \to X \vdash Z.$$

¿Qué significaría para ésta, ser natural en X, Y y Z? La respuesta a ambas preguntas implica una generalización de las transformaciones naturales, llamadas 'transformaciones 'dinaturales' [71].

Como se observa en Definición 4, una transformación natural α: $F \Longrightarrow G$, entre dos funtores F, G: $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$, hace que ciertos cuadrados, conmuten en $\mathbf{D}$. Si de hecho $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C}_2$, entonces, en realidad, obtenemos cubos que conmutan en D. Es decir, la transformación natural α asigna a cada objeto (X_1, X_2) un morfismo α_{X_1, X_2} tal que, para cualquier morfismo $(f_1: Y_1 \to X_1, f_2: X_2 \to Y_2)$ en $\mathbf{C}$, este cubo conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & G(Y_1, X_2) \arrow[rr, "G(1_{Y_1}, f_2)"] \arrow[dd, "G(f_1, 1_{X_2})"] & & G(Y_1, Y_2) \arrow[dd, "G(f_1, 1_{Y_2})"] \\
F(Y_1, X_2) \arrow[ur, "\alpha_{Y_1, X_2}"] \arrow[rr, "F(1_{Y_1}, f_2)"] \arrow[dd, "F(f_1, 1_{X_2})"] & & F(Y_1, Y_2) \arrow[ur, "\alpha_{Y_1, Y_2}"] \arrow[dd, "F(f_1, 1_{Y_2})"] & \\
 & G(X_1, X_2) \arrow[rr, "G(1_{X_1}, f_2)"] & & G(X_1, Y_2) \\
F(X_1, X_2) \arrow[ur, "\alpha_{X_1, X_2}"] \arrow[rr, "F(1_{X_1}, f_2)"] & & F(X_1, Y_2) \arrow[ur, "\alpha_{X_1, Y_2}"] &
\end{tikzcd}$$

Si $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2$, podemos elegir un solo objeto X y un solo morfismo f: $X \to Y$ y utilizarlo en ambas ranuras.

$$\begin{tikzcd}
 & G(Y,X) & & G(Y,Y) \arrow[dd, "G(f,1_Y)"] \\
F(Y,X) \arrow[rr, "F(1_Y,f)"] \arrow[dd, "F(f,1_X)"'] & & F(Y,Y) \arrow[ur, "\alpha_{YY}"] & \\
 & G(X,X) \arrow[rr, "G(1_X,f)"] & & G(X,Y) \\
F(X,X) \arrow[ur, "\alpha_{X,X}"] & & F(X,Y) &
\end{tikzcd}$$

Figura 1: Una transformación natural entre funtores F, G: $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ da un cubo conmutativo en $\mathbf{D}$ para cualquier morfismo f: $X \to Y$ y hay dos caminos alrededor del cubo, que sólo involucran a α para argumentos repetidos.

Como se muestra en la figura 1, entonces hay dos rutas desde una esquina del cubo a la esquina antipodal, que sólo que sólo involucran a α para argumentos repetidos: es decir, $\alpha_{X,X}$ y $\alpha_{Y,Y}$, pero no $\alpha_{X,Y}$ ó $\alpha_{Y,X}$. Estas trayectorias dan un hexágono conmutativo.

Esto motiva la siguiente:

Definición 22. *Una* **transformación dinatural** α: $F \Longrightarrow G$ *entre funtores* F, G: $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *asigna a cada objeto* X *en* $\mathbf{C}$ *un morfismo* α_X: $F(X, X) \to G(X, X)$ *en* $\mathbf{D}$*, tal que para todo morfismo* f: $X \to Y$*, en* $\mathbf{C}$*, el hexágono en* Figura 1*, es conmutativo.*

En el caso de la regla de identidad, este hexágono conmutativo sigue del hecho de que el morfismo identidad es una levo- y dextro-unidad para la composición: ver Figura 2.

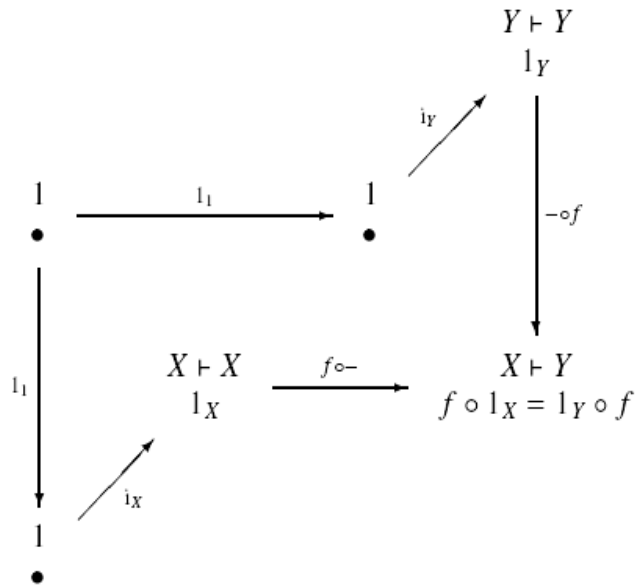


Figura 2: Dinaturalidad de la regla (i) donde f: $X \to Y$. Aquí, $\bullet \in 1$, denota al único elemento del conjunto de un solo elemento.

Para la regla de supresión, este hexágono conmutativo dice que la composición es asociativa: ver Figura 3.

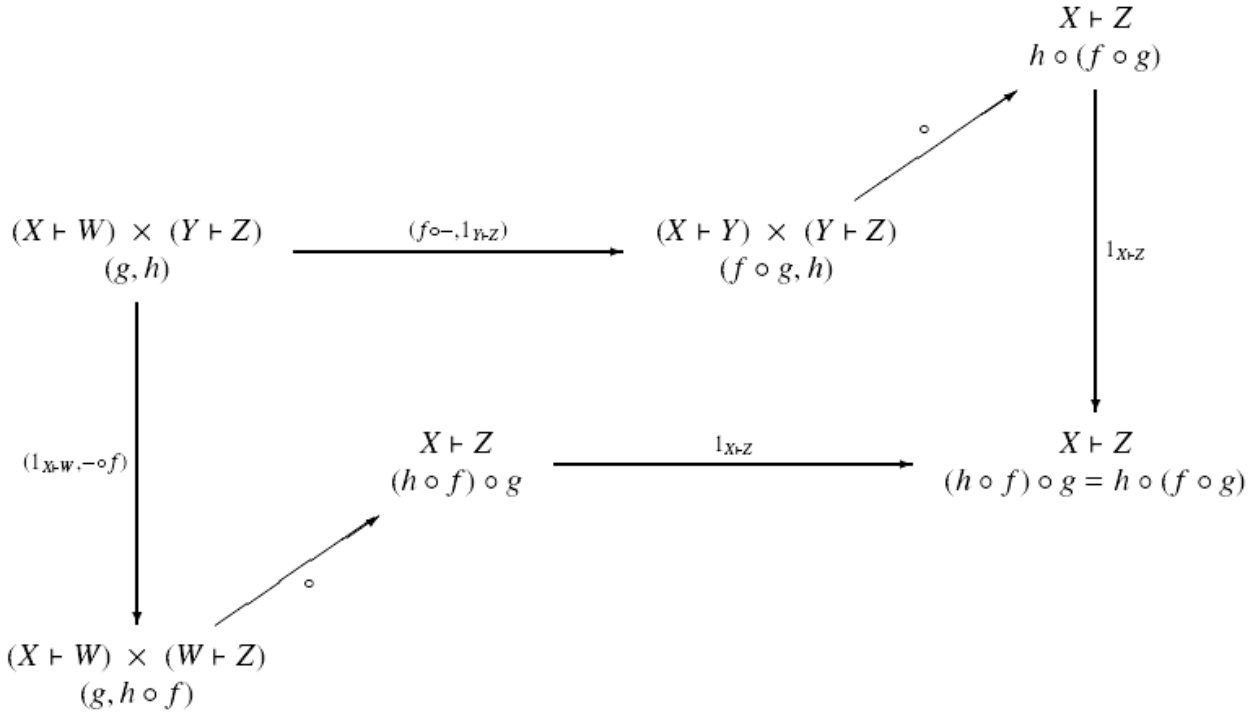


Figura 3: Dinaturalidad de la regla de supresión, donde f: $W \to Y$, g: $X \to W$, h: $Y \to Z$.

Así que, en general, el tipo de teoría lógica que estamos debatiendo consiste en:

- Una *categoría* **C** de proposiciones y demostraciones.
- Un *funtor* $\vdash$: $\mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$, que envía a cualquier par de proposiciones, al conjunto de demostraciones que llevan de una a la otra.
- Un conjunto de *transformaciones dinaturales* que describen reglas de inferencia.

4 Informática

4.1 *Contexto*

En la década de 1930, mientras TURING estaba desarrollando lo que ahora se llama 'Máquinas TURING', como un modelo para la computación, CHURCH y su estudiante KLEENE estaban desarrollando un modelo diferente, llamado el 'cálculo lambda' [29], [63]. Mientras que una máquina TURING puede considerarse como un modelo idealizado, simplificado de *armazón* de computadora (Inglés: computer *hardware*), el cálculo lambda es más como un modelo simple de *programatura* de computadora (Inglés: computer *software*).

Actualmente hay muchos tratamientos cuidadosos del cálculo lambda en la literatura, desde el magistral tomo de BARENDREGT [17], pasando por el tratamiento clásico teórico-categorial de LAMBEK y SCOTT [67], hasta la amigable introducción por HINDLEY y SELDIN [51] y las elegantes notas en línea, gratis, por SELINGER [86]. Así que nos contentaremos con un rápido bosquejo.

Metafóricamente hablando, el cálculo lambda describe un universo donde todo es un programa y todas las cosas son datos: *los programas son datos*. Más prosaicamente, todo es un 'λ-termino' o, abreviadamente, un 'término'. Estos se definen inductivamente:

- **Variables:** Hay un conjunto contable de 'variables' x, y, z,... que son todas, términos.
- **Aplicación:** Si f y t son términos, podemos 'aplicar' f a t y obtener un término $f(t)$.
- **Lambda-abstracción:** Si x es una variable y t es un término, hay un término $(\lambda x.t)$.

Permítasenos explicar el significado de aplicación y lambda-abstracción. La

aplicación es simple. Puesto que 'los programas son datos', podemos considerar a cualquier término como un programa o una porción de datos. Puesto que podemos aplicar programas a datos y obtener nuevos datos, podemos aplicar cualquier término f a cualquier otro término t y conseguir un nuevo término $f(t)$.

Lambda-abstracción es más interesante. Consideramos a $(\lambda x.t)$ como al programa que, dado x como entrada, devuelve t como salida. Por ejemplo, considere

$$(\lambda x.x(x)).$$

Este programa toma a cualquier programa x como entrada y devuelve a $x(x)$ como salida. En otras palabras, se aplica cualquier programa a sí mismo. Así pues, tenemos

$$(\lambda x.x(x))(s) = s(s)$$

para cualquier término s.

Más generalmente, si aplicamos $(\lambda x.t)$ a cualquier término s, tendríamos de nuevo a t, pero con s substituido por cada ocurrencia libre de la variable x. Este hecho se codifica en una regla llamada **reducción beta:**

$$(xt)(s) = t[s/x],$$

donde $t[s/x]$ es el término que conseguimos tomando a t y sustituyendo a s para cada ocurrencia libre de x. Pero, hay que tener cuidado: esta regla no es una ecuación en el sentido habitual de la matemática. En cambio, es una 'regla de reescritura': dado el término de la izquierda, podemos reescribirlo y obtener al término de la derecha. Comenzar con un término y repetidamente aplicar reglas de reescritura es como ¡tomar un programa y dejarlo correr!

Hay otras dos reglas de reescritura en el cálculo lambda. Si x es una variable y t es un término, el término

$$(\lambda x.t(x))$$

designa al programa que, dado x como entrada, devuelve $t(x)$ como salida. Pero esto es solo una forma elegante de hablar del programa t. Así, el cálculo lambda tiene una regla de reescritura llamada **reducción eta**, que dice que

$$(\lambda x.t(x)) = t.$$

La tercera regla de reescritura es **conversión alfa**. Esto nos permite reemplazar una variable ligada en un término, por otra variable. Por ejemplo:

$$(\lambda x.x(x)) = (\lambda y.y(y)),$$

puesto que x está 'ligada' en la expresión de la izquierda por su aparición en 'λx'.

En otras palabras, x es sólo una variable virtual; su nombre es irrelevante, así que la podemos reemplazar con y. Por otra parte,

$$(\lambda x.y(x)) \neq (\lambda x.z(x)).$$

Aquí no podemos reemplazar a la variable y por la variable z, ya que esta variable es 'libre', no ligada. Se debe tener cuidado de precisar las nociones de variables libres y ligadas, pero no abundaremos sobre este tema, refiriendo al lector a las referencias anteriores para obtener más detalles.

El cálculo lambda es un simple formalismo. Sorprendentemente, a partir de esto, CHURCH y KLEENE fueron capaces de construir la Lógica Booleana, los números naturales, las operaciones usuales de la aritmética y así sucesivamente. Por ejemplo, definieron los 'numerales CHURCH' como sigue:

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= (\lambda f.(\lambda x.x)) \\
\overline{1} &= (\lambda f.(\lambda x.\ f(x))) \\
\overline{2} &= (\lambda f(\lambda x.f(f(x)))) \\
\overline{3} &= (\lambda f.(\lambda x.f(f(f(x)))))
\end{aligned}$$

y así sucesivamente. Tenga en cuenta que f es una variable en lo de arriba. Por lo tanto, el numeral *CHURCH* $\overline{n}$ es el programa que 'toma a cualquier programa a la n-ésima potencia: si se le da cualquier programa f como entrada, devuelve el programa que aplica f, n veces a cualquier entrada x, que reciba.

Para hacerse una idea de cómo podemos definir las operaciones aritméticas sobre los numerales CHURCH, considerar

$$\lambda g\,.\,\overline{3}\,(\,\overline{2}(g)).$$

Este programa toma cualquier programa g, lo lleva al cuadrado y, luego, cubica al resultado. Así, eleva g a la sexta potencia. Esto sugiere que

$$\lambda g\,.\,\overline{3}\,(\,\overline{2}(g)) = \overline{6}.$$

De hecho esto es válido. Si tratamos las definiciones de los numerales CHURCH como reglas de reescritura reversibles, entonces podemos comenzar con el lado izquierdo de la ecuación anterior y darle, utilizando reglas de reescritura, hasta alcanzar el lado derecho:

$$\begin{aligned}
\lambda g.3(\,2(g)) &= (\lambda g.3((\lambda f.(\lambda x.f(f\,(x)))))(g)) && \text{def. de } 2 \\
&= (\lambda g.3(\lambda x.g(g(\mathrm{x})))) && \text{beta}
\end{aligned}$$

$$= (\lambda g.(\lambda f.(\lambda x.f(f(f(\mathrm{x})))))(\lambda x.g(g(\mathrm{x}))))) \qquad \text{def. de } \bar{3}$$

$$= (\lambda g.(\lambda x.(\lambda x.g(g(x)))((\lambda x.g(\mathrm{g}(x)))((\lambda x.g(g(x)))(x))))) \qquad \text{beta}$$

$$= (\lambda g.(\lambda x.(\lambda x.g(g(x)))((\lambda g.g(g(x)))(g(g(x)))))) \qquad \text{beta}$$

$$= (\lambda g.(\lambda x.(\lambda x.g(\mathrm{g}(\mathrm{x})))(\mathrm{g}(\mathrm{g}(\mathrm{g}(\mathrm{g}(\mathrm{x}))))))) \qquad \text{beta}$$

$$= (\lambda g.(\lambda x.g(\mathrm{g}(\mathrm{g}(\mathrm{g}(\mathrm{g}(\mathrm{g}(\mathrm{x}))))))))) \qquad \text{beta}$$

$$= \bar{6} \qquad \text{def. de } \bar{6}.$$

Si este cálculo parece agobiante, ese es precisamente el punto: se asemeja a los entresijos de una computadora. Aquí vemos cómo el cálculo lambda puede servir como un lenguaje de programación, donde cada etapa de computación corresponde a una regla de reescritura.

Por supuesto, tenemos la respuesta $\bar{6}$ porque $3 \times 2 = 6$. Generalizando los resultados de este ejemplo, podemos definir un programa llamado 'veces' que multiplica a los numerales CHURCH:

$$\texttt{veces} = (\lambda a.(\lambda b.(\lambda x,a(b(x))))).$$

Por ejemplo,

$$\texttt{veces}(\bar{3})(\bar{2}) = \bar{6}.$$

El lector emprendedor puede imaginar programas similares para las otras operaciones básicas de la aritmética. Con más perspicacia, CHURCH y KLEENE fueron capaces de escribir los términos correspondientes a funciones más complicadas. Finalmente llegaron a creer que *todas* las funciones computables f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pueden ser definidas en el cálculo lambda.

Mientras tanto, GÖDEL estaba desarrollando otro enfoque de la computabilidad: la Teoría de 'funciones recursivas'.

Alrededor de 1936, KLEENE comprobó que las funciones definibles en el cálculo lambda, eran lo mismo que las funciones recursivas, de GÖDEL. En 1937, TURING describió sus 'Máquinas TURING' y las usó para dar otra definición de funciones computables. Más adelante, se demostró que esta definición concordaba con las otras dos. Gracias a esta y otras evidencias, ahora es ampliamente aceptado que el cálculo lambda puede definir *cualquier* función que pueda ser computada por *cualquier* método sistemático. Decimos que es 'TURING completo'.

Después de esta explosión de trabajo teórico, tomó pocas décadas para que se construyeran computadoras programables. Tomó más tiempo para que los informáticos sacaran provecho de los conocimientos de CHURCH y KLEENE. Esto comenzó alrededor de 1958, cuando MCCARTHY inventó el lenguaje de programación `Lisp`, basado en el cálculo lambda [74].

En 1965, un influyente escrito de LANDIN [68], señaló una poderosa analogía entre el cálculo lambda y el lenguaje `ALGOL`. Estos acontecimientos condujeron a un renovado interés en el cálculo lambda, que continúa hasta nuestros días. Por ahora, un número de lenguajes de programación se basa explícitamente, en ideas del cálculo lambda. Los más famosos de estos incluyen `Lisp`, `ML` y `Haskell`. Estos lenguajes, llamados 'lenguajes funcionales de programación', son muy apreciados por científicos de la computación teórica, por su claridad conceptual. De hecho, durante muchos años, todos con especialización en Informática en el MIT, han sido obligados a tomar un curso introductorio que incluye programación en `Scheme`, un dialecto de `Lisp`. ¡La portada del libro de texto para este curso [1], tiene una gran lambda en la portada!

Hay que admitir que lenguajes de un tipo diferente –'lenguajes imperativos de programación'– son más populares entre programadores profesionales. Los ejemplos incluyen `FORTRAN`, `BASIC` y C. En la programación imperativa, un programa es una secuencia de instrucciones que dicen a la computadora qué hacer. En contraste, en la programación funcional, un programa simplemente describe una función. Para ejecutar el programa, lo aplicamos a la entrada. Así, al igual que en el cálculo lambda, 'aplicación' es una operación fundamental en la programación funcional. Si combinamos la aplicación con la abstracción lambda, obtenemos un lenguaje lo suficientemente poderoso como para calcular cualquier función computable.

Sin embargo, la mayoría de los lenguajes funcionales de programación, son más reglamentados que el cálculo lambda original. Como hemos visto, en el cálculo lambda originalmente desarrollado por CHURCH y KLEENE, cualquier término puede ser aplicado a cualquier otro.

En la vida real, la programación involucra a muchos tipos de datos. Por ejemplo, supongamos que estamos escribiendo un programa que involucra a días de la semana. No tendría sentido escribir

`Veces(3)Martes)`

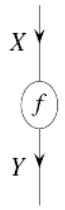
porque Martes no es un número. Podríamos elegir representar a Martes por un número, en un programa; pero duplicar ese número no tiene una buena interpretación: ¿es el primer día de la semana el domingo ó el lunes? ¿Está la semana indizada desde cero ó desde uno? Estas son decisiones arbitrarias que afectan el resultado. Podemos dejar que el programador tome las decisiones, pero el marco desestructurado resultante, conduce fácilmente a errores.

Es mejor distinguir a los datos en varios 'tipos' como *enteros*, *números de punto flotante*, *cadenas alfanuméricas* y así sucesivamente. Por lo tanto, cada vez que introducimos una variable en un programa, deberíamos hacer una 'declaración de tipo' diciendo de qué tipo es. Por ejemplo, podríamos escribir:

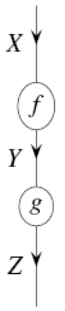
```
Martes : día.
```

Esta notación se utiliza en `Ada`, `Pascal` y otros lenguajes. Otras notaciones son también de uso generalizado. Entonces, nuestro sistema debería tener un 'comprobador de tipo' (generalmente parte del compilador) que avise si tratamos de aplicar un programa a una porción de datos de tipo incorrecto.

Matemáticamente, esta idea es formalizada por una versión más sofisticada del cálculo lambda: el cálculo lambda 'con tipos' (Inglés: 'typed' lambda calculus), donde cada término tiene un tipo. Esta idea también es fundamental para la teoría de categorías, donde cada morfismo es como una caja negra con cables de entrada y salida de tipos especificados:



y no tiene sentido conectar dos cajas negras sucesivamente, a menos que la salida de la primera tenga el mismo tipo que la entrada de la siguiente:



.

De hecho, hay una profunda relación entre las categorías cartesianas cerradas y el cálculo lambda con tipos. Esto fue descubierto por LAMBEK en 1980 [66]. En términos muy generales, una 'lambda-teoría con tipos' es un lenguaje funcional de programación, muy simple, con un conjunto especificado de tipos de datos, básicos, del que pueden ser construidos otros tipos más complicados y una colección especificada de términos básicos, de la que pueden ser construidos términos más complicados. Los tipos de datos de este lenguaje son *objetos* en una categoría cartesiana cerrada, mientras que los programas –es decir, los términos– dan *morfismos*.

Aquí estamos siendo un poco descuidados. Recuérdese, de Sección 3.3, que en lógica podemos construir categorías monoidales cerradas, donde los morfismos son clases de equivalencia de demostraciones. Necesitamos considerar clases de equivalencia, para que se cumplan los axiomas de una categoría monoidal cerrada. Asimismo, para obtener categorías monoidales cerradas en Informática, necesitamos que los morfismos sean clases de equivalencia de términos. Dos términos cuentan como equivalentes si se diferencian por reglas de reescritura como reducción beta, reducción eta y conversión alfa. Como hemos visto, estas reescrituras representan los pasos por el que un programa lleva a cabo su cómputo. Por ejemplo, en el cálculo lambda 'sin tipos' original, los términos $\texttt{veces}(\texttt{3})(\texttt{2})$ y $\bar{\texttt{6}}$ se diferencian por las reglas de reescritura, pero dan el mismo morfismo. Entonces, cuando construimos una categoría cerrada cartesiana de una lambda-teoría con tipos, *desatendemos al proceso real de computación*. Para remediar esto debemos trabajar con una 2-categoría cartesiana cerrada que tiene:

- tipos como objetos,
- términos como morfismos,
- clases de equivalencia de reescrituras, como 2-morfismos.

Para más detalles, ver el trabajo de SEELY [84], HILKEN [50] y MELLIÉS [73]. Algún día este trabajo formará parte de la piedra de Rosetta *n*-categorial más grande, mencionada al final de la sección 2.5.

En cualquier caso, LAMBEK demostró que cada lambda-teoría con tipos da una categoría cartesiana cerrada –y, recíprocamente, cada categoría cerrada cartesiana da una lambda-teoría con tipos. Este descubrimiento condujo a una rica línea de investigación que vincula a Teoría de Categorías e Informática. Es imposible resumir el enorme cuerpo de trabajo resultante, aunque constituye un aspecto crucial de la piedra de Rosetta. Dos buen os puntos de partida para posteriores lecturas, son el libro de texto por CROLE [34] y el artículo de revisión, en línea por SCOTT [80].

En lo que sigue, nuestro objetivo es más limitado. En primer lugar, en Sección 4.2, explicamos cómo cada 'lambda-teoría con tipos' da una categoría cartesiana cerrada y recíprocamente. Seguimos el tratamiento de LAMBEK y SCOTT [67], en una forma simplificada. Luego, en Sección 4.3, describimos cómo cada 'teoría lineal de tipos' da una categoría monoidal simétrica cerrada y recíprocamente.

La idea aquí es, más o menos, que una 'teoría lineal de tipos' es un lenguaje de programación adecuado tanto para computación clásica, como para computación quántica. Este lenguaje difiere del cálculo lambda con tipos, en que prohíbe la duplicación y eliminación de datos excepto cuando esté expresamente permitido. La razón es que mientras todos los objetos en una categoría cartesiana vienen equipado con morfismos 'duplicación' y 'eliminación':

$$\Delta_X : X \to X \otimes X\,, \qquad !X : X \to 1.$$

Una categoría monoidal simétrica, típicamente carece de éstos. Como vimos en Sección 2.3, un gran ejemplo es la categoría **Hilb** con su producto tensorial habitual. Así, un lenguaje de programación adecuado para computación quántica no debe asumir que podemos duplicar todos los tipos de datos [28], [100].

Distintas versiones de cálculo lambda 'quántico' o 'lineal' ya han sido estudiadas, por ejemplo por BENTON, BIERMAN DE PAIVA y HYLAND [21], DORCA y VAN TONDER [98] y SELINGER y VALIRON [88]. ABRAMSKY y TZEVELEKOS Bosquejaron una versión [6]. En su lugar vamos a explicar las 'teorías lineales de tipos' desarrolladas por SIMON AMBLER en su tesis de 1991 [7].

4.2 *El Cálculo Lambda con Tipos*

Como el original cálculo lambda 'sin tipos', explicado arriba, el cálculo lambda con tipos, utiliza términos para representar tanto datos, como programas. Sin embargo, ahora cada término tiene un tipo específico. Un programa que admite datos de tipo X y tiene salidas de datos de tipo Y se dice que es de tipo $X \multimap Y$. Entonces, sólo podemos aplicar un término s a un término t de tipo X si s es de tipo $X \multimap$ Y para algún Y. En este caso $s(t)$ es un, bien definido, término de tipo Y. Llamamos a $X \multimap Y$ un **tipo de función.**

Cuando introducimos una variable, debemos declarar su tipo. Escribimos $t : X$ para decir que t es una expresión de tipo X. Así, en abstracción lambda, ya no

escribimos simplemente expresiones como ($\lambda\ x.\ t$). En cambio, si x es una variable de tipo X, escribimos

$$(\lambda x : X\ .\ t).$$

Por ejemplo, he aquí un sencillo programa que toma un programa de tipo $X \multimap X$ y lo 'cuadra':

$$(f : X \multimap X\ .\ (\lambda x : X\ .\ f\ (f(x)))).$$

En el cálculo lambda original, todos los programas toman una sola porción de datos como entrada. En otras palabras, computan funciones unarias. Esto no es una limitación real, puesto que podemos manejar funciones que tienen más de un argumento usando el artificio llamado 'encurrymiento', discutido en Sección 2.6. Esto convierte a una función de varios argumentos, en una función que toma al primer argumento y devuelve una función de los argumentos restantes. Vimos un ejemplo en la última sección: el programa 'veces'. Por ejemplo, `veces(3)` es un programa que multiplica por 3, entonces `veces(3)(2) = 6̄`.

Aunque hacer que todos los programas computen funciones unarias es económico, esto no es muy bueno para el programador. Así, en el cálculo lambda con tipos, también introducimos productos: dados los tipos X y Y, hay un tipo $X \times Y$ llamado **tipo producto**. Podemos pensar en un dato de tipo $X \times Y$ como un par formado por un dato de tipo X y un dato de tipo Y. Para explicitar esta intuición, insistimos en que dados los términos $s : X$ y $t : Y$, hay un término $(s, t) : X \times Y$. También insistimos en que dado un término $u : X \times Y$, hay términos $p(u) : X$ y $p'(u) : Y$, que pensamos como el primer y segundo componentes del par t. También incluimos las reglas de reescritura expresando:

$$(p(u), p'(u)) = u \text{ para cada } u\text{: } X \times Y,$$
$$p(s, t) = s \text{ para cada } s\text{: } X \text{ y } t : Y,$$
$$p'(s, t) = t \text{ para cada } s\text{: } X \text{ y } t : Y.$$

Los tipos producto permiten escribir programas que admiten más de una entrada. Aún más, permiten lidiar con programas que producen más de una salida.

Por ejemplo, puede que tengamos un tipo llamado 'entero'. Entonces podríamos querer un programa que toma un entero y lo duplica:

```
duplica : entero ⊸ (entero × entero)
```

Este programa es fácil de escribir:

```
duplica = (λx:entero.(x, x)).
```

Por supuesto, este programa que no se podría escribir cuando duplicar información esté prohibido; pero, en esta sección, todas nuestras consideraciones son 'clásicas'; i. e. adaptadas a las categorías cartesianas cerradas.

El `cálculo lambda con tipos` también tiene un tipo especial llamado 'tipo unidad', que denotamos por `1`. Hay un término único de este tipo, que denotamos como `()`. Desde el punto de vista de Teoría de Categorías, la necesidad de este tipo es clara: una categoría con productos finitos debe tener no sólo productos binarios; sino, también, un objeto terminal (ver Definición10). Por ejemplo, en la categoría **Set**, el objeto terminal puede ser tomado como cualquier conjunto de un elemento, y `()` es el único elemento de este conjunto. Puede ser menos claro el por qué este tipo es útil en programación. Una razón es que nos permite pensar en una constante de tipo X como una función de tipo $1 \multimap X$ –es decir, una 'función nularia', una que no tiene ningún argumento. Hay algunas otras razones, pero van más allá del alcance de esta discusión. Baste decir que `Haskell`, `Lisp` y aún lenguajes imperativos muy utilizados, como `C`, `C++` y `Java` incluyen al tipo unidad.

Introducidos los ingredientes principales del cálculo lambda con tipos, demos un tratamiento más formal. Como veremos, una 'lambda-teoría con tipos' consiste de tipos, términos y reglas de reescritura. A partir de una lambda-teoría con tipos, podemos conseguir una categoría cartesiana cerrada. Los tipos darán objetos, los términos darán morfismos y las reglas de reescritura darán ecuaciones entre morfismos.

En primer lugar, los tipos se dan inductivamente como sigue:

- **Tipos básicos:** hay un conjunto arbitrariamente elegido de tipos llamados **tipos básicos.**
- **Tipos producto:** dados los tipos X y Y, hay un tipo $X \times Y$.
- **Tipos función:** dados los tipos X y Y, hay un tipo $X \multimap Y$.
- **Tipo unidad:** hay un tipo 1.

Puede haber ecuaciones inesperadas entre tipos: por ejemplo, puede que tengamos un tipo X que satisfaga $X \times X = X$. Sin embargo, exigimos que:

- Si $X = X'$ y $Y = Y'$ entonces $X \times Y = X' \times Y'$.
- <u>Si</u> $X = X'$ y $Y = Y'$ entonces $X \multimap Y = X' \multimap Y'$.

A continuación se definen los **términos**. Cada término tiene un tipo específico y si t es un término de tipo X escribimos $t : X$. Las reglas para la construcción de términos son las siguientes:

- **Términos básicos:** para cada tipo X hay un conjunto de **términos básicos** de tipo X.
- **Variables:** para cada tipo X, hay una colección infinita contable, de términos de tipo X llamados variables de tipo X.
- **Aplicación:** Si f: $X \multimap Y$ y t: X entonces hay un término $f(t)$ de tipo Y.
- **Abstracción lambda:** Si x es una variable de tipo X y t: Y entonces hay un término $(\lambda x : X.t)$ de tipo $X \multimap Y$.
- **Emparejamiento**: Si $s : X$ y $t : Y$ entonces hay un término *(s, t) de tipo* $X \times Y$.
- **Proyección:** Si $t : X \times X'$ entonces hay un término $p(t)$ de tipo X y un término $p'(t)$ de tipo X'.
- **Término unidad:** hay un término ( ) de tipo 1.

Finalmente hay **reglas de reescritura** que van entre términos del mismo tipo. Dado un conjunto fijo, de variables, S, habrá reglas de reescritura entre términos del mismo tipo, todas de cuyas variables libres se encuentran en el conjunto S. Para nuestros propósitos actuales, sólo necesitamos estas reglas de reescritura para decidir cuándo dos términos determinan el mismo morfismo en la categoría cartesiana cerrada que construiremos. Así que, lo que importa no son realmente las reglas de reescritura mismas, sino la relación de equivalencia que generan. Escribimos esta relación de equivalencia como $s \sim_S t$.

La relación $\sim_S$ puede ser cualquier relación de equivalencia que satisfaga la siguiente lista de reglas –A continuación, $t\ [s\ /\ x]$ denota al resultado de tomar un término t y reemplazar cada ocurrencia de la variable libre x, por el término s. También, cuando decimos 'término' sin otra calificación, significa 'término cuyas variables libres están todas en el conjunto S'.

- **Preservación de Tipo:** si $t \sim_S t'$ entonces t y t' deben ser términos del mismo tipo, cuyas variables libres están todas en el conjunto S.
- **Reducción beta:** Supongamos que x es una variable de tipo X, s es una expresión de tipo X y t es cualquier término. Si ninguna ocurrencia libre de una variable en s se convierte en ligada en $t[s/x]$, entonces:

$$(\lambda x : X\,.\,t)t(s) \sim_S [s/x].$$

- **Reducción eta:** Supongamos que la variable x no aparece en el término f. En-

tonces:

$$(X : X . f(x)) \sim_S f.$$

- **Conversión alfa**: Supongamos que x y v son variables de tipo X y ninguna ocurrencia libre de alguna variable en t, aparece ligada en $t[x/y]$. Entonces:

$$(x : X.\ t) \sim_S (y : X.\ t[x/y]).$$

- **Aplicación:** Supongamos que t y t' son términos de tipo X con $t \sim_S t$ y supongamos que $f: X \multimap Y$. Entonces:

$$f(t) \sim_S f(t).$$

- **Abstracción lambda:** Supongamos que t y t' son términos de tipo Y, todas de cuyas variables libres se encuentran en el conjunto $S \cup \{x\}$. Supongamos que $t \sim_{S \cup \{x\}} t'$, entonces:

$$(\lambda x : X . t) \sim_S (\lambda x : X . t')$$

- **Emparejamiento:** Si u es un término del tipo $X \times Y$, entonces:

$$(p(u), p'(u)) \sim_S u.$$

- **Proyección:** Si s es una expresión de tipo X y t es un término del tipo Y, entonces:

$$p(s, t) \sim_S s, \qquad p'(s, t) \sim_S t.$$

- **Término Unidad:** Si t es un término del tipo 1, entonces:

$$t \sim_S () .$$

Ahora podemos describir al resultado clásico de LAMBEK, que relaciona lambda-teorías con tipos y categorías cartesianas cerradas. De una lambda-teoría con tipos obtenemos una categoría cartesiana cerrada **C**, para la cual:

- Los objetos en **C** son los tipos.
- Los morfismos f: $X \to Y$, en **C** son las clases de equivalencia de pares (x, t) que constan de una variable $x : X$ y un término $t : Y$, con ninguna variable libre excepto, tal vez, x. Aquí (x, t) es equivalente a (x', t') si y solamente si:

$$t \sim_{\{x\}} t' [x/x'].$$

- Dado un morfismo f: $X \to Y$ proveniente de un par (x, t) y un morfismo g: $Y \to Z$, proveniente de un par (y, u) como antes, el compuesto $g\,f$: $X \to Y$, proviene del par $(x, u[t/y])$.

También podemos revertir este proceso y obtener una lambda-teoría con ti-

pos, de una categoría cartesiana cerrada. De hecho, LAMBEK y SCOTT, explican cómo construir una categoría de la categoría de las categorías cartesianas cerradas y una categoría de lambda-teorías con tipos. Construyen funtores yendo y viniendo entre estas categorías y muestran que estos funtores son inversos salvo isomorfismo natural. Por lo tanto, decimos que estas categorías son 'equivalentes' [67].

4.3 *Teorías Lineales de Tipos*

En su tesis [7], AMBLER describe cómo generalizar al resultado clásico de **LAMBEK** sobre categorías cartesianas cerradas, a categorías monoidales simétricas cerradas. Para hacer esto, sustituyó a lambda-teorías con tipos por 'teorías lineales de tipos'.

Una teoría lineal de tipos puede verse como un lenguaje de programación adecuado tanto para computación clásica como para la quántica.

Como hemos visto, en una categoría no cartesiana como **Hilb**, no podemos duplicar ni borrar la información libremente. Así, las teorías lineales de tipos deben evitar la duplicación o supresión de datos, *salvo cuando expresamente se permite.* Para lograr esto, las teorías lineales de tipos no deben permitir que escribamos un programa como este:

$$(\lambda x : X \,.\, (x, x)).$$

Incluso un programa que 'cuadra' a otro programa, como este:

$$(\lambda f \ : X \multimap X \,.\, (\lambda x : X.\, f(f(x)))) \ ,$$

no está permitido, puesto 'reutiliza' a la variable f. Por otro lado¡ está permitido un programa que compone a dos programas!

Para imponer estas restricciones, las teorías lineales de tipos tratan a las variables muy diferentemente que el cálculo lambda con tipos. De hecho, en una teoría lineal de tipos, cualquier término contendrá a una variable dada, a lo sumo, *una vez*. Pero las teorías lineales de tipos se apartan incluso, más dramáticamente del cálculo lambda con tipos, de otra manera. ¡No hacen ningún uso de abstracción lambda! En cambio, usan 'combinadores'.

La idea de un combinador es muy antigua: de hecho, es anterior al cálculo lambda. La Lógica Combinatoria nació en un escrito de 1924 por SCHÖNFINNKEL [83] y fue redescubierta y ampliamente desarrollada por CURRY [35] a partir de 1927. En retrospectiva, podemos ver su trabajo como una versión escueta del cálculo lambda sin tipos, que evita completamente el uso de variables. A partir de un

surtido básico de términos llamados 'combinadores', la única manera de construir otros nuevos es la aplicación: podemos aplicar cualquier término f a cualquier término t y conseguir un término $f(t)$.

Para construir un lenguaje de programación TURING-completo, en una configuración tan empobrecida, necesitamos un surtido suficiente de combinadores. Notablemente, basta utilizar tres. De hecho, es posible utilizar *un* solo combinador hábilmente elegido –pero esta proeza no es particularmente esclarecedora, así que describimos un conjunto de tres comúnmente usados.

El primero, llamado I, actúa como la identidad, puesto que viene con la regla de reescritura:

$$I(a) = a$$

para cada término a.

El segundo, llamado K, da una función constante $K(a)$ para cada término a. Ee decir, viene con una regla de reescritura $K(a)(b) = a$ para cada término b.

El tercero, llamado S, es complicado. Toma tres términos, aplica el primero al tercero y aplica el resultado al segundo aplicado al tercero:

$$S(a)(b)(c) = a(c)(b(c)).$$

Más tarde se comprobó que el cálculo de combinadores puede ser inmerso en el cálculo lambda sin tipos, como sigue:

$$\begin{aligned} I &= (\lambda x, x), \\ K &= (\lambda x, (\lambda y, x)), \\ S &= (\lambda x, (\lambda y, (\lambda z, x(z)(y(z))))). \end{aligned}$$

Luego, las reglas de reescritura para estos combinadores siguen de las reglas de reescritura en el cálculo lambda. Más sorprendente aun ¡cualquier función computable mediante el cálculo lambda puede también ser computada usando sólo I, K y S! Aunque no necesitamos este hecho para entender las teorías lineales de tipos, no nos resistimos a bosquejar la prueba, ya que es un clásico ejemplo de la utilización de combinadores para evitar el uso explícito de la abstracción lambda.

Nótese que todas las variables en las fórmulas de cálculo lambda para I, K y S son variables ligadas. Más generalmente, en el cálculo lambda definimos un **combinador** como un término en el cual todas las variables son variables ligadas. Dos combinadores c y d son **extensionalmente equivalentes** si dan el mismo resultado

para cualquier entrada: es decir, para cualquier término t, podemos aplicar las reglas de reescritura de cálculo lambda, a $c(t)$ y $d(t)$ de una forma que conduce al mismo término.

Hay un proceso llamado 'eliminación de abstracción' que toma a cualquier combinador en el cálculo lambda y produce uno extensionalmente equivalente, construido a partir de I, K y S. Eliminación de abstracción funciona tomando un término $t = (\lambda x.u)$ con una simple abstracción lambda y reescribiéndolo en la forma $(\lambda x.\ f(x))$, donde f no tiene ninguna instancia de la abstracción lambda. A continuación, podemos aplicar reducción eta, que determina que $(\lambda x.f(x)) = f$. Esto permite escribir a t como un término f que no involucra a la abstracción lambda.

Utilizaremos la notación $[[u]]_x$ para significar 'cualquier término f que satisfaga $f(x) = u$.

Hay tres casos a considerar; cada caso justifica la definición de combinador:

1. $t = (\lambda x.x)$. Podemos reescribir esto como $t = (\lambda x.I(x))$; así, $t = [[x]]_x = I$.
2. $t = (\lambda x.u)$, donde u no depende de x. Podemos reescribir esto como $t = (\lambda x.K(u)(x))$; así, $t = [[u]]_x = K(u)$.
3. $t = (\lambda x.u(v))$, donde u y v pueden depender de x. Podemos reescribir esto como $t = (\lambda x.(([[u]]_x x)([[v]]_x x))$ ó $t = (\lambda x.S([[u]]_x)([[v]]_x)(x))$; así $t = S([[u]]_x)([[v]]_x)$.

Podemos eliminar todo uso de la abstracción lambda de cualquier término en varias ocasiones, usando estas tres reglas 'de adentro hacia afuera'. Para ver cómo funciona esto, considere el término en lambda $t = (\lambda x.(\lambda y.\mathrm{y}))$, que admite dos entradas y devuelve la segunda. Usando las reglas anteriores tenemos:

$$\begin{aligned}
(\lambda x.(\lambda y.y)) &= (\lambda x.(\ \lambda y.[[y]]_y(y))) \\
&= (\lambda x.(\ \lambda y.I(y))) \\
&= (\lambda x.I) \\
&= (\lambda x.[[I]]_x(x)) \\
&= (\lambda x.K(I)(x) \\
&= K(I).
\end{aligned}$$

Podemos comprobar que funciona como se quería: $K(I)(x)(y) = I(y) = y$.

Ahora volvamos a nuestro tema principal: las teorías lineales de tipos. De los tres factores descritos anteriormente, sólo I es conveniente para el uso en una categoría monoidal simétrica cerrada arbitraria. La razón es que K borra los datos, mientras que S los duplica. Podemos ver esto directamente de las reglas de reescri-

tura que cumplen:

$$\begin{aligned} K(a)(b) &= a \\ S(a)(b)(c) &= a(c)(b(c)). \end{aligned}$$

Cada teoría lineal de tipos tiene un conjunto de 'combinadores' básicos, que ni duplican ni borran datos. Puesto que las teorías lineales de tipos generalizan a las lambda-teorías con tipos, estos combinadores básicos tienen tipos. AMBLER los escribe utilizando una notación que se asemeja a la notación de morfismos en teoría de categorías.

Por ejemplo, dados dos tipos X y Y en una teoría lineal de tipos, hay un tipo producto tensorial $X \otimes Y$. Esto es análogo a un tipo producto en el cálculo lambda con tipos. En particular, dados un término s de tipo X y un término t de tipo Y, podemos combinarlos para formar un término del tipo $X \otimes Y$, que denotamos como $(s \otimes t)$. Redistribuimos los paréntesis en los productos tensoriales iterados utilizando el siguiente combinador básico:

$$\mathrm{assoc}_{X,\,Y,\,Z}\colon (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z).$$

Este combinador viene con la siguiente regla de reescritura:

$$\mathrm{assoc}_{X,\,Y,\,Z}((s \otimes t) \otimes u) = (s \otimes (t \otimes u))$$

para todos los términos $s : X$, $t : Y$ y $u : Z$.

Por supuesto, el combinador básico $\mathrm{assoc}_{X,\,Y,\,Z}$ es una versión ligeramente sofisticada del asociador familiar, de la teoría de categorías.

De hecho, todos los combinadores básicos provienen de transformaciones naturales o dinaturales, implícitas en la definición de 'categoría monoidal simétrica cerrada'. Además de éstos, cualquier teoría lineal de tipos también tiene combinadores llamados 'símbolos de función'. Estos provienen de los morfismos particulares a una categoría determinada.

Por ejemplo, supongamos que en alguna categoría el producto tensorial $X \otimes X$ es en realidad el producto cartesiano. Entonces la teoría lineal de tipos correspondiente, debería tener un símbolo de función

$$\Delta_X\colon X \to X \otimes X$$

que nos permite duplicar datos de tipo X, junto con símbolos de función

$$p: X \otimes X \to X, \qquad p': X \otimes X \to X$$

que proyectan sobre el primer y segundo factores. Para asegurar de que éstos funcionen según lo deseado, podemos incluir reglas de reescritura:

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= (s \otimes s), \\ p(s \otimes t) &= s, \\ p'(s \otimes t) &= t. \end{aligned}$$

Así, aunque la duplicación y eliminación de datos no son 'características incorporadas' de las teorías lineales de tipos, podemos incluirlas cuando se desee.

Utilizando combinadores, podríamos intentar diseñar un lenguaje de programación adecuado para categorías monoidales simétricas cerradas que evite, por completo, el uso de variables. AMBLER sigue un camino diferente. Conserva las variables en su formalismo, pero juegan un papel muy diferente –y mucho *más simple*– que lo que hacen en el cálculo lambda. Su única función es ayudar a decidir cuales términos se deben contar como equivalentes. Además, abstracción lambda no desempeña ningún papel en las teorías lineales de tipos, Así, no se presenta, para nada, el asunto de variables libres vs variables ligadas. En cierto sentido, todas las variables son libres. Además, cada término contiene a cualquier variable dada, a lo sumo, una vez.

Después de estas reflexiones, esperamos que el lector esté listo para un tratamiento más formal de las teorías de tipo lineal.

Una **teoría lineal de tipos** tiene tipos, combinadores, términos y reglas de reescritura. Los tipos corresponderán a los objetos en una categoría monoidal simétrica cerrada, mientras que las clases de equivalencia de combinadores corresponderán a morfismos. Los términos y reglas de reescritura sólo se utilizan para definir la relación de equivalencia.

En primer lugar, se define al conjunto de **tipos** inductivamente, como sigue:

- **Tipos Básicos:** Hay un conjunto arbitrariamente elegido, de tipos llamados **tipos básicos.**
- **Tipos Producto:** Dados los tipos X y Y, hay un tipo $(X \otimes Y)$.
- **Tipos Función:** Dados los tipos X y Y, hay un tipo $(X \multimap Y)$.
- **Tipo trivial:** Hay un tipo I.

Puede haber ecuaciones entre tipos, pero exigimos que:

- *Si* $X = X'$ *y* $Y = Y'$, *entonces* $X \otimes Y = X' \otimes Y'$.
- *Si* $X = X'$ *y* $Y = Y'$, *entonces* $X \multimap Y = X' \multimap Y'$.

En segundo lugar, una teoría lineal de tipos tiene, para cada par de tipos X y Y, un conjunto de **combinadores** de la forma f: $X \to Y$, éstos son definidos por las siguientes reglas inductivas:

- Dados los tipos X y Y hay un conjunto de f: $X \to Y$, arbitrariamente elegidos, llamados **símbolos de función**.
- Dado los tipos X, Y y Z tenemos los siguientes combinadores, llamados **combinadores básicos:**
  - id_X: $X \to X$
  - $\mathrm{assoc}_{X, Y, Z}$: $(X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$.
  - $\mathrm{unassoc}_{X, Y, Z}$: $X \otimes (Y \otimes Z) \to (X \otimes Y) \otimes Z$
  - $\mathrm{braid}_{X, Y}$: $X \otimes Y \to Y \otimes X$
  - left_X: $I \otimes X \to X$
  - unleft_X: $X \to I \otimes X$
  - right_X: $X \otimes I \to X$
  - $\mathrm{unright}_X$: $X \to X \otimes I$
  - $\mathrm{eval}_{X, Y}$: $X \otimes (X \multimap Y) \to Y$
- Si f: $X \to Y$ y g: $Y \to Z$, son combinadores, entonces $(g \circ f)$: $X \to Z$ es un combinador.
- Si f: $X \to Y$ y g: $X' \to Y'$ son combinadores, entonces $(f \otimes g)$: $X \otimes X' \to Y \otimes Y'$ es un combinador.
- Si f: $X \otimes Y \to \mathrm{Z}$ es un combinador, entonces podemos **encurryr** a f para obtener un combinador $\tilde{f}$: $Y \to (X \multimap \mathrm{Z})$.

Generalmente no debe causar confusión si omitimos a los subíndices de los combinadores básicos. Por ejemplo, podemos escribir simplemente 'assoc' en lugar de $\mathrm{assoc}_{X, Y, Z}$.

En tercer lugar, una teoría lineal de tipos tiene un conjunto de términos de cualquier tipo dado. Como de costumbre, escribimos $t : X$, para decir que t es una expresión de tipo X. los términos se definen inductivamente como sigue:

- Para cada tipo X hay una colección de variables de tipo X, infinita, contable. Si x es una variable de tipo X, entonces $x : X$.
- Hay un término 1 con $1 : I$.
- Si $s : X$ y $t : Y$, entonces hay un término $(s \otimes t)$ con $(s \otimes t) : X \otimes Y$, mientras ninguna variable aparezca tanto en s como en t.
- Si f: $X \rightarrow Y$ es un combinador y t : X , entonces hay un término $f\,(t)$ con $f(t)$: X.

Nótese que cualquier variable dada, puede aparecer, a lo sumo, una vez en un término.

En cuarto y último lugar, una teoría lineal de tipos tiene **reglas de reescritura** entre términos del mismo tipo. Como en nuestro tratamiento del cálculo lambda con tipos, sólo nos importa aquí, la relación de equivalencia ~ generada por estas reglas de reescritura. Esta relación de equivalencia debe tener todas las propiedades que se enumeran a continuación.

En lo que sigue, decimos que un término es **básico** si no contiene combinadores. Ese término es sólo un producto tensorial iterado de distintas variables, tal como

$$(z \otimes ((x \otimes y) \otimes w)).$$

Estas son las propiedades que debe tener la relación de equivalencia ~:

- Si $t \sim t'$ entonces t y t' deben ser términos del mismo tipo, que contienen las mismas variables.
- La relación de equivalencia es **sustitutiva:**
  - Dados términos $s \sim s'$, una variable x de tipo X y términos $t \sim t'$ de tipo X, cuyas variables no aparecen ni en s ni en s', se tiene $s[t/x] \sim s'[t'/x]$.
  - Dado un término básico t con el mismo tipo que una variable x, si ninguna de las variables de t aparecen en los términos s ó s' y $s[t/x] \sim s'[t/x]$, entonces $s \sim s'$.
- La relación de equivalencia es **extensional**: Si f: $X \multimap Y$, g: X $\multimap$ Y y eval($t \otimes f$) ~ eval($t \otimes g$) para todos los términos básicos $t : X$, entonces $f \sim g$.
- Se tiene:

- $\mathrm{id}(s) \sim s$
- $(g \circ f)(s) \sim g(f(s))$
- $(f \otimes g)(s \otimes t) \sim (f(s) \otimes g(t))$
- $\mathrm{assoc}((s \otimes t) \otimes u) \sim (s \otimes (t \otimes u))$
- $\mathrm{unassoc}(s \otimes (t \otimes u)) \sim ((s \otimes t) \otimes u)$
- $\mathrm{braid}(s \otimes t) \sim (t \otimes s)$
- $\mathrm{left}(1 \otimes s) \sim s$
- $\mathrm{unleft}(s) \sim (1 \otimes s)$
- $\mathrm{right}(s \otimes 1) \sim s$
- $\mathrm{unright}(s) \sim (s \otimes 1)$
- $\mathrm{eval}(s \otimes f(t)) \rightarrow f(s \otimes t)$.

Nótese que los términos pueden tener variables que aparecen en cualquier lugar entre ellos. Por ejemplo, si x, y, z son variables de tipo X, Y y Z y f: $Y \otimes Z \rightarrow W$, es un símbolo de función, entonces

$$\mathrm{braid}(x \otimes f(y \otimes z))$$

es un término del tipo $W \otimes X$. Sin embargo, cada término t equivale a un término de la forma $\mathrm{cp}(t)(\mathrm{vp}(t))$, donde $\mathrm{cp}(t)$ es la **parte combinadora** de t y $\mathrm{vp}(t)$ es un término básico llamado la **parte variable** de t. Por ejemplo, el término anterior es equivalente a

$$\mathrm{braid} \circ (\mathrm{id} \otimes (f \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id})))(x \otimes (y \otimes z)).$$

Las partes combinadora y variable pueden ser computadas inductivamente como sigue:

- Si x es una variable de tipo X, $\mathrm{cp}(x) = \mathrm{id}: X \rightarrow X$.
- $\mathrm{cp}(1) = \mathrm{id}: I \rightarrow I$.
- Para todos los términos s y t, $\mathrm{cp}(s \otimes t) = \mathrm{cp}(s) \otimes \mathrm{cp}(t)$.
- Para cualquier término s: X y cualquier combinador f: $X \rightarrow Y$, $\mathrm{cp}(f(s)) = f\mathrm{cp}(s)$.
- Para cualquier término s: X y cualquier combinador f: $X \rightarrow Y$, $\mathrm{cp}(f(s)) = f\mathrm{cp}(s)$.

- vp(1) = 1.
- Para todos los términos s y t, vp($s \otimes t$) = vp(s) $\otimes$ vp(t).
- Para cualquier término s: X y cualquier combinador f: $X \to Y$, vp($f(s)$) = vp(s).

Ahora, supongamos que tenemos una teoría lineal de tipos.

El primer resultado principal de AMBLER es este: hay una categoría monoidal simétrica donde los objetos son tipos y los morfismos son clases de equivalencia de combinadores. La relación de equivalencia entre combinadores se define como sigue: dos combinadores f, g: $X \to Y$, son equivalente si y sólo si

$$f(t) \sim g(t)$$

para algún término básico t de tipo X. De hecho, AMBLER muestra que $f(t) \sim g(t)$ para algún término básico $t : X$ si y sólo si $f(t) \sim g(t)$ para todos de tales términos básicos.

El segundo resultado principal de AMBLER, describe cómo podemos construir una teoría lineal de tipos, de cualquier categoría monoidal simétrica cerrada, **C**.

Supongamos que **C** tiene composición $\square$, producto tensorial $\bullet$, hom interno $\multimap\!\!\bullet$ y objeto unidad ι. Consideremos a los tipos básicos de nuestra teoría lineal de tipos, como los objetos de **C**. Tomemos como ecuaciones entre tipos, aquellas generadas por:

- $\iota = I$.
- $A \bullet B = A \otimes B$.
- $A \multimap\!\!\bullet B = A \multimap B$.

Los morfismos de **C** serán los símbolos de función. Tomamos como nuestra relación de equivalencia entre términos, a la relación de equivalencia más pequeña permitida tal que:

- $1_A(x) \sim A$.
- $(g \square f)(x) \sim g(f(x))$.
- $(f \bullet g)(x \otimes y) \sim (f(x) \otimes g(y))$.
- $a_{A, B, C}((x \otimes y) \otimes z) \sim (x \otimes (y \otimes z))$.
- $b_{A, B}(x \otimes y) \sim (y \otimes x)$.
- $l_A(1 \otimes x) \sim x$.

- $r_A(x \otimes 1) \sim x$.
- $\mathrm{ev}_{A,B}(x \otimes \tilde{f}(y))\, f(x \otimes y)$.

Así, definimos

- id = 1.
- assoc = a.
- unassoc = a^{-1}.
- braid = b.
- left = l.
- unleft = l^{-1}.
- right = r.
- unright = r^{-1}.
- eval = ev.
- $g \circ f = g \,\square\, f$.

¡Y listo!

AMBLER también demuestra que este procedimiento es el 'inverso' de su procedimiento para convertir las teorías lineales de tipos, en categorías monoidales simétricas cerradas. Más precisamente, describe una categoría de categorías monoidales simétricas cerradas (que es bien conocida) y también una categoría de teorías lineales de tipos. Construye funtores yendo y viniendo entre éstas, en base a los procedimientos que se han esbozado y demuestra que estos funtores son inversos, salvo isomorfismo natural. Así, estas categorías son 'equivalentes'.

En esta sección nos hemos centrado en categorías monoidales simétricas cerradas. ¿Qué hay de las categorías cerradas que son monoidales trenzadas o simplemente monoidales? Aunque no hemos comprobado los detalles, pensamos que se pueden obtener lenguajes de programación adaptados a estos tipos de categorías, a partir del formalismo de AMBLER, mediante la eliminación de diversas características.

Para resolver el caso monoidal trenzada, la respuesta obvia es quitar la regla AMBLER de reescritura para el combinador 'braid' y agregar dos reglas de reescritura correspondientes a las ecuaciones hexagonales (véase sección 2.4 para éstas).

Para resolver el caso monoidal, la respuesta obvia es eliminar por completo,

al combinador 'braid' y a todas las reglas de reescritura que lo involucran. De hecho, JAY [53] dio un lenguaje adecuado para categorías monoidales cerradas en 1989; El trabajo de AMBLER se basa en esto.

5 Conclusiones

En este trabajo hemos bosquejado cómo puede servir la Teoría de Categorías para aclarar analogías entre Topología, Física, Lógica e Informática. Cada campo tiene su propio concepto de 'cosa' (objeto) y 'proceso' (morfismo) –y estas cosas y procesos están organizados en categorías que comparten muchas características comunes. Para mantener nuestra tarea manejable, nos centramos en aquellas características que están presentes en cada categoría monoidal simétrica cerrada. Tabla 4, una versión ampliada de la piedra de Rosetta, muestra algunas de las analogías que encontramos.

Teoría de Categorías	**Física**	**Topología**	**Lógica**	**Informática**
objeto X	espacio HILBERT X	variedad X	proposición X	tipo de datos X
morfismo $f: X \to Y$	operador $f: X \to Y$	cobordismo $f: X \to Y$	demostración $f: X \to Y$	programa $f: X \to Y$
producto tensorial de objetos: $X \otimes Y$	espacio Hilbert del sistema mixto: $X \otimes Y$	Unión disjunta de variedades: $X \otimes Y$	conjunción de proposiciones: $X \otimes Y$	producto de tipos de datos: $X \otimes Y$
producto tensorial de morfismos: $f \otimes g$	procesos en paralelo: $f \otimes g$	unión disjunta de cobordismos: $f \otimes g$	demostraciones llevadas en paralelo: $f \otimes g$	programas ejecutados en paralelo: $f \otimes g$
hom interno: $X \multimap Y$	espacio Hilbert de 'anti-X and Y': $X^* \otimes Y$	unión disjunta de X con Y, con orientaciones contrarias: $X^* \otimes Y$	proposición condicional: $X \multimap Y$	tipo función: $X \multimap Y$

Tabla 4: La piedra de Rosetta (versión ampliada)

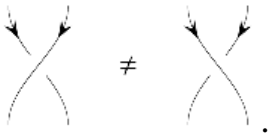
Sin embargo, sólo hemos arañado la superficie. Hay mucho más que decir

sobre categorías dotadas con estructura adicional y de cómo podemos utilizarlas para fortalecer los vínculos entre Topología, Física, Lógica e Informática –sin mencionar lo que sucede cuando vamos desde categorías a *n*-categorías.

Pero la diversión comienza cuando explotamos estas analogías con ideas nuevas y sorprendentes conexiones. He aquí, un ejemplo.

En la década de 1980, WITTEN [99] se dio cuenta de que la Teoría de Cuerdas estaba profundamente conectada a una Teoría Quántica Topológica de Campos 3d y así, la teoría de nudos y marañas [65]. Esto condujo a una explosión enorme de trabajo, que en última instancia fue destilada en un hermoso cuerpo de resultados que se centró en una cierta clase de categorías monoidales trenzadas compactas llamadas 'categorías tensoriales modulares' [16], [97].

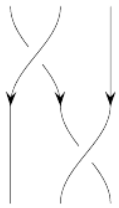
Todo esto podría parecer de interés puramente teórico, si no fuera por el hecho de que películas delgadas superconductoras, en campos magnéticos, parecen mostrar un efecto –el 'efecto HALL quántico fraccional'– que puede ser muy bien modelado con la ayuda de dichas categorías [92], [93]. En pocas palabras, la idea es que las excitaciones de estas películas pueden actuar como partículas, llamadas 'fulanones' (Inglés: anyons). Cuando dos fulanones intercambian lugares, el resultado depende de cómo lo hacen:



Así, colecciones de fulanones son descritas ¡por objetos en una categoría monoidal trenzada! Los detalles dependen de cosas como la intensidad del campo magnético; el abanico de posibilidades puede elaborarse con la ayuda de categorías tensoriales modulares [76], [79].

Por ahora esto es todo sobre Física y Topología. Informática entró en el juego alrededor del 2000, cuando FREEDMAN, KITAEV, LARSEN y WANG [41] demostraron que ciertos sistemas de fulanones podrían funcionar como 'computadores quánticos universales'. Esto significa que, en principio, se pueden elaborar cómputos arbitrarios intercambiando fulanones. Hacer esto *en la práctica* no será nada fácil. Sin embargo, Microsoft ha creado una unidad de investigación llamada proyecto Q tratando de lograrlo. Después de todo, un computador quántico de trabajo, podría tener enormes consecuencias prácticas.

Pero independientemente de que la computación quántica topológica llegue a ser práctica alguna vez, las implicaciones son maravillosas. Un simple diagrama como este:



,

ahora puede ser visto como un *proceso quántico*, una *maraña*, una computación o un morfismo abstracto en cualquier categoría monoidal trenzada. Este es el tipo de cosa que se esperaría en una ciencia general de sistemas y procesos.

Referencias

[1] H. ABELSON, G. J. SUSSMAN and J. SUSSMAN, *Structure and Interpretation of Computer* Programs, MIT Press, 1996. Available at http://mitpress.mit.edu/sicp/.

[2] S. ABRAMSKY, Abstract scalars, loops, and free traced and strongly compact closed categories, in *Pro*ceedings *of CALCO 2005,* Lecture Notes in Computer Science **3629,** Springer, Berlin, 2005, 1-31.Also available at http://web.comlab.ox.ac. uk /oucl/work/samson.abramsky/calco05.pdf.

[3] S. ABRAMSKY and B. COECKE, A categorical semantics of quantum protocols, available at arXiv:quant-ph/0402130.

[4] S. ABRAMSKY and R. DUNCAN, A categorical quantum logic, to appear in *Mathematical Structures in Computer Science*, 2006. Also available as arXiv: quant-ph/0512114.

[5] S. ABRAMSKY, E. HAGHVERDI and P. SCOTT, Geometry of interaction and linear combinatory algebras, *Math. Struct. Comp. Sci*. **12** (2002), 625-665.Also available at http://citeseer.ist.psu.edu/491623.html.

[6] S. ABRAMSKY and N. TZEVELOKOS, Introduction to categories and categorical logic, in this volume. Also available at http://web.comlab.ox.ac.uk/people/Bob. Coecke/AbrNikos.pdf.

[7] S. AMBLER, *First order logic in symmetric monoidal closed categories*, Ph.D. thesis, U. of Edinburgh, 1991. Available at http://www.lfcs.inf.ed.ac.uk/reports/92/ ECS-LFCS-92-194/.

[8] M. F. ATIYAH, Topological quantum field theories, *Publ*. Math. IHES *Paris* **68** (1989), 175-186.

M. F. ATIYAH, *The Geometry* and *Physics of Knots,* Cambridge U. Press, Cambridge, 1990.

[9] J. BAEZ, An introduction to spin foam models of quantum gravity and *BF* theory, in Geometry and Quantum *Physics,* eds. H. Gausterer and H. Grosse, Springer, Berlin, 2000, pp. 25-93.Also available at arXiv:gr-qc/9905087.

[10] J. BAEZ, Higher-dimensional algebra and Planck-scale physics, in *Physics Meets Philosophy* at the Planck Length, eds. C. Callender and N. Huggett, Cambridge U. Press, Cambridge, 2001, pp. 177-195.Also available as arXiv:gr-qc/ 9902017.

[11] J. BAEZ, Quantum quandaries: a category-theoretic perspective, in *Structural Foundations of Quantum Gravity,* eds. S. French, D. Rickles and J. Saatsi, Oxford U. Press, Oxford, 2006, pp. 240-265. Also available as arXiv:quant-ph/0404040.

[12] J. BAEZ, Classical versus quantum computation, U. C. Riverside seminar notes by D. Wise. Available a http://math.ucr.edu/home/baez/qg-fall2006/ and http: //math.ucr.edu/home/baez/qg-winter2007

[13] J. BAEZ and J. DOLAN, Higher-dimensional algebra and topological quantum field theory, *Jour.* Math. *Phys.* **36** (1995), 6073-6105.Also available as arXiv:q-alg/9503002.

[14] J. BAEZ and L. LANGFORD, Higher-dimensional algebra IV: 2-tangles, *Adv. Math*. **180** (2003), 705-764.Also available as arXiv:q-alg/9703033.

[15] J. BAEZ and A. LAUDA, A prehistory of *n*-categorical physics, to appear in proceedings of Deep Beauty: Mathematical Innovation and the Search for an Underlying Intelligibility of the Quantum World, Princeton, October 3, 2007, ed. Hans Halvorson. Also available at http://math.ucr.edu/home/baez/history.pdf.

[16] B. BAKALOV and A. KIRILLOV, Jr., *Lectures on Tensor Categories and Modular Functors*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001. Preliminary version available at http://www.math.sunysb.edu/~kirillov/tensor /tensor.html.

[17] H. BARENDREGT, The Lambda Calculus, its Syntax and Semantics, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[18] M. BARR and C. WELLS, *Toposes, Triples and Theories*, Springer Verlag, Berlin, 1983. Revised and corrected version available at http://www.cwru.edu/artsci/math/wells/pub/ttt.html.

[19] J. S. BELL, On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox, *Physics* ***1*** (1964), 195-200.

[20] J. L. BELL, *The Development of Categorical Logic,* available at http://publish.uwo.ca/~jbell/catlogprime.pdf.

[21] N. BENTON, G. M. BIERMAN, V. DE PAIVA and J. M. E. HYLAND, Linear lambda-calculus and categorical models revisited, in *Computer* Science *Logic (CSL92)*, *Selected Papers,* Lecture Notes in Computer Science **702,** Springer, Berlin, 1992, pp. 61-84.Also available at http://citeseer.ist.psu.edu/benton92linear.html

[22] N. BENTON, G. BIERMAN, V. DE PAIVA and M. HYLAND, *Term Assignment for Intuitionistic Linear Logic,* Technical Report 262, University of Cambridge Computer Laboratory, August 1992. Also available at http://citeseer.ist.psu.edu/1273.html.

[23] G. BIERMAN, *On Intuitionistic Linear Logic,* PhD Thesis, Cambridge University. Available at http://research.microsoft.com/~gmb/Papers/thesis.pdf.

[24] R. BLUTE and P. SCOTT, Category theory for linear logicians, in *Linear Logic in Computer* Science, eds. T. Ehrhard, J.-Y. Girard, P. Ruet, P. Scott, Cambridge U. Press, Cambridge, 2004, pp. 3-64.Also available at http://www.site.uottawa.ca/~phil /papers/catsurv.web.pdf.

[25] S. N. BURRIS and H. P. SANKAPPANAVAR, *A Course in Universal Algebra*, Springer, Berlin, 1981. Also avail-able at http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/ualg.html.

[26] V. CHARI and A. PRESSLEY, *A Guide to Quantum Groups,* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[27] E. CHENG and A. LAUDA, *Higher-Dimensional Categories: an Ilustrated Guidebook*. Available at http://www.dpmms.cam.ac.uk/~elgc2/guidebook/.

[28] M. A. NIELSEN and I. L. CHUANG, *Quantum Computation and Quantum Information,* Cambridge U. Press, Cambridge, 2000.

[29] A. CHURCH, An unsolvable problem of elementary number theory, *Amer. Jour. Math*. **58** (1936), 345363.

[30] B. COECKE, De-linearizing linearity: projective quantum axiomatics from strong compact closure, *Proceedings of the 3rd International Workshop on Quantum Programming Languages (QPL 2005),* Elsevier, 2007, pp. 4972. Also available as arXiv:quant-ph/0506134.

[31] B. COECKE, Kindergarten quantum mechanics, to appear in *Proceedings of QTRF-I.* Also available as arXiv:quant-ph/0510032.

[32] B. COECKE and E. O. PAQUETTE, POVMs and Naimarks theorem without sums, to appear in *Proceedings of the 4th International Workshop on Quantum Programming Languages (QPL 2006).* Also available as arXiv:quant-ph/0608072.

[33] B. COECKE and D. PAVLOVIC, Quantum measurements without sums, to appear in *The Mathematics of Quantum Computation and Technology,* eds. Chen, Kauman and Lomonaco, Taylor and Francis. Also available as arXiv:quant-ph/0608035.

[34] R. L. CROLE, *Categories for Types,* Cambridge U. Press, Cambridge, 1993.

[35] H. B. CURRY and R. FEYS, *Combinatory Logic,* Vol. I, North-Holland, Amsterdam, 1958.

H. B. CURRY, J. R. FINDLEY and J. P. SELDING, *Combinatory Logic,* Vol. II, North-Holland,Amsterdam, 1972.

[36] P. CVITANOVIC, *Group Theory*, Princeton U. Press, Princeton, 2003. Available at http://www.nbi.dk/GroupTheory/.

[37] R. DI COSMO and D. MILLER, Linear logic, *Stanford Encyclopedia of Philosophy,* available at http://plato.stanford.edu/entries/logic-linear/

[38] M. DORCA and A. VAN TONDER, Quantum computation, categorical semantics and linear logic, available as arXiv:quant-ph/0312174.

[39] S. EILENBERG and G. M. KELLY, Closed categories, in *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra (La Jolla, 1965),* Springer, Berlin, 1966, pp. 421-562.

[40] S. EILENBERG and S. MAC LANE, General theory of natural equivalences, *Trans. Amer. Math. Soc*. **58** (1945), 231-294.

[41] M. FREEDMAN, A. KITAEV, M. LARSEN and Z. WANG, Topological quantum computation, available as arXiv:quant-ph/0101025.

M. FREEDMAN, A. KITAEV and Z. WANG, Simulation of topological field theories by quantum computers, *Comm.* Math. *Phys.* **227** (2002), 587-603. Also available as arXiv:quant-ph/0001071.

M. FREEDMAN, A. KITAEV and Z. WANG, A modular functor which is universal for quantum computation, *Comm. Math. Phys.* **227** (2002), 605-622.Also available as arXiv:quant-ph/0001108.

[42] P. FREYD and D. YETTER, Braided compact monoidal categories with applications to low dimensional topology, *Adv. Math*. **77** (1989), 156-182.

[43] J.-Y. GIRARD, Linear logic, *Theor. Comp.* Sci. **50** (1987), 1-102.Also available at http://iml.univ-mrs.fr/girard/linear.pdf.

[44] J.-Y. GIRARD, Y. LAFONT and P. TAYLOR, *Proofs* and *Types,* Cambridge U. Press, Cambridge, 1990. Also available at http://www.monad.me.uk/stable/Proofs %2BTypes.html.

[45] K. GÖDEL, Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, *Ergebnisse eines mathematischen Koloquiums* **4** (1933), 34-38.

[46] R. GOLDBLATT, *Topoi: the Categorial Analysis of Logic,* North-Holland, New York, 1984. Also available at http://cdl.library.cornell.edu/cgi-bin/cul.math/docviewer?did=Gold010.

[47] D. GOTTESMAN and I. L. CHUANG, Quantum teleportation is a universal computational primitive, *Nature* **402** (1999), 390393. Also available as arXiv:quant-ph/9908010.

[48] M. HASEGAWA, Logical predicates for intuitionistic linear type theories, *Typed Lambda Calculi and Applications: 4th International Conference, TLCA99*,

ed. J.-Y. Girard, Lecture Notes in Computer Science **1581,** Springer, Berlin, 1999. Also available at http://citeseer.ist.psu.edu/187161.html.

[49] A. HEYTING, ed., *L. E. J. Brouwer: Colected Works 1: Philosophy and Foundations of Mathematics*, Elsevier, Amsterdam, 1975.

[50] B. HILKEN, Towards a proof theory of rewriting: the simply-typed 2 - calculus, *Theor. Comp. Sci*. **170** (1996), 407-444.

[51] J. R. HINDLEY and J. P. SELDIN, *Lambda-Calculus and Combinators: An Introduction*, Cambridge U. Press, Cambridge, 2008.

[52] W. A. HOWARD, The formulae-as-types notion of constructions, in *To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, eds. J. P. Seldin and J. R. Hindley, Academic Press, New York, 1980, pp. 479-490.

[53] C. B. JAY, Languages for monoidal categories, *Jour.* Pure *Appl. Alg.* **59** (1989), 61-85.

[54] C. B. JAY, The structure of free closed categories, *Jour. Pure Appl. Alg.* **66** (1990), 271-285.

[55] A. JOYAL and R. STREET, The geometry of tensor calculus I, *Adv. Math*. **88** (1991), 55-113.

A. JOYAL and R. STREET, The geometry of tensor calculus II. Available at

http://www.math.mq.edu.au/street/GTCII.pdf.

[56] A. JOYAL and R. STREET, Braided monoidal categories, *Macquarie Math Reports* 860081 (1986). Available at http://rutherglen.ics.mq.edu.au/~street/JS86.pdf.

A. JOYAL and R. STREET, Braided tensor categories, *Adv. Math*. **102** (1993), 20-78.

[57] D. KAISER, *Drawing Theories Apart*: *The Dispersion of Feynman Diagrams in Postwar Physics*, U. Chicago Press, Chicago, 2005.

[58] C. KASSEL, *Quantum Groups,* Springer, Berlin, 1995.

[59] L. H. KAUFFMAN, *Knots* and *Physics,* World Scientic,Singapore, 1991.

[60] L. H. KAUFFMAN and S. LINS, *Temperley-Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds,* Princeton U. Press, Princeton, 1994.

[61] G. M. KELLY and S. MAC LANE, Coherence in closed categories, *Jour. Pure Appl. Alg.* **1** (1971), 97-140 and 219.

[62] G. M. KELLY and M. L. LAPLAZA, Coherence for compact closed categories, *Jour. Pure Appl. Alg.* **19** (1980), 193-213.

[63] S. KLEENE, λ-definability and recursiveness, *Duke Math. Jour.* **2** (1936), 340-353.

[64] J. KOCK, *Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories*, London Mathematical Society Student Texts **59,** Cambridge U. Press, Cambridge, 2004.

[65] T. KOHNO, ed., *New Developments in the Theory of Knots,* World Scientific,Singapore, 1990.

[66] J. LAMBEK, From λ-calculus to cartesian closed categories, in *To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, eds. J. P. Seldin and J. R. Hindley, Academic Press, New York, 1980, pp. 375-402.

[67] J. LAMBEK and P. J. SCOTT, *Introduction to Higher-order Categorical Logic,* Cambridge U. Press, Cambridge, 1986.

[68] P. LANDIN, A correspondence between ALGOL 60 and Church's lambda-notation, *Comm. ACM 8* (1965), 89101,158-165.

[69] F. W. LAWVERE, *Functorial Semantics of Algebraic Theories*, Ph.D. Dissertation, Columbia University, 1963. Also available at http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/5/tr5abs.html.

[70] T. LEINSTER, A survey of definitions of *n*-category, *Th. Appl. Cat*. **10** (2002), 1-70.Also available as arXiv:math/0107188.

[71] S. MAC LANE, Natural associativity and commutativity, *Rice Univ. Stud.* **49** (1963) 28-46.

[72] S. MAC LANE, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, Berlin, 1998.

[73] P. MELLIES, Axiomatic rewriting theory I: a diagrammatic standardisation theorem, in *Processes, Terms and Cycles: Steps on the Road to Infinity*, Lecture Notes in Computer Science **3838,** Springer, 2005, pp. 554-638.Also available at http://www.pps.jussieu.fr/mellies/papers/jwkfestschrift.pdf.

[74] J. MCCARTHY, Recursive functions of symbolic expressions and their computation by machine, Part I, *Comm. ACM* **4** (1960), 184-195.Also available at http: //www-formal.stanford.edu/jmc/recursive.html.

[75] C. MCLARTY, *Elementary Categories, Elementary Toposes,* Clarendon Press, Oxford, 1995.

[76] G. MOORE and N. READ, Nonabelions in the the fractional quantum Hall eect, *Nucl. Phys.* ***B*** **360** (1991), 362-396.

[77] J. MOSCHOVAKIS, Intuitionistic logic, *Stanford Encyclopedia of Philosophy,* available at http://plato.stanford.edu/entries/logic-intuitionistic/.

[78] R. PENROSE, Applications of negative dimensional tensors, in *Combinatorial Mathematics and its Applications*, ed. D. Welsh. Academic Press, 1971, pp. 221-244.

R. PENROSE, Angular momentum: an approach to combinatorial space-time, in *Quantum Theory and Beyond,* ed. T. Bastin. Cambridge U. Press, 1971, pp. 151-180.

R. PENROSE, On the nature of quantum geometry, in *Magic Without Magic,* ed. J. Klauder, Freeman, 1972, pp. 333-354.

R. PENROSE, Combinatorial quantum theory and quantized directions, in *Advances in Twistor Theory*, eds. L. Hughston and R. Ward, Pitman Advanced Publishing Program, 1979, pp. 301-317.

[79] E. ROWELL, R. STONG and Z. WANG, On classification of modular tensor categories, available as arXiv:0712.1377.

[80] P. SCOTT, Some aspects of categories in computer science, in *Handbook of Algebra*, Vol. 2, ed. M. Hazewinkel, Elsevier, Amsterdam, 2000. Also available at http://www.site.uottawa.ca/phil/papers/handbook.ps.

[81] S. SAWIN, Links, quantum groups and TQFTs, *Bul. Amer. Math. Soc*. **33** (1996), 413-445. Also available as arXiv:q-alg/9506002.

[82] A. SCHALK, What is a categorical model for linear logic? Available at http://www.cs.man.ac.uk/~schalk/notes/llmodel.pdf.

[83] M. SCHÖNFINKEL, ¨Über die Bausteine der mathematischen Logik, *Math. Ann*. **92** (1924), 305-316.Also available as On the building blocks of mathematical logic, trans. S. Bauer-Mengelberg, in *A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931,* ed. J. van Heijenoort, Harvard U. Press, Cambridge, Massachusetts, 1967, pp. 355-366.

[84] R. A. G. SEELY, Weak adjointness in proof theory, *Applications of Sheaves*, Lecture Notes in Mathematics **753,** Springer, Berlin, 697-701. Also available at http://www.math.mcgill.ca/rags/WkAdj/adj.pdf.

R. A. G. SEELY, Modeling computations: a 2-categorical framework, in *Proc. Symp. Logic Comp. Sci. 1987,* Computer Society of the IEEE, pp. 65-71.Also available at http://www.math.mcgill.ca/rags/WkAdj/LICS.pdf.

[85] G. SEGAL, The definition of a conformal field theory, in *Topology, Geometry and Quantum Field Theory*: Proceedings *of* the *2002 Oxford Symposium in Honour of* the *60th Birthday of Graeme Segal*, ed. U. L. Tillmann, Cambridge U. Press, 2004.

[86] P. SELINGER, Lecture notes on the lambda calculus, available at http://www.mscs.dal.ca/~selinger/papers/#lambdanotes.

[87] P. SELINGER, Dagger compact closed categories and completely positive maps, *Proceedings of the 3rd International Workshop on Quantum Programming Languages (QPL 2005),* Elsevier, 2007, pp. 139-163.Also available at http://www.mscs.dal.ca/~selinger/papers/#dagger.

[88] P. SELINGER and B. VALIRON, A lambda calculus for quantum computation with classical control, *Math. Struct. Comp. Sci*. **13** (2006), 527-552.Also available at http://www.mathstat.dal.ca/~selinger/papers/#qlambda.

[89] M.-C. SHUM, Tortile tensor categories, *Jour. Pure Appl. Alg.* **93** (1994), 57-110.

[90] S. SOLOVIEV, Proof of a conjecture of S. Mac Lane, *Ann. Pure Appl. Logic*

90 (1997), 101-162.

[91] L. SMOLIN, The future of spin networks, *The Geometric Universe: Science, Geometry, and the Work of Roger Penrose,* eds. S. Hugget, P. Tod, and L. J. Mason, Oxford U. Press, Oxford, 1998. Also available as arXiv:gr-qc/9702030.

[92] A. STERN, Anyons and the quantum Hall effect a pedagogical review, *Ann. Phys.* **323** (2008), 204-249 available as arXiv:0711.4697.

[93] M. STONE, ed., *Quantum Hall Effect*, World Scientific, Singapore, 1992.

[94] M. E. SZABO, ed., *Colected Papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland, Amsterdam, 1969.

[95] T. TRIMBLE, *Linear Logic, Bimodules, and Full Coherence for Autonomous Categories*, Ph.D. thesis, Rutgers University, 1994.

[96] A. S. TROELSTRA, *Lectures on Linear Logic,* Center for the Study of Language and Information, Stanford, California, 1992.

[97] V. G. TURAEV, *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds*, de Gruyter, Berlin, 1994.

[98] A. VAN TONDER, A lambda calculus for quantum computation, *SIAM Jour. Comput.* **33** (2004), 1109-1135 Also available as arXiv:quant-ph/0307150.

[99] E. WITTEN, Quantum field theory and the Jones polynomial, *Comm.* Math. *Phys.* **121** (1989), 351-399.

[100] W. K. WOOTTERS and W. H. ZUREK, A single quantum cannot be cloned, *Nature* **299** (1982), 802-803.

[101] D. N. YETTER, *Functorial Knot Theory: Categories of Tangles, Coherence, Categorical Deformations, and Topological Invariants*, World Scientific, Singapore, 2001.

[102] J. BAEZ, and MIKE STAY, *Physics, Topology, Logic and Computation: A Rosetta Stone*, U. C. Riverside seminar notes (2009). available at http://math.ucr.edu/home/baez/rosetta.pdf.

ALEPH SUB – CERO

SERIE DE DIVULGACIÓN

$\aleph_0$ 2014 – II $\aleph_0$

pp. 104 - 132

C – ORTOCENTROS Y SISTEMAS C – ORTOCÉNTRICOS EN PLANOS DE MINKOWSKI

(C – orthocenters and C – orthocentric systems in Minkowski planes)

Tobías de Jesús Rosas Soto[1]

Recepción: Septiembre 2014. Revisión y aceptación: Octubre 2014.

Resumen. Usando la noción de $C-$ortocentro se extienden, a planos de Minkowski en general, nociones de la geometría clásica relacionadas con un triángulo, como por ejemplo: puntos de Euler, triángulo de Euler, puntos de Poncelet. Se muestran propiedades de estas nociones y sus relaciones con la circunferencia de Feuerbach. Se estudian sistemas $C-$ortocéntricos formados por puntos presentes en dichas nociones y se establecen relaciones con la ortogonalidad isósceles y cordal. Además, se prueba que la imagen homotética de un sistema $C-$ortocéntrico es un sistema $C-$ortocéntrico.

Palabras claves: $C-$ortocentro, sistemas $C-$ortocéntricos, planos de Minkowski, puntos de Euler, puntos de Poncelet, Circunferencia de Feuerbach.

Abstract. Using the notion of $C-$orthocenter, the classic euclidean geometry notions related with a triangle, as for example: Euler points; Euler's triangle; and Poncelet's points, are extended to Minkowski planes in general. Properties of these notions and their relations with the Feuerbach's circle, are shown. $C-$orthocentric systems formed by points in the above notions are studied and its relations with the isosceles and chordal orthogonality are established. In addition, there is proved that the homothetic image of a $C-$orthocentric system is a $C-$orthocentric system.

Key words: $C-$orthocenter, $C-$ortocentric systems, Minkowski planes, Euler points, Poncelet's points, Feuerbach circle.

---

[1] Dr. Tobías de Jesús Rosas Soto. Departamento de Matemática, Facultad Experimental de Ciencias Universidad del Zulia. trosas@demat-fecluz.org, tjrosas@gmail.com

1. Introducción.

En 1960, E. Asplun y B. Grünbaum introdujeron las nociones de S_X-ortocentro y sistemas S_X-ortocéntricos en planos de Minkowski estrictamente convexos y suaves, y mostraron algunas propiedades de las mismas (ver [5]). En 2007, la matemática M. Spirova y el matemático H. Martini establecieron que la condición de suavidad podía ser omitida, y mostraron una serie de teoremas de $C-$ortocentricidad relacionados con la circunferencia de Feuerbach y otras circunferencias relacionadas con los triángulos en planos de Minkowski estrictamente convexos (ver [8]).

En el presente año (2014), los matemáticos T. Rosas y W. Pacheco mostraron en [15] que la condición de convexidad estricta también puede ser omitida para definir la noción de $C-$ortocentro en planos de Minkowski en general y por tanto, la de sistemas $C-$ortocéntricos. Esto les permitió generalizar las nociones de recta de Euler y circunferencia de Feuerbach para planos de Minkowski en general.

En este trabajo se presentan extensiones a planos de Minkowski en general de nociones existentes en la geometría euclidiana clásica relacionadas con un triángulo, que se definen en función del ortocentro del mismo, tales como: puntos de Euler, triángulo de Euler, triángulo medial, puntos de Poncelet y circunferencia de Feuerbach. Se muestra que sustituyendo la noción de ortocentro por la de $C-$ortocentro, tales nociones se pueden definir en planos de Minkowski en general y se prueba la validez de algunas propiedades geométricas que se verifican en la

geometría euclidiana clásica. Además, se estudian algunas propiedades geométricas de los sistemas $C-$ortocéntricos relacionadas con las nociones mencionadas y las ortogonalidades isósceles y cordal.

A pesar que trabajaremos con planos de Minkowski en general y por tanto, las circunferencias asociadas a la norma del plano pueden ser polígonos, con un número par de lados, se utilizará la circunferencia asociada a la norma euclidia en la mayoría de las figuras geométricas que se presentarán para ilustrar, de mejor manera, las ideas de las demostraciones. Para estudiar la geometría en planos de Minkowski y las propiedades básicas de las ortogonalidades isósceles y cordal véanse las referencias [6, 8, 10, 11, 15, 16] y la monografía [1].

Denotemos por $(\mathbf{R}^2, \|\circ\|) = M$ a un plano de Minkowski cualquiera con origen O, circunferencia unitaria C y norma $\|\circ\|$. Para cualquier punto $x \in M$ y $\lambda \in \mathbf{R}^+$, llamemos al conjunto $C(x,\lambda) = x + \lambda C$ la *circunferencia de centro en* x y radio λ. Para $x \neq y$, denotemos por $\langle x, y\rangle$ a la *línea* que pasa por x e y, por $[x, y]$ el *segmento* entre x e y, y por $[x, y\rangle$ el *rayo* que inicia en x y pasa a través de y (ver [15, 16]).

Para puntos $x, y \in M$, se dice que x es *ortogonal isósceles* a y si $\|x+y\| = \|x-y\|$, y lo denotaremos por $x \perp_I y$. De igual forma, x se dice *ortogonal Birkhoff* a y si $\|x+ty\| \geq \|x\|$ para todo $t \in \mathbf{R}$, y lo denotaremos por $x \perp_B y$ (ver [10, 11]). Por otra parte, sean $L_1 = [p_1, q_1]$ y $L_2 = [p_2, q_2]$ cuerdas de

una circunferencia G en M, entonces L_1 y L_2 se dicen *ortogonales cordales* si la línea que pasa a través de q_2 y p'_2 (el opuesto de p_2 en G) es paralela a la línea $\langle p_1, q_1 \rangle$. En caso de que $p'_2 = q_2$, se dirá que L_1 es *ortogonal cordal* a L_2 si existe una línea soporte de G que pase por q_2 y sea paralela a la línea $\langle p_1, q_1 \rangle$. Si q'_2 es el opuesto de q_2 en G, entonces $p'_2 q_2 p_2 q'_2$ es un paralelogramo (ver [8]). Consideraremos la ortogonalidad cordal de forma natural solo con respecto a la circunferencia unitaria C, usando el símbolo $\perp_C$ para esto, es decir, escribir $[p_1, q_1] \perp_C [p_2, q_2]$ automáticamente presupone que $[p_1, q_1]$ y $[p_2, q_2]$ son cuerdas de C. Algunas propiedades necesarias de estas ortogonalidades son las siguientes (ver [8, 10, 11]): para $x, y \in M$ tales que $x \perp_I y$, entonces $y \perp_I x$, es decir, la ortogonalidad isósceles es simétrica; y para toda cuerda $[x, y] \in C$ existe una cuerda $[z, w] \in C$ tal que $[x, y] \perp_C [z, w]$.

Para $p \in M$, denotemos por S_p a la *simetría* con respecto al punto p, dada por la expresión $S_p(w) = 2p - w$ para $w \in M$. $H_{p,k}$ denotará la *homotecia* con centro p y razón k ($k \in \mathbf{R}$), y está dada por $H_{p,k}(w) = (1-k)p + kw$ para $w \in M$. Recordemos que las simetrías son *isometrías* en planos de Minkowski, es decir, $\|S_p(w) - S_p(v)\| = \|w - v\|$ para todo $w, v \in M$ (ver [15, 16]). Para $x, z \in M$, sean e un punto en el segmento $[x, z]$, w uno sobre la prolongación del $[x, z]$ y $z_0 = S_w(z)$. Diremos que los puntos e y w son *conjugados armónicos* de x y z, si $H_{e,-k}(z) = x$ y $H_{w,-k}(z_0) = x$, con $z \in \mathbf{Z}$ (ver [4, 16]).

C - ortocentros y sistemas *C* - ortocéntricos en planos de Minkowski

Para puntos $x_1, x_2, x_3 \in M$ denotemos por $\Delta x_1 x_2 x_3$ al *triángulo* de vértices x_1, x_2, x_3. Si $p_4 \in M$, diremos que el $\Delta p_1 p_2 p_3$ es el p_4-antitriángulo del $\Delta x_1 x_2 x_3$, si $p_i = S_{m_i}(p_4)$ para $i = 1,2,3$, con m_i los puntos medios de los lados del $\Delta x_1 x_2 x_3$. Al $\Delta m_1 m_2 m_3$ lo llamaremos *triángulo medial* del $\Delta x_1 x_2 x_3$. Diremos que p_4 es un *circuncentro* del $\Delta x_1 x_2 x_3$, si $\|p_4 - x_1\| = \|p_4 - x_2\| = \|p_4 - x_3\|$. Si tal p_4 existe, es el centro de una circunferencia que pasa por los vértices del $\Delta x_1 x_2 x_3$, que llamaremos *circunferencia circunscrita* y a su radio el *circunradio* (ver [15, 16]). Denotemos por $C(\Delta x_1 x_2 x_3)$ el conjunto de los circuncentros del $\Delta x_1 x_2 x_3$. Si $p_4 \in C(\Delta x_1 x_2 x_3)$, diremos que x_4 es el $C-$ortocentro del $\Delta x_1 x_2 x_3$ asociado a p_4 si $S_q(p_4) = x_4$, donde q es el punto de simetría del $\Delta x_1 x_2 x_3$ y su p_4-antitriángulo (ver [15, 16]).

El conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ se dirá sistema $C-$ortocéntrico, si existe $p_4 \in C(\Delta x_1 x_2 x_3)$ tal que $S_q(p_4) = x_4$, donde q es el punto de simetría del $\Delta x_1 x_2 x_3$ y su p_4-antitriángulo. Denotemos por $H(\Delta x_1 x_2 x_3)$ el conjunto de $C-$ortocentros del $\Delta x_1 x_2 x_3$. Llamaremos circunferencia de Feuerbach del $\Delta x_1 x_2 x_3$ a la circunferencia que pasa por los puntos medios del $\Delta x_1 x_2 x_3$ y los puntos medios de los segmentos formados por el $C-$ortocentro del $\Delta x_1 x_2 x_3$ y los vértices del mismo (ver [9, 15, 16]).

2. Preliminares.

Los siguientes resultados son necesarios para la investigación.

Lema 2.1: (ver [8]) Para puntos diferentes $x, y, z \in C$, con $z \neq -x$ y $z \neq -y$, las relaciones $[x, z] \perp_C [y, z]$ y $[y, z] \perp_C [x, z]$ se cumplen si y solo si x e y son puntos opuestos en C.

Teorema 2.1: (ver [15, 16]) Sea M un plano de Minkowski. Sean x_1, x_2, x_3 y p_4 puntos en M. Sean m_1, m_2 y m_3 los puntos medios de los segmentos $[x_2, x_3]$, $[x_1, x_3]$ y $[x_1, x_2]$, respectivamente. Definamos los puntos $p_i = S_{m_i}(p_4)$, para $i = 1,2,3$, entonces se cumple lo siguiente:

1. Los segmentos $[x_i, p_i]$ tienen el mismo punto medio q, para $i = 1,2,3$. Además, $2(q - m_i) = x_i - p_4$ para $i = 1,2,3$, es decir, $q = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 - p_4}{2}$.
2. Si $x_4 = S_q(p_4)$, entonces $x_i - x_j = p_j - p_i$ para $\{i, j\} \subset \{1,2,3,4\}$.
3. $x_i - p_j = p_k - x_l$, donde $\{i, j, k,\} = \{1,2,3,4\}$.
4. Si $g = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, entonces $H_{g,-2}(p_4) = x_4$.

Corolario 2.1: (ver [15, 16]) Con la hipótesis del teorema previo, se cumple lo siguiente:

1. Si $x_4 = S_q(p_4)$, entonces $x_4 = x_1 + x_2 + x_3 - 2p_4$.
2. Si $g = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ y $g_1 = \dfrac{p_1 + p_2 + p_3}{3}$, entonces $g_1 = S_q(g)$ y $S_g(p_4) = g_1$.

3. Resultados y pruebas.

En esta sección se presentan los resultados principales del trabajo.

C - ortocentros y sistemas *C* - ortocéntricos en planos de Minkowski

Teorema 3.1: Sean $p_4 \in C(\Delta x_1x_2x_3)$, $\Delta p_1p_2p_3$ el p_4-antitriángulo del $\Delta x_1x_2x_3$, q el punto de simetría de dichos triángulos y $x_4 = S_q(p_4)$, entonces se cumple:

1. Los puntos p_i y x_i son circuncentros de los triángulos $\Delta x_jx_kx_l$ y $\Delta p_jp_kp_l$, para $\{i, j, k, l\} = \{1,2,3,4\}$, respectivamente. Los circunradios de dichos triángulos son iguales entre sí.
2. Los puntos medios de los lados del $\Delta x_jx_kx_l$ y su p_i-antitriángulo, están en la circunferencia de centro q y radio $\|q - m_1\|$, para $\{i, j, k, l\} = \{1,2,3,4\}$.
3. $C(q, \|q - m_1\|) = H_{x_4,\frac{1}{2}}(C(p_4, \|p_4 - x_1\|))$. En particular, $q = H_{x_4,\frac{1}{2}}(p_4)$.

Demostración: 1. Dado que $p_4 \in C(\Delta x_1x_2x_3)$ (ver *Figura* 1) se tiene que $\|p_4 - x_i\| = \alpha$ para $i = 1,2,3$, con $\alpha \in \mathbf{R}$. Por los ítem 2 y 3 del Teorema 2.1, $\|x_4 - p_i\| = \alpha$ y $\|p_j - x_k\| = \alpha$ para $\{i, j, k\} = \{1,2,3\}$. Por tanto, $\|p_i - x_j\| = \alpha$ para $\{i, j\} \subset \{1,2,3,4\}$. Así, $p_i \in C(\Delta x_jx_kx_l)$ y $x_i \in C(\Delta p_jp_kp_l)$ para $\{i, j, k, l\} = \{1,2,3,4\}$.

2. Sea $m_{ij} = \dfrac{x_i + x_j}{2}$ y para $\{i, j\} \subset \{1,2,3,4\}$. Veamos que $C(q, \|q - m_1\|)$ pasa por los puntos medios del $\Delta x_jx_kx_l$ (ver *Figura 1*). Como $\|x_i - p_4\| = \alpha$ para $i = 1,2,3$, entonces por el ítem 1 del Teorema 2.1 tenemos que

$$\|q - m_{ij}\| = \left\| \frac{x_1 + x_2 + x_3 - p_4}{2} - \left(\frac{x_i + x_j}{2} \right) \right\| = \left\| \frac{x_k - p_4}{2} \right\| = \frac{\alpha}{2}$$

para $\{i, j, k\} = \{1,2,3\}$. Supongamos que $i = 4$, entonces por el ítem 1 del Teorema 2.1 obtenemos que

$$\|q - m_{j4}\| = \left\| \frac{x_1 + x_2 + x_3 - p_4}{2} - \left(\frac{x_j + x_4}{2} \right) \right\| = \left\| \frac{x_j + x_k}{2} - q \right\| = \|m_{jk} - q\| = \frac{\alpha}{2}$$

para $\{j, k\} \subset \{1,2,3\}$. De igual forma se razona si $j = 4$.

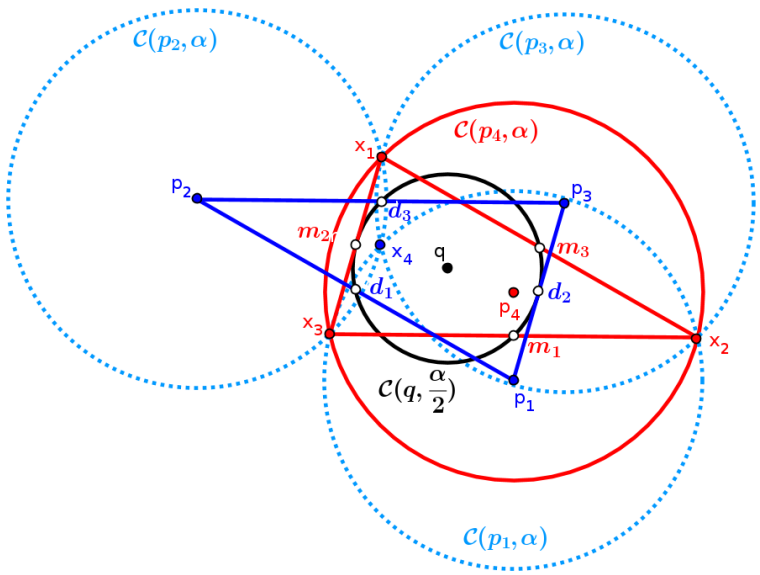


Figura 1: *Circunferencia de los seis puntos* $C(q, \frac{\alpha}{2})$

Veamos que $C(q, \|q - m_1\|)$ pasa por los puntos medios del p_i −antitriángulo del $\Delta\, x_j x_k x_l$. Sean $d_{ij} = \dfrac{p_i + p_j}{2}$, para $\{i, j\} \subset \{1,2,3,4\}$, entonces

$$d_{ij} = \frac{p_i + p_j}{2} = \frac{4q - (x_i + x_j)}{2} = 2q - m_{ij}$$

y por tanto $\|q - d_{ij}\| = \|q - m_{ij}\|$ para $\{i, j\} \subset \{1,2,3,4\}$. Así, obtenemos lo deseado.

3. Tomemos $w \in C(p_4, \|p_4 - x_1\|)$, por tanto $\|p_4 - w\| = \|p_4 - x_1\|$. Veamos que $H_{x_4,\frac{1}{2}}(w) \in C(q, \|q - m_1\|)$. Luego, por hipótesis obtenemos que:

$$\left\|q - H_{x_4,\frac{1}{2}}(w)\right\| = \left\|q - \frac{x_4 + w}{2}\right\| = \frac{1}{2}\|p_4 - w\| = \frac{1}{2}\|p_4 - x_1\|$$

Como $x_1 - p_4 = 2(q - m_1)$ por el ítem 1 Teorema 2.1, entonces $\left\|q - H_{x_4,\frac{1}{2}}(w)\right\| = \|q - m_1\|$ obteniendo lo deseado. □

Un resultado que se obtiene de forma directa del Teorema 3.1 es el siguiente:

Corolario 3.1: Con las hipótesis del teorema anterior se cumple lo siguiente:

1. La circunferencia de los seis puntos (circunferencia de Feuerbach) de los triángulos $\Delta\, p_j p_k p_l$ y $\Delta\, x_j x_k x_l$ coinciden, y su centro es q.
2. $q = \dfrac{x_i + x_j + x_k - p_l}{2}$ para $\{i, j, k, l\} = \{1,2,3,4\}$.
3. $x_i = x_j + x_k + x_l - 2p_i$ para $\{i, j, k, l\} = \{1,2,3,4\}$.

En la geometría euclidiana clásica las nociones de segmentos de Euler y segmentos de Poncelet están intrínsecamente relacionadas con un triángulo, su ortocentro y la circunferencia circunscrita del mismo. Estas se definen como los segmentos formados por un vértice del triángulo y el ortocentro, y el ortocentro y un punto de la circunferencia circunscrita, respectivamente. A los puntos medios de dichos segmentos se les denominan puntos de Euler y puntos de Poncelet, respectivamente.

Como se puede ver en [15, 16], la noción de $C-$ortocentro en planos de Minkowski coincide con la noción de ortocentro en los planos euclídeos. Por tanto, es natural pensar en definir las estructuras antes mencionadas de la siguiente forma:

Definición 3.1: Sean el $\Delta x_1x_2x_3$ en un plano de Minkowski M y $x_4 \in H(\Delta x_1x_2x_3)$. Se llamará *segmento de Euler*, al segmento $[x_i, x_4]$ para $i = 1,2,3$. Al punto medio de dichos segmentos se les llamará *puntos de Euler*.

De manera similar definiremos las nociones de segmentos y puntos de Poncelet por:

Definición 3.2: Sean el $\Delta x_1x_2x_3$ en un plano de Minkowski M, $x_4 \in H(\Delta x_1x_2x_3)$ y $C(p_4, \lambda)$ la circunferencia circunscrita del triángulo, asociada a x_4. Se llamará *segmento de Poncelet*, al segmento $[w, x_4]$, con $w \in C(p_4, \lambda)$. Al punto medio de dichos segmentos se les llamará *puntos de Poncelet*.

Tomando en cuenta estas definiciones, el ítem 2 del Corolario 2.1 y el ítem 2 del Teorema 3.1, podemos ver que es valido el siguiente resultado:

Corolario 3.2: Dado el $\Delta x_1x_2x_3$ y $p_4 \in C(\Delta x_1x_2x_3)$, entonces

1. Cada punto de Euler del $\Delta x_1x_2x_3$ es un punto de Poncelet de este.
2. Cada punto de Euler del p_4-antitriángulo del $\Delta x_1x_2x_3$, es un punto de Poncelet del p_4-antitriángulo.

3. Los puntos de Euler del $\Delta x_1 x_2 x_3$ y su p_4-antitriángulo, están en la circunferencia de los seis puntos del $\Delta x_1 x_2 x_3$.

El siguiente lema muestra ciertas propiedades del triángulo de Euler y el medial de un triángulo dado.

Lema 3.1: Sea el $\Delta x_1 x_2 x_3$, $p_4 \in C(\Delta x_1 x_2 x_3)$ y $x_4 \in H(\Delta x_1 x_2 x_3)$ tal que $x_4 = S_q(p_4)$, donde q es punto de simetría entre el triángulo dado y su p_4-antitriángulo, entonces se cumple:

1. El triángulo de Euler y el medial del $\Delta x_1 x_2 x_3$ son congruentes.
2. q es circuncentro del triángulo de Euler y del triángulo medial del $\Delta x_1 x_2 x_3$. Además, el circunradio de dichos triángulos es la mitad del circunradio del $\Delta x_1 x_2 x_3$.
3. Los puntos p_4 y x_4 son $C-$ortocentro, relacionados con q, del triángulo medial y el triángulo de Euler del $\Delta x_1 x_2 x_3$, respectivamente.
4. El punto $S_{m_i}(x_4)$ está en la circunferencia circunscrita, para todo $i = 1,2,3$, y es diametralmente opuesto al vértice opuesto al lado, es decir, $S_{m_i}(x_4) = S_{p_4}(x_i)$ para $i = 1,2,3$.

Demostración: 1. Sean $d_i = \dfrac{S_{m_j}(p_4) + S_{m_k}(p_4)}{2}$ para $\{i, j, k, l\} = \{1,2,3,4\}$. Se tiene que $d_i - d_j = m_j - m_i$, de manera que los triángulos $\Delta x_1 x_2 x_3$ y $\Delta p_j p_k p_l$ son congruentes (ver *Figura 2*).

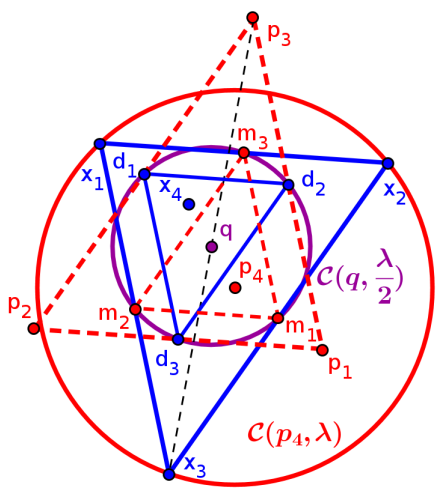


Figura 2: *Demostración de los ítem 1 y 2, Lema 3.1.*

2. Por el ítem 2 del Corolario 2.1, el triángulo medial del p_4 −antitriángulo del $\Delta x_1 x_2 x_3$, es el triángulo de Euler del $\Delta x_1 x_2 x_3$. Por el ítem 2 del Teorema 3.1, los vértices de dichos triángulos están en la circunferencia $C\left(q, \frac{\|p_4 - x_1\|}{2}\right)$. Por tanto, esta es la circunscrita del triángulo de Euler y del medial asociados al $\Delta x_1 x_2 x_3$, y su radio es la mitad del circunradio del $\Delta x_1 x_2 x_3$ (ver *Figura 2*).

3. Sea $\|p_4 - x_i\| = \alpha$ para $i = 1,2,3$, y $w_i = \dfrac{m_j + m_k}{2}$ para $\{i, j, k\} = \{1,2,3\}$. Por el ítem 2 del Teorema 3.1, el punto q es el circuncentro del $\Delta m_1 m_2 m_3$. Además, q'

es el punto de simetría de los triángulos $\Delta m_1 m_2 m_3$ y $\Delta q_1 q_2 q_3$, con $q_i = S_{w_i}(q)$ para $i = 1,2,3$. Por tanto $S_{q'}(q) = p_4$, es decir, p_4 es $C-$ortocentro del triángulo medial $\Delta m_1 m_2 m_3$. Luego, como $d_i = S_q(m_i)$ para $i = 1,2,3$, y $x_4 = S_q(p_4)$, entonces $x_4 \in H(\Delta d_1 d_2 d_3)$ (ver *Figura 3*).

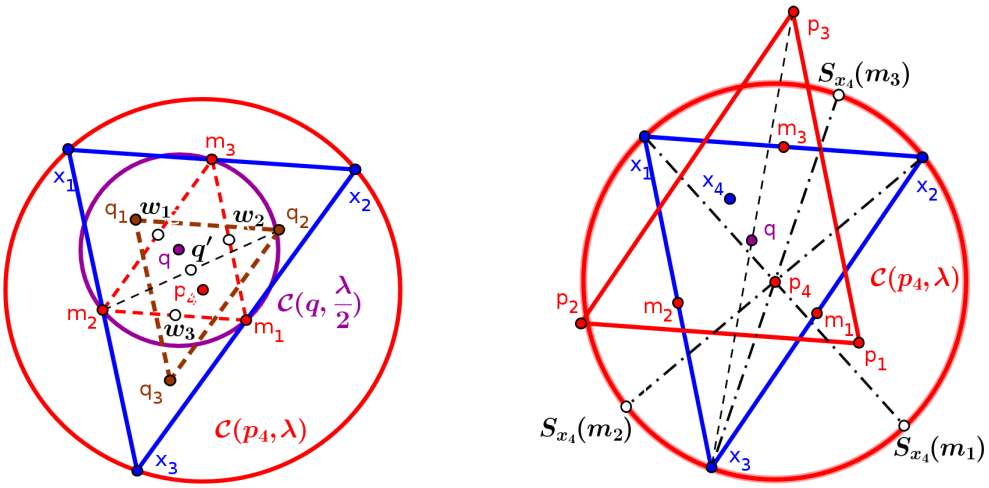


Figura 3: *Demostración de los ítem 3 y 4, Lema 3.1.*

4. Como p_4 es circuncentro del $\Delta x_1 x_2 x_3$, entonces $\|p_4 - x_i\| = \lambda$ para $i = 1,2,3$. Luego, $\|p_4 - S_{m_i}(x_4)\| = \|p_4 - 2m_i + x_4\|$ y, por el ítem 1 del Corolario 2.1, se tiene que $\|p_4 - S_{m_i}(x_4)\| = \|x_i - p_4\| = \lambda$, por tanto $S_{m_i}(x_4) \in C(p_4, \lambda)$ para $i = 1,2,3$ y además, $S_{p_4}(x_i) = 2p_4 - x_i = x_j + x_k - x_4 = S_{m_i}(x_4)$ para $\{i, j, k\} = \{1,2,3\}$ (ver *Figura 3*). □

Una de las cosas más relevantes que muestra el siguiente lema es la conjugación armónica existente entre el centro de la circunferencia de Feuerbach y el circuncentro de un triángulo dado, con el $C-$ortocentro y el baricentro del mismo.

Lema 3.2: Con las mismas hipótesis del lema precedente, sea $C(p_4,\lambda)$ la circunferencia circunscrita del $\Delta x_1x_2x_3$ y m_i el punto medio del segmento $\lfloor x_j, x_k \rfloor$ para $\{i, j, k\} = \{1,2,3\}$, entonces se cumple:

1. El simétrico del punto medio de un lado del triángulo, con respecto al centro de su circunferencia de los seis puntos, es un punto de Euler, es decir, $S_q(m_i)$ es un punto de Euler para $i = 1,2,3$.
2. El simétrico de los vértices del triángulo, respecto del centro de la circunferencia de los seis puntos, es el simétrico de p_4 con respecto al punto medio del lado opuesto, es decir, $S_q(x_i) = S_{m_i}(p_4)$ para $i = 1,2,3$.
3. El centro de la circunferencia de los seis puntos, q, y p_4 son conjugados armónicos respecto del segmento que une al $C-$ortocentro y el baricentro del $\Delta x_1x_2x_3$.
4. Si $\lfloor S_{p_4}(x_i), x_i \rfloor$ es un circundiámetro de $C(p_4,\lambda)$ para $i = 1,2,3$, entonces los puntos $S_{p_4}(x_i)$, m_i y x_4 son puntos colineales, es decir, $x_4 \in \langle S_{p_4}(x_i), m_i \rangle$ para $i = 1,2,3$.

Demostración: 1. Dado que x_4 es $C-$ortocentro del $\Delta x_1 x_2 x_3$ asociado a p_4, entonces por el ítem 1 del Corolario 2.1, $x_4 = x_1 + x_2 + x_3 - 2p_4$. Por el ítem 1 del Teorema 2.1, se tiene que $S_q(m_i) = x_1 + x_2 + x_3 - p_4 - m_i$ para $i = 1,2,3$, es decir,

$$S_q(m_i) = \frac{x_j + x_k}{2} + x_i - p_4 = \frac{x_j + x_k + 2x_i - 2p_4}{2} = \frac{x_i + x_4}{2},$$

por tanto, $S_q(m_i) = \dfrac{x_i + x_4}{2}$ para $i = 1,2,3$, obteniendo lo deseado (ver *Figura 4*).

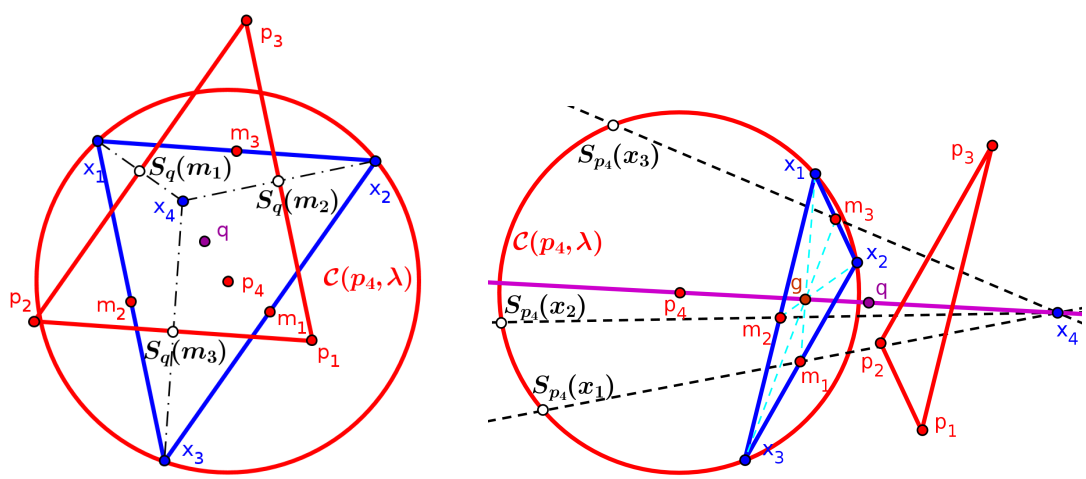


Figura 4: *Demostración del Lema 3.2*

2. Es claro que $S_q(x_i) = 2q - x_i$ para $i = 1,2,3$. Por el ítem 1 del Teorema 2.1, se tiene que

$$S_q(x_i) = x_1 + x_2 + x_3 - p_4 - x_i = x_j + x_k - p_4 = S_{m_i}(p_4).$$

para $\{i, j, k\} = \{1,2,3\}$.

3. Sea g el baricentro del $\Delta x_1 x_2 x_3$. Notemos que

$$H_{g,-2}(q) = 3g - 2q = 3\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) - 2\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 - p_4}{2}\right) = p_4,$$

lo que dice que el segmento $[g, q]$ está contenido 2 veces en el segmento $[p_4, g]$. Luego, por hipótesis, se tiene que $S_q(x_4) = p_4$, es decir, el segmento $[q, x_4]$ está contenido 2 veces en el segmento $[p_4, x_4]$ y, por tanto, q y p_4 son conjugados armónicos de los puntos x_4 y g (ver *Figura 4*).

4. Dado que $x_4 = x_1 + x_2 + x_3 - 2p_4$, entonces

$$x_4 = 2\left(\frac{x_k + x_j}{2}\right) + (-1)(2p_4 - x_i)$$

para $\{i, j, k\} = \{1,2,3\}$, y por tanto $x_4 \in \langle S_{p_4}(x_i), m_i \rangle$ para $i = 1,2,3$. □

El siguiente teorema nos habla un poco sobre la relación de los puntos de Poncelet con la circunferencia de Feuerbach de un triángulo dado.

Teorema 3.2: Sea el $\Delta x_1 x_2 x_3$ en un plano de Minkowski. Sea m_i el punto medio del segmento $\lfloor x_j, x_k \rfloor$ para $\{i, j, k\} = \{1,2,3\}$. Sean $C(p_4, \lambda)$ la circunferencia circunscrita del triángulo y q el punto de simetría del triángulo dado y su p_4 −antitriángulo, entonces:

1. Los puntos de Poncelet del $\Delta x_1 x_2 x_3$ y su p_4 −antitriángulo están en la circunferencia de Feuerbach $C(q, \frac{\lambda}{2})$ del $\Delta x_1 x_2 x_3$.
2. Las circunferencias $C(m_i, \frac{\lambda}{2})$, para $i = 1,2,3$, se intersectan en el punto q.

Demostración: Sea $x_4 \in H(\Delta x_1 x_2 x_3)$ asociado con p_4 y sea $w \in C(p_4, \lambda)$. Definamos $m_w = \dfrac{x_4 + w}{2}$ (ver *Figura 5*) el punto medio del segmento $[x_4, w]$. Es claro que m_w es un punto de Poncelet pues, por el ítem 1 del Corolario 2.1, se tiene que

$$\|q - m_w\| = \left\| \frac{x_1 + x_2 + x_3 - p_4}{2} - \left(\frac{x_4 + w}{2} \right) \right\| = \left\| \frac{p_4 - w}{2} \right\| = \frac{\lambda}{2}$$

y, por tanto, los puntos de Poncelet del $\Delta x_1 x_2 x_3$ están en $C(q, \frac{\lambda}{2})$.

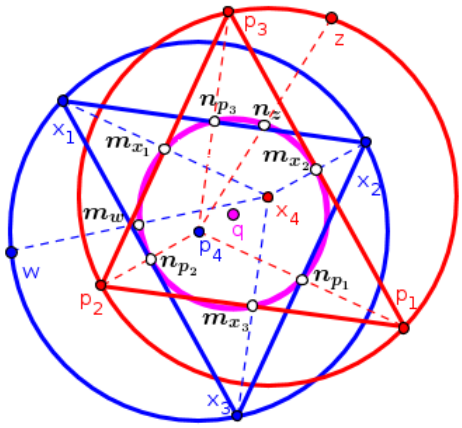


Figura 5: *Puntos de Poncelet del* $\Delta x_1 x_2 x_3$ *y su* $p_4 -$*antitriángulo.*

Notemos que x_4 y p_4 son circuncentro y $C-$ortocentro del antitriángulo, respectivamente. Dado que $S_q(p_4) = x_4$, entonces $S_q(C(p_4, \lambda)) = C(x_4, \lambda)$ (ver

Figura 5). Sea $z \in C(x_4, \lambda)$, existe $r \in C(p_4, \lambda)$ tal que $z = S_q(r)$. Denotemos por n_z al punto medio del segmento $[p_4, z]$, entonces

$$\|q - n_z\| = \left\| q - \left(\frac{p_4 + z}{2} \right) \right\| = \left\| q - \left(\frac{p_4 + (2q - r)}{2} \right) \right\| = \left\| \frac{r - p_4}{2} \right\| = \frac{\lambda}{2},$$

mostrando que los puntos de Poncelet del antitriángulo están en $C(q, \frac{\lambda}{2})$.

Para mostrar que las circunferencias $C(m_i, \frac{\lambda}{2})$ se intersectan en el punto q, para $i = 1,2,3$, basta ver $\|q - m_i\| = \dfrac{\lambda}{2}$. Así,

$$\|q - m_i\| = \left\| \frac{x_1 + x_2 + x_3 - p_4}{2} - \left(\frac{x_j + x_k}{2} \right) \right\| = \left\| \frac{x_i - p_4}{2} \right\| = \frac{\lambda}{2}$$

para $i = 1,2,3$. □

El siguiente lema muestra una serie de sistemas $C-$ortocéntricos formados por puntos relacionados con un triángulo, tales como: puntos de Euler, circuncentro, $C-$ortocentros, puntos medios de los lados del triángulo, etc. Además, muestra algunas relaciones de paralelismo que se cumplen en el sistema $C-$ortocéntrico respectivo.

Lema 3.3: Sea el $\Delta x_1 x_2 x_3$ en un plano de Minkowski. Sea $p_4 \in C(\Delta x_1 x_2 x_3)$ y x_4 el $C-$ortocentro asociado a p_4. Sea m_i el punto medio de los segmentos $\lfloor x_j, x_k \rfloor$ para $\{i, j, k\} = \{1,2,3\}$, entonces se cumple lo siguiente:

C - ortocentros y sistemas *C* - ortocéntricos en planos de Minkowski

1. Existen $q_i \in C\left(m_j, \frac{\lambda}{2}\right) \cap C\left(m_k, \frac{\lambda}{2}\right)$ tales que los puntos q_1, q_2, q_3 y el punto $q = \dfrac{x_4 + p_4}{2}$ (centro de la circunferencia de Feuerbach del $\Delta x_1 x_2 x_3$) forman un sistema $C-$ortocéntrico. Además, se cumplen las siguientes relaciones:

$$q_i - q_j = \frac{1}{2}\left(x_i - x_j\right) \qquad \text{y} \qquad q_i - q = \frac{1}{2}\left(x_i - x_4\right).$$

2. Si $d_i = \dfrac{x_i + x_4}{2}$, entonces $\{d_1, d_2, d_3, x_4\}$ es un sistema $C-$ortocéntrico y además, se cumplen las siguientes relaciones:

$$d_i - d_j = \frac{1}{2}\left(x_i - x_j\right) \qquad \text{y} \qquad d_i - x_4 = \frac{1}{2}\left(x_i - x_4\right).$$

3. El conjunto $\{m_1, m_2, m_3, p_4\}$ es un sistema $C-$ortocéntrico y además, se cumplen las siguientes relaciones:

$$m_i - m_j = \frac{1}{2}\left(p_i - p_j\right) \qquad \text{y} \qquad m_i - p_4 = \frac{1}{2}\left(p_i - p_4\right).$$

Demostración: Definamos los puntos $q_i = H_{p_4, \frac{1}{2}}\left(x_i\right)$ para $i = 1,2,3$. Así, $C\left(p_4, \frac{\lambda}{2}\right)$ es una circunferencia circunscrita del $\Delta q_1 q_2 q_3$ y, por tanto, el punto $q' = H_{p_4, \frac{1}{2}}(q) = \dfrac{q + p_4}{2}$ es el centro de la circunferencia de Feuerbach del $\Delta q_1 q_2 q_3$ y $S_{q'}\left(p_4\right) = q$ es un $C-$ortocentro del mismo triangulo. Por tanto, $\{q_1, q_2, q_3, q\}$ es un sistema $C-$ortocéntrico (ver *Figura 6*).

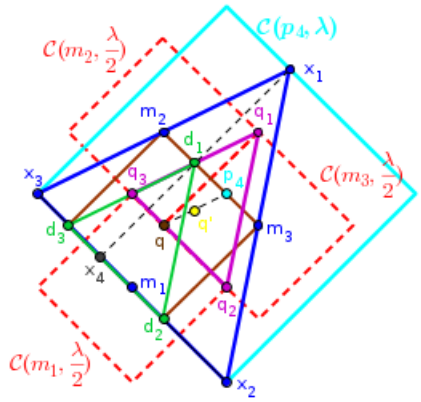


Figura 6: *Demostración del ítem 1, Lema 3.3*

Por otro lado, $q_i \in C\left(m_j, \frac{\lambda}{2}\right) \cap C\left(m_k, \frac{\lambda}{2}\right)$, lo cual se puede verificar viendo que

$$\left\| q_i - m_j \right\| = \left\| \frac{p_4 + x_i}{2} - \left(\frac{x_i + x_k}{2} \right) \right\| = \frac{\left\| p_4 - x_k \right\|}{2} = \frac{\lambda}{2},$$

para $\{i, j, k\} = \{1,2,3\}$. Usando el ítem 1 del Teorema 2.1 y el ítem 3 del Corolario 3.1, se tiene que

$$q_i - q = \frac{p_4 + x_i}{2} - \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 - p_4}{2} \right) = p_4 - \left(\frac{x_j + x_k}{2} \right) = \frac{1}{2}\left(x_i - x_4\right),$$

para $\{i, j, k\} = \{1,2,3\}$. También,

$$q_i - q_j = H_{p_4, \frac{1}{2}}\left(x_i\right) - H_{p_4, \frac{1}{2}}\left(x_j\right) = \frac{x_i - x_j}{2},$$

y por el ítem 2 del Teorema 2.1, entonces

$$q_i - q_j = \frac{1}{2}\left(p_i - p_j\right),$$

verificando así el ítem 1 del lema.

Por otra parte, $d_i = H_{x_4,\frac{1}{2}}(x_i)$ para $i = 1,2,3$ y por tanto, $H_{x_4,\frac{1}{2}}(\Delta x_1 x_2 x_3) = \Delta d_1 d_2 d_3$, de manera que $H_{x_4,\frac{1}{2}}(x_4) = x_4$ es $C-$ortocentro del $\Delta d_1 d_2 d_3$ y así, $\{d_1, d_2, d_3, x_4\}$ es un sistema $C-$ortocéntrico, obteniendo la validez de la primera parte del ítem 2 del lema. Las relaciones faltantes se deducen usando un razonamiento similar al usado en el ítem anterior. Por último, para deducir la validez del ítem 3 se emplea el mismo razonamiento usado en el ítem 2, pero tomando en cuenta que $m_i = H_{p_4,\frac{1}{2}}(p_i)$ para $i = 1,2,3$. □

El siguiente lema muestra una propiedad de ortogonalidad isósceles que cumple todo sistema $C-$ortocéntrico en un plano de Minkowski.

Teorema 3.2: Sea $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ un sistema $C-$ortocéntrico en un plano de Minkowski, entonces

$$(p_i - p_j) \perp_I (p_k - p_l)$$

para $\{i, j, k, l\} = \{1,2,3,4\}$.

Demostración: Sea x_l un circuncentro del $\Delta p_i p_j p_k$, para $\{i, j, k, l\} = \{1,2,3,4\}$, entonces $\|x_l - p_i\| = \|x_l - p_j\|$. Por el ítem 3 del Teorema 2.1, dado que $x_l - p_i = p_j - x_k$ para $\{i, j, k, l\} = \{1,2,3,4\}$, se tiene que $p_i x_j p_j x_k$ es un paralelogramo y por tanto, $(x_l - x_k) \perp_I (p_i - p_j)$ pues

$$\|(x_l - x_k) + (p_i - p_j)\| = \|(x_l - p_j) + (p_i - x_k)\| = 2\|x_l - p_j\|$$

y

$$\|(x_l - x_k) + (p_i - p_j)\| = \|(x_l - p_i) + (p_i - x_k)\| = 2\|x_l - p_i\|.$$

Por el ítem 2 del Teorema 2.1, se tiene que $x_l - x_k = p_k - p_l$ y por tanto, $(p_k - p_l) \perp_I (p_i - p_j)$. □

El siguiente lema muestra una relación intrínseca entre la circunferencia de Feuerbach de un triángulo y las circunferencias circunscritas del triángulo dado y su antitriángulo.

Lema 3.4: Sean el $\Delta x_1 x_2 x_3$ en un plano de Minkowski, $C(p_4, \lambda)$ una circunferencia circunscrita del $\Delta x_1 x_2 x_3$, $\Delta d_1 d_2 d_3$ el p_4 −antitriángulo del triángulo dado y q el punto de simetría de estos, entonces $C(p_4, \lambda)$ es circunferencia circunscrita del $\Delta d_1 d_2 d_3$ si y solo si $q = p_4$.

Demostración: Por hipótesis se tiene que $d_i = S_{m_i}(p_4)$ para $i = 1,2,3$. Supongamos que los triángulos $\Delta x_1 x_2 x_3$ y $\Delta d_1 d_2 d_3$ tienen la misma circunferencia circunscrita $C(p_4, \lambda)$, entonces $x_4 = p_4$ (ver *Figura 7*). Por el ítem 3 del Teorema 3.1, obtenemos que $p_4 = q$.

Recíprocamente, si $p_4 = q$, se tiene que $\|p_4 - m_i\| = \dfrac{\lambda}{2}$ para $i = 1,2,3$. Por tanto,

$$\lambda = \|2p_4 - 2m_i\| = \|p_4 - (2m_i - p_4)\| = \|p_4 - S_{m_i}(p_4)\|.$$

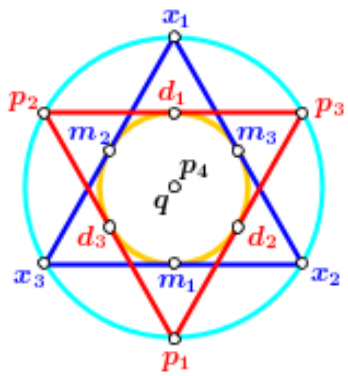


Figura 7: *Demostración del Lema 3.4*

Así, $C(p_4, \lambda)$ es una circunferencia circunscrita del $\Delta\, d_1 d_2 d_3$. □

El siguiente lema muestra ciertas propiedades de ortogonalidad cordal que cumple todo sistema $C-$ortocéntrico en un plano de Minkowski.

Teorema 3.4: Sean M un plano de Minkowski, $\Delta\, p_1 p_2 p_3$ un triángulo de vértices distintos con circuncentro p, y $C-$ortocentro h asociado a p. Sean m_1, m_2, m_3 los puntos medios de los segmentos $[p_2, p_3]$, $[p_3, p_1]$ y $[p_1, p_2]$, respectivamente, y sea C (circunferencia unitaria) la circunferencia de Feuerbach del $\Delta\, p_1 p_2 p_3$, entonces se cumple:

1. Si $C \cap \langle p_i, p_j \rangle = \{m_k, v_k\}$, para $\{i, j, k\} = \{1,2,3\}$, y $C \cap [p_k, h] = \{u_k\}$, $k = 1,2,3$, entonces $[m_k, v_k] \perp_C [v_k, u_k]$.

2. Si $u_k = \dfrac{p_k + h}{2}$ para $k = 1,2,3$, entonces $\lfloor m_i, -m_j \rfloor \perp_C [h, u_k]$ para $\{i, j, k\} = \{1,2,3\}$, y $\lfloor m_i, m_j \rfloor \perp_C \lfloor u_i, -u_j \rfloor$ para $\{i, j\} \subset \{1,2,3\}$.

Demostración: 1. Puesto que h es $C-$ortocentro del $\Delta\, p_1 p_2 p_3$, se tiene un sistema $C-$ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, h\}$. Como p es circuncentro de dicho triángulo, entonces por el Teorema 3.1, se tiene que el centro de la circunferencia de Feuerbach del triángulo está dado por $\dfrac{p+h}{2}$, y como por hipótesis esta circunferencia coincide con la unitaria, se tiene que $O = \dfrac{p+h}{2}$, lo que implica que $p = -h$.

Por el ítem 3 del Corolario 2.1, se tiene que $h = p_1 + p_2 + p_3 - 2p$ y así, $O = p_1 + p_2 + p_3 + h$ de manera que:

$$-\frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{p_3 + h}{2}, \qquad -\frac{p_1 + p_3}{2} = \frac{p_2 + h}{2}, \qquad -\frac{p_2 + p_3}{2} = \frac{p_1 + h}{2}.$$

Como u_k es el punto medio del segmento $[p_k, h]$, se tiene que $u_k = -m_k$ para $k = 1,2,3$ y, por tanto, son puntos opuestos de C. Dado que m_k y v_k están en un mismo lado del triángulo (ver *Figura 8*), entonces $v_k \neq -m_k$. De manera similar $v_k \neq -u_k$, pues de ser iguales se tendría que $v_k = m_k$, lo que contradice la hipótesis. Luego, por la Proposición 2.1, se tiene que $[m_k, v_k] \perp_C [v_k, u_k]$ para $k = 1,2,3$.

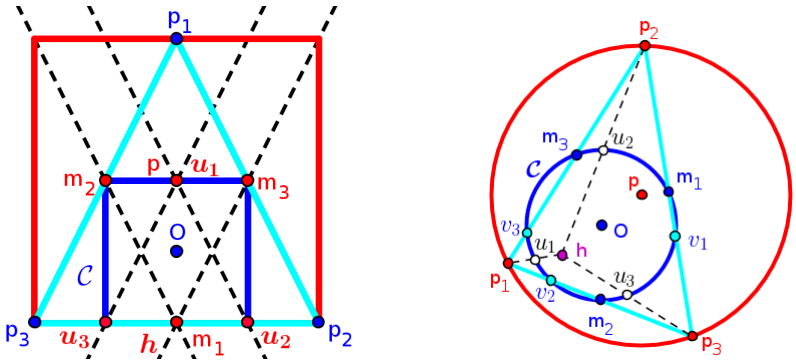


Figura 8: *Demostración del Teorema 3.4*

2. Por el ítem 1 del Teorema 2.1, se tiene que $O = \dfrac{p+h}{2}$. Por el ítem 3 del Corolario 2.1, $h = -p_1 - p_2 - p_3$. Como $u_k = \dfrac{p_k + h}{2}$ entonces

$$-h - u_k = \frac{p_k - h}{2} = \frac{(p_k + p_i) + (p_j + p_k)}{2} = m_i + m_j,$$

para $\{i, j, k\} = \{1,2,3\}$. Así, el vector director de la recta $\langle m_i, -m_j \rangle$ es múltiplo escalar del vector director de la recta $\langle -h, u_k \rangle$, es decir, $[m_i, -m_j]$ es paralelo a $[-h, u_k]$ para $\{i, j, k\} = \{1,2,3\}$ y por tanto, $[m_i, -m_j] \perp_C [h, u_k]$.

Notemos que

$$u_i - u_j = \frac{h + p_i}{2} - \left(\frac{h + p_j}{2}\right) = \frac{p_i - p_j}{2} = \frac{(p_i + p_k) - (p_j + p_k)}{2} = m_i - m_j.$$

De manera que la recta $\langle m_i, m_j \rangle$ es paralela a la recta $\langle u_i, u_j \rangle$ para $\{i, j\} \subset \{1,2,3\}$ y por tanto, $\lfloor m_i, m_j \rfloor \perp_C \lfloor u_i, -u_j \rfloor$ para $\{i, j\} \subset \{1,2,3\}$. □

El siguiente teorema dice que la imagen homotética de un sistema $C-$ortocéntrico, en un plano de Minkowski, es también un sistema $C-$ortocéntrico.

Teorema 3.5: La imagen homotética de un sistema $C-$ortocéntrico es un sistema $C-$ortocéntrico.

Demostración: Sea $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ un sistema $C-$ortocéntrico, entonces existe $x_4 \in C(\Delta\, p_1 p_2 p_3)$ tal que $p_4 = p_1 + p_2 + p_3 - 2x_4$. Sean $H_{w,k}$ una homotecia de centro en un punto w y razón k, $h_i = H_{w,k}(p_i)$ para $i = 1,2,3$, y $y_4 = H_{w,k}(x_4)$. Claramente $y_4 \in C(\Delta\, h_1 h_2 h_3)$ y

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 + h_3 - 2y_4 &= \sum_{i=1}^{3} \left((1-k)w + kp_i\right) - 2\left((1-k)w + kx_4\right) = \\ &= (1-k)w + p_1 + p_2 + p_3 - 2x_4 = (1-k)w + p_4 = h_4 \end{aligned}$$

lo que completa la demostración. □

El siguiente corolario dice que dado un triángulo, con $C-$ortocentro asociado a un circuncentro del mismo, el conjunto formado por los baricentros de los cuatro triángulos que se obtienen con los vértices del triángulo y el $C-$ortocentro dado, es un sistema $C-$ortocéntrico.

Corolario 3.3: Sea $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ un sistema $C-$ortocéntrico en un plano de Minkowski arbitrario. Sea g_i el baricentro y x_i circuncentro del $\Delta\, p_j p_k p_l$ para $\{i, j, k, l\} = \{1,2,3,4\}$. Entonces $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ es un sistema $C-$ortocéntrico y

$$g_i - g_j = \frac{1}{3}(p_j - p_i) = \frac{1}{3}(x_i - x_j).$$

Demostración: Dado que $g_i = \dfrac{p_j + p_k + p_l}{3}$ para $\{i, j, k, l\} = \{1,2,3,4\}$, entonces

$$g_i - g_j = \frac{p_j + p_k + p_l}{3} - \left(\frac{p_i + p_k + p_l}{3}\right) = \frac{p_j - p_i}{3} = \frac{x_i - x_j}{3}.$$

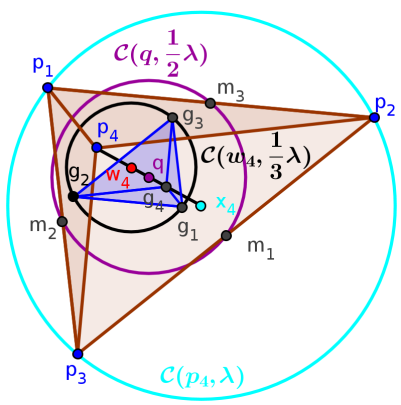


Figura 9: *Sistema $C-$ortocéntrico de baricentros.*

Sea $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ un sistema $C-$ortocéntrico, entonces existe $x_4 \in C(\Delta\, p_1 p_2 p_3)$. Sea q el punto de simetría del $\Delta\, p_1 p_2 p_3$ y su x_4-antitriángulo. Veamos que $g_i = H_{q,-\frac{1}{3}}(p_i)$ para $i = 1,2,3,4$ (ver *Figura 9*):

$$H_{q,-\frac{1}{3}}(p_i) = \frac{4}{3}q - \frac{1}{3}p_i = \frac{4}{3}\left(\frac{x_i + p_i}{2}\right) - \frac{1}{3}p_i = \frac{1}{3}p_i + \frac{2}{3}x_i =$$
$$= \frac{1}{3}\left(p_j + p_k + p_l - 2x_i\right) + \frac{2}{3}x_i = g_i$$

pues por el ítem 3 del Corolario 3.1, $p_i = p_j + p_k + p_l - 2x_i$ para $\{i, j, k, l\} = \{1,2,3,4\}$. Luego, por el Teorema 3.5 se tiene que $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ es un sistema $C-$ortocéntrico. □

Referencias.

[1] A. C. Thompson (1996). *Minkowski geometry*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. **63**. Cambridge University Press. Cambridge. ISBN 0-521-40472-X.

[2] D. Durán (2008). Didascalia geométrica. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. **15**(2), 303-307.

[3] D. Durán (2005). El circulo de los nueve puntos y la recta de Euler. *Divulgaciones Matemáticas*. **13**(1), 73-76.

[4] D. Durán (1990). *Geometría euclidiana plana*. EDILUZ. Maracaibo. Venezuela. ISBN 980-232-237-7.

[5] E. Asplund and B. Grünbaum (1960). On the geometry of Minkowski planes. *Enseign. Math.* **6**, 299-306.

[6] H. Martini, K. J. Swanepoel and G. Weiβ (2001). The geometry of Minkowski spaces - A survey. Part I. *Expositiones Math.* **19**, 97-142.

[7] H. Martini and K. J. Swanepoel (2004). The geometry of Minkowski spaces - A survey. Part II. *Expositiones Math.* **22**, 93-144.

[8] H. Martini and M. Spirova (2010). A new type of orthogonality for normed planes. *Czechoslovak Mathematical Journal*. **60**(2), 339-349.

[9] H. Martini and M. Spirova (2007). The Feuerbach circle and orthocentricity in normed planes. *L'Enseignement Mathematique*. **53**(2), 237-258.

[10] J. Alonso, H. Martini and S. Wu (2012). On Birkhoff ortghogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces. *Aequationes Math*. **83**, 153-189.

[11] J. Alonso (1994). Uniqueness properties of isosceles orthogonality in normed linear spaces. *Ann. Sci. Math. Québec*. **18**(1), 25-38.

[12] R. A. Johson (2007). *Advanced euclidean geometry*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York. ISBN-10: 0-486-46237-4.

[13] R. C. James (1945). Orthogonality in normed linear spaces. *Duke Math. J.* **12**, 291-302.

[14] S. Wu (2009). *Geometry of Minkowski planes and spaces - Selected topics*. Ph. D. Thesis. Chemnitz University of Technology.

[15] Rosas T. y Pacheco W. (2014). Orthocentric systems in Minkowski planes. *Beiträge zur Algebra und Geometrie (BZAG).* DOI 10.1007/s13366-014-0214-6. ISSN 0138-4821.

[16] Rosas T. (2014). Sistemas Ortocéntricos en planos de Minkowski y euclidianidad. Tesis Doctoral. Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Barquisimeto, Venezuela.

ALEPH SUB – CERO
SERIE DE DIVULGACIÓN
$\aleph_0$ 2014 – II $\aleph_0$
pp. 133 - 175

LÓGICA QUÁNTICA OPERATORAL
(Operatoral Quantum Logic)

Adunador: **Alberto Mejías**[1]

…la relación entre las propiedades de un sistema físico, por una parte y las proyecciones, por otra, hace posible una especie de cálculo lógico con éstas.

VON NEUMANN, 1932

Recepción: Agosto 2014. Revisión y aceptación: Septiembre 2014

Resumen. El objetivo de este trabajo es dar una presentación uniforme de lo que llamamos Lógica Quántica Operatoral,[2] destacando, tanto su origen físico concreto, como su estructura puramente matemática. Para establecer un contexto a este tema, reseñamos algo de la evolución histórica de la Lógica Quántica, intentando mostrar cómo se han influenciado y enriquecido mutuamente, los aspectos físicos y matemáticos de la materia.

Descriptores: Teoría Quántica, Lógica Quántica, Informática Quántica, Filosofía Práctica, Teoría de Categorías.

Abstract. The goal of this work is to provide a uniform presentation of what we call Operatoral Quantum Logic, emphasizing both its specific physical origin as its purely mathematical structure. To establish a context to this topic, we review something of the historical evolution of the Quantum Logic, trying to show how the physical and mathematical aspects of the subject have influenced and enriched each other.

Keywords: Quantum Theory, Quantum Logic, Quantum Computing, Practical Philosophy, Categories Theory.

1. INTRODUCCIÓN

---

[1] Alberto R. Mejías E. es Licenciado en Matemáticas, egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes (ULA) Mérida-Venezuela. Es profesor de Topología jubilado de la Universidad de los Andes. alrame59@gmail.com

[2] Es operatoral ¡no, operacional! porque se refiere a operadores, no a operaciones.

Alberto Mejías

El tema de la *Lógica Quántica Operatoral* (LQO) —situada en algún lugar de confluencia de matemáticas, física y filosofía— tiene una historia larga y complicada y ha generado una literatura grande, dispersa y turbulenta. No es algo fácil de explicar en pocas palabras ¡como se supone que debe de ser!

En nuestro mejor intento decimos que LQO comprende:
(a) al hecho de que la estructura de los observables 2-valuados, en Mecánica Quántica Ortodoxa, puede ser útilmente, considerada como una Lógica Proposicional No-Clásica;

(b) al intento de dar motivación independiente, de esta estructura, como parte de un programa general para interpretar Mecánica Quántica (MQ) y

(c) a la rama de la matemática pura que ha surgido de (a) y (b) y ahora se refiere a una variedad de estructuras "ortomodulares", generalización de la lógica de observables quánticos 2-valuados.

Sea lo que sea, Lógica Quántica (LQ) es una parte viva y creciente de Matemáticas Contemporáneas y Física Teórica —una que ha seguido manteniendo el interés de un cuerpo de matemáticos, físicos y filósofos de la ciencia. Este interés sostenido, refleja en parte, al hecho de que las ideas básicas y el lenguaje de LQ producen información para la mayoría de las discusiones acerca de los engorrosos problemas sobre los fundamentos de MQ (de hecho, a un grado que, a menudo, no es reconocido, incluso, por los disertantes). Refleja, también, al hecho de que LQ ha generado una autónoma y fascinante rama de Matemática Pura, involucrada con una variedad de estructuras –retículos ortomodulares (ROM's) y conjuntopos (conjuntos parcialmente ordenados), ortoálgebras, álgebras BOOLE parciales, etc.— que generalizan al retículo $\mathbb{P}(H)$ de las proyecciones en un espacio HILBERT H. Por último, la llegada de Computación Quántica (CQ) y Teoría de Información Quántica (TIQ) ofrece un campo de aplicaciones prácticas de LQ, que todavía tiene que ser explorado.

Históricamente, LQ deriva de la observación (más que casual) por VON NEUMANN, de que los observables 2-valuados, representados en su formulación mecánico-quántica, por operadores proyecciones, constituyen una especie de "lógica" de proposiciones experimentales. Esta idea fue proseguida por BIRKHOFF y VON NEUMANN.

Después de dos décadas de abandono, el interés por LQ fue revivido, debido en gran parte al análisis por MACKEY, del Cálculo Probabilístico de la Teoría Quán-

tica Estándar, acoplado con su Teoría de Representaciones Inducidas.

El desarrollo posterior del tema ha ocurrido en varios niveles y en variadas direcciones. El trabajo de MACKEY fue ampliado significativamente por PIRON, cuyos Teorema de Representación y marco axiomático proporcionaron mucho impulso para el desarrollo posterior. Al mismo tiempo, la insatisfacción con el marco axiomático debido a MACKEY, condujo a una búsqueda de fundamentos más primitivos y más concretamente operatorales. Aquí destaca la labor de FOULIS y RANDALL y también la de LUDWIG y sus colegas en Marburgo.

El trabajo en Física Fundamental también ha estimulado y ha estado estimulado por, la investigación puramente matemática; en particular, en el desarrollo de una teoría abstracta de ROM´s y, en los últimos años, estructuras más generales como ortoálgebras y álgebras de efectos. Más recientemente aún, el tema ha visto la aplicación de poderosas técnicas de Teoría de Categorías.

Dada la variedad algo abrumadora de estos progresos, en este ensayo introductorio, vamos a intentar un esbozo de LQ, que podría ayudar a los lectores que no son expertos en la materia, a entender los diversos documentos que se producen y también, a verlos como pertenecientes a un tema común.

Empezamos comentando el trabajo seminal de BIRKHOFF y VON NEUMANN y su desarrollo por MACKEY. Luego, pasamos a una breve exposición del Teorema de Representación, de PIRON y su marco axiomático, refiriendo al lector a [COECKE and MOORE, 2000] y [VALCKENBORGH, 2000] para exposiciones en un lenguaje categorial (de Teoría de Categorías) más actualizado. A continuación, se discute el trabajo de FOULIS y RANDALL; en particular, su introducción de la noción de ortoálgebra y su observación de que los productos tensoriales de conjuntopos ortomodulares (COM's), generalmente existen sólo como ortoálgebras. El formalismo FOULIS-RANDALL se discute detalladamente en [WILCE, 2000].

Seguimos con una exposición general de la teoría matemáticamente pura, de estructuras ortomodulares. Para más detalles sobre ROM's, ver a [BRUNS and HARDING, 2000], para observables en COM's, a [PTAK, 2000] y para representaciones de grupos sobre álgebras de efectos, a [FOULIS, 2000].

Por último, consideramos a la noción de enriquecimiento categorial y la teoría de quantales, revisados, respectivamente, en [BORCEUX and STUBBE, 2000] y [PASEKA and ROSICKÝ, 2000], antes de introducir los aspectos informáticos y lingüísticos, tratados, respectivamente, en [RESENDE, 2000] y [GUDDER, 2000].

2. MECÁNICA QUÁNTICA VON NEUMANN

Aunque existían tratamientos matemáticos precisos de MQ, antes del tratado monumental de JOHANN VON NEUMANN [1932]; razonablemente, se podría argumentar que este trabajo fijó, de una vez por todas, el marco teórico de Teoría Quántica Estándar, en el que cada sistema mecánico-quántico está asociado a un espacio HILBERT H, cada vector unitario $\psi \in$ H, determina un *estado* del sistema y cada cantidad física observable, asociada con el sistema está representada por un operador autoadjunto A sobre H. El teorema espectral nos dice que un tal operador está asociado con una medida espectral

$$P_A\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}(\mathrm{H}),$$

que asigna a cada conjunto BOREL real B, un operador proyección $P_A(B)$ sobre H.

Para cualquier vector unitario $\psi \in$ H, la cantidad

$$\mu_{A,\,\psi}(B) := \langle P_A(B)\ \psi,\ \psi\rangle$$

define una medida de probabilidad sobre la recta, que VON NEUMANN considera que da la probabilidad de que el observable (representado por) A tiene un valor en el conjunto B, cuando el estado del sistema es (representado por) ψ.

Si la función identidad tiene varianza finita en $\mu_{A,\,\psi}$, ψ está en el dominio de A y el valor esperado de A con respecto a ψ, está dado por

$$\mathrm{Exp}(A,\ \psi) = \int_{\mathbb{R}} s\, d\mu_{A,\,\psi}(s).$$

Se comprueba fácilmente, que esto funciona para $\mathrm{Exp}(A,\ \psi) = \langle \mathrm{A}\ \psi,\ \psi\rangle$.

2.1. Lógica de Proyecciones

Si *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (*Fundamentos Matemáticos de Mecánica Quántica*) había señalado el paso a la madurez de la MQ, señaló también el nacimiento de la LQ. Evidentemente, es la medida con valores proyecciones P_A, más que el operador A, lo que lleva más directamente a la interpretación estadística de la MQ, descrita anteriormente. Ahora, como anota VON NEUMANN, cada proyección $P \in \mathbb{P}(\mathbf{H})$, define un observable —uno con los valores 0 y 1. Si $P = P_A(B)$ es la proyección espectral asociada con un observable A y un conjunto BOREL B, podemos interpretar a este observable como "prueba de ensayo" de si A toma o no, un valor en B.

Lógica Quántica Operatoral

VON NEUMANN considera que P representa a una propiedad física del sistema (o mejor dicho, de los estados del sistema). Comenta:

> "la relación entre las propiedades de un sistema físico, por una parte y las proyecciones, por otra, hace posible una especie de cálculo lógico con éstas. Sin embargo, en contraste con los conceptos de la lógica ordinaria, este sistema se extiende por el concepto de 'Decidibilidad simultánea', que es característico de la Mecánica Quántica." [VON NEUMANN, 1932, p. 253].

En efecto, si P y Q son proyecciones conmutativas, entonces su junta $P \vee Q$ y su concurrencia $P \wedge Q$, en el retículo $\mathbb{P}(\mathrm{H})$, pueden interpretarse clásicamente, como la representación de la opción y de la conjunción entre las propiedades codificadas por P y Q; Además, la proyección $P' = 1 - P$ sirve como una especie de negación de P. Sin embargo, si P y Q no conmutan, entonces no son "simultáneamente decidibles" y el significado de $P \wedge Q$ y de $P \vee Q$ es menos claro. No obstante, $\mathbb{P}(\mathrm{H})$ conserva muchos elementos de un álgebra BOOLE y puede ser considerado como un modelo algebraico para una lógica proposicional no-clásica. En particular, $\mathbb{P}(\mathrm{H})$ es ortocomplementado y, por tanto, satisface leyes análogas a las de DE MORGAN; más precisamente, el sub-ortoretículo generado por cualquier familia de proyecciones mutuamente conmutativas, es un álgebra BOOLE.

2.2. Lógica de Mecánica Quántica

Cabe destacar que VON NEUMANN habla de la simultánea "decidibilidad" (es decir, ensayabilidad) de propiedades, pero no distingue entre propiedades decidibles e indecidibles *per se*. Clásicamente, por supuesto, cualquier subconjunto del espacio de estados, cuenta como una propiedad categórica del sistema y nada, en principio, nos impide tener la misma opinión en MQ. Sin embargo, sólo los subconjuntos del espacio de estados, correspondientes a subespacios lineales cerrados, del espacio HILBERT, son asociados con observables y, así, "decidibles" por medición. Si se adopta un positivismo bastante severo, según el cual ninguna proposición *no* decidible es significativa, se llega a la doctrina aparentemente extraña, de que, para un sistema mecánico-quántico, el conjunto de propiedades significativas forma, no a un álgebra BOOLE, sino, más bien, al retículo $\mathbb{P}(\mathrm{H})$ de las proyecciones en un espacio HILBERT H. Esta idea fue desarrollada por VON NEUMANN en un documento conjunto con GARRETT BIRKHOFF, titulado *The Logic of Quantum Mechanics* [BIRKHOFF and VON NEUMANN, 1936].

BIRKHOFF y VON NEUMANN observan que $\mathbb{P}(H)$ conserva muchas de las características familiares del álgebra de la lógica proposicional clásica —en particular, es ortocomplementado y por lo tanto, cumple con las leyes DE MORGAN. Sin embargo, no es BOOLE; es decir, falla la Ley distributiva.

BIRKHOFF y VON NEUMANN llegan a sugerir que

> "mientras que los logicistas generalmente, han asumido que las propiedades L71-L73 de negación fueron las menos susceptibles de soportar un análisis crítico, el estudio de la mecánica apunta a las identidades distributivas L6 como el eslabón más débil en el álgebra de la lógica." [Birkhoff and von Neumann, 1936, p. 839].

Como veremos en Sección 7, esta observación es algo más profunda que lo que uno pueda imaginar, siendo interpretable en términos de la diferencia fundamental entre álgebras HEYTING y ROM's considerados como generalizaciones de álgebras BOOLE. Esta insinuación de que el retículo de proyecciones puede verse como una lógica proposicional, se ha entendido en un número de maneras muy diferentes. Algunos la han visto como cuestionamiento de la *corrección* de la lógica clásica. Otros la han visto como que implica una menos drástica modificación de la teoría clásica de probabilidades. Como hemos visto, VON NEUMANN mismo [1932 §3.5], es bastante cauteloso, destacando que la equivalencia entre subespacios y proyecciones induce a una *especie* de cálculo lógico. Del mismo modo, BIRKHOFF y VON NEUMANN [1936 §0] concluyen que, mediante argumentos heurísticos, se puede, razonablemente, esperar encontrar un cálculo de proposiciones para sistemas mecánico-quánticos que es *formalmente*, indistinguible del cálculo de subespacios y se *asemeja* al habitual cálculo lógico.

Más radical es la opinión de FINKELSTEIN [1968, 1972], de que la lógica es, en cierto sentido, empírica; una opinión defendida por luminarias filosóficas tales como PUTNAM [1968, 1976]. FINKELSTEIN destaca las abstracciones que hacemos al pasar de la mecánica a la geometría y a la lógica y sugirió que los procesos dinámicos de fractura y flujo, ya observados en los dos primeros niveles, también deben presentarse en el tercero.

PUTNAM, por otra parte, sostiene que las patologías metafísicas de superposición y complementariedad no son más que objetos de contradicciones lógicas generadas por un uso indiscriminado de la ley distributiva.

Este punto de vista de la materia, que sigue siendo popular en algunos reduc-

tos,[3] depende de una lectura de la proyección P como codificación de una *propiedad física* del sistema quántico y, en el supuesto de que sólo las propiedades físicas cuentan, en última instancia, como significativas (o en cualquier caso, como fundamentales). Sin embargo, hay una forma diferente de interpretar a P; a saber, que codifica a una declaración sobre el posible resultado de una "medición". Así, si A es el operador autoadjunto correspondiente al observable $\mathcal{A}$ y $P = P_A(\mathrm{B})$, es la proyección espectral de A, correspondiente al conjunto BOREL B, se podría interpretar a P como codificación de la proposición de que, *si se hace*, una medición de $\mathcal{A}$ produciría un valor en B. Esta interpretación, usualmente denominada *operacional*, guio a MACKEY en su reconstrucción de la Mecánica Quántica VON NEUMANN (MQvN), a la que pasamos ahora.

3. EL PROGRAMA MACKEY

En un influyente artículo [1957], posteriormente ampliado en una monografía [1963], GEORGE MACKEY argumentó:

(a) que se podría reconstruir mayormente, si no todo, el aparato de la MQvN, a partir de la premisa de que las proposiciones experimentales forman un ortoretículo isomorfo a $\mathbb{P}(\mathrm{H})$

y

(b) que esta misma premisa podría estar motivada independientemente, por consideraciones muy generales sobre cómo se deben considerar modelos probabilísticos de sistemas físicos.

3.1. Mecánica Quántica como Cálculo de Probabilidades

MACKEY interpretó MQ como *si fuera* simplemente, un cálculo de probabilidades no clásico, en el cual el álgebra BOOLE de eventos, de la Teoría Clásica de Probabilidades, se sustituye por el retículo $\mathbb{P}(\mathrm{H})$. Más exactamente, MACKEY hizo hincapié en que tanto los estados, como los observables de un sistema mecánico-

[3] Por ejemplo, BAMBERG y STERNBERG [1990, pp. 833-835] escriben: "de hecho, [la Mecánica Quántica] representa la revolución más profunda en la historia de la ciencia, porque modifica las normas elementales de la lógica. . . . La ley distributiva no se mantiene en Lógica Quántica. Como mencionamos anteriormente, la validez de la MQ se ha demostrado experimentalmente, una y otra vez durante los últimos sesenta años. Así que el experimento ha demostrado que se debe abandonar uno de los más preciados principios de lógica, cuando se trata con observables cuánticos."

quántico, pueden definirse, exclusivamente, en términos de $\mathbb{P}(\mathrm{H})$.

En primer lugar, cualquier estado estadístico W determina una medida de probabilidad en $\mathbb{P}(\mathrm{H})$, a saber, la asignación

$$\omega_W\colon \mathbb{P}(\mathrm{H}) \to [0, 1]; \qquad P \to \mathrm{tr}(PW).$$

Un profundo teorema debido a Gleason [Gleason, 1957; DVUREČENSKIJ, 1993] muestra que, recíprocamente, cada medida de probabilidad, σ-aditiva en $\mathbb{P}(\mathrm{H})$ tiene esta forma.

En segundo lugar, un observable con valores en el espacio medible $(S, \mathfrak{F})$, se puede representar por una medida proyecto-valuada (con valores proyecciones)

$$M\colon \mathfrak{F} \to \mathbb{P}(\mathrm{H}),$$

donde, para cada conjunto medible $B \in \mathfrak{F}$, la proyección $M(B)$ se toma para codificar la "proposición experimental": 'una medición del observable da un valor en el conjunto B'. Evidentemente, podemos retrotraer medidas de probabilidad en $\mathbb{P}(\mathrm{H})$, a lo largo de M, para obtener una medida de probabilidad clásica, sobre $\mathfrak{F}$. Interpretamos que $M^*(\omega) = \omega \circ M$, da la distribución estadística de los valores de $M(S)$ cuando el sistema está en el estado representado por ω. En otras palabras,

$$\omega_W(M(B)) = \mathrm{tr}(M(B)W),$$

representa la probabilidad de que el observable representado por M producirá un valor en el conjunto B, *si se mide*, cuando el estado del sistema se representa por W.

Esto conecta con la teoría VON NEUMANN de representación de observables como operadores, en forma natural, como sigue: Si $f\colon S \to \mathbb{R}$ es cualquier variable aleatoria real, acotada, clásica, definida en S, podemos definir al operador autoadjunto

$$A_f := \int_S f(s)\,dM(s),$$

en la forma habitual.[4] Así, para cualquier medida de probabilidad μ en $\mathbb{P}(\mathrm{H})$, tene-

[4] Si f es no negativa, entonces A_f viene dado por el supremo de los operadores $A_g = \Sigma_i\, g_i M(B_i)$, donde $g = \Sigma_i\, g_i \chi B_i$ es una variable aleatoria simple, con $0 \leq g \leq f$.

mos

$$E_{M^*(\mu)}(f) = \int_S f(s)\,dM^*(\mu)(s) = \mathrm{tr}(A_f W),$$

donde W es el operador densidad, correspondiente a μ.

Este punto de vista de la MQ es sorprendentemente poderoso.

El teorema GLEASON, junto con el teorema espectral, los resultados clásicos de STONE, WIGNER, WEYL y VON NEUMANN y el propio trabajo de MACKEY sobre representaciones unitarias inducidas, permiten esencialmente, *derivar* todo el aparato de MQ no relativística (incluyendo su dinámica unitaria, las RCC's, etc.), a partir de la premisa de que la lógica de proposiciones experimentales está representada por el retículo de proyecciones $\mathbb{P}(\mathrm{H})$. Para un esbozo de esta reconstrucción, véase [MACKEY, 1963] o [BELTRAMETTI y CASSINELLI, 1981]; para un recuento detallado, ver [VARADARAJAN, 1968].

3.2. Axiomática MACKEY

No obstante su éxito, la consideración MACKEY de MQ como cálculo de probabilidades todavía se basa en un innegable elemento *ad hoc*: el espacio HILBERT H, mismo. En efecto, una vez que se juega con la idea de que las proposiciones contrastables asociadas a un sistema físico, no tienen que formar un álgebra BOOLE; se abre la puerta a una gran variedad de otras posibilidades. Entonces se convierte en un asunto de urgencia, entender *por qué* la naturaleza (o alguien) debería escoger modelar sistemas físicos en términos de retículos de proyecciones de espacios HILBERT, en lugar de algo más general. MACKEY esbozó un ambicioso programa para hacer esto, deduciendo el modelo de espacio HILBERT, a partir de un conjunto de axiomas más primitivos e, idealmente, más transparentemente plausibles, para un cálculo de eventos.

El marco que adopta MACKEY, es una estructura abstracta $(\mathcal{O}, \mathcal{S}, p)$, donde $\mathcal{O}$ representa al conjunto de los "observables" con valores reales y $\mathcal{S}$ al conjunto de "estados" de un sistema físico. Éstos están conectados por una asignación

$$p\colon \mathcal{O} \times \mathcal{S} \to \Delta\colon (A, s) \mapsto p_A(\,\cdot\,|s)\ ,$$

donde Δ es el conjunto de medidas BOREL de probabilidad, sobre la recta. La interpretación prevista es que $p_A(\,\cdot\,|s)$ da la distribución estadística de los valores de una medición del observable $A \in \mathcal{O}$, cuando el sistema está en el estado $s \in \mathcal{S}$. Podemos tomar el par (A, B), donde $A \in \mathcal{O}$ y B es un conjunto BOREL real, para representar a

la "proposición experimental" de que una medición de A da (daría, ha dado) un valor en B. MACKEY considera a dos de tales proposiciones, equivalentes syss tienen la misma probabilidad en cada estado —en otras palabras, (A_1, B_1) y (A_2, B_2) son equivalentes syss las asignaciones asociadas $P_{A_i, B_i} := p_{A_i}(B_i \mid \cdot\ )$ son iguales. El conjunto L de tales asignaciones $P_{A, B}$, que él llama *cuestiones*, es Lógica Quántica MACKEY.

Ahora, ordenado puntualmente sobre $\mathcal{S}$, el conjunto L es un conjuntopo ortocomplementado con unidad 1 dada por $P_{A, \mathbb{R}}$ para cada observable A, cuya ortocomplementación viene dada por $P'_{A, B} = 1 - P_{A, B} = P_{A, \mathbb{R}\setminus B}$. Digamos que las cuestiones $P, Q \in L$ son *compatibles* syss $P = P_{A, B}$ y $Q = P_{A, C}$ para algún observable común A y algún par de conjuntos BOREL B y C. Entonces podemos considerar a P y Q como "simultáneamente medibles". Además, digamos que las cuestiones $P, Q \in L$, son *ortogonales* (o "disjuntas", en lenguaje MACKEY) syss $P \leq Q'$. En tal caso, escribimos $P \perp Q$. En este punto MACKEY impone su

Axioma V: Si P_i es una familia contable de elementos mutuamente ortogonales, en L, entonces existe un elemento $P \in L$ tal que $P = P_1 + P_2 + \cdots$.

Este axioma garantiza que L es un conjuntopo σ-ortomodular ó un σ-conjuntopo ortomodular (σ-COM) —es decir, L satisface las dos condiciones

(a) Cada familia contable de elementos mutuamente ortogonales $P_i \in L$ tiene una junta (mínima cota superior) $\bigvee_i P_i$ en L y

(b) Si $P \leq Q$, entonces $(Q \wedge P') \vee P = Q$.

En cualquiera de tales conjuntopos L, se pueden definir *medidas de probabilidad*, mediante asignaciones $\mu: L \to [0, 1]$ tales que $\mu(1) = 1$ y, para cualquier familia contable de elementos mutuamente ortogonales, $P_i \in L$, se tiene $\mu(\bigvee_i P_i) = \sum_i \mu(P_i)$. También podemos definir, dados dos cualesquiera σ-COM L y M, una medida M-valuada en L, como una asignación $\alpha: L \to M$ tal que $\alpha(1_L) = 1_M$ y, para cualquier familia contable de elementos mutuamente ortogonales, $P_i \in L$, tenemos $\alpha(\bigvee_i P_i) = \bigvee_i \alpha(P_i)$. Para una discusión general de dichas asignaciones en términos de observables, ver [PTÁK 2000].

Lógica Quántica Operatoral

Volviendo ahora al COM de cuestiones, L, MACKEY observa que

(a) Cada estado $s \in \mathcal{S}$, define una medida de probabilidad $\hat{s}$: $L \to [0, 1]$ por evaluación:

$$\hat{s}(P_{A,B}) = P_{A,B}(s) = p_A(B|s).$$

(b) Cada observable $A \in \mathcal{O}$, define una medida L-valuada P_A: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \to L$, vía $P_A(\mathrm{B}) = P_{A,B}$, sobre los conjuntos BOREL reales (que, constituyendo un σ-algebra BOOLE, constituyen, sin duda, un σ-COM).

Recíprocamente, supongamos que L es *cualquier* σ-COM, y que $\mathcal{S}$ es cualquier conjunto de medidas de probabilidad sobre L, que determinan orden —es decir, $\mu(p) \leq \mu(q)$ para todo $\mu \in \mathcal{S}$, implica $p \leq q$. Sea $\mathcal{O}$ el conjunto de todas las medidas BOREL L-valuadas en la recta y definamos p: $\mathcal{O} \times \mathcal{S} \to \Delta(\mathbb{R})$ por $p_\alpha(B|\mu) = \mu(\alpha(B))$. Entonces la estructura $(\mathcal{O}, \mathcal{S}, p)$ satisface los axiomas MACKEY, y, además, el COM de cuestiones construido a partir de ella, es canónicamente isomorfo a L.

Como se ha observado [FOULIS 1962; GUDDER 1965], los axiomas MACKEY definen la teoría de estructuras determinadas por pares (L, Δ) donde L es un σ-COM y Δ es una familia de medidas de probabilidad que determinan orden sobre L. Dichos pares (habitualmente denominados *lógicas cuánticas* en la literatura matemática en las décadas de 1960 y 1970) han sido estudiados intensamente por muchos autores. Para discusiones detalladas de COM en el contexto de LQ ver [BELTRAMETTI y CASSINELLI 1981; GUDDER 1985; PTÁK 2000; PTÁK y PULMANNOVÁ 1991]. Por supuesto tales LQ's están todavía muy lejos de la LQ *estándar* $\mathbb{P}(\mathrm{H})$. Entre otras cosas, el COM $\mathbb{P}(\mathrm{H})$ es un *retículo completo*: existen juntas arbitrarias, no sólo juntas ortogonales contables. Aun así, se podría esperar que un análisis más profundo — quizás involucrando axiomas adicionales — pudiera conducir a una caracterización significativa y, lo ideal, a una motivación para la LQ estándar. Este fue el objetivo expreso de MACKEY:

> "Idealmente, uno quisiera tener una lista de suposiciones físicamente plausibles, de la cual se pudiera deducir [el modelo de espacio Hilbert]. Debajo de esto, uno quisiera una lista de la cual se pudiera deducir un conjunto de posibilidades..., todas, salvo una, de las cuales podrían ser demostradas incompatibles con experimentos debidamente planificados. Por el momento, dichas listas no están disponibles." [MACKEY 1963, p. 72]

Este tema se encuentra en el corazón de la axiomatización original de PIRON, que se

discutirá en la próxima sección. Por otro lado, como discutiremos en las secciones 5 y 6, el estudio autónomo de dichas estructuras conduce naturalmente a más generalizaciones, en particular, a ortoálgebras y álgebras de efectos. Ahora, antes de dedicarnos a una rápida revisión de algunos de los acontecimientos importantes ocurridos desde la obra fundamental de MACKEY, hagamos algunos comentarios.

En primer lugar y ante todo, la característica principal que separa al formalismo MACKEY de las tendencias actuales en LQO, es la dependencia del primero, de la probabilidad como un concepto *primitivo*. Mientras que se han hecho avances importantes en este contexto, por ejemplo en [PULMANNOVÁ, 1986 a, b; GUDDER y PULMANNOVÁ, 1987; PULMANNOVÁ y GUDDER, 1987], los trabajos más contemporáneos relegan la probabilidad a una noción derivada.[5] Esto no quiere decir que los estados estadísticos son insignificantes en LQO. Sin embargo, han pasado de la situación de un concepto primitivo algo vagamente interpretado, a la de un instrumento estructural bien definido. Aquí puede hacerse mención de la caracterización de los espacios de estados de la LQ estándar, que culmina en la prueba por NAVARA, de la independencia del grupo de automorfismos, del centro y del espacio de estados, de una lógica cuántica [Navara 1992]. Una excepción notable a esta tendencia es la teoría de efectos de decisión, introducida por GÜNTHER LUDWIG durante la revisión de su texto clásico [1954, 1955]. Este trabajo se basa en la clasificación de nociones macroscópicas en piezas preparativas y efectivas que participan en las interacciones de medición mediadas por portadores de acción.

No entraremos en los detalles del esquema axiomático de LUDWIG, sucesivamente refinado en [LUDWIG, 1964, 1967, 1968; DÄHN, 1968; MIELNIK 1968, 1969; STOLZ 1969, 1971; DÄHN, 1972; LUDWIG, 1972] y codificado en el monumental tratado [LUDWIG, 1985, 1987], sino que nos remitiremos a algunas observaciones generales. La noción primitiva de esta teoría es la de una relación de probabilidad definida sobre el producto cartesiano del conjunto de ensambles y el conjunto de efectos; estos dos conjuntos se toman como inmersos en un conveniente par de espacios BANACH.

---

[5] Por ejemplo, mientras que en [PIRON, 1964 §7], la probabilidad generalizada se discute como una útil heurística física, en [JAUCH y PIRON, 1969 §5] los estados se definen como conjuntos maximales de propiedades reales del sistema. Del mismo modo, mientras que el formalismo introducido en [RANDALL y FOULIS, 1970; FOULIS y RANDALL, 1972; RANDALL y FOULIS, 1973] se refiere explícitamente a estadísticas operatorales, en [FOULIS, PIRON y RANDALL, 1983; RANDALL y FOULIS, 1983; FOULIS, GREECHIE y RÜTTIMANN, 1992, 1993] se pone énfasis en el concepto de estados en términos de concomitancias en el espacio de resultados asociado al sistema.

En algún sentido, entonces, la obra de LUDWIG y sus colaboradores corre paralela al campo de LQO tal como la hemos presentado, centrándose más en la estructura analítica funcional del problema que en sus aspectos algebraicos ordenados. Como tal quizá tiene una relación más *formal* con la teoría cuántica algebraica, de SEGAL [1947] y de HAAG y KASTLER [1964], que con las teorías operatorales de PIRON y FOULIS-RANDALL que se debatirán a continuación.

Sin embargo, una característica *física* notable del trabajo de LUDWIG es que trata de lidiar con la noción de mediciones no ideales, utilizando operadores subproyectivos. Nótese que dichos operadores aparecen naturalmente en las discusiones de localizabilidad generalizada [JAUCH y PIRON, 1967; AMREIN, 1969].

Para revisiones generales de diferentes aproximaciones a la Mecánica Quántica Operatoral, ver [GUDDER, 1977, 1979, 1981; LUDWIG y NEUMANN, 1981], para un análisis detallado de la relación entre los enfoques de PIRON y LUDWIG ver [CATTANEO y LAUDISA, 1994; CATTANEO y NISTICÒ, 1993] y para tener una visión general de la aplicación de medidas positivas con valores operadores, a cuestiones, en fundamentos de MQ véase [BUSCH, LAHTI y MITTELSTAEDT, 1991; SCHROECK, 1996].

4. EL TRABAJO DE PIRON

CONSTANTIN PIRON [1964] realizó un progreso significativo en ambos extremos del problema de completar y ampliar el programa MACKEY, lo cual se desarrolló en lo que se conoce como el enfoque de la Escuela de Ginebra, de la Física Quántica.

PIRON caracterizó abstractamente, a los ROM's completos representables como retículos de subespacios cerrados de *espacios HILBERT generalizados*. También proveyó un análisis profundo de las ideas físicas básicas de MQ que ayudaron a motivar a los supuestos necesarios en su teorema de representación, como axiomas generales razonables. En esta sección se describe una versión formal de estos axiomas en el espíritu de [PIRON, 1976], antes de hacer algunas observaciones sobre acontecimientos más recientes.

4.1. El Teorema de Representación

El retículo de proyecciones $\mathbb{P}(H)$ tiene una estructura mucho más regular que el general COM proporcionado por los axiomas MACKEY. En particular, $\mathbb{P}(H)$

(a) es un retículo *completo* —es decir, existen la concurrencia y la junta para cualquier subconjunto de L;

(b) es *atomístico* —es decir, cada elemento de $\mathbb{P}(\mathrm{H})$ es la junta de los átomos (aquí, las proyecciones unidimensionales) por debajo de él;

(c) cumple con la *ley del cubrimiento atómico*: si $P \in \mathbb{P}(\mathrm{H})$ es un átomo y $Q \in \mathbb{P}(\mathrm{H})$, entonces $P \vee Q$ cubre a Q, es decir, es un átomo en el retículo $\{M \in L \mid Q \leq M\}$;

(d) es *irreducible* —es decir, no puede factorizarse como producto directo no trivial. Equivalentemente, ningún elemento de $\mathbb{P}(\mathrm{H})$, que no sea 0 ó 1, conmuta con todos los demás elementos.[6]

En su tesis [PIRON, 1964], PIRON probó un recíproco parcial, es decir que todos los retículos L (de longitud suficiente) pueden ser interpretados como conjuntos de subespacios biortogonales, de un espacio HILBERT generalizado. Explícitamente, considerando la (esencialmente) única inmersión de L en una geometría proyectiva, que preserva la concurrencia y los átomos y aprovechando la realización de espacio vectorial estándar de las geometrías proyectivas de dimensión, por lo menos, tres, mostró que la imagen del retículo original podría caracterizarse por una forma hermiteana definida.[7]

---

[6] Desde luego, no todo sistema mecánico-quántico es irreducible; sino que, en general, se descompone en una familia de sistemas puramente cuánticos, indizados por *reglas de superselección*. Por ejemplo, [Piron 1964] muestra que cada ROM que satisface los axiomas (a) – (c) es unión directa de una familia de retículos irreducibles, siendo su geometría proyectiva unión directa de las geometrías correspondientes. Abstractamente, los sistemas con reglas de superselección discretas, pueden ser tratados tomando medidas con valores proyecciones, en un apropiado álgebra VON NEUMANN $\mathfrak{A}$. Si el ROM inducido $L(\mathfrak{A})$ no contiene a un sumando de tipo I_2, entonces se aplica el teorema GLEASON: cada medida σ-aditiva de probabilidad en $L(\mathfrak{A})$ se extiende únicamente a un estado normal sobre $\mathfrak{A}$ [CHRISTENSEN, 1982; YEADON, 1983]. Para mayor discusión véase, por ejemplo, [BUNCE y HAMHALTER, 1994; BUNCE y WRIGHT, 1994; HAMHALTER, 1993, 1995].

[7] Este desarrollo se ha hecho mucho más físicamente transparente y matemáticamente elegante a partir del trabajo seminal de FAURE y FRÖLICHER [1993, 1994, 1995], donde la construcción de representaciones lineales para las geometrías proyectivas y sus morfismos es elaborada de una manera categorialmente natural. Por ejemplo, una relación de ortogonalidad determina un morfismo de la geometría proyectiva a su dual y así, una aplicación cuasilineal del espacio vectorial subyacente a su dual. De esta manera el producto interno de la MQ, obtiene una base rigurosa y limpia.

Ahora, para un arbitrario espacio producto interno, V, el ortoretículo atomístico completo $L(V)$ de subespacios biortogonales, no tiene que ser ortomodular. Cuando lo es, V se denomina *espacio Hilbert generalizado*. Esta terminología está motivada por otro resultado llamativo; a saber, si V es un espacio producto interno sobre uno de los anillos de división, estándar (es decir, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{H}$), entonces $L(V)$ es ortomodular syss V es completo. Esto fue probado primero por PIRON, usando una hipótesis sobre extensiones de medidas, que resultó ser independiente de la Teoría de Conjuntos ZF; bajo influjo de STONE, más tarde, una prueba geométrica fue obtenida por AMEMIYA y ARAKI [1965].[8] Finalmente, diremos que el formalismo de la Escuela de Ginebra, que fue inspirado por este teorema, ha sido ampliamente aplicado a varios problemas de carácter más o menos concreto, por ejemplo, simetrías [EMCH y PIRON, 1962, 1963], reglas de superselección [PIRON, 1965, 1969], observables [PIRON, 1971; GIOVANNINI y PIRON, 1979; GIOVANNINI, 1981a, b, c], probabilidad *a priori* [PIRON, 1972] y procesos irreversibles [GISIN y PIRON, 1981; GISIN, 1981, 1982 a, b, 1983 a, b].

4.2. Axiomática PIRON

Los axiomas MACKEY producen sólo un COM σ-completo L —lo cual dista mucho del ROM ortomodular atomístico completo, considerado en el Teorema de PIRON. PIRON fue capaz de motivar la estructura adicional necesaria en el contexto de un marco axiomático similar al MACKEY, pero difiriendo de él, en que toma como básico, no el concepto de probabilidad, sino un concepto de *propiedad física*, basado en la *certidumbre* de obtener un resultado experimental. Aquí PIRON, conscientemente, aprovecha el trabajo de DIRAC [1930 §1.2], que da una discusión operatoral de la polarización de la luz, en términos de la certidumbre o, de otra manera, del paso a través de un cristal apropiado y la concepción de EINSTEIN, PODOLSKY y ROSEN [1935], de que los elementos de la realidad son condiciones suficientes para que uno sea capaz de predecir una cantidad física con certidumbre y sin perturbar al sistema.

---

[8] Téngase en cuenta que recientemente, se han encontrado condiciones necesarias y suficientes para que el anillo de división subyacente sea estándar —una de las declaraciones más simples en el caso infinito dimensional, es que el espacio vectorial admite una sucesión ortonormal infinita [SOLÈR, 1995; HOLLAND, 1995; PRESTEL, 1995]; para ver un ejemplo de un espacio HILBERT generalizado no estándar, ver [KELLER, 1980], para una discusión detallada de la geometría de los espacios HILBERT generalizados, ver [GROSS, 1979, 1990] y, para una reseña de otros resultados de compleción, ver [DVUREČENSKIJ, 1992].

PIRON comienza con un conjunto primitivo $\mathcal{Q}$ de cuestiones —que representan proyectos experimentales definidos, que tienen sólo dos resultados posibles, que designamos como *sí* y *no*. Para facilitar la presentación consideremos dado, un conjunto $\mathcal{P}$ de *procedimientos de preparación*.[9] Para $P \in \mathcal{P}$ y $\alpha \in \mathcal{Q}$, escribimos $P \vDash \alpha$ para indicar que la preparación P es tal, que puede predecirse con certidumbre, que la respuesta a la cuestión α, es *sí*. Entonces podemos asociar, a cada cuestión α, la *proposición*

$$[\alpha] = \{P \in \mathcal{P} \mid \mathrm{P} \vDash \alpha\}.$$

Sea $\mathcal{L} := \{[\alpha] \mid \alpha \in \mathcal{Q}\}$ el conjunto de todas esas proposiciones, considerado como conjuntopo con respecto a la inclusión de conjuntos. Nótese que $[\alpha] \subseteq [\beta]$ syss cada preparación que hace válida a α, también hace válida a β. PIRON procede a aducir varios axiomas cuya fuerza es la de hacer a $\mathcal{L}$ un ROM atomístico completo, que satisface la ley de cubrimiento.

$\mathcal{L}$ es un retículo completo. El primero y, probablemente el más novedoso, de estos axiomas; involucra la noción de *cuestión producto*. Dado un conjunto no vacío de cuestiones, su producto es la cuestión $\alpha = \prod A$, definido como sigue: para plantear α, se selecciona, de la manera que se quiera, una cuestión $\beta \in A$ y, planteando esta cuestión, se atribuye a α la respuesta obtenida. El primer axioma de PIRON requiere que $\mathcal{Q}$ sea cerrado con respecto a la formación de cuestiones sobre productos arbitrarios. Un momento de reflexión revela que $[\prod A] = \bigcap_{\beta \in A} [\beta]$. Por lo tanto, $\mathcal{L}$ es cerrado bajo intersecciones arbitrarias y, por tanto, un retículo completo.[10]

Ortocomplementación. Si α es cualquier cuestión, podemos definir una cuestión inversa $\alpha^{\sim}$ intercambiando los papeles de sí y no. PIRON requiere que $\mathcal{Q}$ sea cerrado bajo la formación de inversas. La interpretación prevista nos obliga a suponer que

---

[9] Nótese que esto no es estrictamente necesario, sino que es sólo un expediente para evitar locuciones tales como "si el sistema está o, ha sido preparado, de tal manera que..." Del mismo modo, la identificación usual de proposiciones con clases de equivalencia de cuestiones, está hecha para facilitar la exposición y no debe tomarse formalmente, como una definición.

[10] La operación producto fue introducida primero en [JAUCH and PIRON, 1969]. La concurrencia había sido introducida antes, mediante conjunción semántica [Piron 1964] o filtros límites [Jauch, 1968].

$[\alpha] \cap [\alpha^{\sim}] = \emptyset$. Para asegurar una ortocomplementación sobre $\mathcal{L}$, PIRON introduce otro axioma, a saber, que para cada cuestión α, existe un *complemento compatible* $\beta \in [\alpha]$ que satisface $[\beta^{\sim}] \vee [\alpha] = 1$.[11]

Ortomodularidad. Aparentemente, esto no descarta la posibilidad de que existan varios complementos compatibles para un α dado, no equivalentes. Sin embargo, esto se resuelva por un tercer axioma PIRON

Axioma P*: Si $b < c$ y b'y c' son complementos compatibles para b y c, respectivamente, entonces el subretículo de $\mathcal{L}$, generado por b, c, b', c', es distributivo*.

Se deduce que los complementos compatibles son únicos, definiendo, por tanto una ortocomplementación. Además, el axioma P determina que $\mathcal{L}$ es ortomodular: si $b < c$, entonces $(c \wedge b') \vee b = c$, por la distributividad de $\{b, c, b, c'\}$.

Atomicidad y ley de cubrimiento. PIRON impone la atomicidad del retículo con un axioma *ad hoc* (A1) requiriendo que $\mathcal{L}$ sea atómico —es decir, cada elemento domina al menos a un átomo. También impuso directamente la ley de cubrimiento (como axioma A2), pero con una motivación substancial, como sigue. Sea Σ_L el conjunto de los átomos de L. Ahora, en cada conjuntopo ortocomplementado L, la *aplicación SASAKI* ϕ: $L \times L \rightarrow L$, viene dada por $\phi(a, b) = b \wedge (b' \vee a)$. Si b es fijo, escribimos ϕ_b: $L \rightarrow L$ para asignación $\phi_b\ (a) = \phi(a, b) = b \wedge (b' \vee a)$. Nótese que L es ortomodular syss $\phi_b(a) = a$ para todo $a \leq b$, en cuyo caso $\phi_b(a) \vee b' = a \vee b'$. Con estas observaciones, no es difícil demostrar que un ROM L satisface la ley de cubrimiento atómico syss para todo $a \in L$, tenemos $a \in \Sigma_L$ & $b \not\perp a \Rightarrow \phi_b(a) \in \Sigma_L$. Entonces tenemos una formulación alternativa de la ley de cubrimiento, a saber, que las proyecciones SASAKI asignan átomos a átomos o a 0.

PIRON define al estado del sistema como el conjunto de todas las proposiciones $p = [\alpha]$ que son válidas (en un momento dado, en una situación dada). Naturalmente se requiere que el estado sea cerrado con respecto a la intersección y la ampliación, es decir, que sea un filtro completo en el retículo $\mathcal{L}$. Un tal filtro es

---

[11] El hecho de que un axioma deba ser postulado para garantizar la existencia de una ortocomplementación, se debe al hecho de que los inversos de cuestiones equivalentes no tienen que ser equivalentes. Por ejemplo, $0 \cdot I = 0$ sin embargo $(0 \cdot I)^{\sim} = 0^{\sim} \cdot I^{\sim} = I \cdot 0 = 0$ y $0^{\sim} = I$. Para una discusión de algunas confusiones sobre este punto, ver [FOULIS and RANDALL, 1984].

principal y generado por un átomo. Por lo tanto, los estados pueden ser representados por átomos.[12] 13 Finalmente, diremos que $a, b \in \mathcal{L}$, son compatibles syss $\{a, b, a', b'\}$ es distributiva syss $\phi_b(a) = a \wedge b$. PIRON llama a las cuestiones

(a) *ideales* syss cada proposición compatible con $[\alpha]$, que es válida antes de una medición de α, también es válida después, cuando el resultado de esa medición es *sí*.

(b) de *primera clase* syss la respuesta a α inmediatamente después de asegurar la respuesta *sí* es *válida*, sea otra vez, *sí*.

Considerando al axioma A2 (es decir, la ley de cubrimiento), se puede entonces probar que, para β una medición ideal de primera clase de $b \in \mathcal{L}$, si a es el estado antes de la medición, entonces el estado, después de asegurar *sí* sobre la medición de α, es $\phi_b(a)$.

Muchas personas han encontrado convincente al razonamiento físico que motiva los axiomas PIRON. Sin embargo, este marco resulta tener algunas limitaciones agudas. En particular, un sistema formado por dos sistemas "separados", en el sentido de AERTS [1981, 1982], cada una de los cuales, individualmente, obedece a los axiomas PIRON, conformaría como un todo, a estos axiomas si y sólo si uno de los sistemas es clásico. Para probar este resultado clave, AERTS aprovecha la noción de *relación de ortogonalidad*, según la cual dos estados son ortogonales si existe una cuestión que es válida para el primero e imposible para el segundo. El uso de esta relación se ha vuelto central en axiomatizaciones más recientes del enfoque Escuela de Ginebra, como [PIRON, 1990; MOORE, 1999]. Para un análisis detallado, ver [VALCKENBORGH, 2000]. Nótese que en estas obras, la atención se centra en ortoretículos atomísticos completos como modelos para las axiomatizaciones más directas basadas en la dualidad entre el estado y las descripciones de propiedades de un sistema físico. Un poco paradójicamente, entonces, el enfoque PIRON mantiene un axioma rechazado en el enfoque COM — es decir, compleción — y rechaza otro que mantiene el último — a saber (alguna forma de) ortomodularidad. Como veremos en la siguiente sección, este escote es sintomático del hecho de que

---

[12] Recíprocamente, si $p \neq 0$, entonces $p = [\alpha]$, donde α es una cuestión que es válida para, al menos, una preparación. Así, existe al menos un estado (es decir, cualquier estado compatible con esa preparación) que contiene a p. Por lo tanto, deben haber suficientes estados de modo que, para cada p en $\mathcal{L}$, hay un estado/átomo $a \leq p$. Pero esto implica inmediatamente, que cada átomo es un estado. Por lo tanto, los estados corresponden exactamente a átomos de $\mathcal{L}$.

uno debe distinguir conceptualmente al retículo de propiedades de un sistema de su lógica, aun cuando resulten ser isomorfos.

5. EL TRABAJO DE FOULIS Y RANDALL

Contemporáneo con estos acontecimientos, se desarrolló el trabajo de DAVE FOULIS y el de CHARLIE RANDALL sobre *Lógica Empírica*, una síntesis feliz de ideas procedentes de sus respectivas tesis doctorales, en Teoría abstracta de Retículos [FOULIS, 1958] y Estadística Operacional Concreta [RANDALL, 1966]. Este formalismo, no sólo proporciona una potente heurística general, sino, como veremos, también ha puesto el fundamento para varios de los desarrollos puramente matemáticos que se discutirán a continuación.

5.1. Espacios de Ensayos

Tanto MACKEY como PIRON comienzan con una estructura primitiva en la que están sin relacionar, para distintos observables, proposiciones experimentales de la forma "el observable A toma valores en el conjunto B". En efecto, cada observable A se asocia a un álgebra BOOLE $\mathcal{B}_A$ de acontecimientos posibles (isomorfo al campo BOREL en el esquema MACKEY y a $\{0, 1\}$ en el PIRON), siendo estos álgebras BOOLE, inicialmente, disjuntos uno del otro. Luego se hacen identificaciones entre álgebras BOOLE correspondientes a diferentes observables. En el esquema MACKEY, proposiciones primitivas (A_1, B_1) y (A_2, B_2) son identificadas syss son *equiprobables* en cada estado; en el PIRON, syss son válidas en exactamente, las mismas situaciones. Ambas aproximaciones a la construcción de la lógica cuántica han sido objeto de algunas críticas. En particular, tal como señala un número de autores, ambas se hacen problemáticas cuando uno considera mediciones compuestas o iteradas.[13]

En una serie de documentos (p. ej. [FOULIS and RANDALL, 1972, 1974, 1978, 1981a; RANDALL and FOULIS, 1970, 1973, 1978, 1983a]), FOULIS y RANDALL desarrollaron una extensa teoría —que denominan *lógica empírica*— en la cual estas identificaciones son dadas *a priori*, sin referencia previa a cualquier concepto de estado o propiedad. Su formalismo se basa en la noción primitiva de *operación* o *ensayo* —es decir, un conjunto definido de posibles *resultados* alternativos, mutuamente exclusivos. La teoría FOULIS-RANDALL se enfoca en espacios de ensayos, es

[13] Un ejemplo simple se ofrece en [COOKE and HILGEVOORD, 1981]. El punto es familiar — incluso en mecánica cuántica con espacios HILBERT ortodoxos, se debe hacer un seguimiento de las relaciones de fase al discutir experimentos iterados y estos se pierden cuando uno identifica proposiciones experimentales según los esquemas de MACKEY ó de PIRON.

decir, colecciones $\mathfrak{A}$ de ensayos superpuestos. Se entiende que se dará la identificación de los resultados entre distintas pruebas, es decir, FOULIS y RANDALL no establecen ninguna doctrina con respecto a cómo deben hacerse esas identificaciones. Denotando por $X = \bigcup \mathfrak{A}$ al *espacio de resultados* de $\mathfrak{A}$, un *estado estadístico* se define como una asignación ω: $X \to [0, 1]$, tal que $\sum_{x \in E} \omega(x) = 1$ para cada ensayo $E \in \mathfrak{A}$ y un estado *realístico* es representado [FOULIS, PIRON and RANDALL, 1983] por una cierta clase de subconjunto de X, llamado un *soporte*, que representa a la totalidad de los resultados posibles en ese estado. Nótese que, aparte de sus propios méritos, este concepto puede ser utilizado para dar un tratamiento matemático perspicuo de axiomática PIRON; véase [RANDALL and FOULIS, 1983b] y [WILCE, 1997].

Se puede acoplar un número de objetos algebraicos, analíticos y de orden a un espacio de ensayos $\mathfrak{A}$, cada uno sirviendo de manera ligeramente diferente, como una especie de "lógica". Bajo condiciones normativas simples sobre la estructura combinatoria de $\mathfrak{A}$, éstos resultan coincidir con estructuras más familiares. En particular, si $\mathfrak{A}$ es "algebraico",[14] se puede construir a partir de los eventos de $\mathfrak{A}$, una bastante bien comportada, estructura algebraica parcialmente ordenada $\Pi(\mathfrak{A})$, llamada un *ortoálgebra*. Éstos se pueden definir abstractamente: un ortoálgebra es un par $(L, \oplus)$ donde L es un conjunto y $\oplus$ es una operación binaria parcial asociativa, conmutativa, en L, que cumple las tres condiciones siguientes:

(a) Existe un elemento neutro $0 \in L$ tal que, para cada $p \in L$, $p \oplus 0 = p$.

(b) Existe un elemento unidad $1 \in L$ tal que, para cada $p \in L$, hay un único $q \in L$, con $p \oplus q = 1$;

(c) Si $p \oplus p$ existe, entonces $p = 0$.

Así, los ortoálgebras generalizan a los COM's, que se pueden definir como ortoálgebras en los cuales, dado que $p \oplus q$, $q \oplus r$ y $r \oplus p$ existen, el elemento $p \oplus q \oplus r$ también existe. Este axioma, llamado de ortocoherencia, es en realidad una versión finitística del axioma MACKEY, V. Recíprocamente, desdeñando la condi-

[14] Un espacio de ensayos es algebraico si dos elementos cualesquiera con un complemento común, comparten exactamente, los mismos complementos, donde A y B son complementos si son disjuntos y $A \cup B$ es un ensayo.

ción (c), obtenemos lo que se llama un *álgebra de efectos*, llamado ortoálgebra generalizado por [GIUNTINI and Greuling, 1989] y D-conjuntopo por [KÔPKA, 1992]

5.2. Ortoálgebras

Los ortoálgebras y álgebras de efectos son objetos suficientemente regulares como para tener una interesante teoría matemática (una que sólo está empezando a ser explorada). En particular, casi todo el aparato conceptual de la LQ basada en COM's, tales como centros [RÜTTIMANN, FOULIS and PULMANNOVÁ, 1995] y proyecciones SASAKI [BENNETT and FOULIS, 1998; WILCE, 2000], pueden extenderse bastante fácilmente a este contexto más general. Por otro lado, debido a su simplicidad, los espacios de ensayos son, a menudo, mucho más fácil de manipular que sus asociados "lógicas". También tienen la ventaja heurística de que la interpretación operatoral está, por así decirlo, concorde en la superficie, con lógicas que sirven sólo como invariantes útiles. En particular, mientras que es completamente sencillo combinar espacios de ensayos secuencialmente, los diversos "lógicas" raramente permiten tales combinaciones. Por último, si $\mathfrak{A}$ es algebraico, existe una asignación canónica que preserva orden $L \rightarrow \mathcal{L}$, del lógica de $\mathfrak{A}$ en el retículo de propiedades asociado a cualquier entidad ($\mathfrak{A}$, Σ) sobre $\mathfrak{A}$. Tanto en los ejemplos mecánico-clásicos como en los mecánico-quánticos, esta asignación es en realidad un isomorfismo, así que L hereda de $\mathcal{L}$ la estructura de retículo completo y $\mathcal{L}$ hereda de L una ortocomplementación y una ortomodularidad. Este isomorfismo es, sin embargo, la excepción más bien que la regla. Como han señalado [FOULIS, PIRON and RANDALL, 1983], la tendencia a identificar $\mathcal{L}$ y L —aun cuando sean isomorfos— ha provocado una gran confusión innecesaria en las discusiones de los fundamentos y la interpretación de la mecánica cuántica.

Además de su incomodidad en el trato con las mediciones secuenciales, otra dificultad que se presenta con el esquema MACKEY de LQ, de nuevo reconocida primero, por FOULIS y RANDALL [1979], es que no es estable en la formación de cualquier tipo de *producto tensorial* razonable. Dados LQ's (L, Δ) y (L', Δ'), en el entendido de cada uno que representa a un sistema "físico", se quiere construir un modelo (M, Γ) del sistema acoplado, en el que L y L' puedan mostrar correlaciones, pero no interactúan directamente. Los requisitos mínimos serían que

(a) existe una asignación $L \times L' \rightarrow M$, que lleva p, q a alguna proposición representativa $p \otimes q \in M$, y

(b) para cada par de estados $\mu \in \Delta$, $\nu \in \Delta'$, podemos formar un estado $\mu \otimes \nu \in \Gamma$

tal que $(\mu \otimes \nu)(p \otimes q) = \mu(p)\nu(q)$.
Sin embargo, FOULIS y RANDALL producen un simple ejemplo que muestra que esto, en general, es imposible: un pequeño y finito ROM L, con un completo conjunto de estados tales que no existe un tal "producto tensorial" para dos copias de L.

El culpable resulta ser el axioma MACKEY, V —o, más precisamente, la ortocoherencia.

De hecho, se puede demostrar, bajo la suposición muy tenue, de que los ortoálgebras involucrados, cada uno lleva una familia unital de estados, que se pueden formar productos tensoriales de los ortoálgebras, de manera que se satisfagan los desiderata (a) y (b) [FOULIS and RANDALL, 1981b; RANDALL and FOULIS, 1981]. Sin embargo, como ilustra el ejemplo recién considerado, la ortocoherencia no es estable con respecto a estos productos tensoriales. Combinando estos resultados con los resultados negativos mencionados, de AERTS, para retículos de propiedades, lo que aparece es que el isomorfismo entre lógica y retículo de propiedades, característico de sistemas clásicos y cuánticos, se descompone cuando uno forma productos tensoriales, a menos que los sistemas en cuestión, sean clásicos. Esto no quiere decir que los resultados sean totalmente negativos. Investigaciones posteriores en la estructura de los productos tensoriales [KLÄY, RANDALL and FOULIS, 1987; GOLFIN, 1987; WILCE, 1990, 1992; BENNETT and FOULIS, 1993; DVUREČENSKIJ y PULMANNOVÁ, 1994; DVUREČENSKIJ, 1995] revelaron que los productos tensoriales FOULIS-RANDALL de entidades mecánico-quánticas, aunque no estrictamente quánticos, aún conservan una rica estructura geométrica.

Estos resultados dieron un impulso sustancial al estudio de ortoálgebras, espacios de ensayos y otras estructuras más generales que aquellas consideradas por MACKEY y PIRON (algunas de los cuales serán discutidas más abajo). La teoría de los espacios de ensayos, en particular, se ha desarrollado en varias direcciones en las últimas décadas. Un número de autores (por ejemplo, [DVUREČENSKIJ and PULMANNOVÁ, 1994b; PULMANNOVÁ and WILCE, 1995; GUDDER, 1997]) han discutido los espacios de ensayos generalizados, en los que se permite a los resultados ocurrir con alguna multiplicidad o intensidad y éstos se han utilizado para proporcionar una semántica operatoral para álgebras de efectos, que es paralela a la semántica de espacios de ensayos para ortoálgebras. En [HABIL, 1993] se ha discutido Teoría de la Medida sobre ortoálgebras. NISHIMURA [1993, 1995] ha generalizado la idea de espacio de ensayos, mediante la sustitución de conjuntos discretos de resultados por algebras BOOLE completas y locales. [WILCE, 2000] da un estudio actualizado de la teoría FOULIS-RANDALL; para una visión personal del desarrollo histórico de este fi-

lamento de lógica quántica operatoral ver [FOULIS, 1998, 1999].

6. Estructuras Ortomodulares.

Hasta el momento, nos hemos centrado en LQ como un programa interpretativo o fundamental en Física. Pero el tema tiene otras raíces absolutamente independientes en matemática pura. VON NEUMANN mismo, ha recalcado la importancia de métodos de teoría del orden, en el estudio de análogos infinito-dimensionales, de Geometría Proyectiva. LOOMIS [1955] y MAEDA [1955] independientemente, reconocieron que una porción de teoría de la dimensión de álgebras VON NEUMANN, podría ser extendida a un entorno puramente teórico-reticular, es decir, a un ROM provisto de una adecuada relación de equivalencia. Esto estimuló a algunos matemáticos a comenzar a investigar ROM's *en abstracto*. Pronto se hizo evidente que tales retículos ocurren con naturalidad en una amplia gama de contextos matemáticos. Si $(S, *)$ es cualquier semigrupo involutivo, llamemos una *proyección* a un elemento $p \in S$ que satisface $p = p^2 = p*$. Si S contiene un elemento cero (bilateral), el *dextro-anulador* de $x \in S$ es el dextro-ideal $\{a \in S \mid ax = 0\}$. FOULIS [1958, 1960, 1962] define a un **-semigrupo* BAER como un semigrupo involutivo S, con cero, que tiene la propiedad de que el dextro-anulador de cualquier elemento $x \in S$ es el dextro-ideal generado por una (necesariamente, única) proyección x'. Mostró que el conjunto $L(S)$ de proyecciones *cerradas* $p = p''$, en S, siempre forman un ROM. Recíprocamente, cada ROM se puede representar como $L(S)$ para algún *-semigrupo BAER. En efecto, aunque esta representación no es única, hay una opción canónica de S; a saber, el semigrupo $S(L)$ de las auto-aplicaciones residuadas de L, es decir, las asignaciones $\phi: L \to L$, para las cuales existe una asignación $\psi: L \to L$, que satisface $\psi(x) \leq y' \Leftrightarrow x \leq \phi(y)'$. Entre estas asignaciones están las proyecciones SASAKI ϕ_b, discutidas en Sección 4, que resultan ser exactamente, las proyecciones cerradas en $S(L)$.

En las décadas siguientes, una substancial teoría pura de ROM's fue desarrollada por FOULIS y otros. El estado de esta teoría a partir de la década de 1980, está representado por el libro de KLAMATH [1983]. [BRUNS and HARDING, 2000] discuten acontecimientos más recientes, de los cuales ha habido muchos.

Particularmente llamativo es el reciente descubrimiento por HARDING [1996, 1998], de que se puede organizar al conjunto de descomposiciones en productos directos de esencialmente, cualquier objeto algebraico en un COM.

Por otro lado, el trabajo continuado en el programa MACKEY también produ-

jo una variedad de estructuras más generales que ROM's y conjuntopos —ortoálgebras, los aún más generales álgebras de efectos y, en una dirección diferente, los álgebras BOOLE parciales de KOCHEN y SPECKER [1967]. Todos estos son objetos principalmente, algebraicos parciales y, sólo secundariamente, ordino-teóricos. Han atraído, especialmente durante los últimos años, significativo interés matemático.[15]

La teoría de álgebras de efectos, gran parte de la cual es debida a la labor pionera de FOULIS y M. K. BENNETT [BENNETT and FOULIS, 1995, 1997; FOULIS and BENNETT, 1994], se continúa desarrollando rápidamente. De particular interés es aquí, su reciente reformulación de una gran parte de la teoría de álgebras de efectos (y por lo tanto, de la LQ) como una rama de la teoría de grupos abelianos ordenados, que también se discute en [FOULIS, BENNETT and RÜTTIMANN, 1996; FOULIS, RÜTTIMANN and BENNETT, 1998; WILCE 1995, 1998]. Este es el tema de [FOULIS, 2000].

Finalmente, también se han estudiado ROM's detalladamente, en el contexto puramente lógico y, en particular, la posibilidad de definir conectivos de implicación razonables. Uno de los resultados básicos en este sentido, es el de KALMBACH [1974] que, aprovechando la caracterización de ROM's libres sobre dos generadores [BRUNS and KALMBACH, 1973], fue capaz de demostrar que hay exactamente cinco polinomios reticulares $a \to b$, satisfaciendo la condición implicativa primitiva $a \leq b \Leftrightarrow (a \to b) = 1$. Nótese que aquí, la ortomodularidad es esencial, un simple examen del no-ortomodular "anillo bencénico" que muestra que tales conectivos no existen en el caso no-ortomodular [MOORE, 1993]. Para un análisis de la más débil condición de exportación $a \leq b \Rightarrow (a \to b) = 1$, conjuntamente con el *modus ponens*, véase [HERMAN, MARSDEN and PIZIAK, 1975] y, para una investigación detallada del teorema de deducción, ver MALINOWSKI [1990, 1992]. Por otro lado, la definición de una relación Kripkeana de accesibilidad inducida a partir de la *no*-ortogonalidad, una idea que tiene sus orígenes en labor de FOULIS y RANDALL sobre ortogonalidad lexicográfica [1971], ha permitido la introducción de la LQ modal [DALLA CHIARA, 1977, 1983; GOLDBLATT, 1974, 1975]. Por supuesto, ha habido mucho otros trabajos sobre las implicaciones en LQ; Para descripciones generales, véase, por ejemplo, [DALLA CHIARA, 1986; VAN FRAASSEN, 1981; HARDEGREE and

[15] Un resultado notable es el de KOCHEN y CONWAY [KOCHEN, 1996], de que muy pequeños conjuntos de proyecciones en $\mathbb{P}(H)$ generan una álgebra Boole parcial que es densa en el retículo de proyecciones.

FRAZER, 1981].

7. ASPECTOS DINÁMICOS, CATEGORIALES Y COMPUTACIONALES.

Cerramos considerando la reformulación categorial de las nociones básicas de estructuras de orden y su aplicación a la Teoría Quántica Operatoral, un tema con fuertes vínculos con varios desarrollos recientes en Teoría de Categorías Enriquecida y Semántica Computacional. El instrumento básico de esta teoría, son los pares $f \dashv g$, donde f: $L \rightarrow M$ y g: $M \rightarrow L$, son aplicaciones isótonas entre conjuntopos, satisfaciendo la condición de adjunción $\mathrm{f}(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq g(b)$.

Para un desarrollo aterrizado, de la teoría de adjunciones con un enfoque particular en sus aplicaciones operatorales, nos referimos a [COECKE and MOORE 2000]. Es divertido hacer notar que este concepto puede utilizarse para arrojar alguna luz sobre la observación de BIRKHOFF y VON NEUMANN citada anteriormente, de que mientras que los filósofos han tendido a centrarse en la naturaleza de la negación en lógicas no clásicas, el estudio de MQ destaca la ley distributiva como el eslabón más débil en LQO. Para ver esto, observemos que los álgebras HEYTING, considerados como modelos para la lógica intuicionista, pueden definirse como aquellos retículos que admiten un conexión de implicación $\rightarrow$ que satisface la condición de adjunción $(x \wedge a) \leq \mathrm{b} \Leftrightarrow x \leq (a \rightarrow \mathrm{b})$ [BIRKHOFF, 1940 §161; BIRKHOFF, 1942 §27].

Puesto que la condición $f \dashv g$ implica que f preserva las juntas existentes y g preserva las concurrencias existentes, cualquier álgebra HEYTING es distributivo.

Por otro lado, gran parte de la teoría de estructuras de ROM's se basa en la llamada adjunción SASAKI $\phi_a \dashv \phi^a$, donde

$$\phi_a(x) = a \wedge (a' \vee x) \quad \text{y} \quad \phi^a(x) = a' \vee (a \wedge x)$$

[NAKAMURA, 1957; SASAKI, 1955].

En cierto sentido, podemos considerar a los álgebras HEYTING como una clase de retículos distributivos donde aquellos elementos que poseen un complemento pueden caracterizarse simplemente y a los ROM's, como una clase de ortoretículos donde el conjunto de complementos de cualquier elemento, puede ser computado simplemente.

Para discusiones de álgebras HEYTING y retículos semicomplementados más generales, ver [CURRY, 1963; FRINK, 1962; KÖHLER, 1981; NEMITZ, 1965].

Una de las primeras y más importantes aplicaciones, de las residuaciones en ROM's fue el trabajo pionero de FOULIS sobre $*$-semigrupos BAER, descrito anteriormente. Esta investigación no sólo ha conducido a una comprensión más profunda de la noción de residuación [BLYTH y JANOWITZ, 1972; DERDÉRIAN, 1967], sino que también fue crucial en el desarrollo de los aspectos dinámicos de LQO. Uno de los primeros de estos acontecimientos, fue el trabajo de POOL [1968a, b], que buscaba una interpretación fenomenológica de los *-semigrupos BAER vía la noción de probabilidad condicional suministrada por la teoría quántica de mediciones, convencional.

Un enfoque más claramente operatoral, a evoluciones en general, estuvo a cargo de DANIEL [1982, 1989] y fue extendido por FAURE, MOORE y PIRON [1995], conduciendo el último a un estudio general de las categorías de espacios de estados y retículos de propiedades [MOORE, 1995, 1997]. Aquí una evolución externamente impuesta es modelada retrotrayendo proyectos experimentales definitivos, definidos en el momento final, hasta sus imágenes definidas en el momento inicial. Mediante argumentos físicos, esta aplicación debe preservar el funcionamiento del producto y así, la concurrencia en el retículo. Por lo tanto, en condiciones de estabilidad apropiadas, su levo-adjunto, que preserva las juntas, describe la propagación del estado del sistema. Estas observaciones han sido generalizadas por AMIRA, COECKE y STUBBE [1998], que explican la estructura de los ensayos operatorales derivados de las nociones de libertad de elección y composición. Nótese que la última de estas nociones en particular, juega un papel fundamental en la heurística de FOULIS y RANDALL antes mencionados.

Finalmente, la estructura abstracta de resoluciones operatorales ha sido analizada por COECKE y STUBBE [1999a, b, 2000], permitiendo, por ejemplo, un análisis de los conceptos físicos de componibilidad [COECKE, 2000] y la dualidad entre causalidad y propagación [COECKE, MOORE and STUBBE, 2000].

Matemáticamente, la estructura inducida a partir de las resoluciones operatorales, es la de un *quantaloide*, es decir una categoría cuyos conjuntos de morfismos son retículos completos con respecto a las juntas, de modo que la composición se distribuye a ambos lados sobre las juntas.[16] Se obtiene así, un ejemplo simple de *categoría enriquecida*, en la cual los conjuntos de morfismos son objetos de alguna

[16] El nombre quantaloide fue introducido por ROSENTHAL [1991], aunque gran parte del desarrollo conceptual básico ya había sido hecho por JOYAL y TIERNEY [1984] y PITTS [1988] en sus estudios de los topoi de GROTHENDIECK.

categoría base y la composición se hace mediante transformaciones naturales que satisfacen criterios de coherencia. Esto se ha convertido en un concepto central en la Teoría de Categorías y es tratado en el texto estándar [BORCEUX, 1994]; para un tratamiento especializado, ver [KELLY, 1982] y para un desarrollo didáctico, ver [BORCEUX and STUBBE, 2000].

Al limitar la atención a las categorías con un solo objeto, recuperamos a los quantales, introducidos por MULVEY [1986], como generalización no conmutativa de locales.[17] Aquí puede mencionarse la reciente extensión de las nociones locálicas de simplicidad y espacialidad en el contexto de quantales [KRUML, 2000; PASEKA, 1997; PASEKA and KRUML, 2000; ROSICKÝ, 1995], un tema tratado en detalle en [ROSICKÝ and PASEKA, 2000]. Es interesante señalar que estructuras similares también han sido aprovechadas en Informática. Un ejemplo importante es la llamada *lógica observacional* de ABRAMSKY y VICKERS [ABRAMSKY, 1991; ABRAMSKY y VICKERS, 1993; VICKERS, 1989]. Aquí se observa que la posibilidad de que la observación induzca un cambio de estado, formalmente conduce a un tránsito de marcos a quantales. Esta línea de pensamiento ha sido extendida por RESENDE [1999, 2000], que describe los sistemas generales en base a su comportamiento observable independientemente de cualquier supuesto espacio de estado. Para una revisión general, ver [RESENDE, 2000]. Debe señalarse, sin embargo, que estas consideraciones son bastante diferentes de la noción contemporánea de computación quántica (véase por ejemplo la teoría general de lenguajes quánticos [Gudder, 2000], es decir, lenguajes aceptados por autómatas quánticos).

Referencias

[1] ABRAMSKY, S. (1991) Domain theory in logical form, Annals *of Pure and Applied Logic* **51**, 1–77.

[2] ABRAMSKY, S. and VICKERS, S. (1993) Quantales, observational logic, and process semantics, *Mathematical Structures in Computer Science* **3**, 161–227.

[3] AERTS, D. (1981) *The One and the Many: Towards a Unification of the Quantum and the Classical Description of One and many Physical Entities*, Doc-

[17] Téngase en cuenta que los antecedentes históricos de estas nociones se remonta a la labor de WARD y DILWORTH [WARD, 1937, 1938; WARD and DILWORTH, 1939a, b], que utilizan estas multiplicaciones para estudiar ideales en anillos; una técnica que se ha aplicado recientemente a C*-álgebras no conmutativos [BORCEUX, ROSICKÝ and VAN DEN BOSSCHE, 1989; ROSICKÝ, 1989].

toral Dissertation, Free University of Brussels.

[4] AERTS, D. (1982) Description of many separated physical entities without the paradoxes encountered in quantum mechanics, *Foundations of Physics* 12, 1131–1170.

[5] AMEMIYA, I. and ARAKI, H. (1967) A remark on PIRON's paper, Publications *of the Research Institute of Mathematical Sciences Kyoto University* A **2**, 423–429.

[6] AMIRA, H., COECKE, B., AND STUBBE, I. (1998) How quantales emerge by introducing induction within the operational approach, *Helvetica Physica Acta* **71**, 554–572.

[7] AMREIN, W.O. (1969) Localizability for particles of mass zero, *Helvetica Physica Acta* **42**, 149–190.

[8] BAMBERG, P., and STERNBERG, S. (1990) *A Course in Mathematics for Students of Physics*, Harvard University Press, and Cambridge.

[9] BELTRAMETTI, E. G. and CASSINELLI, J. (1981) *The Logic of Quantum Mechanics*, Addison–Wesley, Reading.

[10] BENNETT, M. K. and FOULIS, D.J. (1995) Phi–symmetric effect algebras, *Foundations of Physics* 25, 1699–1722.

[11] BENNETT, M.K. and FOULIS, D. J. (1997) Interval algebras and unsharp quantum logics, *Advances in Mathematics* **19**, 200–215.

[12] BENNETT, M.K. and FOULIS, D.J. (1998) A generalized Sasaki projection for effect algebras, *Tatra Mountains Mathematical Publications* **15**, 55–66.

[13] BLYTH, T.S. and JANOWITZ, M.F. (1972) *Residuation Theory*, Pergamon Press, New York.

[14] BIRKHOFF, G. (1940) *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Providence.

[15] BIRKHOFF, G. (1942) Lattice–ordered groups, *Annals of Mathematics* **43**, 298–331.

[16] BIRKHOFF, G. and VON NEUMANN, J. (1936) The logic of quantum mechanics, *Annals of Mathematics* **37**, 823–843.

[17] BORCEUX, F. (1994) *Handbook of Categorical Algebra*, Cambridge Universi-

ty Press, Cambridge.

[18] BORCEUX, F., ROSICKÝ, J. and VAN DEN BOSSCHE, G. (1989) Quantales and C*–algebras, Journal of the London Mathematical Society 40, 398–404.

[19] BORCEUX, F. and STUBBE, I. (2000) Short introduction to enriched categories, in B. COECKE, D. J. MOORE and A. WILCE (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[20] BRUNS, G. and HARDING, J. (2000) Algebraic aspects of orthomodular lattices, in B. COECKE, D.J. MOORE and A. WILCE (eds.) Current *Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[21] BRUNS, G. and KALMBACH, G. (1973) some remarks on free orthomodular lattices, in J. Schmidt (ed.) *Proceedings of the Lattice Theory Conference*, Houston.

[22] BUNCE, L. J. and HAMHALTER, J. (1994) Jauch–PIRON states on von Neumann algebras, *Mathematische Zeitschrift* **215**, 491–502.

[23] BUNCE, L. J. and Wright, J. D. M. (1994) The Mackey–Gleason problem for vector measures on projections in von Neumann algebras, *Journal of the London Mathematical Society* **49**, 133–149.

[24] BUSCH, P., LAHTI, P. J. and MITTELSTAEDT, P. (1991) *The Quantum Theory of Measurement*, Springer-Verlag (Berlin).

[25] CATTANEO, G. and LAUDISA, F. (1994) Axiomatic unsharp quantum theory

(from Mackey to Ludwig and PIRON), *Foundations of Physics* **24**, 631–683.

[26] CATTANEO, G. and NISTICÒ, G. (1993) A model of PIRON's preparation–question structures in Ludwig's selection structures, International *Journal of Theoretical Physics* 32, 407–431.

[27] CHRISTENSEN, E. (1982) Measures on projections and physical states, *Communications in Mathematical Physics* 86, 529–538.

[28] COECKE, B. MOORE, D. WILCE, A. (2001) Operational Quantum Logic: an Overview. arXiv:quant-ph/0008019v2.

[29] COECKE, B. (2000) Structural characterization of compoundness, *Interna-*

tional Journal of Theoretical Physics **39**, 581–590.

[30] COECKE, B. and MOORE, D.J. (2000) Operational Galois adjunctions, in B. COECKE, D. J. MOORE and A. WILCE (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[31] COECKE, B., MOORE, D.J. and STUBBE, I. (2001) Quantaloids describing causation and propagation for physical properties, *Foundations of Physics Letters* **14**, 133–145.

[32] COECKE, B., MOORE, D.J. and WILCE, A. [Editors] (2000) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras, Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[33] COECKE, B. and STUBBE, I. (1999a) Operational resolutions and state transitions in a categorical setting, *Foundations of Physics Letters* **12**, 29–49.

[34] COECKE, B. and STUBBE, I. (1999b) On a duality of quantales emerging from an operational resolution, International *Journal of Theoretical Physics* **38**, 3269–3281.

[35] COECKE, B. and STUBBE, I. (2000) State transitions as morphisms for complete lattices, *International Journal of Theoretical Physics* 39, 601–610.

[36] COOKE, R.M., and HILGEVOORD, J. (1981) A new approach to equivalence in quantum logic, in E. BELTRAMETTI and B.C. van Fraassen, (eds.) *Current Issues in Quantum Logic*, Plenum, New York.

[37] CURRY, H. B. (1963) *Foundations of Mathematical Logic*, McGraw–Hill, New York.

[38] DÄHN, G. (1968) Attempt of an axiomatic foundations of quantum mechanics and more general theories. IV, *Communications in Mathematical Physics* **9**, 192–211.

[39] DÄHN, G. (1972) The algebra generated by physical filters, *Communications in Mathematical Physics* **28**, 109–122.

[40] DALLA CHIARA, M. L. (1977) Quantum logic and physical modalities, *Journal of Philosophical Logic* **6**, 391–404.

[41] DALLA CHIARA, M. L. (1983) Physical implications in a Kripkean semantical approach to physical theories, in *Logic in the 20th Century*, Scienta (Milan).

[42] DALLA CHIARA, M.L. (1986) Quantum logic, in D. Gabbay and F. Guenthner (eds.) Handbook of Philosophical Logic, D. Reidel, Dordrecht.

[43] DANIEL, W. (1982) On a non–unitary evolution of quantum systems, *Helvetica Physica Acta* **55**, 330–338.

[44] DANIEL, W. (1989) Axiomatic description of irreversible and reversible evolution of a physical system, *Helvetica Physica Acta* **62**, 941–968.

[45] DERDÉRIAN, J. -C. (1967) Residuated mappings, *Pacific Journal of Mathematics* **20**, 35–43.

[46] Dirac, P. A. M. (1930) *The Principles of Quantum Mechanics*, Fourth edition. Clarendon Press, Oxford.

[47] DVUREČENSKIJ, A. (1992) Quantum logics and completeness criteria of inner product spaces, *International Journal of Theoretical Physics* **31**, 1899–1907.

[48] DVUREČENSKIJ, A. (1993) *Gleason's Theorem and its Applications*, Kluwer (Dordrecht).

[49] DVUREČENSKIJ, A. (1995) Tensor product of difference posets and effect *algebras, International Journal of Theoretical Physics* 34, 1337–1348.

[50] DVUREČENSKIJ, A. and PULMANNOVÁ, S. (1994a) Tensor products of D-posets and D-test spaces, *Reports in Mathematical Physics* **34**, 251–275.

[51] DVUREČENSKIJ, A. and PULMANNOVÁ, S. (1994b) Difference posets, effects, and quantum measurements, *International Journal of Theoretical Physics* **33**, 819–850.

[52] EINSTEIN, A., PODOLSKY, B. and ROSEN, N. (1935) Can quantum–mechanical description of reality be considered complete? *Physcial Review* **47**, 777–780.

[53] EMCH, G. and PIRON, C. (1962) Note sur les symétries en théorie quantique,*Helvetica Physica Acta* **35**, 542–543.

[54] EMCH, G. and PIRON, C. (1963) Symmetry in quantum theory, Journal *of Mathematical Physics* **4**, 469–473.

[55] FAURE, Cl. -A. and FRÖLICHER, A. (1993) Morphisms of projective geometries and of corresponding lattices, *Geometriae Dedicata* **47**, 25–40.

[56] FAURE, Cl.-A. and FRÖLICHER, A. (1994) Morphisms of pro jective geome-

tries and semilinear maps, *Geometriae Dedicata* **53**, 237–269.

[57] FAURE, Cl.-A. and FRÖLICHER, A. (1995) Dualities for infinite–dimensional projective geometries, *Geometriae Dedicata* **56**, 225–236.

[58] FAURE, Cl.-A., MOORE, D. J. and PIRON, C. (1995) Deterministic evolutions and Schrödinger flows, *Helvetica Physica Acta* **68**, 150–157.

[59] FINKELSTEIN, D. (1968) Matter, space and logic, in R.S. Cohen and M. W. Wartofsky (eds.) *Boston Studies in the Philosophy of Science* V, D. Reidel, Dordrecht.

[60] FINKELSTEIN, D. (1972) The physics of logic, in R.G. Colodny (ed.) Paradigms *& Paradoxes: the Philosophical Challenge of the Quantum Domain*, University of Pittsburgh Press, Pittsburgh.

[61] FOULIS, D. J. (1958) *Involution Semigroups*, Doctoral Dissertation, Tulane University.

[62] FOULIS, D. J. (1960) Baer *–semigroups, *Proceedings of the American Mathematical Society* **11**, 648–654.

[63] FOULIS, D. J. (1962) A note on orthomodular lattices, *Portugaliae Mathematica* **21**, 65–72.

[64] FOULIS, D.J. (1998) Mathematical metascience, *Journal of Natural Geometry* **13**, 1–50.

[65] FOULIS, D. J. (1999) A half century of quantum logic —- what have we learned?, in D. Aerts and J. Pykacz (eds.) *Quantum Structures and the Nature of Reality : The Indigo Book of EINSTEIN meets Magritte*, Kluwer, Dordrecht.

[66] FOULIS, D. J. (2000) Representations on unigroups, in B. Coecke, D.J. Moore and A. WILCE (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[67] FOULIS, D. J., and BENNETT, M.K. (1993) Tensor products of orthoalgebras, *Order* **10**, 271–282.

[68] FOULIS, D. J. and BENNETT, M. K. (1994) Effect algebras and unsharp quantum logics, *Foundations of Physics* **24**, 1331–1352.

[69] FOULIS, D. J., BENNETT, M. K. and RÜTTIMANN, R. J. (1996) Test groups and

effect algebras, *International Journal of Theoretical Physics* **35**, 1117–1140.

[70] FOULIS, D. J., RÜTTIMANN, R. J. and BENNETT, M. K. (1998) The transition to unigroups, *International Journal of Theoretical Physics* **37**, 45–63.

[71] FOULIS, D. J., RÜTTIMANN, R. J. and RÜTTIMANN, G. T. (1992) Filters and supports in orthoalgebras, *International Journal of Theoretical Physics* **31**, 789–807.

[72] FOULIS, D. J., RÜTTIMANN, R. J. and RÜTTIMANN, G. T. (1993) Logicoalgebraic structures II. Supports in test spaces, *International Journal of Theoretical Physics* **32**, 1675–1690.

[73] FOULIS, D. J., PIRON, C. and RANDALL, C. H. (1983) Realism, operationalism, and quantum mechanics, *Foundations of Physics* **13**, 813–841.

[74] FOULIS, D. J. and RANDALL, C. H. (1971) Lexicographic orthogonality, *Journal of Combinatorial Theory* **11**, 157–162.

[75] FOULIS, D. J. and RANDALL, C. H. (1972) Operational statistics. I. Basic concepts, *Journal of Mathematical Physics* **13**, 1667–1675.

[76] FOULIS, D. J. and RANDALL, C. H. (1974) Empirical logic and quantum mechanics, *Synthese* **29**, 81–111.

[77] FOULIS, D. J. and RANDALL, C. H. (1978) Manuals, morphisms and quantum mechanics, in A. Marlow (ed.) *Mathematical Foundations of Quantum Theory*, Academic Press, New York.

[78] FOULIS, D.J. and RANDALL, C. H. (1979) Tensor products of quantum logics do not exist, *Notices of the American Mathematical Society* **26**, 557.

[79] FOULIS, D. J. and RANDALL, C. H. (1981a) What are quantum logics and what ought they be?, in E. G. Beltrametti and B. C. van Fraassen (eds.) *Current Issues in Quantum Logic*, Plenum, New York.

[80] FOULIS, D. J. and RANDALL, C. H. (1981b) Empirical logic and tensor products, in H. Neumann (ed.) *Interpretations and Foundations of Quantum Theory*, B. I. Wissenschaft, Mannheim.

[81] FOULIS, D. J. and RANDALL, C. H. (1984) A note on misunderstandings of PIRON's axioms for quantum mechanics, *Foundations of Physics* **14**, 65–88.

[82] FOULIS, D. J. and WILCE, A. (2000) Free extensions of group actions, induced representations, and the foundations of physics, in B. Coecke, D.J. Moore and A. Wilce (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[83] VAN FRAASSEN, B. C. (1981) Assumptions and interpretations of quantum logic, in E. G. Beltrametti and B.C. van Fraassen (eds.) *Current Issues in Quantum Logic*, Plenum, New York.

[84] FRINK, O. (1962) Pseudo–complements in semi–lattices, *Duke Mathematical Journal* **29**, 505–514.

[85] GIOVANNINI, N. (1981a) Superselection variables and generalized multipliers, *Letters in Mathematical Physics* **5**, 161–168.

[86] GIOVANNINI, N. (1981b) Classical and quantal systems of imprimitivity, *Journal of Mathematical Physics* **22**, 2389–2396.

[87] GIOVANNINI, N. (1981c) State spaces for classical and quantal, relativistic and nonrelativistic elementary particles, *Journal of Mathematical Physics* **22**, 2397–2403.

[88] GIOVANNINI, N. and PIRON, C. (1979) On the group–theoretical foundations of classical and quantum physics: kinematics and state spaces, *Helvetica Physica Acta* **52**, 518–540.

[89] GISIN, N. (1981) A simple nonlinear dissipative quantum evolution equation, *Journal of Physics A* **14**, 2259–2267.

[90] [89] GISIN, N. (1982a) Indéterminisme quantique et dynamique non linéaire dissipative, *Annales de la Fondation Louis de Broglie* **7**, 275–292.

[91] GISIN, N. (1982b) Microscopic derivation of a class of non–linear dissipative Schrödinger-like equations, *Physica A* **111**, 364–370.

[92] GISIN, N. (1983a) Modèles d'un processus de mesure, in C. Gruber, C. PIRON, T.M. Tâm and R. Weill (eds.) *Les fondements de la mécanique quantique*, AVCP, Lausanne.

[93] GISIN, N. (1983b) Irreversible quantum dynamics and the Hilbert space structure of quantum kinematics, *Journal of Mathematical Physics* **24**, 1779–1782.

[94] GISIN, N. and PIRON, C. (1981) Collapse of the wave packet without mixture,

Letters in Mathematical Physics **5**, 379–385.

[95] GIUNTINI, R. and GREULING, H. (1989) Toward a formal language for unsharp properties, *Foundations of Physics* **19**, 931–945.

[96] GLEASON, A. M. (1957) Measures on the closed subspaces of a Hilbert space, *Journal of Mathematics and Mechanics* **6**, 885–893.

[97] GOLDBLATT, R. I. (1974) Semantic analysis of orthologic, *Journal of Philosophical Logic* **3**, 19–35.

[98] GOLDBLATT, R. I. (1975) The Stone space of an ortholattice, *Bulletin of the London Mathematical Society* **7**, 45–48.

[99] GOLFIN, A. S. Jr. (1987) *Representations and Products of Lattices*, Doctoral Dissertation, University of Massachusetts.

[100] RÜTTIMANN, R.J., FOULIS, D.J. and PULMANNOVÁ, S. (1995) The center of an effect algebra, *Order* **12**, 91–106.

[101] GROSS, H. (1979) *Quadratic Forms in Infinite Dimensional Vector Spaces*, Birkhauser, Boston.

[102] GROSS, H. (1990) Hilbert lattices: new results and unsolved problems, Foundations of Physics **20**, 529–559.

[103] GUDDER, S. P. (1965) Spectral methods for generalized probability theory, *Transactions of the American Mathematical Society* **119**, 428–442.

[104] GUDDER, S. P. (1977) Four approaches to axiomatic quantum mechanics, in W. C. Price and S.S. Chissick (eds.) *The Uncertainty Principle and Founda- tions of Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, London.

[105] GUDDER, S. P. (1979) A survey of axiomatic quantum mechanics, in C. A. Hooker (ed.) *The Logico–Algebraic Approach to Quantum Mechanics. II.*, D. Reidel, Dordrecht.

[106] GUDDER, S. P. (1981) Comparison of the quantum logic, convexity, and algebraic approaches to quantum mechanics, in H. Neumann (ed.) *Interpretations and Foundations of Quantum Theory*, B. I. Wissenschaft, Mannheim.

[107] GUDDER, S. P. (1985) *Quantum Probability*, Academic Press, San Diego.

[108] GUDDER, S. P. (1997) Effect test spaces, *International Journal of Theoretical*

Physics **36**, 2681–2705.

[109] GUDDER, S. (2000) Quantum languages, in B. COECKE, D. J. MOORE and A. WILCE (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[110] GUDDER, S. P. and PULMANNOVÁ, S. (1987) Transition amplitude spaces, *Journal of Mathematical Physics* **28**, 376–385.

[111] HAAG, R. and KASTLER, D. (1964) An algebraic approach to quantum field theory, *Journal of Mathematical Physics* **5**, 848–861.

[112] HABIL, E. (1993) *Orthoalgebras and Noncommutative Measure Theo*ry, Doctoral Dissertation, Kansas State University.

[113] HAMHALTER, J. (1993) Pure Jauch–PIRON states on von Neumann algebras, Annales de l'Institut Henri Poincaré *A* **58**, 173–187.

[114] HAMHALTER, J. (1995) Extension properties of states on operator algebras, *International Journal of Theoretical Physics* **34**, 1431–1437.

[115] HARDEGREE, G. M. and FRAZER, P. J. (1981) Charting the labyrinth of quantum logics: a progress report, in E.G. Beltrametti and B.C. van Fraassen (eds.) *Current Issues in Quantum Logic*, Plenum, New York.

[116] HARDING, J. (1996) Decompositions in quantum logic, *Transactions of the American Mathematical Society* **348**, 1839–1862.

[117] HARDING, J. (1998) Regularity in quantum logic, *International Journal of Theoretical Physics* **37**, 1173–1212.

[118] HERMAN, L., MARSDEN, E. L. and PIZIAK, R. (1975) Implication connectives in orthomodular lattices, *Notre Dame Journal of Formal Logic* **16**, 305–328.

[119] HOLLAND, S. S. (1995) Orthomodularity in infinite dimensions: a theorem of M. Solèr, *Bulletin of the American Mathematical Society* **32**, 205–234.

[120] JAUCH, J. M. (1968) *Foundations of Quantum Mechanics*, Addison–Wesley, Reading.

[121] JAUCH, J. M. and PIRON, C. (1967) Generalized localizability, *Helvetica Physica Acta* **40**, 559–570.

[122] Jauch, J. M. and PIRON, C. (1969) On the structure of quantal proposition

systems, *Helvetica Physica Acta* **42**, 842–848.

[123] JOYAL, A. and TIERNEY, M. (1984) *An extension of the Galois theory of Grothendieck*, American Mathematical Society, Providence.

[124] KALMBACH, G. (1974) Orthomodular logic, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* **20**, 395–406.

[125] KALMBACH, G. (1983) *Orthomodular Lattices*, Academic Press, London.

[126] KELLER, H. A. (1980) Ein nicht–klassischer Hilbertscher Raum, *Mathematische Zeietschrift* **172**, 41–49.

[127] KELLY, G. M. (1982) *Basic Concepts of Enriched Category Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.

[128] KLÄY, M., RANDALL, C. H. and FOULIS, D. J. (1987) Tensor products and probability weights, *International Journal of Theoretical Physics* **26**, 199–219.

[129] KOCHEN, S. (1996) Construction of quantum mechanics via commutative operations, in R. Clifton (ed.) *Perspectives on Quantum Reality*, Kluwer Academic Publishers.

[130] KOCHEN, S. and SPECKER, E.P. (1967) The problem of hidden variables in quantum mechanics, *Journal of Mathematics and Mechanics* **17**, 59–87.

[131] KÖHLER, P. (1981) Brouwerian semilattices, *Transactions of the American Mathematical Society* **268**, 103–126.

[132] KÔPKA, F. (1992) D-posets of fuzzy sets, *Tatra Mountains Mathematical Publications* **1**, 83–87.

[133] KRUML, D (2000) Spatial quantales, *Applied Categorical Structures*, To appear.

[134] LOOMIS, L. (1955) *The lattice–theoretic background of the Dimension Theory of Operator Algebras*, American Mathematical Society, Providence.

[135] LUDWIG, G. (1954) *Die Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer–Verlag, Berlin, Translation by C. A. Hein "Foundations of Quantum Mechanics" Springer–Verlag, Berlin, 1983.

[136] LUDWIG, G. (1955) Zur Deutung der Beobachung in der Quantenmechanik, *Physikalisch Blätter* **11**, 489–494.

[137] LUDWIG, G. (1964) Versuch einer axiomatischen Grundlegung der Quantenmechanik und allgemeiner physikalischer Theorien, *Zeitschrift für Physik* **181**, 233–260.

[138] LUDWIG, G. (1967) Attempt of axiomatic foundations of quantum mechanics and more general theories. II, *Communications in Mathematical Physics* **4**, 331–348.

[139] LUDWIG, G. (1968) Attempt of an axiomatic foundations of quantum mechanics and more general theories. III, *Communications in Mathematical Physics* **9**, 1–12.

[140] LUDWIG, G. (1972) An improved formulation of some theorems and axioms in the axiomatic foundation of the Hilbert space structure of quantum mechanics, *Communications in Mathematical Physics* **26**, 78–86.

[141] LUDWIG, G. (1985) *An Axiomatic Basis of Quantum Mechanics. 1. Derivation of Hilbert Space*, Springer–Verlag, Berlin.

[142] LUDWIG, G. (1987) *An Axiomatic Foundation of Quantum Mechanics. 2. Quantum Mechanics and Macrosystems*, Springer–Verlag, Berlin.

[143] LUDWIG, G. and NEUMANN, H. (1981) Connections between different approaches to the foundations of quantum mechanics, in H. Neumann (ed.) *Interpretations and Foundations of Quantum Theory*, B. I. Wissenschaft, Mannheim.

[144] MACKEY, G. W. (1957) Quantum mechanics and Hilbert space, *American Mathematical Monthly* **64:2**, 45–57.

[145] MACKEY, G. W. (1963) *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, W. A. Benjamin, New York.

[146] MAEDA, S. (1955) Dimension functions on certain general lattices, *Journal of Science of Hiroshima University A* **19**, 211–237.

[147] MALINOWSKI, J. (1990) The deduction theorem for quantum logic—some negative results, *Journal of Symbolic Logic* **55**, 615–625.

[148] MALINOWSKI, J. (1992) Strong versus weak quantum consequence operations, *Studia Logica* **51**, 113–123.

[149] MIELNIK, B. (1968) Geometry of quantum states, *Communications in Mathematical Physics* **9**, 55–80.

[150] MIELNIK, B. (1969) Theory of filters, *Communications in Mathematical Physics* **15**, 1–46.

[151] MOORE, D. J. (1993) Quantum logic requires weak modularity, *Helvetica Physica Acta* **66**, 471–476.

[152] MOORE, D. J. (1995) Categories of representations of physical systems, *Helvetica Physica Acta* **68**, 658–678.

[153] MOORE, D. J. (1997) Closure categories, *International Journal of Theoretical Physics* **36**, 2707–2723.

[154] MOORE, D. J. (1999) On state spaces and property lattices, *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics* **30**, 61–83.

[155] MULVEY, C. J. (1986) &, *Supplemento ai Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo* **12**, 99–104.

[156] NAKAMURA, M. (1957) The permutability in a certain orthocomplemented lattice, Kodai Mathematical Seminar Reports 9, 158–160.

[157] NAVARA, M. (1992) Independence of automorphism group, center, and state space of quantum logics, *International Journal of Theoretical Physics* **31**, 925–935.

[158] NEMITZ, W.C. (1965) Implicative semi–lattices, *Transactions of the American Mathematical Society* **117**, 128–142.

[159] VON NEUMANN, J. (1932) *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer–Verlag, Berlin. Translation by R. Beyer "Mathematical Foundations of Quantum Mechanics" Princeton University Press, Princeton, 1955.

[160] NISHIMURA, H. (1993) Empirical set theory, *International Journal of Theoretical Physics* **32**, 1293–1321.

[161] Nishimura, H. (1995) Manuals in orthogonal categories, *International Journal of Theoretical Physics* **34**, 211–228.

[162] PASEKA, J. (1997) Simple quantales, in *Proceedings of the Eighth Prague* Topology Symposium, Prague.

[163] PASEKA, J. and KRUML, D. (2000) Embeddings of quantales into simple quantales, *Journal of Pure and Applied Algebra*, To appear.

[164] PASEKA, J. and ROSICKÝ, J. (2000) Quantales, in B. Coecke, D.J. MOORE and

A. WILCE (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[165] PIRON, C. (1964) Axiomatique quantique, *Helvetica Physica Acta* **37**, 439–468.

[166] PIRON, C. (1965) Sur la quantification du système de deux particules, *Helvetica Physica Acta* **38**, 104–108.

[167] PIRON, C. (1969) Les règles de supersélection continues, *Helvetica Physica Acta* **42**, 330–338.

[168] PIRON, C. (1971) Observables in general quantum theory, in B. D'Espagnat (ed.) *Foundations of Quantum Mechanics*, Academic Press, New York.

[169] PIRON, C. (1972) Survey of general quantum physics, *Foundations of Physics* **2**, 287–314.

[170] PIRON, C. (1976) *Foundations of Quantum Mechanics*, W.A. Benjamin, Inc., Reading.

[171] PIRON, C. (1990) *Mécanique quantique bases et applications*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, Second edition, 1998.

[172] PITTS, A. M. (1988) Applications of sub–lattice enriched category theory to sheaf theory, *Proceedings of the London Mathematical Society* **57**, 433–480.

[173] Pool, J. C. T. (1968a) Baer *–semigroups and the logic of quantum mechanics, *Communications in Mathematical Physics* **9**, 118–141.

[174] POOL, J. C. T. (1968b) Semimodularity and the logic of quantum mechanics, *Communications in Mathematical Physics* **9**, 212–228.

[175] PRESTEL, A. (1995) On Solèr's characterization of Hilbert spaces, *Manususcripta Mathematica* **86**, 225–238.

[176] PTÁK, P. (2000) Observables in the logico-algebraic approach, in B. Coecke, D. J. Moore and A. Wilce (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[177] PTÁK, P. and PULMANNOVÁ, S. (1991) *Orthomodular Structures as Quantum Logics*, Kluwer, Dordrecht.

[178] PULMANNOVÁ, S. (1986a) Transition probability spaces, *Journal of Mathe-*

matical Physics **27**, 1791–1795.

[179] PULMANNOVÁ, S. (1986b) Functional properties of transition amplitude spaces, *Reports in Mathematical Physics* **24**, 81–86.

[180] PULMANNOVÁ, S. and GUDDER, S. P. (1987) Geometric properties of transition amplitude spaces, *Journal of Mathematical Physics* **28**, 2393–2399.

[181] PULMANNOVÁ, S. and WILCE, A. (1995) Representations of D–posets, *International Journal of Theoretical Physics* **34**, 1689–1696.

[182] PUTNAM, H. (1968) Is logic empirical?, in R. S. Cohen and M. W. Wartofsky (eds.) *Boston Studies in the Philosophy of Science V*, D. Reidel, Dordrecht.

[183] PUTNAM, H. (1976) How to think quantum–logically, in P. Suppes (ed.) *Logic and Probability in Quantum Mechanics*, D. Reidel, Dordrecht.

[184] RANDALL, C. H. (1966) *A Mathematical Foundation for Empirical Science*, Doctoral Dissertation, Rensselaer Polytechnic Institute.

[185] RANDALL, C. H. and FOULIS, D. J. (1970) An approach to empirical logic, *American Mathematical Monthly* **77**, 363–374.

[186] RANDALL, C. H. and FOULIS, D. J. (1973) Operational statistics. II.Manuals of operations and their logics, *Journal of Mathematical Physics* **14**, 1472–1480.

[187] RANDALL, C. H. and FOULIS, D. J. (1978) The operational approach to quantum mechanics, in C. A. Hooker (ed.) *Physical Theory as Logico-Operational Structure*, D. Reidel, Dordrecht.

[188] RANDALL, C. H. and FOULIS, D. J. (1981) Operational statistics and tensor products, in H. Neumann (ed.) *Interpretations and Foundations of Quantum Theory*, B. I. Wissenschaft, Mannheim.

[189] RANDALL, C. H. and FOULIS, D. J. (1983a) A mathematical language for quantum physics, in C. Gruber, C. PIRON, T. M. Tâm and R. Weill (eds.) *Les fondements de la mécanique quantique*, AVCP, Lausanne.

[190] RANDALL, C. H. and FOULIS, D. J. (1983b) Properties and operational propositions in quantum mechanics, *Foundations of Physics* **13**, 843–857.

[191] RESENDE, P. (1999) Modular specification of concurrent systems with observational logic, in J. L. Fiadeiro (ed.) *Recent Developments in Algebraic Devel-*

opment Techniques, Springer–Verlag, Berlin.

[192] RESENDE, P. (2000) Quantales, finite observations and strong bisimulation, *Theoretical Computer Science*, To appear.

[193] RESENDE, P. (2000) Quantales and observational semantics, in B. Coecke, D. J. Moore and A. WILCE (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[194] Rosenthal, K. I. (1991) Free quantaloids, *Journal of Pure and Applied Algebra* **77**, 67–82.

[195] Rosický, J. (1989) Multiplicative lattices and C*–algebras, *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* **30**, 95–110.

[196] ROSICKÝ, J. (1995) Characterizing spatial quantales, *Algebra Universalis* **34**,175–178.

[197] SASAKI, U. (1955) Lattices of projections in AW*–algebras, *Journal of Science of Hiroshima Univerity A* **19**, 1–30.

[198] SCHROECK, F. E. (1996) *Quantum Mechanics on Phase Space*, Kluwer Academic (Dordrecht).

[199] SEGAL, I. (1947) Postulates for General Quantum Mechanics, *Annals of Mathematics* **4**, 930–948.

[200] SOLÈR, M. P. (1995) Characterization of Hilbert spaces by orthomodular spaces, Communications in Algebra **23**, 219–243.

[201] STOLZ, P. (1969) Attempt of an axiomatic foundation of quantum mechanics and more general theories. V, *Communications in Mathematical Physics* **11**, 303–313.

[202] STOLZ, P. (1971) Attempt of an axiomatic foundation of quantum mechanics and more general theories. VI, Communications in Mathematical Physics **23**, 117–126.

[203] VALCKENBORGH, F. (2000) Operational axiomatics and compound systems, in B. COECKE, D. J. MOORE and A. WILCE (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras, Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[204] VARADARAJAN, V.S. (1968) *The Geometry of Quantum Theory, Volumes I–II*, Van Nostrand, New York.

[205] VICKERS, S. (1989) *Topology via Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.

[206] WARD, M. (1937) Residuations in structures over which a multiplication is defined, *Duke Mathematical Journal* **3**, 627–636.

[207] WARD, M. (1938) Structure residuation, *Annals of Mathematics* **39**, 558–568.

[208] WARD, M. and DILWORTH, R. P. (1939a) Residuated lattices, *Transactions of the American Mathematical Society* **45**, 335–354.

[209] WARD, M. and DILWORTH, R. P. (1939b) Non–commutative residuated lattices, *Transactions of the American Mathematical Society* **46**, 426–444.

[210] WILCE, A. (1990) Tensor products of frame manuals, *International Journal of Theoretical Physics* **29**, 805–814.

[211] WILCE, A. (1992) Tensor products in generalized measure theory, *International Journal of Theoretical Physics* **31**, 1915–1928.

[212] WILCE, A. (1995) Partial Abelian semigroups, *International Journal of Theoretical Physics* **34**, 1807–1812.

[213] WILCE, A. (1997) Pull-backs and product tests, *Helvetica Physica Acta* **70**, 803–812.

[214] WILCE, A. (1998) Perspectivity and congruence in partial Abelian semigroups, *Mathematica Slovaca* **48**, 117–135.

[215] WILCE, A. (2000) On generalized Sasaki projections, *International Journal of Theoretical Physics* **39**, To appear.

[216] WILCE, A. (2000) Test spaces and orthoalgebras, in B. Coecke, D. J. Moore and A. Wilce (eds.) *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebras Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.

[217] YEADON, F. J. (1983) Measures on projections in W*-algebras of type II_1, *Bulletin of the London Mathematical Society* **15**, 139–145.

ALEPH SUB – CERO
SERIE DE DIVULGACIÓN
$\aleph_0$ 2014 – II $\aleph_0$
pp. 176 - 202

SIMETRÍA Y CIENCIA
(Symmetry and Science)

Graciela Benzal y Carmen Torrente[1]

Recepción: Septiembre 2014. Revisión y aceptación: Octubre 2014.

Resumen. La matematización progresiva en prácticamente todas las ciencias se ha profundizado durante el siglo XX. En la física como en la química y en problemas que se caracterizan por la simetría, ramas de la matemática como la geometría, el álgebra lineal y la teoría de grupo tuvieron subsiguientes aplicaciones. En particular, en la relación simetría-química la simetría molecular desempeña un papel fundamental en la descripción y predicción de las propiedades de las moléculas y su utilización en el campo de la espectroscopia molecular. La aplicación más inmediata es la clasificación de moléculas poliatómicas que posee estructura de grupo matemático conforme a su propio conjunto de operaciones de simetrías. Este artículo de divulgación está orientado específicamente hacia la simetría molecular. Se presenta a la matemática en forma integrada con la química empleando un lenguaje preciso aunque no tan riguroso y tiene el propósito de permitir a los lectores apreciar la relación matemática-ciencias complementado con aspectos históricos de los tópicos matemáticos tratados.

Palabras claves: simetría, teoría de grupo, simetría molecular, perspectiva histórica, integración matemática-química.

Abstract: The progressive mathematization in virtually every science has deepened during the twentieth century. In physics and chemistry and problems that are characterized by symmetry, branches of mathematics such as geometry, linear algebra and group theory had subsequent applications. In particular in the

[1] Instituto de Matemática. Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia. Universidad Nacional de Tucumán. San Miguel de Tucumán. Argentina. +54 381 4247752 (interno 7064)
gbenzal@fbqf.unt.edu.ar; ctorrente@fbqf.unt.edu.ar

symmetry - related chemically, the molecular symmetry plays a vital role in describing and predicting the properties of the molecules and their use in the field of molecular spectroscopy . The most immediate application is the classification of polyatomic molecules according to their own set of symmetry operations having mathematical group structure. This popular article is geared specifically toward molecular symmetry. Mathematics is presented in an integrated manner with the chemical using a precise although not as rigorous language and is intended to allow readers to appreciate the math - science relationship supplemented with historical aspects of mathematical topics covered.

Key Words: symmetry, space geometry, group theory, molecular symmetry, historical perspective, integration mathematics-chemistry.

Introducción

Cuando Albert Einstein expresó que *hasta donde las leyes de la matemática se refieren a la realidad, no son exactas; y en cuanto son exactas no se refieren a la realidad* confirma en cierto modo el carácter dual de la matemática, pura y aplicada, caras de la misma moneda, que no son exactamente lo mismo pero que se unen con resultados sorprendentes.

La matematización progresiva, en prácticamente todas las ciencias, se ha profundizado durante el siglo XX, hecho que se refleja en particular en la relación simetría-química.

La palabra simetría, del latín *symmetrĭa*, significa la correspondencia exacta en tamaño, forma y posición de las partes de un todo, y el origen griego del término es "con medida". En la literatura química cuando se abordan los grupos de simetría, se hace referencia a los cinco sólidos platónicos. De estos poliedros regulares -cuyas caras son polígonos regulares e iguales y en cada vértice concurren igual número de caras-, hay registros arqueológicos, que se remontan a aproximadamente 2000 a.C, ver Figura 1.

Simetría y ciencia

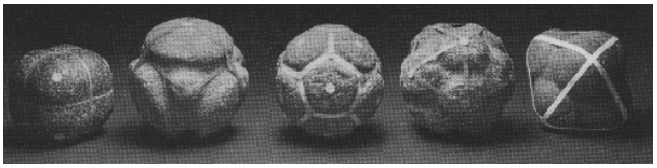


Figura 1. Poliedros esculpidos en piedra hallados en Escocia y datados 2000 A.C. (Imagen de dominio público)

Fueron los griegos quienes comenzaron a estudiar los poliedros regulares con otro interés y les asignaron propiedades relacionadas con los cuatro elementos de la naturaleza: el cubo con la tierra, el tetraedro con el fuego, el icosaedro con el agua y el octaedro con el aire; Platón asoció el dodecaedro con el Universo, Figura 2.

Figura 2. Figuras tomadas del tratado Mysterium Cosmographicum de Johannes Kepler (imagen de dominio público)

Desde aquellos sólidos tallados en piedra pasaron 4000 años, se los despojó de la asociación que le hicieran los griegos; se los introdujo en el arte e ilustraron obras como *La Divina Proporción* (Venecia, 1509), obra del matemático Pacioli (1445-1514) de quien Leonardo da Vinci recibía clases de matemáticas Allí da Vinci dibujó a los sólidos platónicos en versión hueca que permitía distinguir la caras de los mismos, como se muestra en la Figura 3.

Figura 3. Fragmentos de los dibujos sobre de los *Sólidos Platónicos* que Leonardo da Vinci diseñó para la célebre obra de Luca Pacioli

Y a partir del siglo XIX son los modelos de estructura geométrica que permiten visualizar moléculas *reales*. En la Figura 4 se muestra el esquema geométrico de los sólidos platónicos. Los elementos que lo componen, caras, vértices y aristas se resumen en la Tabla 1.

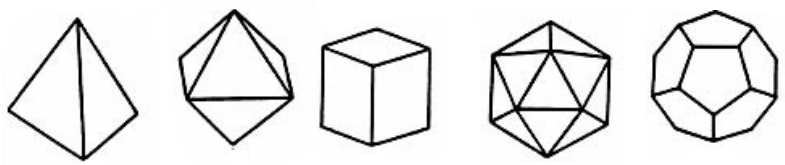


Figura 4. Esquema geométrico de los sólidos platónicos. De izquierda a derecha: tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro y dodecaedro

Tabla 1. *Clasificación de los poliedros según caras, vértices y aristas*

Poliedro	**Tetraedro**	**Octaedro**	**Cubo**	**Icosaedro**	**Dodecaedro**
Caras	4 triángulos equiláteros	8 triángulos equiláteros	6 cuadrados	20 triángulos equiláteros	12 pentágonos regulares
Vértices	4	6	8	12	20
Aristas	6	12	12	30	30

Respecto a los poliedros, Euclides en su libro *Elementos* expresa que "Existen cinco y sólo cinco sólidos platónicos (xiii.18)[2] en el siguiente enunciado:

> Digo ahora que, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura comprendida por [figuras] equiláteras y equiangulares iguales entre sí. Porque no se construye un ángulo sólido con dos triángulo o, en absoluto, con dos planos. Sino que el ángulo de la pirámide [Tetraedro] se construye con tres triángulos, el del octaedro con cuatro, el del icosaedro con cinco; pero no se construirá un ángulo sólido mediante seis triángulos equiláteros y equiangulares [colocados] en un sólo punto; porque si el ángulo del triángulo equilátero es dos tercios de un recto, los seis serán iguales a dos rectos; lo cual es imposible, porque todo ángulo sólido es comprendido por menos de cuatro rectos [Elementos, XI.21]. Por lo mismo, tampoco se construye un ángulo sólido con más de seis ángulos planos. Y el ángulo del cubo es comprendido por tres cuadrados; por cuatro es imposible, porque serán a su vez cuatro rectos. Y el [ángulo] del dodecaedro es comprendido por tres pentágonos equiláteros y equiangulares; por cuatro es imposible, porque, siendo el ángulo del pentágono equilátero un recto más un quinto,

[2] Euclides: Elementos. traduc. y notas de M.L.Puertas. Gredos. Madrid, 1996. Libro XIII, pp.355-356. Disponible en http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option

> los cuatro ángulos serán mayores que cuatro rectos; lo cual es imposible. Y un ángulo sólido tampoco será comprendido por otros polígonos en razón de la misma imposibilidad. Por consiguiente, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura sólida comprendida por [figuras] equiláteras y equiangulares. Q.E.D"

Dicho de otra manera, para que existan los poliedros, cada vértice debe unir al menos tres caras y la suma de los ángulos debe ser menor a 360º ya que si es mayor, la configuración es planar, por lo tanto cada uno de los ángulos debe ser menor a 120º, de este modo se excluyen los hexágonos regulares como posibles caras de un poliedro. Es decir, las únicas posibilidades son las caras triangulares, las cuadradas y las pentagonales. Cuando las caras son triangulares se pueden unir tres, cuatro o cinco por vértice dando lugar al tetraedro, octaedro e icosaedro; si las caras son cuadradas la única posibilidad es de tres caras por vértice formándose el cubo. Y, para las caras pentagonales solo se pueden unir tres pentágonos dando lugar al dodecaedro. Para cada uno de los casos antes dicho no puede haber un número mayor de caras porque se convertirían en figuras planas ya que superarían el límite de 360º por vértice de encuentro.

En base al teorema enunciado, que sostiene que existen solamente cinco poliedros en el espacio R^3, se construyeron o descubrieron, tres grupos puntuales de simetría, T_d, O_h e I_h, a partir de los elementos y operaciones de simetría del tetraedro, octaedro e icosaedro, respectivamente. El número de simetrías diferentes que se presentan en los poliedros que dan nombre a los grupos puntuales son 24, 48 y 120 de las cuales 6, 9 y 15 son simetrías respecto a un plano. Los grupos puntuales son tres porque el cubo se comporta como el octaedro y el dodecaedro como el icosaedro. Esto se debe a que los poliedros de cada pareja son duales entre si, es decir, el número de caras de uno es el de vértices del otro, excepto el tetraedro que

es dual a sí mismo, como puede verse en la Tabla 1. Por lo tanto, cada simetría que se realiza en las caras de uno de ellos se puede realizar en los vértices del otro.

En matemática la simetría de un objeto matemático, lo poliedros en este caso, va más allá de la belleza estética del arte y la arquitectura. Tiene que ver cómo después de mover o rotar el objeto queda en su posición original; es como si no se hubiera realizado sobre ellos tales manipulaciones. Precisamente el conjunto de transformaciones que dejan invariante a estos objetos forman una estructura de grupo y por esto la matemática de la simetría es la teoría de grupos.

Los sólidos platónicos tienen los tres tipos de simetrías que se presentan en el espacio de tres dimensiones: a) simetría puntual, respecto al centro del poliedro, b) simetría axial con respecto a ejes que contienen al centro del poliedro y c) simetría plana, respecto a un plano que contiene al centro de simetría y a combinaciones de ejes de simetría.

Cuando se aborda el concepto de simetría se anclan las estructuras de las moléculas bajo estudio en un sistema de ejes cartesianos, respecto de cuyos elementos (punto, recta y plano) se realizan las operaciones de simetría.

Así, los químicos elaboran catálogos y tablas que se basan en el concepto de simetría molecular para establecer el comportamiento cualitativo de las moléculas bajo estudio. Cuando se habla de simetría molecular se hace referencia a la geometría de la molécula: sus elementos de simetría (punto, recta y plano) y a las operaciones de simetría respecto a estos elementos, es decir la inversión, rotación y reflexión, movimientos que hacen indistinguibles la posición y orientación del cuerpo respecto a su estado original.

La simetría en las estructuras moleculares

Por ejemplo, si la fórmula global es AB_4, como en el metano, la distribución de los pares electrónicos es tetraédrica y su forma geométrica es la del tetraedro, tiene 24 simetrías diferentes, de las cuales 6 son simetrías planas (Figura 5)

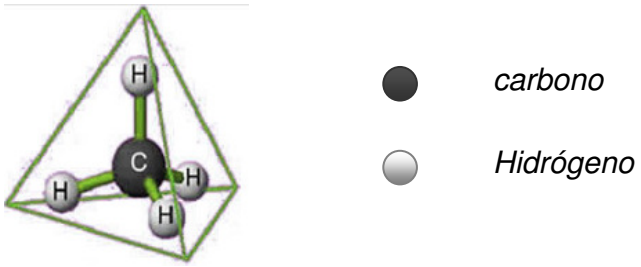


Figura 5. Geometría tetraédrica y molécula de metano CH4

Cuando una de las caras del tetraedro deja de ser un triángulo equilátero, es decir, deja de ser un sólido platónico, se convierte en lo que se llama una pirámide triangular y en ese caso las simetrías se reducen a 6 como ocurre con la estructura del amoníaco en el que se identifican un eje de rotación y tres planos verticales como elementos de simetría (Figura 6)

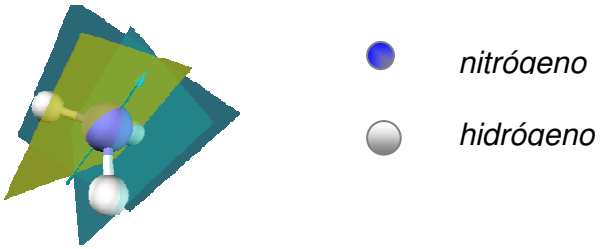


Figura 6. Elementos de simetría en la molécula de amoníaco NH3
(obtenida con Dmolsym)

En cambio, en la estructura del metano, asociada al primer sólido platónico, los elementos y las operaciones de simetría es mayor que en la del amoníaco. De los trece elementos de simetría del metano: cuatro ejes de rotación de simetría C_3 (giro de $2\pi/3$) que pasan por el centro de gravedad y un vértice, tres ejes de rotación de

simetría C_2 (giro de $2\pi/2$) y seis planos de simetría, se representan algunos en la Figura 7.

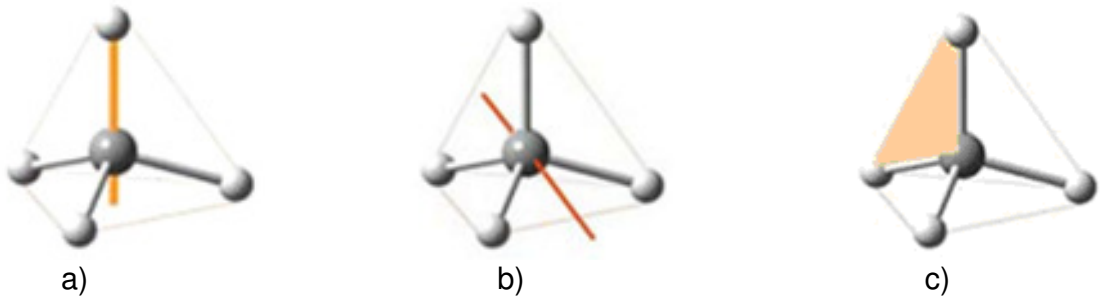


Figura 7. Elementos de simetría del metano. a) uno de los cuatro ejes de simetría C3; b) uno de los tres ejes de simetría C2; c) uno de los seis planos de simetría

Se dijo que los elementos de simetría están relacionados con las operaciones de simetría de rotación, reflexión e inversión donde al menos un punto de la estructura molecular permanece fijo. Las 24 operaciones de simetría posibles en el metano lo llevan a una configuración equivalente a la inicial, indistinguible pero no necesariamente idéntica; nueve son rotaciones de $2\pi/3$; tres de π, seis rotaciones impropias y seis reflexiones respecto a cada plano.

Para cualquier molécula un conjunto *completo y no repetido* de operaciones de simetría, es decir cuando todas las combinaciones posibles de dichas simetrías pertenecen al mismo, es un grupo matemático llamado grupo de simetría [3], cuya ley de composición interna es la aplicación sucesiva de las operaciones de simetría.

La mayoría de las moléculas simples o iones poliatómicos tienen más de una operación de simetría, algunas con varias repeticiones de la misma operación. La

[3] Cotton, F, Albert. *La teoría de grupos aplicada a la Química*. Editorial Limusa. 1977. p.28

colección de éstas se le llama grupo puntual, para indicar que al menos un punto en la molécula aislada permanece fijo bajo todas las operaciones de simetría del grupo.

Los grupos de simetría que se presentan en las estructuras moleculares reales, denominados grupos puntuales moleculares (*GPM*), se denotan $C_n, D_n, S_n, C_{nv}, C_{nh}, T_d$ para indicar respectivamente: rotaciones propias de $2\pi/n$ (un eje principal), rotaciones de eje principal y secundario, rotaciones de eje principal y reflexiones de planos vertical y diedros, rotaciones propias e impropias por la presencia de un plano molecular y grupos cúbicos, respectivamente.

En tres dimensiones hay 32 grupos, de los cuales 30 son relevantes en química. A cada uno se le asigna un símbolo llamado *símbolo de Schoenflies.* Por ejemplo, la molécula NH_3 pertenece al grupo puntual C_{3v} por ser el eje de rotación principal C_3 y por la existencia de planos verticales especulares. La molécula de H_2O pertenece al grupo puntual C_{2v}, el cual contiene las operaciones E, C_2 y dos operaciones de reflexión, una respecto al plano molecular y la otra respecto al plano perpendicular que bisecta el ángulo entre los enlaces, como se mostrará más adelante.

El conjunto completo de operaciones de simetría en la molécula NH_3 son tres rotaciones C_3 y tres reflexiones σ_v que determinan una partición del grupo en tres *clases de elementos conjugados*[4] o clases de operaciones de simetría: E, $2C_3$, $3\sigma_v$ formadas por operaciones del mismo tipo. Así, el elemento identidad E forma siempre única clase, la clase $2C_3$ posee las dos rotaciones y la clase $3\sigma_v$ las tres

[4] Idem, p. 31

reflexiones, de modo que el número de elementos en cada clase, dado por el coeficiente, es un divisor del orden del grupo.

En el metano, caracterizado por el *GPM* T_d, el conjunto completo de las veinticuatro operaciones de simetría forman las cinco siguientes clases de elementos conjugados:

$$E, 8C_3,\ 3C_2,\ 6S_4,\ 6\sigma_d$$

Los *grupos de rotación pura* se obtienen directamente a partir de los grupos puntuales T_d, O_h, I_h descubiertos por la observación directa de los cinco poliedros regulares Si de cualquier grupo que contenga reflexiones tomamos éstas y las rotaciones impropias se obtienen subgrupos que constan sólo de rotaciones propias. Así, el grupo T_d tiene un subgrupo de rotaciones puras: el grupo cúbico T de orden doce particionado en las clases de elementos conjugados $E, 4C_3,\ 4C_3^2,\ 3C_2$

Las clases con más de un elemento indican que el grupo cúbico T no es un grupo cíclico[5] C_n, pero ellos son otra historia que merece un tratamiento especial.

Grupos de simetría

La teoría de grupos nació en conexión al problema de resolver ecuaciones algebraicas de grado superior a cuatro y la demostración de la imposibilidad de obtener las soluciones de las ecuaciones de quinto grado, y mayor, por medio de radicales. Se reconoce a Galois, (1811-1832), como fundador de dicha teoría, a pesar que este concepto ya había aparecido con Ruffini, bajo el nombre de

"permutaciones" y con Cauchy como "sistemas conjugados de sustituciones". Galois murió cuando apenas tenía 20 años de edad y en la noche previa a su muerte, se dice, creó la teoría de los grupos finitos que entró en la conciencia científica diez años antes del nacimiento de Albert Einstein.

Esta teoría pasó a tener una importante aplicabilidad en mecánica cuántica y en el campo de la estructura molecular, pues permite explicar aquellos aspectos de la naturaleza entendidos en términos de simetría abstracta solamente y forma parte del pensamiento de quienes investigan las partículas elementales de la naturaleza.

El mérito de Galois fue desarrollar conceptos estructurales básicos que permitieron conectar una gran variedad de tipos de álgebra inventadas durante el siglo XIX e introducir las propiedades más importantes de esta teoría en el sentido técnico actual; es decir, el de clase cerrada respecto de la adición y la sustracción. Precisamente en su evolución, la teoría de grupos muestra la distinción entre la matemática clásica y la matemática actual. Si bien para ambas el proceso básico es la abstracción, en la matemática al modo clásico, este proceso se hace a partir de entes concretos del mundo exterior, sensibles o no, y de operaciones para desde allí abstraer. En cambio, en la matemática de hoy, en la que se encuadra la teoría de grupo, el proceso de abstracción elimina toda referencia a entes concretos para dejar sólo el esquema formal y las relaciones que definen la estructura. Hecho que posibilitó hacer una teoría puramente abstracta de la simetría de las partículas fundamentales sin apelar a modelos mecánicos o dinámicos arbitrarios. Siguiendo

[5] Ver Cotton p. 121

a Freeman Dyson, se podría decir que la teoría de grupos "tiene una base matemática elegante e impecablemente rigurosa"[6].

Una operación de simetría transforma la orientación o la geometría interna de la molécula de tal modo que la disposición inicial y la final son equivalentes (indistinguibles), manteniéndose inalteradas todas sus propiedades. El conjunto de operaciones de simetría que caracteriza a una molécula es un grupo matemático de orden igual al número de operaciones de simetría posibles. En la molécula lineal, como el dióxido de carbono de la figura 8, el orden del grupo es infinito.

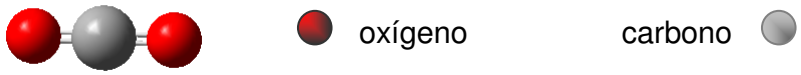


Figura 8. Molécula lineal. Dióxido de carbono

Las moléculas lineales tienen un eje de simetría de orden infinito que coincide con la totalidad de los núcleos, es decir todas las rotaciones de cualquier ángulo alrededor de este eje son operaciones de simetría del grupo. Además, existe un número infinito de planos que contienen a la molécula y al eje molecular.

En las moléculas no lineales, como la del amoniaco de la Figura 6, el orden del grupo de simetría es finito. Las seis operaciones de simetría posibles: tres rotaciones y tres reflexiones forman un grupo de orden seis[7]. En la medida que aumenta la simetría el orden del grupo también aumenta, como en el metano que tiene veinticuatro operaciones de simetría y su orden es veinticuatro.

---

[6] Dyson, F. Matemática en las ciencias físicas. En *Matemáticas en el mundo moderno.* 1964.p. 285

[7] Mortimer, R.G. Mathematics for physical chemistry. *Elsevier Academic Press*. USA. 2005. p.295

Simetría y ciencia

En todos los casos existe una correspondencia biunívoca, es decir un isomorfismo entre los grupos de simetría y los *grupos abstractos*[8] del mismo orden.

A partir de la simetría de una molécula es posible obtener información cualitativa de sus propiedades químicas, de las funciones de onda y propiedades moleculares, así como predecir o explicar transiciones espectroscópicas permitidas.

La teoría de grupo ha llegado a formar parte del moderno análisis físico y químico que estudia problemas que surgen en el campo de la estructura molecular y de la mecánica cuántica[9]. Esta teoría se convirtió en una herramienta indispensable para los químicos, cristalógrafos y estructurales; tiene múltiples aplicaciones en espectroscopia vibracional y rotacional, en cristalografía y en la teoría del enlace químico, entre otras.

El caso más sencillo para analizar es el de la molécula de agua de la Figura 9 donde los tres elementos de simetría son *dos planos verticales,* ambos contienen al eje principal de rotación. Estos elementos de simetría dan a cuatro operaciones de simetría: *dos reflexiones y dos rotaciones propias de 180º.*

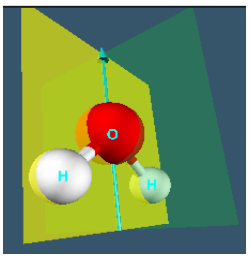


Figura 9[10]. Elementos de simetría asociado a la estructura molecular del agua H_2O.

[8] Cotton, op.cit. p.23
[9] Margenau; Murphy. *Las matemáticas de la Física y de la Química.* EPESA. Madrid.1952. p. 683
[10] Figura obtenida con *3DMolSym 3.0.* http://www.molwave.com/software/3dmolsym/3dmolsym.htm

El plano molecular, uno de los dos planos verticales, contiene el átomo de oxígeno y los dos de hidrógeno. Se observa que alrededor del eje de rotación tiene lugar una rotación propia de $\varphi = 2\pi/2$ radianes denominada C_2. En general, el ángulo de rotación $\varphi = 2\pi/n$ radianes indica que "*n*" aplicaciones de la rotación C_n^m produce exactamente una rotación completa y m es el número de veces que se aplica la rotación para obtener la configuración inicial. Cuando *m*= *n* la operación C_n^n es el elemento neutro E del grupo.

En particular, para la molécula de agua *n*= *m*=2 y las cuatro operaciones de simetría posibles se combinan por la ley de composición interna y dan como resultado siempre una de ellas por ser una operación cerrada. En la Figura 10 se representa esta situación donde los átomos de hidrógeno están enumerados para distinguir el efecto de las operaciones de simetría.

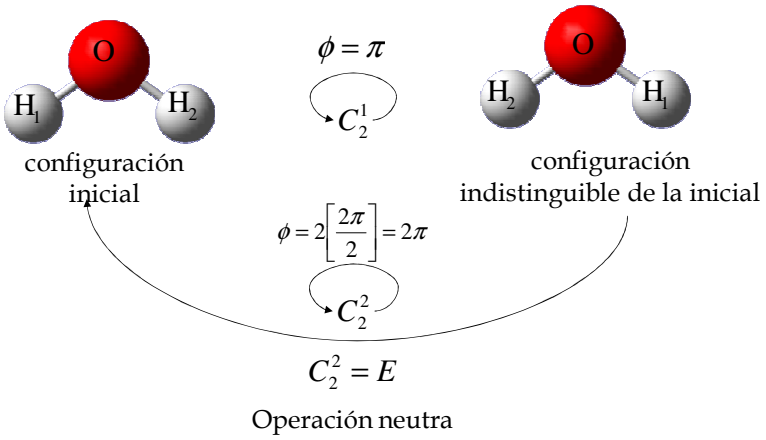


Figura 10[11]. Composición de operaciones de simetría: una reflexión seguida de una rotación

[11] Benzal, G. Teoría de grupo finito aplicada a la Química. 2013. Material inédito de clases para la Lic. en Química de la Fac. de Bqca. Qca y Fcia. UNT.

En la figura se observa la aplicación sucesiva de la operación de rotación de 90º que lleva la molécula a su configuración inicial representada por la operación neutra $E \equiv C_2^2$. Además, se puede probar que la *ley de cierre* también se cumple para cualquier otro par de operaciones de simetría. Los resultados de dichas composiciones se resumen en la Tabla 2, en cuya parte superior y lateral izquierda aparecen todas las posibles operaciones de simetría. Se puede leer, por ejemplo, que $C_2^1\sigma_v = \sigma_v^{'}$ y $\sigma_v C_2^1 = \sigma_v^{'}$. La Tabla 2 así obtenida es isomorfa a la Tabla 3 denominada tabla de multiplicación del grupo abstracto de orden cuatro donde están todas las posibles composiciones de sus elementos, el inverso de cada uno y el elemento neutro.

Tabla 2. *Tabla de multiplicar del conjunto de operaciones de simetría del agua*

	$\hat{E}$	$\hat{C}_2^1$	$\hat{\sigma}_v$	$\hat{\sigma}_v^{'}$
$\hat{E}$	$\hat{E}$	$\hat{C}_2^1$	$\hat{\sigma}_v$	$\hat{\sigma}_v^{'}$
$\hat{C}_2^1$	$\hat{C}_2^1$	$\hat{E}$	$\hat{\sigma}_v^{'}$	$\hat{\sigma}_v$
$\hat{\sigma}_v$	$\hat{\sigma}_v$	$\hat{\sigma}_v^{'}$	$\hat{E}$	$\hat{C}_2^1$
$\hat{\sigma}_v^{'}$	$\hat{\sigma}_v^{'}$	$\hat{\sigma}_v$	$\hat{C}_2^1$	$\hat{E}$

Tabla 3. *Una de las dos Tablas de Cayley del grupo abstracto abeliano de orden 4*

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

La tabla de multiplicar se conoce como Tabla de Cayley en honor al matemático británico Arthur Cayley (1821–1895), el primer matemático en definir el concepto de grupo abstracto (1854) como un conjunto con una operación binaria que satisface ciertos axiomas. En su artículo *The theory of groups,* uno de los cuatro artículos que escribió en 1878, formaliza y demuestra que cualquier grupo finito puede describirse en términos de grupos de permutaciones. Desarrolló además, junto a Sylvester (1814-1897), las matrices que mas tarde resultaron esenciales para el progreso de la química cuántica y la química matemática, que se encarga de

las aplicaciones de la matemática en la química. Ambos matemáticos, Caley y Silvestre, colaboraron "en el desarrollo de la teoría de las «formas» (o «cuánticas», como prefería llamarlas Cayley), de donde les vino el apodo de los «gemelos invariantes»"[12]

Las tablas de grupo abstracto satisfacen el *Teorema de Redistribución* que establece que e*n la tabla de multiplicar de un grupo finito no es posible encontrar una fila o una columna que contenga algún elemento repetido*. Es decir, cada columna y cada fila contiene a cada uno de sus elementos una y sólo una vez; no puede haber dos renglones ni dos columnas idénticos y cada renglón y cada columna constituyen una lista donde los elementos del grupo tienen un orden distinto.

En particular, se observa que la Tabla 2 satisface el *Teorema de Redistribución*. Además se cumple que:

- cada operación de simetría no se altera si se compone con la correspondiente a la configuración inicial, comportándose ésta última como el elemento identidad o elemento neutro del grupo,
- el orden de asociación de tres operaciones de simetrías, propiedad asociativa, no modifica el resultado,
- para cada operación de simetría existe otra cuya composición lleva a la estructura a su configuración inicial, se reconoce como el elemento inverso,
- el grupo es abeliano porque se obtiene el mismo resultado al conmutar la composición de dos operaciones de simetría, propiedad que no siempre se cumple.

[12] Boyer, C. *Historia de la matemática*. Alianza Editorial. Madrid. 1996. p. 721

Entonces el conjunto de las operaciones de simetría $\left\{E, C_2^1, \sigma_v, \sigma_v^{'}\right\}$ en la molécula del agua es un *conjunto completo* ya que satisface los cuatro axiomas de grupo matemático.

1) $\forall a,b \in G, \quad a*b \in G$ *ley de cierre*
2) $\exists e \in G / \quad \forall a \in G, \quad e*a = a*e = a$ *existencia del neutro*
3) $\forall a,b,c \in G, \quad (a*b)*c = a*(b*c)$ *propiedad asociativa*
4) $\forall a \in G \quad \exists\, a^{-1} \in G \;\; / \quad a^{-1}*a = a*a^{-1} = e$ *existencia del inverso de cada elemento*

Simetría y Algebra Lineal

En un objeto espacial que se mueve en forma arbitraria son posibles dos tipos de transformaciones, la *topológica* que deforma el objeto, estirándolo o comprimiéndolo sin llegar a romperlo, como si su consistencia fuera elástica y la *rígida* que no lo deforman llamada isometría (rotaciones, traslaciones, reflexiones); transformaciones que conservan las medidas de ángulo, longitud, área y volumen, como lo hacen las operaciones de simetría en las estructuras moleculares. Estas operaciones producen desplazamientos geométricos en las moléculas con respecto a sus correspondientes elementes de simetría, que se describen mediante transformaciones matriciales.

Las matrices se usan para representar operaciones de simetría dada la similitud del algebra de operadores con la matricial. Un operador o transformación lineal[13] se identifica cuando se conoce su efecto en los vectores de una base de R^3, lo que

[13] Larson, R; Falvo, D. *Fundamentos de Álgebra lineal*. Sexta Edición CENGACE. México. p. 361

determina su representación matricial. Las propiedades de la matriz de transformación no dependen de la base pero como la base canónica facilita el cálculo en varios aspectos se elige la imagen de los vectores de dicha base como columnas de un arreglo rectangular. Esta matriz se denomina *matriz estándar de transformación lineal*.

Por ejemplo, la rotación propia de $\varphi = 2\pi/n$ con n entero es la transformación lineal

$$\hat{C}_n : R^3 \to R^3 \qquad \hat{C}_n(x, y, z) = (x\cos\varphi + y\,sen\varphi, -x\,sen\varphi + y\cos\varphi, z)$$

con matriz de transformación

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -sen\varphi & 0 \\ sen\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En particular, en la molécula de agua $n=2$ y la rotación propia de π radianes se representa con la segunda matriz de la Tabla 4, en dónde también está representada la operación neutra del grupo de simetría con la matriz E. Las dos últimas matrices representan las operaciones de reflexión obtenidas de las transformaciones lineales respectivas:

$$\hat{\sigma}_{xz}(x, y, z) = (x, -y, z) \qquad \hat{\sigma}_{yz}(x, y, z) = (-x, y, z)$$

donde el eje C_2 coincide con el eje z de un sistema coordenado cartesiano y permite que uno de los planos verticales sea el plano xz y el otro el plano yz.

Tabla 4. *Representación matricial reducible cartesiana del grupo de simetría de la molécula de agua. Matrices diagonales no singulares de orden tres*

	$\hat{E}$	$\hat{C}_2$	$\hat{\sigma}_{xz}$	$\hat{\sigma}_{yz}$
Γ_{xyz}	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La *representación matricial* de un grupo de simetría es el nexo entre la simetría molecular y una serie de teoremas que permiten obtener información química relevante. Un conjunto de matrices que representa todas las operaciones de simetría de un grupo es una *representación* del grupo y además satisfacen los axiomas de grupo matemático. Las matrices tienen el mismo efecto que las operaciones de simetría, siempre que se multipliquen en el mismo sentido.

En particular, el conjunto de matrices de la Tabla 4 forma la *representación matricial* del grupo puntual C_{2v}. El orden de sus matrices determina la dimensión de esta representación denominada Γ_{xyz} por ser cartesiana.

Las representaciones de un grupo de simetría pueden ser *reducibles o irreducibles*. De las primeras se desprende el número de representaciones irreducibles, y cuáles son, mediante una transformación de semejanza $B = P^{-1}AP$ sobre las matrices A y B de la representación reducible. Esta transformación mediante alguna matriz P las convierte en matrices diagonales por bloques en los que se identifica las correspondientes representaciones irreducibles.

La representación de la Tabla 4 es *reducible*, ya que cada matriz es diagonal en bloque de 1x1, de donde se obtienen tres *representaciones irreducibles* unidimensionales no equivalentes del grupo C_{2v}. Existen diversos teoremas que determinan el número y dimensión de las representaciones irreducibles de un grupo y el número de *clases de operaciones de simetría*. Para el grupo que caracteriza a la molécula del agua las *clases* son cuatro por ser un grupo de simetría abeliano.

Desde el punto de vista matemático las propiedades de las representaciones irreducibles se describen en el Gran Teorema de la Ortogonalidad[14] que establece relaciones entre el orden del grupo, la dimensión de las representaciones irreducibles y sus trazas. Para muchas aplicaciones físicas es suficiente conocer sólo la traza, magnitud que en teoría de grupos recibe el nombre de *caracter* χ de la matriz.

En búsqueda de un invariante

Los caracteres de las representaciones irreducibles de un grupo forman su correspondiente *tabla de caracteres*[15]. Es de interés para los químicos obtener la información cualitativa sobre las estructuras moleculares que se desprenden de dichas tablas, ya que la traza o carácter de las matrices de las representaciones reducibles o irreducibles es invariante, no dependen del sistema de referencia elegido, no cambia bajo una transformación de equivalencia y es útil por la información que proporciona.

Por ejemplo, las trazas de las matrices de la representación reducible de la Tabla 4 son respectivamente los caracteres 3, -1, 1 y 1. Los correspondientes a las representaciones irreducibles aparecen en la Tabla 5[16] llamada tabla de caracteres del *grupo puntual* C_{2v}.

Para facilitar la lectura de la tabla es importante el concepto de clases de elementos conjugados, donde dos elementos *a* y *b* de un grupo pertenecen a la misma clase, es

[14] Teoría de grupos aplicada a la simetría molecular. p. 268
[15] Cotton, F. p. 418-428
[16] Anexo III de Cotton, p. 421

decir son elementos conjugados, si están relacionados entre sí de la forma $b = x^{-1}ax$ donde x es otro elemento del grupo, no necesariamente distinto del elemento a o de b. Las clases de un grupo son subconjuntos disjuntos del mismo formados por elementos mutuamente conjugados. El elemento identidad forma siempre una única clase y si el grupo es abeliano cada elementos es una clase como sucede en el grupo de la Tabla 15. En su parte superior aparecen las operaciones de simetría por clases de elementos conjugados, la columna izquierda indica las representaciones irreducibles y el cuerpo contiene los caracteres.

Tabla 5. *Tabla de caracteres del grupo puntual C_{2v}*

C_{2v}	$\hat{E}$	$\hat{C}_2$	$\hat{\sigma}_v(xy)$	$\hat{\sigma}_{v'}(yz)$		
A_1	1	1	1	1	z	x^2, y^2, z^2
A_2	1	1	-1	-1	R_z	xy
B_1	1	-1	1	-1	x, R_y	xz
B_2	1	-1	-1	1	y, R_x	yz

El carácter 1 (uno) del elemento identidad E indica que las cuatro representaciones irreducibles A_1, A_2, B_1, B_2 son unidimensionales. En la representación unidimensional *totalmente simétrica* A_1, correspondiente a un estiramiento simétrico, todos los caracteres son igual a uno, mientras que en el estiramiento *antisimétrico* A_2 y en las *deformaciones* B_1 *y* B_2 los caracteres son unos negativos y otros positivos. Los símbolos x,y,z representan las coordenadas espaciales mientras que los R indican rotaciones en torno a los ejes especificados por los subíndices. Esta información se utiliza en la interpretación de los espectros vibracionales de las moléculas poliatómicas. Los cuadrados y productos binarios de las coordenadas en la última columna se usan en el análisis de espectro Raman.

La simetría en las vibraciones moleculares

Siguiendo a Cotton[17], la teoría de grupo se puede aplicar a diferentes áreas de la mecánica cuántica molecular incluyendo la simetría de las funciones de onda electrónicas y vibracionales y al estudio de las transiciones entre los niveles de energía.

A cualquier temperatura cada molécula realiza continuamente movimientos vibracionales: aquellos en que los ángulos y distancias internas de la misma varían periódicamente sin que se produzcan traslados netos del centro de masa. Es decir, si se viaja y se gira ubicado en el centro de gravedad de la molécula el interés se centra en las genuinas vibraciones internas de la molécula.

Los complicados, causales y aparentemente no periódicos movimientos internos de una molécula que vibra son el resultado de la superposición de algunos movimientos vibratorios relativamente simples, conocidos como vibraciones normales o *modos normales de vibración* de la molécula. Cada uno de estos posee una frecuencia característica propia de modo que, cuando muchos de ellos se superponen el movimiento resultante debe ser siempre periódico, a veces es tan largo que resulta difícil de distinguir. En la aproximación del oscilador armónico la energía vibracional de una molécula de N-átomos es la suma de las energías vibracionales de los *3N-6* modos normales (*3N-5* para una molécula lineal).

[17] Cotton, F. p354

Así como la teoría de grupo permite analizar cualitativamente las vibraciones moleculares, los *valores y vectores propios*[18] permiten hacerlo en forma cuantitativa al relacionar las frecuencias de estas vibraciones, obtenidas experimentalmente, con las masas de los átomos, con los ángulos y longitudes de enlace y sobre todo con las constantes de fuerza de los ángulos individuales y los que existen entre enlaces. La matriz *F* de constantes de fuerzas ponderada por las masas introduce las energías potenciales de las vibraciones moleculares mientras, que a las energías cinéticas las introduce la matriz *G* relativa a las masas y ciertas relaciones espaciales entre átomos.

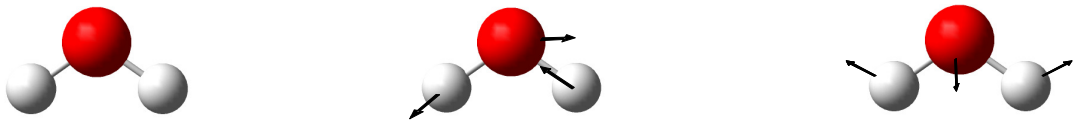
Aprovechando al máximo la simetría se usa el método de Wilson[19] de las matrices F y G combinadas en la ecuación característica que surge al resolver el $\det[FG - \lambda E] = 0$, donde λ representa los *3N* valores propios de la matriz *FG* y *E* la matriz identidad. El desarrollo de este determinante de orden *3N* arroja un polinomio de grado λ^{3N}, de modo que la ecuación característica tiene *3N* raíces, distintas o repetidas, para λ_k. Cuando *N* es grande el cálculo computacional es imprescindible.

Según Levine[20], las frecuencias vibracionales y moleculares ν_k se calculan a partir de la relación $\nu_k = \lambda_k^{1/2} / 2\pi c; \quad k = 1 \cdots 3N$ donde *c* es la velocidad de la luz en el vacío. Seis de los valores propios λ_k serán nulos, dando lugar a seis frecuencias que valen cero, correspondientes a los tres grados de libertad translacional y a los tres grados de libertad rotacional de la molécula. Las *3N-6* frecuencias vibracionales restantes son las frecuencias vibracionales armónicas moleculares.

---

[18] Larson, R; Falvo, D. op.cit. p. 421
[19] Cotton, op.cit p. 369

Los correspondientes vectores propios se refieren a los modos normales de vibración en la molécula. Indican el tipo de vibración: estiramientos y deformaciones en el caso de la molécula del agua, como los que se representan en la Figura 11.



estiramiento simétrico *estiramiento antisimétrico* *deformación*

Figura 11. Modos normales de vibración del H2O.

Las flechas en la Figura 11 representan los vectores propios correspondientes a cada valor propio λ_k relacionado a la frecuencia de vibración $\nu_k = \lambda_k^{1/2} / 2\pi c$. Los vectores propios ilustra el tipo de simulación que puede ser llevada a cabo con paquetes de programas de química cuántica como el *Gaussian*[21], ampliamente usado por los químicos. Proporciona información útil acerca de funciones de onda para moléculas simétricas, optimizando la geometría, calculando frecuencias vibracionales y propiedades termodinámicas, busca estados de transición, entre otras múltiples aplicaciones en la mecánica cuántica.

A modo de conclusión

La simetría molecular desempeña un papel fundamental en la descripción y predicción de las propiedades de las moléculas. La teoría de grupos resultó ser un marco correcto para el estudio, desarrollo y profundización de las estructuras moleculares espaciales que gozan de propiedades de simetría al permitir enumerar

[20] Levine, I. *Química Cuántica.* Prentice Hall. Madrid. 2001. p 528

y clasificar todos los grupos que se comportan bien, independientemente de la situación física donde éstos son aplicados. Por otro lado, por las leyes de la mecánica cuántica, los posibles estados cuánticos de una estructura molecular están en correspondencia exacta con la representación del grupo.

Para terminar y siguiendo a Vázquez[22], si bien la esencia de la matemática está en los números, figuras y relaciones, su fuerza motriz en los siglos pasados ha sido entender cómo funciona la naturaleza. La matemática ha sido influida y ha influido en la ciencia moderna en íntima relación con el método experimental y el soporte de la tecnología. En la actualidad, más allá de las aplicaciones en la física, la química y la biología, la matemática se presenta en todos los aspectos de la sociedad, desde la ingeniería a la información y las finanzas; sin olvidar el movimiento de las disciplinas sociales hacia el status de ciencias, y la posibilidad de visiones complementarias de la matemática, tales como su aspecto socio-histórico-cultural, que contribuyen al conocimiento.

Agradecimiento

El tema de este artículo responde al marco del Proyecto de Investigación *La matemática como instrumento-objeto* subvencionado por el Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Tucumán (CIUNT).

Bibliografía

Atkins. *Fisicoquimica.* 3º Ed editorial Addison- wesley.1991.

Bell, E.T. (2009). *Los grandes matemáticos.* Ed. Losada. Buenos Aires.

---

[21] Levine, I. p533

[22] J.L Vázquez, Matemática, Ciencia y Tecnología: una relación profunda y duradera. Disponible en http://www.encuentros-multidisciplinares.org/Revistan%C2%BA11/Juan%20Luis%20V%C3%A1zquez.pdf

Benzal, G. *Teoría de grupo finito aplicada a la Química.* 2013. Material inédito de clases para la Lic. En Química de la Fac. de Bqca. Qca y Fcia. UNT

Benzal-Torrente. *Matemática IV. Notas de teoría. Algebra lineal para estudiantes de Licenciatura en Química*. Química. 1º Ed. 2011.

Boyer, C. *Historia de la matemática*. Alianza Editorial. Madrid. 1996.

Cotton, F, Albert. *La teoría de grupos aplicada a la Química*. Editorial Limusa. 1977.

Edwards y Penney. *Cálculo y Geometría Analítica.* Prentice Hall. Mexico. 1987.

Euclides: Elementos. traduc. y notas de M.L.Puertas. Gredos. Madrid, 1996. Libro XIII, pp.355-356). Disponible en http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option

Grossman, S. *Algebra lineal con aplicaciones*. Mc Graw-Hill. 1992.

Huheey, J., Kciter, E., Keiter, R. *Química inorgánica. Principios de estructura y reactividad.* 4º Ed. Editorial alfaomega.

Lang, S. *Álgebra lineal.* Fondo Educativo Interamericano. Mexico. 1976

Larson, R; Falvo, D. *Fundamentos de Algebra lineal*. Sexta Edición. CENGACE Learning. 2010. México

Levine, I. *Espectroscopia molecular.* 1º Ed. Editorial AC. 1980.

Levine, I. *Química Cuántica.* Prentice Hall. Madrid. 2001.

Margenau; Murphy. *Las matemáticas de la Física y de la Química.* EPESA. Madrid.1952.

Matemáticas en el mundo moderno. Editorial Blume. Selecciones de Scientific American. (1974). Con introducción de Morris Kline. Versión española de Miguel de Guzmán Ozamiz. Madrid.

Medina Valtierra, J; Frausto Reyes, C. La Simetría Molecular. *Conciencia Tecnológica, núm. 27-30, 2005*. Instituto Tecnológico de Aguascalientes. México. Disponible en http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=94403012

Mortimer, R.G. *Mathematics for physical chemistry.* Elsevier Academic Press.2005

Nussbaum, A. *Teoría de los Grupos Aplicada para Químicos, Físicos e Ingenieros. Ed. Reverté. 1974.*

Prieto de Castro, C. ¿Es difícil divulgar matemáticas? *Revista Ciencia, de la Academia Mexicana de Ciencias nº 61, 2010, pps 80-86.* Disponible en www.revistaciencia.amc.edu.mx/

Shriver – Atkins. *Química Inorgánica.* 4º Ed. Editorial Mc Graw Hill. 2006

Smith,R; Minton, R. *Cálculo. Tomo 2.* Mc. Graw Hill. Colombia. 2000.

Software *3DMolSym 3.0.* Disponible en http://www.molwave.com/software/3dmolsym/3dmolsym.htm

Teoría de grupos aplicada a la simetría molecular. Cap. 10 (s/d). Disponible en http://depa.fquim.unam.mx/amyd/archivero/Grupos_1316.pdf

Thomas. *Cálculo. Varias variables.* Pearson. Mexico. 2006.

Thor A., Bak, Jonas Lichtenberg. *Vectores, tensores, grupos y representación de grupo*". Editorial Reverté. S.A. 1972.

Torrente-Benzal. *Matemática III. Notas teóricas para estudiantes de Licenciatura en Química*. Química. 1º Ed. 2011.

Vázquez J.L. Matemática, Ciencia y Tecnología: una relación profunda y duradera. Sociedad Matemática Española. Año matemático mundial 2000. Disponible en http://www.encuentros-multidisciplinares.org/Revistan%C2%BA11/Juan%20Luis%20V%C3%A1zquez.pdf

Zegarra A.L *Algebra lineal.* Mc Graw Hill. Chile. 2001.

ALEPH SUB – CERO
SERIE DE DIVULGACIÓN
$\aleph_0$ 2014 – II $\aleph_0$
pp. 203 - 230

CONVEXIDAD, DUALIDAD Y EFECTOS
(**Convexity, duality and effects**)

Adunador: **Alberto Mejías**[1]

¡Hay tres tipos de matemáticas: las que comprendemos, las que no comprendemos y las que desconocemos! Crecientemente, se hace más y más difícil determinar qué es elemental y qué no es elemental.

FREDERICK A. VALENTINE
Convex Sets, 1964

Recepción: Septiembre 2014. Revisión y aceptación: Octubre 2014.

Resumen. Se describen algunas relaciones básicas entre estructuras matemáticas relevantes en Lógica Quántica y Probabilidades; a saber, conjuntos convexos, álgebras de efectos y una nueva clase de funtores, llamados 'funtores convexos', que incluyen a los que generalmente, se llaman funtores de distribución de probabilidades. Estas relaciones adoptan la forma de tres adjunciones.

Descriptores: Categorías, Quántica, Probabilidades, Efectos, Lógica Operatoral.

Abstract. Describes some basic relationships between mathematical structures that are relevant in quantum logic and probability, namely convex sets, effect algebras, and a new class of functors that we call 'convex functors'; they include what are usually called probability distribution functors. These relationships take the form of three adjunctions.

Keywords: Categories, Quantum, Probability, Effects, Operatoral Logic.

---

[1] Alberto R. Mejías E. es Licenciado en Matemáticas, egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes (ULA) Mérida- Venezuela. Es profesor de Topología jubilado de la Universidad de los Andes. alrame59@gmail.com

1. INTRODUCCIÓN

Sea I = [0, 1], el intervalo cerrado unidad, de los números reales. Un conjunto X se denomina convexo si para cada par de elementos $x, y \in X$ y cada número real $r \in \mathrm{I}$, la 'suma convexa' $rx + (1 - r)y$ está en X. Intuitivamente, esto dice que el segmento de recta con extremos x, y, está contenido en X, cada vez que los extremos estén en X.

La convexidad es, por supuesto, una noción bien establecida que encuentra aplicaciones en, por ejemplo, geometría, teoría de probabilidades, optimización, economía y mecánica quántica (con los estados mixtos como combinaciones convexas de estados puros).

La definición de convexidad (recién dada) determina una estructura monoidal + sobre el conjunto X y también una multiplicación escalar $\mathrm{I} \times X \to X$. Alguna gente ha intentado capturar esta noción de convexidad, con menos supuestos; ver por ejemplo [25], [27] ó [12]. Utilizaremos esta última fuente que involucra a una operación ternaria $\langle -, -, - \rangle : \mathrm{I} \times X \times X \to X$, que satisface a un par de ecuaciones, ver Definición 3.

Recordemos primero, (véase por ejemplo [28, 8, 20, 6, 11]) que tales estructuras convexas pueden, equivalentemente, describirse uniformemente, como álgebras de una mónada; es decir, de la mónada de distribuciones $\mathcal{D}$, ver Teorema 4. Una tal asignación de álgebra, da una interpretación de cada combinación convexa formal $r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n$, donde $r_1 + \cdots + r_n = 1$, como un elemento de X. Esta formulación algébrica de convexidad, produce una descripción de una familiar construcción de inmersión como adjunción entre conjuntos convexos y módulos, ver Proposición 2 adelante.

La parte principal de este documental se refiere a dualidad de espacios convexos. Describimos dos adjunciones duales:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{PreFrm} \arrow[r, bend left, "Hom(-,\{0,1\})"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Conv}^{\mathrm{op}} \arrow[l, bend left, "Hom(-,\{0,1\})"] \arrow[r, bend right, "Hom(-,[0,1])"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{EA} \arrow[l, bend right, "Hom(-,[0,1])"'] \end{tikzcd} \qquad (1)$$

concretamente, en teoremas 9 y 17. Este diagrama involucra a las siguientes estruc-

turas.

- La categoría **Conv** de conjuntos convexos, que tiene como objetos especiales al conjunto de dos elementos 2 = {0, 1} de los valores booleanos y al intervalo unidad I de los valores de probabilidades —donde $I \cong \mathcal{D}(2)$.
- La categoría **PreFrm** de premarcos: conjuntopos (conjuntos parcialmente ordenados) con juntas (joins) dirigidas y concurrencias (meets) finitas, que se distribuyen con respecto a estas juntas, ver [19]. Estos premarcos son ligeramente más generales que los marcos (o álgebras HEYTING completos) que ocurren en la dualidad familiar en espacios topológicos, ver [18].
- La categoría **EA** de álgebras de efectos (de [9], ver también [7] para un resumen): álgebras de efectos han surgido en los estudios de fundamentos de la mecánica quántica y se utilizan para capturar los efectos quánticos, estudiados en estadística cuántica y la teoría quántica de medición, véase por ejemplo [4].

El diagrama (1) sugiere que los conjuntos convexos determinan una configuración en la cual se puede estudiar lógicas tanto booleanas como probabilísticas. Se plantean nuevas cuestiones, como: ¿Se pueden refinar las adjunciones aún más, de manera que realmente, se obtengan equivalencias, como entre espacios STONE y álgebras BOOLE o entre espacios HAUSDORFF compactos y C^*-álgebras conmutativos (ver [18] para un resumen). Esto queda como labor futura.

Las dualidades son importantes en álgebra, topología y lógica, para transferir los resultados y las técnicas de un dominio a otro. Son utilizadas en semántica computacional (ver, por ejemplo [1, 29]); pero, son relativamente nuevas en un entorno quántico. Pueden volverse parte de lo que se denomina en [2] "una extensa red de analogías interconectadas, entre lógica, informática, topología y física".

Además de las adjunciones en (1), se presenta otra adjunción involucrando álgebras de efectos; a saber, una correflección:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{EA} \arrow[r, bend left, "\mathcal{D}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & Conv(\mathbf{Sets}) \arrow[l, bend left, "F \mapsto F(2)"] \end{tikzcd} \qquad (2)$$

entre álgebras de efectos y lo que llamamos endofuntores convexos. Estos funtores capturan lo esencial del funtor de distribuciones de probabilidad (o mónada), que es generalizado aquí: de tomar los valores de probabilidad en I, a tomar valores en un

álgebra de efectos, arbitrario. Se espera que la adjunción (2) pueda utilizarse para construir un "triángulo de adjunciones" al estilo de [5], relacionando escalares (o probabilidades), mónadas convexas y teorías LAWVERE con estructuras parcialmente aditivas.

El artículo empieza con una sección sobre paquetes (multiconjuntos) y mónadas de distribuciones sobre semianillos, incluyendo una adjunción entre sus categorías de álgebras. Sección 3 recuerda, en el teorema 4, cómo se pueden describir conjuntos convexos (reales), como álgebras de la mónada de distribuciones. Posteriormente, Sección 4 describe la adjunción a la izquierda en (1), entre conjuntos convexos y premarcos, vía filtros primos (ultrafiltros) en conjuntos convexos y filtros SCOTT-abiertos en premarcos. Ambos pueden ser descritos mediante homomorfismos al objeto dualizante $\{0, 1\}$. La adjunción a la derecha en (1) requiere que, primero, describamos cuestiones básicas de álgebras de efectos. Esto se hace en la sección 5. El intervalo unidad I, ahora, sirve como objeto dualizante, donde señalamos que las asignaciones de álgebras de efectos $E \to \mathrm{I}$, comúnmente, se estudian como estados o mediciones en un sistema quántico. El documental concluye en la sección 7 con la adjunción (2) entre álgebras de efectos y funtores convexos.

2. Mónadas de Paquetes y de Distribuciones

Esta sección describe a la mónada de paquetes $\mathcal{M}_S$, para un semianillo S y la mónada de distribuciones $\mathcal{D}$. El resultado principal es una adjunción, en Proposición 2, entre sus categorías de álgebras. Se supone que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de la teoría de mónadas y sus álgebras. Puede hallarse más información en, por ejemplo, [24, 3, 23].

Sea S un semianillo, consistente de un monoide aditivo conmutativo $(S, +, 0)$ y un monoide multiplicativo $(S, \cdot, 1)$, donde la multiplicación se distribuye con respecto a la adición.

Se puede definir un funtor de "paquetes" $\mathcal{M}_S$: **Sets** $\to$ **Sets**, por:

$$\mathcal{M}_S(X) = \{\varphi: X \to S \mid \mathrm{supp}(\varphi) \text{ es finito}\},$$

donde $\mathrm{supp}(\varphi) = \{x \in X \mid \varphi(x) = 0\}$ es el soporte de φ.

Para una función $f: X \to Y$, se define $\mathcal{M}_S(f): \mathcal{M}_S(X) \to \mathcal{M}_S(Y)$, por:

$$\mathcal{M}_S(f)(\varphi)(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varphi(x). \tag{3}$$

Un tal paquete $\varphi \in \mathcal{M}_S(X)$, se puede escribir como suma formal $s_1x_1 + \cdots + s_kx_k$ donde $\mathrm{supp}(\varphi) = \{x_1 + \cdots + x_k\}$ y $s_i = \varphi(x_i) \in S$, describe a la "multiplicidad" del elemento x_i. Esta notación de suma formal, podría sugerir un orden 1, 2,... k, entre los sumandos, pero esta suma se considera, salvo permutación de los sumandos. Además, el mismo elemento $x \in X$, puede ser contado varias veces, pero $s_1x + s_2x$ se considera igual que $(s_1 + s_2)x$, dentro de tales expresiones. Con esta notación de suma formal, se puede escribir la aplicación de $\mathcal{M}_S$ sobre una asignación f, como

$$\mathcal{M}_S(f)(\textstyle\sum_i s_ix_i) = \sum_i s_i f(x_i).$$

Este funtor de paquetes, es una mónada, cuya unidad η: $X \to \mathcal{M}_S(X)$ es $\eta(x) = 1x$ y su multiplicación μ: $\mathcal{M}_S(\mathcal{M}_S(X)) \to \mathcal{M}_S(X)$, es $\mu(\sum_i s_i\varphi_i)(x) = \sum_i s_i\varphi_i(x)$.

Para el semianillo $S = \mathbb{N}$ se obtiene al monoide conmutativo libre $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}(X)$ sobre un conjunto X. Y si $S = \mathbb{Z}$ se obtiene al grupo Abeliano libre $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(X)$ sobre X. El semianillo Booleano $2 = \{0, 1\}$ produce la mónada de conjuntos potencia finitos $\mathcal{P}_{fin} = \mathcal{M}_2$.

Un álgebra (EILENBERG-MOORE) α: $\mathcal{M}_S(X) \to X$, para la mónada de paquetes, corresponde a una estructura monoidal sobre X —dada por $x + y = \alpha(1x + 1y)$— junto con una multiplicación escalar $\cdot$: $S \times X \to X$, dada por $s \cdot x = \alpha(sx)$. Preserva la estructura aditiva (de S y X) en cada coordenada por separado. Esto hace de X un módulo para el semianillo S. Recíprocamente, una tal estructura de S-módulo sobre un monoide conmutativo M, produce un álgebra $\mathcal{M}_S(M) \to M$, mediante $\sum_i s_ix_i \mapsto \sum_i s_i \cdot x_i$. Así, la categoría $Alg(\mathcal{M}_S)$ es equivalente a la categoría $\mathbf{Mod}_S$ de los S-módulos.

Análogamente, se define la mónada de distribuciones $\mathcal{D}$ como:

$$\mathcal{D}(X) = \{\varphi\colon X \to \mathbb{I} \mid \mathrm{supp}(\varphi) \text{ es finito y } \textstyle\sum_{x \in X} \varphi(x) = 1\}. \qquad (4)$$

Los elementos de $\mathcal{D}(X)$ son combinaciones convexas $s_1x_1 + \cdots + s_kx_k$, donde las probabilidades $s_i \in \mathrm{I}$, satisfacen $\sum_i s_i = 1$. En Sección 7 veremos cómo se puede generalizar al conjunto de probabilidades desde el intervalo unidad I, a un álgebra de efectos arbitrario. La unidad y multiplicación que hacen a $\mathcal{D}$ una mónada, pueden definirse como para $\mathcal{M}_S$. Esta multiplicación está bien definida, ya que

$$\sum_x \mu\big(\sum_i s_i\varphi_i\big)(x) = \sum_x \sum_i s_i \cdot \varphi_i(x) = \sum_i s_i \cdot \big(\sum_x \varphi_i(x)\big) = \sum_i s_i = 1.$$

Las inclusiones $\mathcal{D}(X) \hookrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{R} \geq 0}(X)$, que envían distribuciones a paquetes sobre los números reales no negativos $\mathbb{R} \geq 0$, son naturales y conmutan con las unidades y multiplicaciones de las dos mónadas y, así, forman un ejemplo de una "aplicación de mónadas".

Continuamos esta sección con un resultado básico, que se establece sin demostración, pero con algunos señalamientos posteriores.

Teorema 1. *Para una mónada T sobre* **Sets**, *la categoría Alg*(T) *de los álgebras es:*

1. *completa y cocompleta, así que tiene todos los límites y colímites;*
2. *simétrica monoidal cerrada en caso de que la mónada T sea "conmutativa".*

Una categoría de álgebras es siempre "tan completa" como su categoría subyacente; ver, por ejemplo, [23, 3]. Puesto que **Sets** es completa, así es $Alg(T)$. La cocompleción es especial para álgebras sobre conjuntos y sigue de un resultado de LINTON, véase [3, §9.3, Prop. 4].

La estructura monoidal en categorías de álgebras se refiere a [22, 21]. Cada mónada sobre **Sets**, es fuerte, mediante una aplicación "fortaleza" $\mathbf{st}\colon X \times T(Y) \to T(X \times Y)$, dada por $\mathbf{st}(x, v) = T(\lambda y.\langle x, y\rangle)(v)$. También hay una versión alterna $\mathbf{st'}\colon T(X) \times Y \to T(X \times Y)$ dada por $\mathbf{st'}(u, y) = T(\lambda y.\langle x, y\rangle)(u)$. La mónada T se dice conmutativa si las dos aplicaciones resultantes $T(X) \times T(Y) \rightrightarrows T(X \times Y)$, obtenidas haciendo primero **st** y luego **st′** ó primero **st′** y luego **st**, son iguales.

La mónada de paquetes $\mathcal{M}_S$ es conmutativa si S es un semianillo (multiplicativamente) conmutativo. La mónada de distribuciones $\mathcal{D}$ siempre es conmutativa.

Convexidad, Dualidad y Efectos

La siguiente construcción se refiere a [27] y ocurre en muchas partes (véase, por ejemplo, [26, 20]. Pero, generalmente no es formulada de la siguiente manera. Puede interpretarse como un teorema de representación que vuelve a un conjunto convexo en un módulo sobre los reales no negativos.

Proposición 2. *El functor* $\mathbf{Mod}_{\mathbb{R}\geq 0} = Alg(\mathcal{M}_{\mathbb{R}\geq 0}) \xrightarrow{U} Alg(\mathcal{D})$, *inducido por la aplicación de mónadas* $\mathcal{D} \Longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{R}\geq 0}$, *tiene un levoadjunto*.

Demostración. Convertimos a un álgebra α: $\mathcal{D}(X) \to X$, en un módulo $F(X)$, donde:

$$F(X) = \{0\} + \mathbb{R}_{>0} \times X,$$

con la adición, para $u, v \in F(X)$, en los casos triviales, dada por $u + 0 = u = 0 + v$ y $(s, x) + (t, y) = (s + t, \alpha(\frac{s}{s+t}x + \frac{t}{s+t}y))$

Se define una multiplicación escalar $\cdot$: $\mathbb{R}_{\geq 0} \times F(X) \to F(X)$, por:

$$s \cdot u = \begin{cases} 0 & si\ \ u=0\ \ ó\ \ s=0 \\ (s\cdot t, x), & si\ \ u=(t,x)\ \ y\ \ s\neq 0. \end{cases}$$

Esto hace de $F(X)$ un módulo sobre $\mathbb{R}_{\geq 0}$. A continuación mostramos que F es levoadjunto de U: $Alg(\mathcal{M}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}) \to$ Alg $(\mathcal{D})$, mediante la siguiente correspondencia biyectiva.

$$\begin{array}{ll} X \xrightarrow{f} U(Y) & \text{en } Alg(\mathcal{D}) \\ \hline\hline F(X) \xrightarrow[g]{} Y & \text{en } Alg(\mathcal{M}_{\mathbb{R}\geq 0}). \end{array}$$

Funciona de la siguiente manera.

- Dado f: $X \to U(Y)$, en $Alg(\mathcal{D})$ definir $\overline{f}$: $f(x) \to Y$, por $\overline{f}(0) = 0$ y $\overline{f}(x, r) = r \cdot f(x)$; donde $\cdot$ es la multiplicación escalar en Y. Esto produce un homomorfismo de módulos, es decir un homomorfismo de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$-álgebras.
- Recíprocamente, dada g: $f(x) \to Y$, tomar $\overline{g}$: $X \to U(Y)$ como $\overline{g}(x) = g(1, x)$. Esto produce una aplicación de $\mathcal{D}$-álgebras.

Por último comprobamos que en realidad tenemos una correspondencia biyectiva:

$$\overline{\overline{f}}(x) = \overline{f}(1, x) = 1 \cdot f(x) = f(x).$$

Análogamente, $\overline{\overline{g}}(0) = 0$ y:

$$\overline{\overline{g}}(r, x) = r \cdot \overline{g}(x) = r \cdot g(1, x) = g(r \cdot (1, x)) = g(r, x).///$$

3. Conjuntos Convexos

Esta sección presenta a las estructuras convexas —o, simplemente, conjuntos convexos— como se describe en [12] y recuerda que estas estructuras también pueden ser descritas como álgebras de la mónada de distribuciones $\mathcal{D}$.

Definición 3. *Un conjunto convexo consta de un conjunto X junto con una operación ternaria* $\langle -, -, - \rangle$: $\mathrm{I} \times X \times X \to X$, *que satisface a los siguientes cuatro requisitos*

$$\langle r, x, x\rangle = x \qquad \langle r, x, y\rangle = \langle 1 - r, y, x\rangle$$

$$\langle 0, x, y\rangle = y \qquad \langle r, x, \langle s, y, z\rangle\rangle = \langle r, (1 - r)s, \langle \frac{r}{r + (1 - r)s}, x, y\rangle\rangle,$$

donde $r \in \mathrm{I}$ y $x, y, z \in X$ y $(r + s(1 - r)) \neq 0$ *en la última ecuación.*

Un morfismo de estructuras convexas $(X, \langle -, -, - \rangle_X) \to (Y, \langle -, -, - \rangle_Y)$ consiste en una función "afín" f: $X \to Y$, que satisface $f(\langle r, x, \rangle_X) = \langle r, f(x), f(x')\rangle_Y$, para todo $r \in \mathrm{I}$ y $x, x' \in X$. Esto produce una categoría **Conv**.

Un conjunto convexo a veces se llama un álgebra baricéntrica, usando terminología de [27]. La tupla $\langle r, x, y\rangle$ también se puede escribir como suma indizada $x +_r y$, como en [20], pero la cuarta condición llega a ser un poco difícil de leer con esta notación.

El siguiente resultado recuerda una descripción alternativa de estructuras convexas y sus homomorfismos; a saber, como álgebras de una mónada. Se refiere a [28] y también se aplica para compactar espacios HAUSDORFF [20] o polacos [6]. Por conveniencia, se incluye un esbozo de demostración.

Teorema 4. *La categoría* **Conv** *de conjuntos convexos es isomorfa a la ca-*

tegoría Alg($\mathcal{D}$) de los álgebras EILENBERG-MOORE *de la mónada de distribuciones.*

Demostración. Dado un álgebra α: $\mathcal{D}(X) \to X$, sobre un conjunto X, se define una operación $\langle -, -, - \rangle$: $\mathrm{I} \times X \times X \to X$, por $\langle r, x, y \rangle = \alpha(rx + (1 - \mathrm{r})y)$. No es difícil mostrar que se cumplen los cuatro requisitos de Definición 3.

Recíprocamente, dado un conjunto convexo X, con operación ternaria $\langle -, -, - \rangle$, se define una función α: $\mathcal{D}(X) \to X$, inductivamente, por:

$$\alpha(r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n) = \begin{cases} x_1, & \text{si } r_1 = 1; \text{así}, r_2 = \cdots = 0, \\ \langle r_1, x_1, \alpha(\frac{r_1}{1-r_1} x_2, + \cdots + \frac{r_n}{1-r_n} x_n) \rangle & \text{en cualquier otro caso; i. e. } r_1 < 1. \end{cases} \tag{5}$$

La aplicación repetida de esta definición da:

$$\alpha(r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n) = \langle r_1, x_1, \langle \frac{r_2}{1-r_1}, x_2 \langle \frac{r_3}{1-r_1-r_2}, x_3, \langle \ldots, \langle \frac{r_{n-1}}{1-r_1-\cdots-r_{n-2}}, x_{n-1}, x_n) \rangle \ldots \rangle \rangle \rangle \rangle. \tag{6}$$

Primero hay que demostrar que la función α en (5) está bien definida, en el sentido de que ella no depende de permutaciones de sumandos, ver, también [27, lema 2]. Mediante algunos cálculos elementales se comprueba que intercambiando los sumandos $x_i r_i$ y $r_{i+1} x_{i+1}$, se produce el mismo resultado. En un siguiente paso se demuestran las ecuaciones algebraicas: $\alpha \circ \eta = \mathrm{id}$ y $\alpha \circ \mu = \alpha \circ \mathcal{D}(\alpha)$. La primera de ellas es fácil, ya que $\alpha(\eta(a)) = \alpha(1a) = a$, directamente aplicando (5). La segunda requiere más trabajo. Explícitamente, llega hasta:

$$\alpha(\textstyle\sum_{i \le n} r_i \alpha\, (\sum_{j \le m_i} s_{ij}\, x_{ij})) = \alpha(\sum_{i \le n} \sum_{j \le m_i} (r_i s_{ij})\, x_{ij}). \tag{7}$$

Para la demostración conviene considerar al siguiente resultado auxiliar. Maneja tuplas anidadas en el segundo argumento de un triple $\langle -, -, - \rangle$, al igual que la cuarta ecuación de Definición 3, se ocupa de la estructura anidada en el tercer argumento. En una estructura convexa general se tiene

$$\langle r, \langle s, x, y \rangle, z \rangle = \langle rs, x, \langle \frac{r\,(1-s)}{1-rs} y, z \rangle \rangle, \text{ asumiendo } rs \neq 1.$$

El resto se deja al lector.///

Este teorema ahora nos permite aplicar Teorema 1 a la categoría **Conv** de estructuras convexas (reales). Primero podemos concluir que es completa y cocompleta; también, que el functor olvidadizo **Conv** → **Sets**, tiene un levoadjunto que da estructuras convexas libres de la forma $\mathcal{D}(X)$. Y, puesto que $\mathcal{D}$ es una mónada conmutativa, la categoría **Conv** es monoidal simétrica cerrada: las aplicaciones $X \otimes Y \to Z$, en **Conv**, corresponden a funciones $X \times Y \to Z$, que son "bihomomorfismos", es decir, homomorfismos de estructuras convexas, en cada variable por separado. En este caso especial el tensor unidad es el conjunto convexo (singular), final ya que $\mathcal{D}(1) \cong 1$. Por lo tanto se tienen "tensores con proyecciones", ver [15]. La calidad de cerrado significa que el functor $(-) \otimes Y$ tiene un dextroadjunto, dado por $Y \multimap (-)$. Por otra parte, $\mathcal{D}(A \times B) \cong \mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(B)$, para conjuntos A, B.

Observación 5. *Utilizaremos más tarde el hecho de que un semirretículo concurrental* $(L, \wedge, 0)$ *puede ser entendido como un conjunto convexo* $\mathcal{D}(L) \to L$ *vía*:

$$r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n \cdots \to x_1 \wedge \cdots \wedge x_n,$$

donde se asume (implícitamente) que $r_i \neq 0$. Esto se puede extender a un functor **MSL** → **Conv**. En particular, el conjunto binario $2 = \{0, 1\}$ de los valores booleanos, es un conjunto convexo.

Observación 6. La adjunción **Conv** = $Alg(\mathcal{D}) \leftrightarrows$ **Sets** induce una comónada en la categoría **Conv**, que también se escribe como $\mathcal{D}$. Un coálgebra EILENBERG-MOORE $X \to \mathcal{D}(X)$, de esta comónada, puede ser interpretado como descomposición espectral: se asigna un elemento x en un conjunto convexo X, a una combinación convexa formal $\sum_i x_i r_i$, que, cuando se interpreta en X, es igual a x. Por ejemplo, las matrices de densidad sobre un espacio HILBERT finito-dimensional, forman un conjunto convexo y llevan una tal coalgebra de descomposición espectral (que depende de la base elegida). Ver también, [14] para descomposiciones similares que involucran átomos y elementos compactos en conjuntos ordenados, capturados mediante la comónada inducida en una categoría de álgebras.

4. Filtros Primos en Conjuntos Convexos

La siguiente definición sigue a [8], pero utiliza filtros en lugar de ideales.

Definición 7. *Sea* α: $\mathcal{D}(X) \to X$, *un álgebra de la mónada de distribuciones* $\mathcal{D}$, *que hacen de X un conjunto convexo. Escribimos* $\left(\sum_{i \leq n} s_i x_i\right) \in \mathcal{D}(X)$, *con* $s_i \neq 0$, *para una combinación convexa formal arbitraria. Un subconjunto* $U \subseteq X$, *se llama:*

- *subálgebra, si* $\forall i \leq n, x_i \in U \Rightarrow \alpha\left(\sum_i s_i x_i\right) \in U$;
- *filtro, si* $\alpha\left(\sum_i s_i x_i\right) \in U \Rightarrow x_i \in U$ *para cada i;*
- *filtro primo si es un subálgebra y un filtro.*

No es difícil ver que los subálgebras son cerrados con respecto a intersecciones arbitrarias y a juntas dirigidas. Por lo tanto se puede formar el menor subálgebra $\overline{V} \subseteq X$ que contiene un conjunto arbitrario $V \subseteq X$, por intersección. Los filtros son cerrados con respecto a juntas e intersecciones arbitrarias; por lo tanto, también los filtros primos son cerrados con respecto a intersecciones arbitrarias y a juntas dirigidas. Escribiremos $pFil(X)$ para el conjunto de filtros primos en un conjunto convexo X, ordenado por inclusión.

Lema 8. *Suponga que X es un conjunto convexo. Un subconjunto* $U \subseteq X$, *es un filtro principal si y sólo si es el "núcleo propio"* $f^{-1}(1)$ *de un homomorfismo de conjuntos convexos* f: $X \to 2$. *Da un isomorfismo de orden*:

$$pFil(X) \cong Hom(X, 2).$$

Aquí consideramos a 2 *como semirretículo como se describe en Observación* 5.

Demostración. Sea α: $\mathcal{D}(X) \to X$, un álgebra en X. Dado un filtro primo $U \subseteq X$, definir $f_U(x) = 1$ syss $x \in U$. Esto produce un homomorfismo de álgebras/conjuntos convexos, puesto que para una suma convexa $\sum_i s_i x_i$ con $s_i \neq 0$,

$$\begin{aligned}
(f_U \circ \alpha)\left(\sum_i s_i x_i\right) = 1 &\Leftrightarrow \alpha\left(\sum_i s_i x_i\right) \in U \\
&\Leftrightarrow \forall i, x_i \in U, \text{ ya que } U \text{ es un filtro primo} \\
&\Leftrightarrow \forall i, f_U(x_i) = 1 \\
&\Leftrightarrow \sum_i s_i f_U(x) = \bigwedge_i f_U(x_i) = 1 \\
&\Leftrightarrow (\beta \circ \mathcal{D}_{\mathcal{S}}(f_U))\left(\sum_i s_i x_i\right) = 1,
\end{aligned}$$

donde β: $\mathcal{D}(2) \to 2$, es la estructura convexa inducida por la estructura de semirretículo concurrental, de 2. Semejantemente, se demuestra que tales homomorfismos inducen filtros primos como sus núcleos propios.///

Denotaremos por **PreFrm** a la categoría de los premarcos. Ellos consisten de un conjuntopo L con juntas dirigidas $\vee^{\uparrow}$ y concurrencias finitas $(1, \wedge)$ que se distribuyen con respecto a estas juntas: $x \wedge \bigvee_i^{\uparrow} y_i = \bigvee_i^{\uparrow} x \wedge y_i$. Los morfismos en **PreFrm** preservan tanto las concurrencias finitas, como las juntas dirigidas. El conjunto de dos elementos 2 es obviamente, un premarco. Los homomorfismos de premarcos $L \to 2$, corresponden (como núcleos propios) a filtros Scott-abiertos $U \subseteq L$, ver [29]. Son las sorpresas, cerrados con respecto a concurrencias finitas, con la propiedad de que si $\bigvee_i^{\uparrow} x_i \in U$, entonces $x_i \in U$ para algún i.

Hasta ahora hemos visto que al tener filtros primos se obtiene un funtor contravariante $pFil = Hom(-, 2)$: $\mathbf{Conv} = Alg(\mathcal{D}) \to \mathbf{PreFrm}$. El resultado principal de esta sección demuestra que esto constituye, en realidad, una adjunción (dual).

Teorema 9. Existe una adjunción dual entre conjuntos convexos y premarcos:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Conv}^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend right, "Hom(-,\{0,1\})"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{PreFrm} \arrow[l, bend right, "Hom(-,\{0,1\})"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. Para un premarco L, el conjunto de morfismos $Hom(L, 2)$ de filtros Scott-abiertos, es cerrado con respecto a las intersecciones finitas: si $\bigvee_i^{\uparrow} x_i \in U_1 \cap \cdots \cap U_m$ entonces para cada $j \leq m$, hay un i_j con $x_i \in U_{i_j}$. Por el carácter dirigido, existe i tal que $x_i \geq x_{i_j}$ para cada j; así que x_i está en cada U_j. Por lo tanto, $Hom(L, 2)$ lleva una estructura de $\mathcal{D}$-álgebra.

Para un conjunto convexo X necesitamos construir una correspondencia biyectiva:

$$\frac{X \longrightarrow Hom(L\,,\,2)}{\overline{\overline{L \longrightarrow Hom\,(\,L\,,2\,)}}} \quad \begin{array}{l}\text{en } \mathbf{Conv} \\ \text{en } \mathbf{PreFrm}\,.\end{array}$$

Que se da en la forma habitual, intercambiando argumentos.///

Los homomorfismos de conjuntos convexos al conjunto de valores booleanos, 2, capturan sólo una parte de lo que pasa. Ocurren estructuras más ricas vía homomorfismos al intervalo unidad I. Dan lugar a álgebras de efectos, en vez de premarcos, como se verá en las próximas dos secciones.

5. Álgebras de Efectos

Esta sección recuerda la definición básica, ejemplos y resultados de álgebras de efectos. Para empezar, tenemos la noción de monoide conmutativo parcial (PCM). Consiste en un conjunto M con un elemento cero $0 \in M$ y una operación binaria parcial $\otimes$: $M \times M \to M$, que satisfacen los siguientes tres requisitos: que involucran la notación $x \perp y$: para $x \otimes y$, está definida.

1. Conmutatividad: $x \perp y$ implica $y \perp x$ y $x \otimes y = y \otimes x$;
2. Asociatividad: $y \perp z$ y $x \perp (y \otimes z)$ implica $x \perp y$ y $(x \otimes y) \perp z$ y también $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$;
3. Cero: $0 \perp x$ y $0 \otimes x = x$.

Cuando $x \perp y$, decimos que los elementos x, y son ortogonales. Más generalmente, un subconjunto de un PCM se llama ortogonal si todos sus elementos son mutuamente ortogonales. Al escribir $x \otimes y$, se asume implícitamente, que $x \otimes y$ está definido, es decir, que x, y son ortogonales.

Un ejemplo de un PCM es el intervalo unidad I de los números reales, donde $\otimes$ es la suma parcialmente definida +. La notación $\otimes$ para la suma, podría sugerir una junta, pero no se pretende esto, como lo muestra el ejemplo I. Queremos evitar la notación $\oplus$ (y su dual $\otimes$) que es más común en el contexto de álgebras de efectos porque queremos reservar estas operaciones $\oplus$, $\otimes$ para tensores sobre categorías.

Como acotación al margen, para los más categorialmente adiestrados, un PCM también puede ser considerado como un monoide en la categoría de conjuntos y funciones parciales. Sin embargo, usaremos aplicaciones totales, como morfismos entre PCM's (y álgebras de efectos).

La noción de álgebra de efectos aparece primariamente en [9], ver también, [7] para un resumen.

Definición 10. *Un álgebra de efectos es un monoide conmutativo parcial* $(E, 0, \circledcirc)$ *con un ortosuplemento. Este último es una operación unaria* $(-)^{\perp}: E \to E$, *que satisface:*

1. $x^{\perp} \in E$, *es el único elemento de* E *con* $x \circledcirc x^{\perp} = 1$, donde $1 = 0^{\perp}$;

2. $x \perp 1 \Rightarrow x = 0$.

Ejemplo 11. *Discutimos brevemente varias clases de ejemplos.*

(1) *Un conjunto singular es un ejemplo de un álgebra de efectos, degenerado, con* $0 = 1$. *Un conjunto de dos elementos,* $2 = \{0, 1\}$, *es también un ejemplo.*

(2) *Un ejemplo más interesante, es el intervalo unidad* $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$, *de los números reales, con* $r^{\perp} = 1 - r$ y $r \circledcirc s$ *definido como* $r + s$ *en caso de que esta suma esté en* I. *De hecho, para cada número positivo* $M \in \mathbb{R}$, *el intervalo* $[0, M]_{\mathbb{R}} = \{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq M\}$, *es un ejemplo de un álgebra de efectos, con* $r^{\perp} = M - r$.

Además el intervalo $[0, M]_{\mathbb{Q}} = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q \leq M\}$, *de números racionales, para* $M \in \mathbb{Q}$, *positivo, es un álgebra de efectos. Y así es el intervalo* $[0, M]_{\mathbb{N}}$ *de números naturales, para* $M \in \mathbb{N}$.

La situación general involucra a los llamados "álgebras de efectos por intervalos", ver por ejemplo [10] *o* [7, 1.4]. *Un grupo abeliano* $(G, 0, -, +)$ *se llama ordenado si lleva un orden parcial* $\leq$ *tal que* $a \leq b$ *implica* $a + c \leq b + c$, *para todo* $a, b, c \in G$. *Un punto positivo es un elemento* $p \in G$, con $p \geq 0$. *Para tal punto escribimos* $[0, p]_G \subseteq G$, *para el "intervalo"* $[0, p] = \{a \in G \mid 0 \leq a \leq p\}$. *Éste forma un álgebra de efectos, con* p *como tope, ortosuplemento* $a^{\perp} = p - a$ *y suma* $a + b$, *que*

se considera definida en caso de que $a + b \leq p$.

(3) *Una clase separada de ejemplos, tiene a una junta como suma* $\oplus$. *Sea* $(L, \vee, 0, (-)^{\perp})$ *ortoretículo:* $\vee$, 0 *son juntas finitas y la complementación* $(-)^{\perp}$ *satisface* $x \leq y \Rightarrow y^{\perp} \leq x^{\perp}$, $x^{\perp\perp} = x$ *y* $x^{\perp} \vee x = 1 = 0^{\perp}$. *Este L se llama un retículo ortomodular si* $x \leq y \Rightarrow y = x \vee (x^{\perp} \wedge y)$. *Un tal retículo ortomodular forma un álgebra de efectos, en el cual* $x \oplus y$ *está definida si y sólo si* $x \perp y$ (*es decir,* $x \leq y^{\perp}$ *ó, equivalentemente,* $y \leq x^{\perp}$); *en ese caso* $x \oplus y = x \vee y$. *Esta restricción de* $\vee$ *es necesaria para la validez de los requisitos* (1) *y* (2) *en* Definición 10.

En particular, el retículo KSub(*H*) *de subconjuntos cerrados de un espacio Hilbert H es un retículo ortomodular y por lo tanto un álgebra de efectos. Esto se aplica de manera más general a los subobjetos del núcleo de un objeto en una categoría de núcleos, de dagas* [13]. *Estos núcleos también pueden ser descritos como endoaplicaciones autoadjuntas por debajo de la identidad, ver* [13, Prop. 12] — *en el estilo de representación de grupos, como en el anterior punto* 2.

(4) *Puesto que los álgebras* BOOLE *son retículos ortomodulares (distributivos), también son álgebras de efectos. Por distributividad, los elementos en un álgebra* BOOLE *son ortogonales si y sólo si son disjuntos, es decir,* $x \perp y$ *syss* $x \wedge y = 0$. *En particular, el álgebra Boole de subconjuntos medibles de un espacio medible forma un álgebra de efectos, donde* $U \oplus V$ *está definido si* $U \cap V = \emptyset$ *y, entonces, es igual a* $U \cup V$.

Un siguiente paso obvio, es organizar los álgebras de efectos en una categoría **EA**.

Definición 12. *Un homomorfismo* $E \to D$, *de álgebras de efectos, viene dado por una función* f: $E \to D$, *entre los conjuntos subyacentes, que satisface* $f(1) = 1$ *y si* $x \perp x'$ *en E entonces* $f(x) \perp f(x')$ *en D y* $f(x \oplus x') = f(x) \oplus f(x')$.

Los álgebras de efectos y sus homomorfismos forman una categoría, llamada **EA**.

Los homomorfismos son como aplicaciones medibles. De hecho, para el álgebra de efectos, Σ, asociado en ejemplo 11 (4), con un espacio medible (X, Σ), los homomorfismos de álgebras de efectos f: $\Sigma \to$ I, satisfacen $f(U \cup V) = f(U) +$

f(V) en caso de que U, V sean disjuntos —porque entonces, $U \otimes V$ está definido y es igual a $U \cup V$. En general, los homomorfismos de álgebras de efectos, al intervalo unidad $E \to$ I, son a menudo llamados estados. Los homomorfismos de álgebras de efectos preservan toda la estructura relevante.

Lema 13. Sea f: $E \to D$, un homomorfismo de álgebras de efectos. Entonces:

$$f(x^{\perp}) = f(x)^{\perp} \text{ y, así, } f(0) = 0.$$

Demostración. De $1 = f(1) = f(x \otimes x^{\perp}) = f(x) \otimes f(x^{\perp})$, obtenemos $f(x^{\perp}) = f(x)^{\perp}$ por la unicidad de ortosuplementos. Por lo tanto: $f(0) = f(1^{\perp}) = f(1)^{\perp} = 1^{\perp} = 0$.///

Ejemplo 14. *No es difícil ver que el álgebra de efectos, de un elemento,* 1 *es final, y el álgebra de efectos de dos elementos,* 2*, es inicial.*

El ortosuplemento $(-)^{\perp}$ *es un isomorfismo* $E \xrightarrow{\cong} E^{\mathrm{op}}$ *en* **EA***, es decir de* $(E, 0, \oplus, (-)^{\perp})$ *a* $E^{\mathrm{op}} = (E, 1, \oplus, (-)^{\perp})$*, donde* $x \oplus y = (x^{\perp} \otimes y^{\perp})^{\perp}$*. Esto hace de* **EA** *una categoría involutiva, ver* [16].

Un elemento (o punto) $x \in E$*, de un álgebra de efectos* E *puede, ser identificada con un homomorfismo* $2 \times 2 \to E$*, en* **EA***, como en*:

$$2 \times 2 = \mathsf{MO}(2) = \left(\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \bullet \arrow[dr, dash] & & \bullet^{\perp} \arrow[dl, dash] \\ & 0 & \end{tikzcd} \right) \xrightarrow{x} E.$$

En [17] se muestra que la categoría **EA** es completa y cocompleta y tiene una estructura monoidal simétrica.

6. Álgebras de Efectos y Conjuntos Convexos

El objetivo de esta sección es establecer la adjunción dual entre conjuntos convexos y álgebras de efectos a la derecha en el diagrama (1) en la introducción. Como hemos visto, el intervalo unidad I, de los números reales es un ejemplo de un conjunto convexo. El conjunto de estados de un álgebra de efectos — que consiste en aplicaciones a I— también es convexo, como se advierte, por ejemplo, en [10].

Lema 15. La toma de estados determina a un funtor $\mathcal{S} = Hom(-, \mathrm{I})$: **EA** $\to$

Conv^{op}.

Demostración. Sean E un álgebra de efectos con estados f_i: $E \to \mathrm{I}$ y $r_i \in \mathrm{I}$, tales que $\sum_i r_i = 1$, entonces podemos formar un nuevo estado $f = r_1 f_1 + \cdots + r_n f_n$, por $f(x) = \sum_i r_i \cdot f_i(x)$, utilizando la multiplicación $\cdot$ en I. Esto produce un homomorfismo de álgebras de efectos, $E \to \mathrm{I}$, ya que:

• $f(1) = \sum_i r_i \cdot f_i(1) = \sum_i r_i \cdot 1 = \sum_i r_i = 1$;

• si $x \perp x'$ en E, entonces, en I:

$$\begin{aligned} f(x \otimes x') &= \textstyle\sum_i r_i \cdot f_i(x \quad x') = \sum_i r_i \cdot (f_i(x + f_i(x')) \\ &= \textstyle\sum_i r_i \cdot f_i(x) + r_i \cdot f_i(x') \\ &= \textstyle\sum_i r_i \cdot f_i(x) + \sum_i r_i \cdot f_i(x') \\ &= f(x) + f(x'). \end{aligned}$$

Además, para una aplicación de álgebras de efectos g: $E \to D$, la función inducida $\mathcal{S}(g) = (-) \circ g$: $Hom(D, \mathrm{I}) \to Hom(E, \mathrm{I})$ es una aplicación de conjuntos convexos:

$$\begin{aligned} (\textstyle\sum_i r_i \cdot f_i) &= \lambda x.(\sum_i r_i \cdot f_i)(g(x)) \\ &= \lambda x.\textstyle\sum_i r_i \cdot f_i(g(x)) \\ &= \lambda x.\textstyle\sum_i r_i \cdot \mathcal{S}(g)(f_i)(x) \\ &= \textstyle\sum_i r_i(\mathcal{S}(g)(f_i)). /// \end{aligned}$$

Luego, un conjunto de estados $\mathcal{S}(E) = Hom(E, \mathrm{I})$, es convexo; pero, no tiene una multiplicación escalar subyacente $\cdot$: $\mathrm{I} \times \mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}(E)$, ya que $r \cdot f = \lambda x.r \cdot f(x)$, no tiene que ser una aplicación de álgebras de efectos: $(r \cdot f)(1) = r \cdot f(1) = r \cdot 1 = r \neq 1$, en general.

Curiosamente, también hay un funtor Hom en la otra dirección.

Lema 16. *Para cada conjunto convexo X, el conjunto de morfismos Hom*(*X*, I) *de homomorfismos de conjuntos convexos es un álgebra de efectos. De esta manera se obtiene un funtor Hom*(–, I): **Conv**^{op} $\to$ **EA**.

Demostración. Sea X ser un conjunto convexo. Definimos estructura de álgebra de efectos sobre el conjunto de morfismos $Hom(X, \mathrm{I})$, de una manera puntual. Hay un obvio elemento cero, es decir la función cero $\lambda x.0$. Se define una suma parcial $f + f'$ como $(f + f')(x) = f(x) + f'(x)$, si para todo $x \in X, f(x) + f'(x) \leq 1$. Es fácil ver que esta $f + f'$ es, también una aplicación de conjuntos convexos. Del mismo modo, se define $f^{\perp} = \lambda x.1 - f(x)$, que es, también, un homomorfismo, ya que:

$$\begin{aligned} f^{\perp}(r_1x_1 + \cdots + r_nx_n) &= 1 - f(r_1x_1 + \cdots + r_nx_n) \\ &= (r_1x_1 + \cdots + r_nx_n) - (r_1 \cdot f(x_1) + \cdots + r_n \cdot f(x_n)) \\ &= r_1 \cdot (1 - f(x_1)) + \cdots + r_n \cdot (1 - f(x_n)) \\ &= r_1 \cdot f^{\perp}(x_1) + \cdots + r_n \cdot f^{\perp}(x_n). \end{aligned}$$

La funtorialidad es fácil: para una aplicación g: $X \to Y$, de conjuntos convexos se obtiene una aplicación de álgebras de efectos $(-) \circ$ g: $Hom(Y, \mathrm{I}) \to Hom(X, \mathrm{I})$, por precomposición.///

El siguiente resultado es ahora, una combinación fácil de los dos lemas anteriores.

Teorema 17. Hay una adjunción dual entre conjuntos convexos y álgebras de efecto:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Conv}^{\mathrm{op}} \arrow[rr, bend right, "Hom(-,[0,1])"'] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathbf{EA} \arrow[ll, bend right, "\mathcal{S}=Hom(-,[0,1])"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. Tenemos que comprobar que la unidad y la counidad

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\eta} & Hom(\mathcal{S}(E), [0,1]) \\ x & \longmapsto & \lambda f.\, f(x) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathcal{S}(Hom(X, [0,1])) \\ x & \longmapsto & \lambda f.\, f(x) \end{array}$$

son aplicaciones adecuadas. Primero comprobamos que η es un morfismo de álgebras de efectos:

• $\eta(1) = \lambda f.\, f(1) = \lambda f.\, 1 = 1$;

• y, si $x \perp x'$ en E, entonces:

$$\eta(x \otimes x') \;=\; \lambda f.\, f(x \otimes x') \;=\; \lambda f.\, f(x) + f(x')$$

$$= \lambda f.\ \eta(x)(f) + \eta(x')(f)$$
$$= \eta(x) + \eta(x').$$

Del mismo modo ε es una aplicación de conjuntos convexos:

$$\begin{aligned}\varepsilon(r_1x_1 + \cdots + r_nx_n) &= \lambda f.\ f(r_1x_1 + \cdots + r_nx_n)\\ &= \lambda f.\ r_1 \cdot f(x_1) + \cdots + r_n \cdot f(x_n)\\ &= \lambda f.\ r_1 \cdot \varepsilon\, x_1(f) + \cdots + r_n \cdot \varepsilon\, x_n(f)\\ &= r_1\varepsilon\, x_1(x_1) + \cdots + r_n\varepsilon\,(x_n).\end{aligned}$$

7. Algebras de Efectos y Funtores Convexos

Sea A una categoría arbitraria con límites finitos y coproductos finitos (0, +) que son disjuntos y universales. Esto significa que las coproyecciones κ_i son mónicas y forman diagramas de regrediencias (pullback) como abajo a la izquierda y además, que en un diagrama como abajo a la derecha, la aplicación inducida $Z_1 + Z_2 \to Z$, es un isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, "\kappa_2"] \\ X \arrow[r, tail, "\kappa_1"'] & X + Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Z \arrow[d] & Z_2 \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\llcorner", very near start] \\ X \arrow[r, tail, "\kappa_1"'] & X + Y & Y \arrow[l, tail, "\kappa_2"] \end{tikzcd}$$

En este contexto se puede probar que los diagramas como los de abajo son regrediencias,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\kappa_1"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X + Z \arrow[d, "f+g"] \\ Y \arrow[r, "\kappa_1"'] & Y + Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X + W \arrow[r, "f+\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}+g"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y + W \arrow[d, "\mathrm{id}+g"] \\ X + Z \arrow[r, "f+\mathrm{id}"'] & Y + Z \end{tikzcd}$$

El objeto final $1 \in \mathbf{A}$ puede ser utilizado para obtener (representaciones de) los números naturales $\underline{n} \in \mathbf{A}$, para $n \in \mathbb{N}$. Simplemente se pone:

$$\underline{0} = 0 \quad \text{y} \quad \underline{n+1} = \underline{n} + 1.$$

Usaremos estos "números" $\underline{n} \in \mathbf{A}$, con coproyecciones κ_i: $1 \to n$ para $1 \le i \le n$. Las siguientes aplicaciones serán útiles.

$$\underline{n+1} \xrightarrow{\nabla_i} \underline{2}, \text{ donde } \nabla_i \circ \kappa_i = \begin{cases} \kappa_1 & \text{si } i = j, \\ \kappa_2 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{9}$$

(donde $0 \le i \le n$ y $0 \le j \le n + 1$). Escribir el subrayado es tedioso, así que, a menu-

do, lo omitiremos si no hay lugar a confusión.

En **Sets**, identificamos a n (para ser más precisos: $\underline{n}$) con el conjunto {1, 2,..., n}. La coproyección κ_i: $1 \to n$, es entonces, simplemente, i. Las aplicaciones ∇_i: $n + 1 \to 2$, de (9), para $1 \leq i \leq n$, satisfacen $\nabla_i(j) = 1$ si $i = j$ y $\nabla_i(j) = 2$ si $i = j$.

Ahora estamos listos para presentar una nueva noción de funtor convexo. Lo que presentamos es una versión finitaria, porque en el contexto actual sólo tomamos en cuenta las combinaciones convexas finitas y correspondientemente, sumas (parciales) finitas en álgebras de efectos.

Definición de 18. *Sea* **A** *una categoría con coproductos finitos disjuntos y universales y límites finitos (como antes). Un functor* F: $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$, *se llamará* convexo *si satisface los siguientes tres requisitos.*

1. $F(1) \xrightarrow{\cong} 1$;

2. F preserva las siguientes tres regrediencias, que son casos especiales de (8).

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, "\kappa_1"] \arrow[d, "!"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & n+1 \arrow[d, "!+\mathrm{id}"] \\ 1 \arrow[r, "\kappa_1"'] & 1+1=2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\kappa_1"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & 1+n \arrow[d, "\mathrm{id}+!"] \\ 1 \arrow[r, "\kappa_1"'] & 1+1=2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} n+m \arrow[r, "!+\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}+!"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & 1+m \arrow[d, "\mathrm{id}+!"] \\ n+1 \arrow[r, "!+\mathrm{id}"'] & 1+1=2 \end{tikzcd} \tag{10}$$

3. la siguiente tupla que involucra a las aplicaciones ∇_i *de* (9)*, es mónica.*

$$F(\underline{n+1}) \xrightarrow{\langle F(\nabla_1),\ldots,F(\nabla_n)\rangle} F(2) \times \cdots \times F(2). \tag{11}$$

Escribiremos CNV(**A**) *para la categoría de endofuntores convexos en* **A** *y las transformaciones naturales entre ellos.*

En principio, también se pueden definir convexidad para funtores $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, entre diferentes categorías, pero aquí no hace falta tal generalidad. Un functor F que satisface el primer requisito $F(1) \cong 1$, se denomina *afín*, ver, por ejemplo, [21, 15].

Ejemplo 19. *Pronto veremos una construcción general para obtener funtores convexos en forma de funtores de distribuciones de probabilidad. Pero resulta ilustrativo ver un no-ejemplo primero. El functor conjunto potencia no vacío* $\mathcal{P}^+$: **Sets** $\to$ **Sets***, es un posible candidato para un functor convexo porque* $\mathcal{P}^+(1) = 1$. *Nos saltamos la segunda condición en Definición 18 y mostraremos por qué falla*

el tercero. Las aplicaciones $\mathcal{P}^+(\nabla_i)$: $\mathcal{P}^+(\mathrm{n}+1) \to \mathcal{P}^+(2)$ *vienen dadas por:*

$$\mathcal{P}^+(\nabla_i)(U) = \{1 \mid i \in U\} \cup \{2 \mid U - i = \emptyset\}.$$

Si $U, V \in \mathcal{P}^+(n+1)$ *satisface* $\mathcal{P}^+(\nabla_i)(U) = \mathcal{P}^+(\nabla_i)(V)$*, entonces tenemos* $i \in U \Leftrightarrow i \in V$ *para* $1 \leq i \leq n$*. Pero no tenemos información sobre si* $n + 1$ *está ó no en* U ó *en* V*. Por lo tanto, no tenemos suficiente información para concluir* $U = V$*.*

La siguiente construcción da una clase importante de ejemplos de funtores convexos en la categoría **Sets**. Generaliza la construcción del funtor distribución $\mathcal{D}$ en (4), desde el intervalo unidad I a un álgebra de efectos, arbitrario.

Definición 20. *Para un álgebra de efectos E, definir un funtor* **Sets** → **Sets***, por:* $\mathcal{D}_E(\mathrm{X}) = \{\varphi: X \to E \mid \mathrm{supp}(\varphi)$ *es finito y ortogonal y* $\bigvee_{x \in E} \varphi(x) = 1\}$*. Para una función* $f: X \to Y$*, se obtiene* $\mathcal{D}_E(f): \mathcal{D}_E(X) \to \mathcal{D}_E(Y)$ *por:*

$$\mathcal{D}_E(f)(\varphi)(y) = \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} \varphi(x).$$

Proposición 21. *Los funtores* $\mathcal{D}_E$ *son convexos y satisfacen* $\mathcal{D}_E(2) \cong E$*. La aplicación* $E \mapsto \mathcal{D}_E$*, produce un functor* **EA** → *Conv*(**Sets**).

Demostración. Comenzamos por describir qué son los conjuntos $\mathcal{D}_E(1)$ y $\mathcal{D}_E(2)$. Un elemento $\varphi \in \mathcal{D}_E(1)$ es una aplicación φ: $\{1\} \to E$ con $\bigvee_{x \in \{1\}} \varphi(x) = 1$. Por tanto, φ está totalmente determinada como $\varphi(1) = 1$. Así, $\mathcal{D}_E(1) \cong 1$, haciendo de $\mathcal{D}_E$, un funtor afín.

Un elemento $\varphi \in \mathcal{D}_E(2)$ es una aplicación φ: $\{1, 2\} \to E$, que satisface $\varphi(1) \perp \varphi(2)$ y $\varphi(1) \vee \varphi(2) = 1$. Por lo tanto, $\varphi(2) = \varphi(1)^{\perp}$, de modo que φ está determinada por $\varphi(1) \in E$. Así, $\mathcal{D}_E(2) \cong E$.

Dados elementos φ, $\psi \in \mathcal{D}_E(n + 1)$ que satisfacen $\mathcal{D}_E(\nabla_i)(\varphi) = \mathcal{D}_E(\nabla_i)(\psi)$,

para $1 \leq i \leq n$, entonces $\varphi(i) = \mathcal{D}_E(\nabla_i)(\varphi)(1) = \mathcal{D}_E(\nabla_i)\,(\psi)(1) = \psi(\mathrm{i})$. Pero, así $\varphi = \psi$; como se requiere en el punto 3 de Definición 18, puesto que el valor restante en $n + 1$ está determinado por los otros (al contrario que en el ejemplo 19):

$$\varphi(n + 1) = (\varphi(1) \otimes \cdots \otimes \varphi(n))^{\perp} = (\psi(1) \otimes \cdots \otimes \psi(n))^{\perp} = \psi(n + 1).$$

Volvemos al punto 2 y comprobamos que el funtor $\mathcal{D}_E$ preserva a las tres regrediencias (10). Para la primera, supongamos que φ en $\mathcal{D}_E(\mathrm{n} + 1)$, satisface $\mathcal{D}_E(! + \mathrm{id})(\varphi) = \mathcal{D}_E(\kappa_1)\,(*)$, donde κ_1: $1 \to 1 + 1$ y $*$ es el único elemento $* = \lambda x.1 \in \mathcal{D}_E(1)$. Esto significa que $\varphi(1) \otimes \cdots \otimes \varphi(n) = \mathcal{D}_E(! + \mathrm{id})(\varphi)(1) = \mathcal{D}_E(\kappa_1)(*)(1) = 1$ y, por lo tanto, $\varphi(n + 1) = 0$. Así, hay un único elemento $\varphi' \in \mathcal{D}_E(n)$ con $\mathcal{D}_E(\kappa_1)(\varphi') = \varphi$, a saber: $\varphi'(i) = \varphi(i)$ para $1 \leq i \leq n$.

La preservación de la segunda regrediencia se deja al lector.

Para la tercera, supóngase que $\varphi \in \mathcal{D}_E(\mathrm{n} + 1)$ y ψ en $\mathcal{D}_E(1 + \mathrm{m})$, satisfaciendo $\mathcal{D}_E(! + \mathrm{id})(\varphi) = \mathcal{D}_E(! + \mathrm{id})(\psi)$. Esto significa:

$$\varphi(1) \otimes \cdots \otimes \varphi(n) = \psi(1) \qquad \varphi(n + 1) = \psi(2) \otimes \cdots \otimes \psi(\mathrm{m} + 1).$$

La $\chi \in \mathcal{D}_E(\mathrm{n} + \mathrm{m})$, que estamos buscando debe satisfacer $\varphi = \mathcal{D}_E(\mathrm{id} + !)(\chi)$ y $\psi = \mathcal{D}_E(! + \mathrm{id})(\chi)$. Es decir:

$$\varphi(i) = \chi(i), \text{ para } 1 \leq i \leq n, \qquad \varphi(n + 1) = \chi(n + 1) \otimes \cdots \otimes \chi(n + m)$$

$$\psi(1) = \chi(1) \otimes \cdots \otimes \chi(n) \qquad \psi(j + 1) = \chi(n + j - 1), \text{ for } 2 \leq j \leq m + 1.$$

Por lo tanto, hay precisamente, una elección para una tal χ, así que $\mathcal{D}_E$ aplicado a la última regrediencia en (10), es, a su vez, una regrediencia.

Finalmente, tenemos que comprobar que la asignación $E \mapsto \mathcal{D}_E$, es funtorial. Dada una aplicación g: $E \to D$, en **EA**, existe una transformación natural $g \circ (-)$: $\mathcal{D}_E \Rightarrow \mathcal{D}_D$, bien definida y natural porque g es un homomorfismo.///

El siguiente paso es demostrar que, en sentido inverso, un functor convexo (en **Sets**) da lugar a un álgebra de efectos.

Proposición 22. *Sea F*: **Sets** → **Sets**, *un functor convexo. Entonces $F(2)$ es*

un álgebra de efectos, con la siguiente estructura:

$$0 = \left(1 \xrightarrow{\cong} F(1) \xrightarrow{F(\kappa_2)} F(2)\right) \qquad 1 = \left(1 \xrightarrow{\cong} F(1) \xrightarrow{F(\kappa_1)} F(2)\right)$$
$$(-)^{\perp} = \left(F(2) \xrightarrow[\cong]{F([\kappa_2,\kappa_1])} F(2)\right) \tag{12}$$

Para $a, b \in F(2)$, *decimos que* $a \perp b$ *si hay un 'enlace'* $\beta \in F(3)$ *tal que* $F(\nabla_1)(\beta) = a$ *y* $F(\nabla_2)(\beta) = b$, *con* ∇_i *como en* (9). *En ese caso definimos:*

$$a \otimes b = F(! + \mathrm{id})(\beta) \in F(2),$$

donde $! + \mathrm{id}\colon 2 + 1 \to 2$ *envía* $1, 2 \mapsto 1$ y $3 \mapsto 2$.

Además, la asignación $F \mapsto F(2)$ *induce un functor* $CNV(\mathbf{Sets}) \to \mathbf{EA}$.

Puede ser instructivo ver lo que significa esta suma parcial $\otimes$ en $F(2)$, para los funtores convexos $F = \mathcal{D}_E$, a partir de Proposición 21. Así, supongamos que φ, $\psi \in \mathcal{D}_E(2)$ tienen enlace $\beta \in \mathcal{D}_E(3)$. Las ecuaciones $\varphi = F(\nabla_1)(\beta)$ y $\psi = F(\nabla_2)(\beta)$ llevan a:

$$\varphi(1) = \beta(1) \qquad \varphi(2) = \beta(2) \otimes \beta(3) \qquad \psi(1) = \beta(2) \qquad \psi(2) = \beta(1) \otimes \beta(3).$$

En particular, pueden añadirse los elementos $\varphi(1)$, $\psi(1)$, ya que $\varphi(1) \otimes \psi(1) \otimes \beta(3) = 1$. Por lo tanto, la suma $\varphi \otimes \psi = \mathcal{D}_E(! + \mathrm{id})(\beta) \in \mathcal{D}_E(2)$ satisface:

$$(\varphi \otimes \psi)(1) = \beta(1) \otimes \beta(2) = \varphi(1) \otimes \psi(1)$$
$$(\varphi \otimes \psi)(2) = \beta(3) = (\beta(1) \otimes \beta(2))^{\perp} = (\varphi(1) > \psi(1))^{\perp} = (\varphi \otimes \psi)(1)^{\perp}.$$

Demostración. Revisamos algunos de los requisitos que se deben cumplir para álgebras de efectos.

La suma parcial $\otimes$ es conmutativa, puesto que si $\beta \in F(3)$ es un enlace para $a, b \in F(2)$, entonces $\beta' = F([\kappa_2, \kappa_1] + \mathrm{id}) \in F(3)$ es un enlace para b, a, con la misma suma:

$$b \otimes a = F(! + \mathrm{id})(\beta') = F((! + \mathrm{id}) + ([\kappa_2, \kappa_1] + \mathrm{id}))(\beta) = F(! + \mathrm{id})(\beta) = a \otimes b.$$

El 0 definido en (12) es un elemento cero para $\circledvee$, puesto que para un elemento arbitrario $a \in F(2)$, existe un enlace $\alpha = F(\kappa_2)(a) \in F(1 + 2)$ para 0, a con suma a.

La asociatividad de $\circledvee$ requiere más trabajo. Sean a, b, $c \in F(2)$, dados, con $a \perp b$, digamos, con enlace $\alpha \in F(3)$ y $(a \circledvee b) \perp c$, con enlace $\beta \in F(3)$. El último significa que $F(\nabla_1)(\beta) = a \circledvee b = F(! + \mathrm{id})(\alpha)$. Por lo tanto tenemos una situación:

$$\begin{tikzcd}
F(2+2) \arrow[r, "F(\mathrm{id}+!)"] \arrow[d, "F(!+\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & F(2+1) \ni \alpha \arrow[d, "F(!+\mathrm{id})"] \\
\beta \in F(1+2) \arrow[r, "F(\mathrm{id}+!)=F(\nabla_1)"'] & F(2)
\end{tikzcd}$$

Puesto que esto es una regrediencia preservada por F, ver (10), hay un elemento (único) $\gamma \in F(2 + 2)$ con $F(\mathrm{id} +!)(\gamma) = \alpha$ y $F(! + \mathrm{id})(\gamma) = \beta$. Primero consideremos la función h: $4 \to 3$, dada por $h(1) = h(4) = 3$, $h(2) = 1$ y $h(3) = 2$. Se tiene $\gamma' = F(h)(\gamma) \in F(3)$, que es un enlace para b, c con suma $b \circledvee c$. A continuación consideremos la función k: $4 \to 3$ definida por $k(1) = 1$, $k(2) = k(3) = 2$ y $k(4) = 3$. Ahora $\gamma'' = F(k)(\gamma) \in F(3)$ es un enlace para a y $b \circledvee c$. Finalmente tenemos:

$$\begin{aligned}
a \circledvee (b \circledvee c) = F(! + \mathrm{id})(\gamma'') &= F((! + \mathrm{id}) \circ k)(\gamma) \\
&= F((! + \mathrm{id}) \circ (! + \mathrm{id}))(\gamma) \\
&= F(! + \mathrm{id})(\beta) = (a \circledvee b) \circledvee c.
\end{aligned}$$

La ecuación $a^{\perp} \circledvee a = 1$ puede ser probada mediante el enlace $\alpha = F(h)(a) \in F(3)$ para h: $2 \to 3$, definida por $h(1) = 2$ y $h(2) = 1$.

Dejamos al lector comprobar que $a^{\perp}$ es el único elemento $b \in F(2)$ con $b \circledvee a = 1$ y continuar mostrando que $1 \perp a \Rightarrow a = 0$. Asumir entonces, que $1 \perp a$, digamos mediante un enlace $\alpha \in F(3)$, que satisface $\mathrm{F}(\nabla_1)(\alpha) = 1 = F(\kappa_1)(*)$ y $F(\nabla_2)(\alpha) = a$. La primera ecuación nos permite utilizar preservación por F de la segunda regrediencia en (10), desde $\nabla_1 = \mathrm{id} + !$. Por lo tanto, conseguimos $\alpha = F(\kappa_1)(*)$ para κ_1: $1 \to 1 + 2$ y así:

$$a = F(\nabla_2)(\alpha) = F(\nabla_2 \circ \kappa_1)(*) = F(\kappa_2)(*) = 0.$$

Finalmente hay que demostrar la funtorialidad de la asignación $F \mapsto F(2)$. Si tenemos una transformación natural σ: $F \Rightarrow G$, entre funtores convexos F, G, entonces el componente σ_2: $F(2) \to G(2)$, es una aplicación de álgebras de efectos. Es fácil ver que preserva a 0, $1 \in F(2)$. Ahora, supóngase que $a, b \in F(2)$, son ortogonales, via el enlace $\alpha \in F(3)$, que satisface $F(\nabla_1)(\alpha) = a$ y $F(\nabla_2)(\alpha) = b$. Entonces $\sigma_3(\alpha) \in G(3)$ es un enlace para $\sigma_2(a)$, $\sigma_2(b) \in G(2)$, por la naturalidad. Por lo tanto, $\sigma_2(a) \perp \sigma_2(b)$. Además,

$$\sigma_2(a) \otimes \sigma_2(\mathrm{b}) = G(! + \mathrm{id})(\sigma_3(\alpha)) = \sigma_2(F(! + \mathrm{id})(\alpha)) = \sigma_2(a \otimes b)./\!/\!/$$

Así, el principal resultado es la adjunción de estas transformaciones entre álgebras de efectos y funtores convexos.

Teorema 23. *El funtor* **EA** $\to$ *CNV*(**Sets**)*, de* Proposición 21*, dado por* $E \mapsto \mathcal{D}_E$*, es levoadjunto al functor* $F \mapsto F(2)$ *de* Proposición 22.

Demostración. Para un álgebra de efectos E y un endofunctor convexo F en **Sets** tenemos que demostrar que existe una correspondencia biyectiva:

$$\begin{array}{ll} E \xrightarrow{f} F(2) & \text{en } \mathbf{EA} \\ \hline\hline \mathcal{D}_E \underset{\sigma}{\Longrightarrow} F & \text{en } Conv\,(\,\mathbf{Sets}\,). \end{array}$$

La dirección ascendente es fácil: se aplica σ: $\mathcal{D}_E \Longrightarrow F$, a:

$$\overline{\sigma} = \left(E \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_E(2) \xrightarrow{\sigma_2} F(2)\right)$$

No es difícil ver que esta es una aplicación de álgebras de efectos.

La otra dirección requiere más trabajo. Así que supongamos que f: $E \to F(2)$ en **EA**. Hay que definir una transformación natural $\overline{f}$: $\mathcal{D}_E \Longrightarrow F$. Así que supongamos $\varphi \in \mathcal{D}_E(X)$, digamos, con $\mathrm{supp}(\varphi) = \{x_1,..., x_n\}$. Los elementos $\varphi(x_i) \in E$, son mutuamente ortogonales y, por lo tanto, $f(\varphi(x_i)) \in F(2)$. Esto significa que hay un enlace (único) $\beta \in F(n + 1)$ tal que $F(\nabla_i)(\beta) = f(\varphi(x_i))$ y también: $\overline{f}$

$$F(! + \mathrm{id})(\beta) = \bigcirc\!\!\!\!\bigvee_i f(\varphi(x_i)) = f(\bigcirc\!\!\!\!\bigvee_i \varphi(x_i)) = f(1) = 1 = F(\kappa_1)(*).$$

Ahora necesitamos usar el hecho de que F preserva las regrediencias de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, "\kappa_1"] \arrow[d, "!"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & n+1 \arrow[d, "!+\mathrm{id}"] \\ 1 \arrow[r, "\kappa_1"'] & 1+1=2 \end{tikzcd}.$$

Esto produce un único $\beta' \in F(n)$ con $F(\kappa_1)(\beta') = \beta$. Finalmente ponemos:

$$\overline{f}_X(\varphi) = \left(F(n \xrightarrow{[x_1,\ldots,x_n]} X)(\beta')\right) \in F(X).$$

Los detalles restantes se dejan al lector.///

Un siguiente paso obvio, es extender este resultado a una adjunción entre álgebra de efectos, con multiplicación — como tiene [0, 1] — y mónadas convexos. Puede formar parte de un "triángulo de adjunciones", como en [5].

¡Eso es todo, por ahora!

Referencias

[1] S. Abramsky. Domain theory in logical form. *Ann. Pure & Appl. Logic*, 51(1/2):1–77, 1991.

[2] J.C. Baez and M. Stay. Physics, topology, logic and computation: A Rosetta stone. 2009. arxiv.org/abs/0903.0340.

[3] M. Barr and Ch. Wells. *Toposes, Triples and Theories*. Springer, Berlin, 1985. Revised and corrected version available from URL: www.cwru.edu /artsci/math/wells/pub/ttt.html.

[4] P. Busch, M. Grabowski, and P. Lahti. *Operational Quantum Physics*. Springer Verlag, Berlin, 1995.

[5] D. Coumans and B. Jacobs. Scalars, monads and categories, 2010. arxiv. org/abs/1003.0585.

[6] E.-E. Doberkat. Eilenberg-Moore algebras for stochastic relations. Inf. & Comp., 204(12):1756–1781, 2006. Erratum and addendum in: 206 (12): 1476–1484, 2008.

[7] A. Dvurečenskij and S. Pulmannová. *New Trends in Quantum Structures*.

Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[8] J. Flood. Semiconvex geometry. *Journ. Austr. Math. Soc.*, Series A 30:496–510, 1981.

[9] D. J. Foulis and M.K. Bennett. Effect algebras and unsharp quantum logics. Found. Physics, 24(10):1331–1352, 1994.

[10] D. J. Foulis, R.J. Greechie, and M.K. Bennett. The transition to unigroups. *Int. Journ. Theor. Physics*, 37(1):45–63, 1998.

[11] T. Fritz. Convex spaces I: Definition and examples. arxiv.org/abs/0903.5522,2009.

[12] S. Gudder. A general theory of convexity. *Milan Journal of Mathematics*, 49(1):89–96, 1979.

[13] C. Heunen and B. Jacobs. Quantum logic in dagger kernel categories. *Order*, 2010. doi:10.1007/s11083-010-9145-5.

[14] B. Jacobs. Coalgebras and approximation. In A. Nerode and Yu. V. Matiyasevich, editors, *Logical Foundations of Computer Science*, number 813 in Lect. Notes Comp. Sci., pages 173–183. Springer, Berlin, 1994.

[15] B. Jacobs. Semantics of weakening and contraction. *Ann. Pure & Appl. Logic*, 69(1):73–106, 1994.

[16] B. Jacobs. Involutive categories and monoids, with a GNS-correspondence. In *Quantum Physics and Logic* (QPL), 2010.

[17] B. Jacobs and J. Mandemaker. Coreflections in algebraic quantum logic. In *Quantum Physics and Logic* (QPL), 2010.

[18] P.T. Johnstone. *Stone Spaces*. Number 3 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge Univ. Press, 1982.

[19] P.T. Johnstone and S. Vickers. Preframe presentations present. In A. Carboni, M.C. Pedicchio, and G. Rosolini, editors, *Como Conference on Category Theory*, number 1488 in Lect. Notes Math., pages 193–212. Springer, Berlin, 1991.

[20] K. Keimel. The monad of probability measures over compact ordered spaces and its Eilenberg-Moore algebras. *Topology and its Applications*, 156:227–239, 2008.

[21] A. Kock. Bilinearity and cartesian closed monads. *Math. Scand.*, 29:161–

174, 1971.

[22] A. Kock. Closed categories generated by commutative monads. *Journ. Austr. Math. Soc.*, XII:405–424, 1971.

[23] E.G. Manes. *Algebraic Theories*. Springer, Berlin, 1974.

[24] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, Berlin, 1971.

[25] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.

[26] S. Pulmannová and S. Gudder. Representation theorem for convex effect algebras. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 39(4):645–659, 1998. Available from http://dml.cz/dmlcz/119041.

[27] M.H. Stone. Postulates for the barycentric calculus. *Ann. Math.*, 29:25–30, 1949.

[28] T. Swirszcz. Monadic functors and convexity. *Bull. de l'Acad. Polonaise des Sciences. Sér. des sciences math., astr. et phys.*, 22:39–42, 1974.

[29] S. Vickers. *Topology Via Logic*. Number 5 in Tracts in Theor. Comp. Sci. Cambridge Univ. Press, 1989.

[30] B. Jacobs. Convexity, Duality and Effects. *Proc. of 6th IFIP International Conference on Theoretical Computer Science* (2010) 1-19.

ALEPH SUB – CERO
SERIE DE DIVULGACIÓN
$\aleph_0$ 2014 – II $\aleph_0$
pp. 231 - 260

SOBRE EL PRODUCTO TENSORIAL DE ESPACIOS VECTORIALES
(On the tensor product of vector spaces)

Carlos Sánchez Chinea[1]

Recepción: Octubre 2014. Revisión y aceptación: Noviembre 2014.

Resumen. La idea de tensor como elemento de un espacio tensorial es la presentación más actual de este fructífero concepto. Este trabajo está dedicado a la construcción de un espacio tensorial como el producto tensorial de espacios vectoriales sobre un cuerpo conmutativo, estableciendo su unicidad y su existencia, y mostrando asimismo cómo es posible su presentación desde la teoría de categorías y funtores.

Palabras clave: Espacio vectorial, producto tensorial, tensor, aplicación, homomorfismo, aplicación multilineal, cuerpo conmutativo, categoría, funtor, objeto, objeto inicial,

Summary. The idea of tensor as an element of a tensor space is the most current presentation of this fruitful concept. This work is devoted to the construction of a tensor space as the tensor product of vector spaces over a commutative field, establishing their uniqueness and existence, and showing how its presentation is possible from the theory of categories and functors.

Keywords: Vector space, tensor product, tensor, application, homomorphism, multilinear application, commutative field, category, functor, object, initial object,

Introducción

La primera idea que se conoce sobre el nombre de Tensor se remonta a 1846, por Willian R. Hamilton, aunque en su concepto actual como generalización de

[1] Carlos Sánchez Chinea, es Licenciado en Ciencias Físicas y Profesor de Matemáticas de Educación Secundaria, con la Condición de Catedrático, en el Instituto de Enseñanza Secundaria "Isidro de Arcenegui y Carmona" de Marchena, Sevilla, España. Prejubilado en 2008.
casanchi.com, casanchi@gmail.com, casanchi@casanchi.com, casanchi@arrakis.es.

ciertas entidades matemáticas, fue W. Voigt en primero en utilizarla, en 1899. Las primeras aplicaciones prácticas como herramienta matemática se produciría en los primeros años del siglo XX, en cálculos dentro de la teoría de la elasticidad, hecho que daría popularidad al nombre de "tensor" o "extensor".

Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) y un estudiante suyo, Tullio Levi-Civitta (1873-1941), fueron los pioneros en el desarrollo del cálculo tensorial, que recibió el empuje definitivo al convertirse en la herramienta matemática clave que permitiría a Albert Einstein una exposición coherente de la Relatividad General, estableciendo la transformación de sistemas referenciales mediante diferenciación absoluta de magnitudes vectoriales y tensoriales.

Ambos publicaron en 1901 *El Cálculo diferencial absoluto* ("Méthodes de calcul diférentiel absolu et leurs applications", *Mathematische Annalen* 54, 125-201 (1901)), su obra más famosa, que está hoy traducida a diversos idiomas y es uno de los textos clásicos de referencia del cálculo tensorial, más de un siglo después de su primera publicación.

El moderno enfoque de la matemática de los tensores se hace hoy mediante los recursos del álgebra multilineal definiendo la idea de producto tensorial de espacios vectoriales como una correspondencia multilineal de un producto cartesiano de espacios vectoriales en un espacio vectorial cualquiera. Las condiciones de la definición de la correspondencia es lo que define la idea de producto tensorial.

Aunque en los primeros años se realizaba la exposición del concepto de tensor basándose en la idea de las componentes o coordenadas de los objetos que se denominarían tensoriales, la tendencia en la presentación actual de la teoría es considerar a los tensores como los elementos de un espacio tensorial. Resulta clave, pues, definir la idea de producto tensorial de espacios vectoriales.

01. Construcción básica del producto tensorial:

01.1. Producto tensorial de espacios vectoriales

Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales sobre el cuerpo conmutativo K, y sea f una aplicación bilineal de $V_1 \times V_2$ en otro K-espacio vectorial T.

Diremos que el par (f, T) es el producto tensorial de los K-espacios V_1 y V_2 sii para toda aplicación bilineal f' de $V_1 \times V_2$ en otro K-espacio vectorial cualquiera, T', siempre existe un único homomorfismo de espacios vectoriales $g : T \to T'$, tal que $g \circ f = f'$.

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, "g"] \\ V_1 \times V_2 \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f'"'] & T' \end{tikzcd}$$

Diagrama 1

Denotaremos al espacio T por $V_1 \otimes V_2$ y la imagen $f(x, y)$ del par (x, y) por $x \otimes y$. Es decir:

$$\forall (x, y) \in V_1 x V_2,\ f(x, y) \equiv x \otimes y \in T \equiv V_1 \otimes V_2$$

cumpliéndose las condiciones de bilinealidad para la aplicación f:

$$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y),\ o\ bien:\ (x_1 + x_2) \otimes y = (x_1 \otimes y) + (x_2 \otimes y)$$

Sobre el producto tensorial de espacios vectoriales

$$f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2), \; o\ bien: \; x \otimes (y_1 + y_2) = (x \otimes y_1) + (x \otimes y_2)$$
$$f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) = f(x, \lambda y), \; o\ bien: (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y) = \lambda (x \otimes y)$$

Teorema 1:

a) Si en el anterior diagrama 1 el par (*f,T*) es el producto tensorial de los espacios vectoriales V_1 y V_2, es decir, si para cualquier otro par (*f',T'*) con *f'* bilineal y *T'* espacio vectorial, se verifica que existe un homomorfismo $g: T \to T'$ único que hace conmutativo al diagrama, entonces el conjunto imagen $f(V_1 x V_2)$ del espacio producto cartesiano de ambos espacios vectoriales genera al espacio *T*:

$$g: T \to T' \text{único} \Rightarrow L(f(V_1 x V_2)) = T$$

b) Y recíprocamente, si en el anterior diagrama 1 se verifica que el espacio generado por $f(V_1 x V_2)$ coincide con *T*, entonces el homomorfismo *g* es necesariamente único y el par (*f,T*) es, efectivamente, el producto tensorial de ambos espacios vectoriales:

$$L(f(V_1 x V_2)) = T \Rightarrow g: T \to T' \text{único}$$

Demostración:

a) Sea $L(f(V_1 x V_2)) \subseteq T$ el espacio generado por $f(V_1 x V_2)$ y sea $j: L(f(V_1 x V_2)) \to T$ la inmersión canónica (*j* es la identidad sobre $L(f(V_1 x V_2))$).

Al ser la identidad es $j \in Hom(L(V_1 x V_2), T)$, teniéndose el siguiente diagrama:

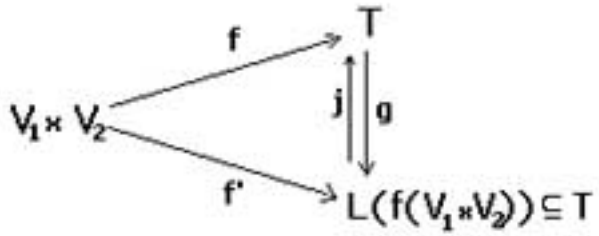


Diagrama 2

se tiene:

$$j \circ f' = f \qquad g \circ f = f'$$

premultiplicando la segunda de estas expresiones por *j*:

$$j \circ (g \circ f) = j \circ f' = f \rightarrow (j \circ g) \circ f = f \rightarrow j \circ g = i_d$$

Al ser $j \circ g$ la identidad i_d nos encontramos que la inmersión *j* es realmente un isomorfismo, por lo que $L(f(V_1 x V_2)) = T$

b) Sea $L(f(V_1 x V_2)) = T \wedge g : T \rightarrow T'$ homomorfismo

Supongamos que existe otro homomorfismo $g^* : T \rightarrow T'$

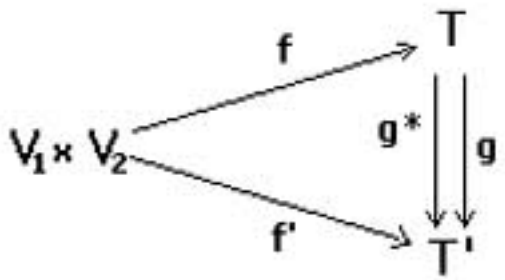


Diagrama 3

Se tendría entonces que

$$f' = g \circ f \quad \wedge \quad f' = g^* \circ f$$

es decir:

$$g \circ f = g^* \circ f \rightarrow (g - g^*) \circ f = 0$$

$\forall x \in T \rightarrow x \in L(f(V_1 x V_2)) \rightarrow x = \sum \lambda_i f(x_i, y_i)$, con $(x_i, y_i) \in V_1 x V_2$

por lo cual $\forall x \in T, (g - g^*)(x) = (g - g^*)\left(\sum \lambda_i f(x_i, y_i)\right) = \sum \lambda_i (g - g^*) f(x_i, y_i) =$

$= \sum \lambda_i (g \circ f)(x_i, y_i) - \sum \lambda_i (g^* \circ f)(x_i, y_i) = \sum \lambda_i f'(x_i, y_i) - \sum \lambda_i f'(x_i, y_i) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow g - g^* = 0 \rightarrow g = g^*$

Por tanto, *g* es homomorfismo único.

En definitiva, para probar la unicidad del homomorfismo $g: T \to T'$ bastará probar, equivalentemente, que el espacio engendrado por $f(V_1 x V_2)$ coincide con el espacio *T* de la definición.

Si en el diagrama 1 hacemos $f' \equiv f$ y $T' \equiv T$, el homomorfismo *g* único ha de ser necesariamente el isomorfismo identidad i_d, pues éste siempre existe, y al ser único, nunca podría tratarse de otro diferente:

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & V_1 \otimes V_2 \arrow[dl, "i_d"] \\ & V_1 \otimes V_2 & \end{tikzcd}$$

En definitiva, dado un producto tensorial (*f,T*) donde es $f: V_1 \times V_2 \to T$, si se verifica para $f: V_1 \times V_2 \to T'$ que $\varphi: T \to T'$ es el homomorfismo único tal que $\varphi \circ f = f$, entonces φ es la identidad y los espacios *T* y *T'* son isomorfos.

01.2. Ejemplos:

Ejemplo 1: Consideremos el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $(V;\mathbb{R})$, y consideremos también el mismo cuerpo $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre sí mismo.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dd, "g"] \\ R \times V \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\ & H \end{tikzcd} \qquad g.f = \varphi$$

diagrama 4

Si definimos la aplicación $f: \mathbb{R} \times V \to V$ por la condición de que

$$\forall (\alpha, x) \in \mathbb{R} \times V, f(\alpha, x) = \alpha x \in V$$

el par (f,V) será producto tensorial de los espacios vectoriales $\mathbb{R}$ y *V*.

Para comprobarlo veamos que se verifica la definición, esto es, que *f* es aplicación bilineal de $\mathbb{R}\times V$ en *V*, y que, si existe otra aplicación bilineal φ de $\mathbb{R}\times V$ en otro espacio vectorial *H,* entonces existirá un único homomorfismo $g:V\to H$ tal que $g\circ f=\varphi$.

1.a) *f* es aplicación bilineal:

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall x,y\in V$$
$$f(\alpha+\beta,x)=(\alpha+\beta).x=\alpha.x+\beta.x=f(\alpha,x)+f(\beta,x)$$
$$f(\alpha,x+y)=\alpha.(x+y)=\alpha x+\alpha y=f(\alpha,x)+f(\alpha,y)$$
$$f(\lambda\alpha,x)=\lambda\alpha x=\lambda f(\alpha,x)=f(a,\lambda x),\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

1.b) Definamos $g:V\to H$ por la condición de que $\forall x\in V,\ g(x)=\varphi(1,x)\in H$ y veamos su linealidad:

$$g(x+y)=\varphi(1,x+y)=\varphi(1,x)+\varphi(1,y)=g(x)+g(y)$$
$$g(\lambda x)=\varphi(1,\lambda x)=\lambda\varphi(1,x)=\lambda g(x)$$

1.c) Veamos que $g\circ f=\varphi$:

$$\forall(\alpha,x)\in\mathbb{R}\times V,\ (g\circ f)(\alpha,x)=g\left[f(\alpha,x)\right]=g(\alpha x)=\alpha g(x)=\alpha\varphi(1,x)=\varphi(\alpha,x)$$

por tanto $g\circ f=\varphi$

1.d) La unicidad de g:

De la definición de *f*:

$$\forall(\alpha,x)\in\mathbb{R}\times V,\ f(\alpha,x)=\alpha x\in V$$

se tiene que $f(\mathbb{R}\times V)=\mathbb{R}\times V=V$, por lo que es obvio que $L(f(\mathbb{R}\times V))=V$, y aplicando el teorema 1, *g* es único.

En definitiva, el par (f,V) es producto tensorial de $\mathbb{R}$ y *V*.

Ejemplo 2: Consideremos de nuevo el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. El espacio $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ de las matrices rectangulares reales, de *m* filas y *n* columnas, junto con la aplicación $f:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to M_{m\times n}(\mathbb{R})$, es el producto tensorial de los espacios $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, si dicha aplicación *f* se define en la forma:

$$\forall(a_1,...,a_m),(b_1,...,b_n)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n,\ f\left((a_1,...,a_m),(b_1,...,b_n)\right)=\begin{pmatrix} a_1b_1 & ... & a_1b_n \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ a_mb_1 & ... & a_mb_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} & M_{m\times n}(R) \arrow[dd, "g"] \\ R^m\times R^n \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\ & H \end{tikzcd} \qquad g.f=\varphi$$

diagrama 5

Comprobamos, pues, a continuación, que se verifican las condiciones de la definición, esto es, que *f* es bilineal y que para cualquier otra aplicación bilineal definida hacia otro espacio *H*, $\varphi:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to H$, cualquiera que sea, siempre existe una única aplicación lineal $g:M_{m\times n}(\mathbb{R})\to H$ tal que $g\circ f=\varphi$

2.a) *f* es aplicación bilineal:

Llamaremos, para simplificar:

$(a_i)_m=(a_1,...,a_m),\ (b_j)_n=(b_1,...,b_n)$, y

$$(a_ib_j)_{mxn}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & ... & a_1b_n \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ a_mb_1 & ... & a_mb_n \end{pmatrix}$$

Se tiene, por tanto:

$$\forall(a_i)_m,(b_j)_n\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n,\ f\left((a_i)_m,(b_j)_n\right)=\left(a_ib_j\right)_{m\times n}\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$$

- $f\left[(a_i)_m+(a_i^{'})_m,(b_j)_n\right]=\left((a_i+a_i^{'})b_j\right)_{m\times n}=\left(a_ib_j+a_i^{'}b_j\right)_{m\times n}$
$=\left(a_ib_j\right)_{m\times n}+\left(a_i^{'}b_j\right)_{m\times n}=f\left[(a_i)_m,(b_j)_n\right]+f\left[(a_i^{'})_m,(b_j)_n\right]$
- $f\left[(a_i)_m,(b_j)_n+(b_j^{'})_n\right]=\left(a_i.(b_j+b_j^{'})\right)_{m\times n}=\left(a_ib_j+a_ib_j^{'}\right)_{m\times n}$
$=\left(a_ib_j\right)_{m\times n}+\left(a_ib_j^{'}\right)_{m\times n}=f\left[(a_i)_m,(b_j)_n\right]+f\left[(a_i)_m,(b_j^{'})_n\right]$
- $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ f\left[\lambda(a_i)_m,(b_j)_n\right]=f\left[(\lambda a_i)_m,(b_j)_n\right]=\left(\lambda a_ib_j\right)_{m\times n}=\lambda\left(a_ib_j\right)_{m\times n}=$
$=\lambda f\left[(a_i)_m,(b_j)_n\right]=f\left[(a_i)_m,(\lambda b_j)_n\right]$

2.b) Definamos $g:M_{m\times n}(\mathbb{R})\to H$ por la condición siguiente

$$\forall(c_{ij})_{m\times n}\in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ g\left[(c_{ij})_{m\times n}\right]=\varphi\left[(1,0,...,0),(c_{11},c_{12},...,c_{1n})\right]$$
$$+\varphi\left[(0,1,...,0),(c_{21},c_{22},...,c_{2n})\right]+\cdots+\varphi\left[(0,0,...,1),(c_{m1},c_{m2},...,c_{mn})\right]$$

Veamos que g así definido es lineal:

- $g\left[(c_{ij})_{m\times n}+(d_{ij})_{m\times n}\right]=\varphi\left[(1,0,\cdots,0),(c_{11},c_{12},\cdots,c_{1n})+(d_{11},d_{12},\cdots,d_{1n})\right]+$
$\cdots+\varphi\left[(0,0,...,1),(c_{m1},c_{m2},...,c_{mn})+(d_{m1},d_{m2},...,d_{mn})\right]$
$=\varphi\left[(1,0,\cdots,0),(c_{11},c_{12},\cdots,c_{1n})\right]+\varphi\left[(1,0,\cdots,0),(d_{11},d_{12},\cdots,d_{1n})\right]+$
$\cdots+\varphi\left[(0,0,\cdots,1),(c_{m1},c_{m2},\cdots,c_{mn})\right]+\varphi\left[(0,0,\cdots,1),(d_{m1},d_{m2},\cdots,d_{mn})\right]$
$=\left\{\varphi\left[(1,0,\cdots,0),(c_{11},c_{12},\cdots,c_{1n})\right]+...+\varphi\left[(0,0,\cdots,1),(c_{m1},c_{m2},\cdots,c_{mn})\right]\right\}$
$+\left\{\varphi\left[(1,0,...,0),(d_{11},d_{12},...,d_{1n})\right]+...+\varphi\left[(0,0,...,1),(d_{m1},d_{m2},...,d_{mn})\right]\right\}$
$=g\left[(c_{ij})_{m\times n}\right]+g\left[(d_{ij})_{m\times n}\right]$
- $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ g\left[\lambda(c_{ij})_{m\times n}\right]=g\left[(\lambda c_{ij})_{m\times n}\right]=\varphi\left[(1,0,\cdots,0),(\lambda c_{11},\lambda c_{12},\cdots,\lambda c_{1n})\right]$
$+\varphi\left[(0,1,\cdots,0),(\lambda c_{21},\lambda c_{22},\cdots,\lambda c_{2n})\right]+\cdots+\varphi\left[(0,0,\cdots,1),(\lambda c_{m1},\lambda c_{m2},...,\lambda c_{mn})\right]$
$=\lambda\varphi\left[(1,0,\cdots,0),(c_{11},c_{12},\cdots,c_{1n})\right]+\cdots+\lambda\varphi\left[(0,0,\cdots,1),(c_{m1},c_{m2},\cdots,c_{mn})\right]$
$=\lambda\left\{\varphi\left[(1,0,\cdots,0),(c_{11},c_{12}\cdots,c_{1n})\right]+\cdots+\varphi\left[(0,0,\cdots,1),(c_{m1},c_{m2},\cdots,c_{mn})\right]\right\}$
$=\lambda g\left[(c_{ij})_{m\times n}\right]$

2.c) Veamos que $g\circ f=\varphi$:

$$\forall\left((a_i)_m,(b_j)_n\right)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n,\ (g\circ f)\left[(a_i)_m,(b_j)_n\right]=g\left[f\left((a_i)_m,(b_j)_n\right)\right]=g\left[\left(a_ib_j\right)_{m\times n}\right]$$
$$=\varphi\left[(1,0,\cdots,0),(a_1b_1,\cdots,a_1b_n)\right]+\varphi\left[(0,1,\cdots,0),(a_2b_1,\cdots,a_2b_n)\right]+$$
$$\cdots+\varphi\left[(0,0,\cdots,1),(a_mb_1,\cdots,a_mb_n)\right]=\varphi\left[(1,0,\cdots,0),a_1(b_1,\cdots,b_n)\right]+$$
$$\cdots+\varphi\left[(0,1,\cdots,0),a_2(b_1,\cdots,b_n)\right]+\cdots+\varphi\left[(0,0,\cdots,1),a_m(b_1,\cdots,b_n)\right]$$
$$=a_1\varphi\left[(1,0,\cdots,0),(b_1,\cdots,b_n)\right]+a_2\varphi\left[(0,1,\cdots,0),(b_1,\cdots,b_n)\right]+$$
$$\cdots+a_m\varphi\left[(0,0,\cdots,1),(b_1,\cdots,b_n)\right]=\varphi\left[(a_1,0,\cdots,0),(b_1,\cdots,b_n)\right]$$
$$+\varphi\left[(0,a_2,\cdots,0),(b_1,\cdots,b_n)\right]+\cdots+\varphi\left[(0,0,\cdots,a_m),(b_1,\cdots,b_n)\right]$$
$$=\varphi\left[(a_1,\cdots,a_m),(b_1,\cdots,b_n)\right]=\varphi\left[(a_i)_m,(b_j)_n\right]$$

Por tanto, $(g\circ f)\left[(a_i)_m,(b_j)_n\right]=\varphi\left[(a_i)_m,(b_j)_n\right]\rightarrow g\circ f=\varphi$

2.d) La unicidad de g:

Demostraremos a continuación que el espacio generado por $f(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)$, esto es, $L\left[f(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)\right]$, coincide con $M_{m\times n}(R)$, lo cual, por el teorema 1, implicaría que el homomorfismo *g* es único.

Como es $L\left[f(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)\right]\subseteq M_{m\times n}(R)$, probaremos que también tiene lugar la inclusión inversa, $M_{m\times n}(\mathbb{R})\subseteq L\left[f(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)\right]$.

$$\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$
$$`+\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}+\dots+\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

$$+a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}+\cdots+a_{mn}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=a_{11}f\left[(1,0,\cdots,0),(1,0,\cdots,0)\right]$$

$$+a_{12}f\left[(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0)\right]\cdots+a_{mn}f\left[(0,0,\cdots,1),(0,0,\cdots,1)\right]$$

$$=\sum a_{ij}f\left[(u_i)_m,(u_j)_n\right]\in L\left[f(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)\right]$$

Por consiguiente, $M_{m\times n}(R)\subseteq L\left[f(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)\right]$,

$$\left.\begin{array}{l} L\left[f(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)\right]\subseteq M_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ M_{m\times n}(\mathbb{R})\subseteq L\left[f(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)\right] \end{array}\right\}\to L\left[f(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)\right]=M_{m\times n}(\mathbb{R})$$, de lo cual, por el

teorema 1, concluimos que el homomorfismo *g* es único.

01.3. Generalización

La idea de producto tensorial es de inmediato generalizable a un número cualquiera de espacios vectoriales sobre un cuerpo conmutativo, considerando ahora aplicaciones multilineales definidas desde $\prod_{j=1}^{n}V_j$ hacia un *K*-espacio vectorial *T*.

Cuando se trata de *n* espacios vectoriales, $V_1,\cdots,V_n$, sobre un cuerpo conmutativo *K*, el producto tensorial se define como el par (*f, T*) donde *T* es un K-espacio vectorial y $f:\prod_{j=1}^{n}V_j\to T$ es una aplicación multilineal tal que para cualquier otra aplicación multilineal $f':\prod_{j=1}^{n}V_j\to T'$, cualquiera que sea el *K*-espacio *T'*, existe un único homomorfismo $g:T\to T'$ tal que $g\circ f=f'$.

Sobre el producto tensorial de espacios vectoriales

El teorema 1 expuesto antes para *n=2*, es obviamente válido para $n \geq 2$, es decir, si (*f, T*) es un producto tensorial de los espacios $V_1, \cdots, V_n$, entonces $f(V_1 \times \cdots \times V_n)$ genera al espacio *T*, y, recíprocamente, si $f(V_1 \times \cdots \times V_n)$ genera a *T*, siendo la aplicación *f* multilineal, entonces se verifica que, cualquiera que sea el par (*f', T'*) con $f' : \prod_{j=1}^{n} V_j \to T'$ multilineal, existe un homomorfismo $g : T \to T'$, único, tal que $g \circ f = f'$.

01.4. Expresión de los tensores en una base:

El teorema 1 permite la expresión de un tensor, *t*, elemento del espacio tensorial, del tipo siguiente:

$$\forall t \in T, t = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(x_{i1}, \cdots, x_{in}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_{i1} \otimes \ldots \otimes x_{in}$$

En particular, si consideramos bases de los espacios vectoriales $V_1, \cdots, V_n$ **:**

$$B_1 = \{u_{1i_1}\}, i_1 \in I_1, B_2 = \{u_{1i_2}\}, i_2 \in I_2, \cdots, B_n = \{u_{1i_n}\}, i_n \in I_n$$

un sistema de generadores sería:

$$B = \{u_{1i_1} \otimes \cdots \otimes u_{ni_n}\}, i_j \in I_j$$

Por otra parte, es inmediato que nunca podrá identificarse el producto vectorial $\prod_{j=1}^{n} V_j$ con una parte del espacio producto tensorial $T = \bigotimes_{j=1}^{n} V_j$ pues la aplicación

$$f : \prod_{j=1}^{n} V_j \to T = \bigotimes_{j=1}^{n} V_j$$

no es inyectiva, ya que

$$f(\alpha x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, \alpha x_2, ..., x_n) = ... = f(x_1, x_2, ..., \alpha x_n)\,,$$

siendo, como es obvio,

$$(\alpha x_1, x_2, ..., x_n) \neq (x_1, \alpha x_2, ..., x_n) \neq .... \neq (x_1, x_2, ..., \alpha x_n)\,.$$

Coordenadas de un tensor:

Si en lugar del producto tensorial de *p* *K*-espacios vectoriales distintos, determinamos el producto tensorial de *r* copias de un mismo *K*-espacio vectorial *V* por *s* copias de su *K*-espacio vectorial dual, *W*, es decir, si consideramos el espacio tensorial *T* producto de los *K*-espacios $(V, \cdots - r - \cdots, V, W, \cdots - s - \cdots, W)$:

$$T = V \otimes \cdots \otimes V \otimes W \otimes \cdots \otimes W = (\otimes^r V) \otimes (\otimes^s W)$$

los tensores, elementos del espacio producto tensorial T, se pueden expresar por

$$t \in T \rightarrow t = x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_s$$

que se denominan (*r,s*)-tensores, de orden *r* + *s*.

Un tensor se dice que es *contravariante de orden p* si es un (*p*,0)-tensor, y se dice que es *covariante de orden q* si es un (0,*q*)-tensor.

En general, un (*p,q*)-tensor se dice tensor mixto, *p*-contravariante y *q*-covariante, con orden *p* + *q*.

Supongamos que es $\{e_1, \cdots e_n\} \equiv \{e_i\}_n$ una base de *V*, y es $\{u_1, \cdots, u_n\} \equiv \{u_j\}_n$ una base del espacio dual *W*. La base correspondiente del espacio tensorial *T* sería:

$$\{e_{1i} \otimes e_{2i} \otimes \cdots \otimes e_{ri} \otimes u_{1j} \otimes u_{2j} \otimes \cdots \otimes u_{sj}\}$$

Ejemplos:

- Los elementos del espacio tensorial $V \otimes V$ son tensores 2-contravariantes de orden 2. Su expresión en la base $\{e_i\}_n$ del espacio vectorial V es de la forma

$$t = t^{ij}(e_i \otimes e_j).$$

- Los elementos del espacio tensorial $V \otimes V \otimes W$ son tensores mixtos de orden 3, 2-contravariantes, 1-covariantes. Expresión en la base $\{e_i\}_n$ de V, y $\{u_j\}_n$ del dual W:

$$t = t_j^{i_1 i_2}(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes u_j)$$

- Los elementos de V, es decir, los vectores del espacio, son tensores de orden 1, 1-contravariantes. Expresión en la base $\{e_i\}_n$:

$$t = t^i e_i$$

- Los elementos del espacio dual W, covectores, son tensores de orden 1, 1-covariantes. Expresión en la base $\{u_j\}_n$:

$$t = t_j u_j$$

- Los elementos del espacio tensorial $(\otimes^3 V) \otimes (\otimes^2 W)$ son 3-contravariantes, 2-covariantes, mixtos de orden 5. Expresión:

$$t = t_{j_1 j_2}^{i_1 i_2 i_3}(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3} \otimes u_{j_1} \otimes u_{j_2})$$

01.5. Unicidad y existencia del producto tensorial

El teorema de unicidad:

Supongamos que (f,T) y (f',T') son, ambos, productos tensoriales de los K-espacios vectoriales $V_1,\cdots,V_n$. Veamos que son isomorfos.

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, shift left, "g"] \\ V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \\ & T' \arrow[uu, shift left, "h"] \end{tikzcd}$$

por definición, existen homomorfismos únicos

$$g \circ f = f' \qquad [1] \qquad\qquad h \circ f' = f \qquad [2]$$

entonces:

- premultiplicando [1] por *h*:

$$h \circ (g \circ f) = h \circ f' = f \rightarrow (h \circ g) \circ f = f \rightarrow h \circ g = i_d$$

o sea: $\dot{\exists} i_d : T \rightarrow T \ (ident) / i_d \circ f = f \wedge h \circ g = i_d$

- premultiplicando [2] por g:

$$g \circ (h \circ f') = h \circ f = f' \rightarrow (g \circ h) \circ f' = f' \rightarrow g \circ h = i_{d'}$$

análogamente: $\dot{\exists} i_{d'} : T' \rightarrow T' \ (ident) / i_{d'} \circ f' = f' \wedge g \circ h = i_{d'}$

en definitiva:

$$\left.\begin{array}{l} h \circ g = i_d \ (ident\ en\ T) \\ g \circ h = i_{d'} \ (ident\ en\ T') \end{array}\right\} \rightarrow h = g^{-1} \ isomorfismo$$

El teorema de existencia:

Consideremos un cuerpo conmutativo *K* y un conjunto de *n+1* *K*-espacios vectoriales, $V_1, \cdots, V_n, W$ cualesquiera. Vamos a ver que siempre existe el producto tensorial de los *n* espacios vectoriales $V_1, \cdots, V_n$:

Sea h una aplicación del producto cartesiano $V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ en W:

$$h : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \rightarrow W \ ,$$

o sea:

Sobre el producto tensorial de espacios vectoriales

$$\forall (x_1,\cdots,x_n)\in V_1\times V_2\times\cdots\times V_n,\ h(x_1,\cdots,x_n)\in W$$

Sea también un subpespacio $S\subseteq W$ y una relación R en W definida por la condición:

$$uRv \leftrightarrow u-v\in S\ ,\ u,v\in W$$

que es de equivalencia por ser, trivialmente, reflexiva, simétrica y transitiva.

Llamemos W/S al conjunto cociente de W por tal relación de equivalencia, esto es:

$$W/S=\{[x]/\forall y\in [x], x-y\in S\}$$

y sea, finalmente, el homomorfismo de inmersión canónica $j:W\to W/S$, es decir:

$$\forall x\in W,\ j(x)=[x]\in W/S$$

(es claro que si $x\in S\subseteq W$, entonces $j(x)=[0]$, pues $x-0\in S$) [1]

Entonces, veremos que el par $(j\circ h, W/S)$, donde es $j\circ h: V_1\times V_2\times ...\times V_n\to W/S$, será el producto tensorial de los *n* *K*-espacios vectoriales $V_1\times V_2\times ...\times V_n$, siempre que el subespacio *S* sea el espacio generado por los elementos de la forma

$$h(x_1,\cdots,\lambda x_i+\mu x_i^0,\cdots,x_n)-\lambda h(x_1,\cdots,x_i\cdots,x_n)-\mu h(x_1,\cdots,x_i^0,\cdots,x_n)$$

Es decir, veremos que, con esta condición, el producto tensorial será el par (f,T) construido en la forma que se indica en el diagrama, que será conmutativo para cualquier otro espacio *T*' y cualquier otra aplicación *n*-lineal *f*':

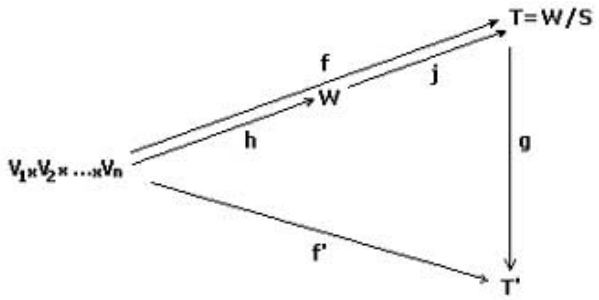


Diagrama 5

La prueba de que el par así construido es producto tensorial de los *n* k-espacios indicados, requiere dar tres pasos:

- Primero, probar que la aplicación *f* es multilineal (*n*-lineal).
- Segundo, que existe un homomorfismo *g* tal que el diagrama 5 es conmutativo, esto es, tal que $f' = g \circ f$.
- Tercero, que el homomorfismo *g* es único.

1) La aplicación f es *n*-lineal:

$$\begin{aligned}
&f(x_1,\cdots,\lambda x_i+\mu x_i^0,\cdots,x_n)-\lambda f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)-\mu f(x_1,\cdots,x_i^0,\cdots,x_n)\\
&= j\circ h(x_1,\cdots,\lambda x_i+\mu x_i^0,\cdots,x_n)-\lambda j\circ h(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)-\mu j\circ h(x_1,\cdots,x_i^0,\cdots,x_n)\\
&= j\left[h(x_1,\cdots,\lambda x_i+\mu x_i^0,\cdots,x_n)-\lambda h(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)-\mu h(x_1,\cdots,x_i^0,\cdots,x_n)\right]=0
\end{aligned}$$

puesto que, por construcción, es

$$h(x_1,\cdots,\lambda x_i+\mu x_i^0,\cdots,x_n)-\lambda h(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)-\mu h(x_1,\cdots,x_i^0,\cdots,x_n)\in S$$

y hemos visto en [1] que $j(x)=[0]$, si $x\in S\subseteq W$.

En definitiva, $f(x_1,\cdots,\lambda x_i+\mu x_i^0,\cdots,x_n)-\lambda f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)-\mu f(x_1,\cdots,x_i^0,\cdots,x_n)=0$,

con lo que $f(x_1,\cdots,\lambda x_i+\mu x_i^0,\cdots,x_n)=\lambda f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)+\mu f(x_1,\cdots,x_i^0,\cdots,x_n)$, y *f* es,

efectivamente, aplicación *n*-lineal.

2) Existe el homomorfismo *g*:

Veamos que si *f'* es *n*-lineal, cualquiera que sea el *K*-espacio *H*, existirá un homomorfismo $g:T\to H$ tal que $f'=g\circ f$

Sea un homomorfismo cualquiera $r:W\to H$. Se tiene

$$\begin{aligned}
&r\left[h(x_1,\cdots,\lambda x_i+\mu x_i^0,\cdots,x_n)-\lambda h(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)-\mu h(x_1,\cdots,x_i^0,\cdots,x_n)\right]\\
&=r\left[h(x_1,\cdots,\lambda x_i+\mu x_i^0,\cdots,x_n)\right]-\lambda r\left[h(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)\right]-r\mu\left[(x_1,\cdots,x_i^0,\cdots,x_n)\right]
\end{aligned}$$

$$= (r \circ h)(x_1, \cdots, \lambda x_i + \mu x_i^0, \cdots, x_n) - \lambda (r \circ h)(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) - (\mu \circ h)(x_1, \cdots, x_i^0, \cdots, x_n)$$
$$= f'(x_1, \cdots, \lambda x_i + \mu x_i^0, \cdots, x_n) - \lambda f'(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) - f'(x_1, \cdots, x_i^0, \cdots, x_n) = 0$$

ya que *f'* es, por hipótesis, *n*-lineal.

Es decir, $r(z) = 0, \forall z \in S$, lo que indica que $S \subseteq \ker(r)$, por lo que se induce un homomorfismo $g : T \to H$ tal que $g \circ j = r$:

$$g \circ f = g \circ (j \circ h) = (g \circ j) \circ h = r \circ h = f'$$

3) El homomorfismo *g* es único:

Pues si hubiera otro $g^* : T \to H$ tal que $g^* f = f'$, repitiendo el razonamiento del teorema 1, diríamos que, puesto que $f(V_1 \times \cdots \times V_n)$ genera a $T = W / S$, se tendrá:

$$\forall t \in T = W / S, t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_{i1}, \cdots, x_{in}) \to g^*(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (g^* \circ f)(x_{i1}, \cdots, x_{in}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f'(x_{i1}, \cdots, x_{in}) = g(t) \to g^* = g$$

01.6. Propiedades de isomorfía

1) Teorema: Si denominamos por $Hom(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} V_i, W)$ al conjunto de los homomorfismos del espacio producto tensorial $\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} V_i$ en un espacio vectorial cualquiera *W*, y por $L_n(V_1, \cdots, V_n; W)$ al conjunto de las aplicaciones *n*-lineales de $\prod_{i=1}^{n} V_i$ en *W*, se verifica el isomorfismo siguiente

$$Hom(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} V_i, W) \cong L_n(V_1, \cdots, V_n, W)$$

En efecto:

Si es $(f, \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} V_i)$ producto tensorial, se tiene:

$$\forall f' \in L_n(V_1, \cdots, V_n; W), \exists g \in Hom\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} V_i, W\right) unico / g \circ f = f'$$

$$\begin{tikzcd} \prod_{i=1}^{n} V_i \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \bigotimes_{i=1}^{n} V_i \arrow[d, "g"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Esto nos indica que existe un homomorfismo

$$\varphi : L_n(V_1,\cdots,V_n;W) \to Hom\left(\bigotimes_{i=1}^{n} V_i, W\right)$$

tal que $\forall f' \in L_n(V_1,\cdots,V_n;W), \varphi(f') = g \in Hom\left(\bigotimes_{i=1}^{n} V_i, W\right)$

Asimismo, también se tiene que

$$\forall g \in Hom\left(\bigotimes_{i=1}^{n} V_i, W\right), \exists f' \in L_n(V_1,\cdots,V_n;W), / \, g \circ f = f'$$

Por lo que existe un homomorfismo $\psi : Hom\left(\bigotimes_{i=1}^{n} V_i, W\right) \to L_n(V_1,\cdots,V_n;W)$ tal que

$$\forall g \in Hom\left(\bigotimes_{i=1}^{n} V_i, W\right), \psi(g) = f' \in L_n(V_1,\cdots,V_n;W)$$

Por tanto, $\varphi^{-1} = \psi$ y $Hom\left(\bigotimes_{i=1}^{n} V_i, W\right) \cong L_n(V_1,\cdots,V_n;W)$

Corolario:

Se verifica, para el espacio dual $\left[\bigotimes_{i=1}^{n} V_i\right]^*$ del espacio producto tensorial, que

$$\left[\bigotimes_{i=1}^{n} V_i\right]^* \cong L_n(V_1,\cdots,V_n,K)$$

Es obvio, pues sustituyendo el espacio *W* por el cuerpo de escalares *K*, se tiene que es $Hom\left(\bigotimes_{i=1}^{n} V_i, K\right) = \left[\bigotimes_{i=1}^{n} V_i\right]^*$, por lo que, aplicando el teorema, se tiene que $\left[\bigotimes_{i=1}^{n} V_i\right]^* \cong L_n(V_1,\cdots,V_n,K)$

2) Teorema: Se verifica el isomorfismo siguiente: $V \otimes K \cong V \cong K \otimes V$

Demostración:

$$\begin{tikzcd} VxK \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & V \otimes K \arrow[d, "g"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Sea $(f, V \otimes K)$ producto tensorial, y sea $f' : VxK \to V$ bilineal. Por definición, existe un único homomorfismo

$$g : V \otimes K \to V \text{ tal que } g \circ f = f'$$

Elijamos *f'* definida por la condición de que

$$\forall (x,a) \in VxK, \; f'(x,a) = ax$$

y veamos que *g* tiene que ser necesariamente

suprayectiva e inyectiva, es decir, que se trata de un homomorfismo biyectivo o isomorfismo.

- *g* es suprayectiva:

Veamos que lo es f', es decir, veamos que $\forall x \in V, \exists (x,a) \in VxK / f'(x,a) = x$:

basta elegir *a=1*, que obviamente existe por ser *K* un cuerpo: $f'(x,1) = 1.x = x$

Si *f'* es suprayectiva quiere esto decir que lo es $g \circ f = f'$, y, por tanto, *g*.

- *g* es inyectiva:

Veamos que $Ker(g) = \{0\}$, o sea, que $\forall t \in V \otimes K / g(t) = 0 \rightarrow t = 0$:

Como es $t \in V \otimes K \rightarrow \exists x_1, \cdots, x_n \in V, \exists \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K / t = x_1 \otimes \alpha_1 + \cdots + x_n \otimes \alpha_n$

$= \alpha_1 x_1 \otimes 1 + \cdots + \alpha_n x_n \otimes 1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \otimes 1 = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, 1\right)$, y es $g(t) = g\left[f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, 1\right)\right]$

$= (g \circ f)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, 1\right) = f'\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, 1\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Esto quiere decir que si $g(t) = 0$, será

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \rightarrow t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0$

En definitiva, los espacios $V \otimes K$ y *V* son isomorfos.

La demostración de que también $K \otimes V \cong V$ es del todo análoga, siguiendo los mismos pasos.

01.7. Asociatividad y conmutatividad

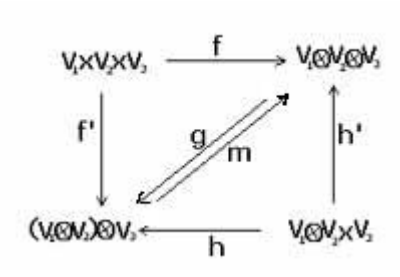
1) Asociatividad:

Para tres *K*-espacios cualesquiera, V_1, V_2, V_3, se verifica el isomorfismo siguiente:

$$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$$

Demostración:

- Veamos que $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$:



Sean:

$(f, V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)$ producto tensorial.

$(h, (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3)$ producto tensorial.

f': aplicación trilineal

h': aplicación bilineal

$g : V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$

$m : (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \to V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$

son los homomorfismos únicos que cumplen:

$g \circ f = f'$ y $m \circ h = h'$

Se tiene:

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in V_1 x V_2 x V_3, \left[(m \circ g) \circ f\right](x_1, x_2, x_3) = (m \circ g)(f(x_1, x_2, x_3))$$
$$= (m \circ g)(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = m(g(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)) = m((x_1 \otimes x_2) \otimes x_3) = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$$
$$= f(x_1, x_2, x_3) \to \left[(m \circ g) \circ f\right](x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3)$$

O sea: $(m \circ g) \circ f = f \to m \circ g = I_d$ (identidad)

Análogamente:

$$\forall (x_1 \otimes x_2, x_3) \in V_1 \otimes V_2 x V_3, \left[(g \circ m) \circ h\right](x_1 \otimes x_2, x_3) = (g \circ m)(h(x_1 \otimes x_2, x_3))$$
$$= (g \circ m)((x_1 \otimes x_2) \otimes x_3) = g(m((x_1 \otimes x_2) \otimes x_3)) = g(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = (x_1 \otimes x_2) \otimes x_3$$
$$= h(x_1 \otimes x_2, x_3) \to \left[(g \circ m) \circ h\right](x_1 \otimes x_2, x_3) = h(x_1 \otimes x_2, x_3)$$

O sea: $(g \circ m) \circ h = h \to g \circ m = I_d$ (identidad)

De lo cual: $m^{-1} = g \; isomorfismo \to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V$

- Veamos que $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$:

Sobre el producto tensorial de espacios vectoriales

$$\begin{tikzcd}
V_1 x V_2 x V_3 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \arrow[dl, shift left, "m"] \\
V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \arrow[ur, shift left, "g"] & V_1 x (V_2 \otimes V_3) \arrow[l, "h"] \arrow[u, "h'"']
\end{tikzcd}$$

Sean:

$(f, V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)$ producto tensorial.

$(h, V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3))$ producto tensorial.

f': aplicación trilineal

h': aplicación bilineal

$g : V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \to V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$

$m : V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \to V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$

son los homomorfismos únicos que cumplen:

$g \circ f = f'$ y $m \circ h = h'$

Se tiene:

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in V_1 x V_2 x V_3, \left[(m \circ g) \circ f\right](x_1, x_2, x_3) = (m \circ g)(f(x_1, x_2, x_3))$$
$$= (m \circ g)(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = m(g(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)) = m(x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3)) = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$$
$$= f(x_1, x_2, x_3) \to \left[(m \circ g) \circ f\right](x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3)$$

O sea: $(m \circ g) \circ f = f \to m \circ g = I_d$ (identidad)

Análogamente:

$$\forall (x_1, x_2 \otimes x_3) \in V_1 x V_2 \otimes V_3, \left[(g \circ m) \circ h\right](x_1, x_2 \otimes x_3) = (g \circ m)(h(x_1, x_2 \otimes x_3))$$
$$= (g \circ m)(x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3)) = g(m(x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3)) = g(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3)$$
$$= h(x_1, x_2 \otimes x_3) \to \left[(g \circ m) \circ h\right](x_1, x_2 \otimes x_3) = h(x_1, x_2 \otimes x_3)$$

O sea: $(g \circ m) \circ h = h \to g \circ m = I_d$ (identidad)

De lo cual: $m^{-1} = g \;\; isomorfismo \to V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$

2) Conmutatividad:

Existe un único isomorfismo $\psi : V_q \otimes V_p \to V_p \otimes V_q$ tal que

$$\forall x_p \in V_p, \forall x_q \in V_q, \psi(x_p \otimes x_q) = x_q \otimes x_p$$

Demostración:

$$\begin{tikzcd}
V_1 x V_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & V_1 \otimes V_2 \arrow[d, shift right, "h"'] \\
V_2 \otimes V_1 \arrow[u, shift right, "h'"'] & V_2 x V_1 \arrow[l, "f'"] \arrow[u, "g'"']
\end{tikzcd}$$

Sean:
$(f, V_1 \otimes V_2)$ producto tensorial.
$(f', V_2 \otimes V_1)$ producto tensorial.
g: aplicación bilineal
g': aplicación bilineal
$h: V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$
$h': V_2 \otimes V_1 \to V_1 \otimes V_2$
son los homomorfismos únicos que cumplen:
$h \circ f = g$ y $h' \circ f' = g'$

Se tiene:

$$\forall (x_1, x_2) \in V_1 x V_2, \left[(h' \circ h) \circ f)\right](x_1, x_2) = (h' \circ h)(f(x_1, x_2))$$
$$= (h' \circ h)(x_1 \otimes x_2) = h'(h(x_1 \otimes x_2)) = h'(x_2 \otimes x_1) = x_1 \otimes x_2$$
$$= f(x_1, x_2) \to \left[(h' \circ h) \circ f)\right](x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$$

O sea: $(h' \circ h) \circ f = f \to h' \circ h = I_d$ (identidad)

Análogamente:

$$\forall (x_2, x_1) \in V_2 x V_1, \left[(h \circ h') \circ f')\right](x_1, x_2) = (h \circ h')(f'(x_2, x_1))$$
$$= (h \circ h')(x_2 \otimes x_1) = h(h'(x_2 \otimes x_1)) = h(x_1 \otimes x_2) = x_2 \otimes x_1$$
$$= f'(x_1, x_2) \to \left[(h \circ h') \circ f')\right](x_2, x_1) = f'(x_2, x_1)$$

O sea: $(h \circ h') \circ f' = f' \to h \circ h' = I_d$ (identidad)

De lo cual: $h^{-1} = h \;\; isomorfismo \to V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$

En definitiva, para k-espacios vectoriales cualesquiera, se verifica mediante isomorfismo, la asociatividad y la conmutatividad del producto tensorial

$$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$$
$$V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$$

02. El producto tensorial de espacios vectoriales como objeto de una categoría:

02.1. Introducción a las categorías y funtores

Sobre el producto tensorial de espacios vectoriales

La teoría de categorías y funtores se construye de forma elemental desde el concepto de categoría, entendida como una clase cuyos objetos cumplen la condición de que cualquier par ordenado de los mismos tiene asociado un conjunto que denominamos *conjunto de los morfismos* correspondientes al par, teniendo a su vez los morfismos una ley de composición interna, asociativa y con elemento identidad:

Existencia: $\exists f \in (a,b)_\psi, \forall a,b \text{ objetos de } \psi$.
Ley interna: $(\forall f,g)\left(f \in (b,c)_\psi, g \in (a,b)_\psi\right), \exists h \in (a,c)_\psi \text{ único} / f \circ g = h$
Asociativa: $(\forall a,b,c)\left(f \in (b,c)_\psi, g \in (a,b)_\psi, h \in (d,a)_\psi\right), f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
Elemento identidad: $\forall a \in \psi, \exists I_a \in (a,a)_\psi / f \circ I_a = f \wedge I_a \circ g = g$
$\left(\forall f \in (a,b)_\psi, \forall g \in (c,a)_\psi, \forall b,c \in \psi\right)$

Así, si consideramos la categoría Φ, de objetos *a,b,c,...,* el conjunto asociado, por ejemplo, al par (*a,b*), diremos que se trata del conjunto de morfismos de dominio *a* y codominio *b*:

$(a,b)_\Phi$: conjunto de los morfismos de dominio *a* y codominio *b* dentro de la categoría Φ.

Se define también lo que se entiende como objeto inicial y objeto final de una categoría del modo siguiente:

- Un objeto α se dice que es *objeto inicial* de la categoría Φ, si el conjunto $(\alpha,b)_\Phi$ tiene un único elemento, cualquiera que sea el objeto *b* de la categoría.
- Un objeto β se dice que es *objeto final* de la categoría Φ, si el conjunto $(a,\beta)_\Phi$ tiene un único elemento, cualquiera que sea el objeto *a* de la categoría.

Si definimos una función tal que a los objetos de una determinada categoría Φ le correspondan los objetos de otra categoría Γ hemos de especificar también

que a los morfismos asociados a cada par de la primera le correspondan los morfismos asociados al correspondiente par de la segunda. Se trata, por tanto, de definir dos funciones, una que establezca la correspondencia entre los objetos (función-objeto) y otra que establezca la correspondencia entre los morfismos asociados a cada par ordenado de la primera y los morfismos asociados al correspondiente par ordenado de la segunda (función-morfismo). Con la función-morfismo pueden darse dos situaciones, a saber, que el morfismo imagen de un morfismo dado tenga por dominio la imagen del dominio del morfismo original y por codominio la imagen del codominio del morfismo original (función-morfismo covariante), o bien, que ocurra lo contrario, es decir, que el morfismo imagen de un morfismo dado tenga por dominio la imagen del codominio del morfismo original y por codominio la imagen del dominio del morfismo original (función-morfismo contravariante).

Función objeto:

$$f_o : \Phi \to \Gamma,\ \forall x \in \Phi,\ f_o(x) \in \Gamma\ \ (\text{si } x = y \to f_o(x) = f_o(y))$$

Función morfismo-covariante:

$$f_{m1} : (a,b)_\Phi \to \left(f_o(a), f_o(b)\right)_\Gamma,\quad \forall f \in (a,b)_\Phi,\ f_{m1}(f) \in (f_o(a), f_o(b))_\Gamma$$

Función morfismo-contravariante:

$$f_{m2} : (a,b)_\Phi \to \left(f_o(b), f_o(a)\right)_\Gamma,\quad \forall f \in (a,b)_\Phi,\ f_{m2}(f) \in (f_o(b), f_o(a))_\Gamma$$

Un funtor entre la categoría Φ y la categoría Γ es el par constituido por una función-objeto, f_o, y una función-morfismo, f_m:

Funtor covariante: (f_o, f_{m1})

Funtor contravariante: (f_o, f_{m2})

Sobre el producto tensorial de espacios vectoriales

Un funtor es una función entre categorías que está, pues, realmente constituida por dos funciones, una función-objeto y una función-morfismo. Un funtor es covariante o contravariante según lo sea su correspondiente función-morfismo. Ha de cumplir las condiciones de definición (axiomas) siguientes:

Sobre la identidad: $(\forall a)(a \in \psi,\ f_m I_a = I_{f_0 a})$

Sobre la composición de morfismos:

Covariante: $(\forall f, g)(f \in (b,c)_\psi, g \in (a,b)_\psi, f_{m1}(f \circ g) = f_{m1}(f) \circ f_{m1}(g))$

Contravariante: $(\forall f, g)(f \in (b,c)_\psi, g \in (a,b)_\psi, f_{m2}(f \circ g) = f_{m2}(g) \circ f_{m2}(f))$

Podemos imaginar de manera obvia diversas categorías:

- La categoría de los grupos: GRUP, cuyos objetos son los grupos y cuyos morfismos asociados a cada par ordenado de grupos son los homomorfismos de grupo.
- La categoría de los anillos: ANILL, cuyos objetos son los anillos y cuyos morfismos asociados a cada par ordenado de anillos son los homomorfismos de anillos.

Vemos a continuación que podemos definir la idea de producto tensorial de espacios vectoriales como objeto inicial de una cierta categoría, estableciéndose de forma natural el concepto de funtor producto tensorial.

02.2. El producto tensorial como objeto incial de una categoría

Como ya hemos descrito antes, el producto tensorial de un conjunto de *n* *K*-espacios vectoriales, $V_1, \cdots, V_n$, es un par constituido por una aplicación multilineal (*n*-lineal), *f*, desde el conjunto producto cartesiano de dichos *K*-espacios en otro *K*-espacio vectorial *T*, tal que para cualquier otra aplicación n-lineal *f'* de dicho conjunto producto cartesiano en cualquier otro *K*-espacio vectorial *T'* existe un

único homomorfismo de *K*-espacios vectoriales de *T* a *T'* tal que $g \circ f = f'$. El producto tensorial se define, pues, como el par (f, T).

Si representamos al espacio producto tensorial *T* por

$$T = \bigotimes_{i=1}^{n} V_i = V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$$

se tiene la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i=1}^{n} V_i \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^p"'] & \bigotimes_{i=1}^{n} V_i \arrow[d, "g"] \\
 & T^p
\end{tikzcd}$$

Dados *n* *K*-espacios vectoriales $V_1, \cdots, V_n$, dentro de la teoría de categorías podemos considerar la categoría Σ cuyos objetos son los pares $(f, T), (f^p, T^p), \cdots$, donde los $T, T^p, \cdots$ son *K*-espacios vectoriales, y las $f, f^p, \cdots$. son aplicaciones *n*-lineales desde el conjunto producto cartesiano de los *n* *K*-espacios vectoriales dados, y cuyos morfismos asociados a cada par $\big((f, T), (f^p, T^p)\big)$ son los homomorfismos $g : T \to T^p$, de forma que se verifique $g \circ f = f^p$. Es obvio que el producto tensorial constituido por el par $\left(f, T = \bigotimes_{i=1}^{n} V_i\right)$ es un objeto inicial de dicha categoría, pues el par de objetos $\left((f, \bigotimes_{i=1}^{n} V_i), (f^p, T^p)\right)$ es el único par que contiene un único morfismo (el homomorfismo $g : T \to T^p$) cualquiera que sea el objeto $\big(f^p, T^p\big)$ de la categoría, por definición de producto tensorial.

02.3. El funtor Producto Tensorial

Consideremos las dos categorías siguientes:

Sobre el producto tensorial de espacios vectoriales

- Categoría Γ: Es la categoría cuyos objetos son las *n*-plas de *K*-espacios vectoriales

$$(V_1,\cdots,V_n),\ (V_1^{'},\cdots,V_n^{'}),\ (V_1^{''},\cdots,V_n^{''}),\cdots$$

y cuyos morfismos asociados a cada par de objetos $\left((V_1,\cdots,V_n),(V_1^{'},\cdots,V_n^{'})\right)$ son las aplicaciones producto

$$\prod_{i=1}^{n} f_i : \prod_{i=1}^{n} V_i \to \prod_{i=1}^{n} V_i'$$

siendo las $f_i : V_i \to V_i^{'}, i = 1,...,n$, aplicaciones lineales entre espacios vectoriales.

- Categoría Φ: La categoría cuyos objetos son los productos tensoriales de los *K*-espacios de cada *n*-pla de la categoría Γ:

$$(f,\bigotimes_{i=1}^{n} V_i),\ (f',\bigotimes_{i=1}^{n} V_i^{'}),\ (f'',\bigotimes_{i=1}^{n} V_i^{''}),...$$

siendo los morfismos asociados a cada par de objetos $\left((f,\bigotimes_{i=1}^{n} V_i),\ (f',\bigotimes_{i=1}^{n} V_i^{'})\right)$ los homomorfismos $g : \bigotimes_{i=1}^{n} V_i \to \bigotimes_{i=1}^{n} V_i^{'}, i = 1,...,n$ tales que $g \circ f = f' \circ \prod_{i=1}^{n} f_i$, tal como se muestra en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i=1}^{n} V_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\prod_{i=1}^{n} f_i"'] & V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \arrow[d, "g"] \\
\prod_{i=1}^{n} V_i' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\prod_{i=1}^{n} f_i'"'] & V_1' \otimes \ldots \otimes V_n' \arrow[d, "g'"] \\
\prod_{i=1}^{n} V_i'' \arrow[r, "f''"] \arrow[d, dashed] & V_1'' \otimes \ldots \otimes V_n'' \arrow[d, dashed] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

Definamos ahora un funtor ψ desde la categoría Γ hacia la categoría Φ:

$$\psi : \mathrm{T} \to \Phi$$

Función-objeto: A cada objeto de la categoría Γ, es decir, a cada *n*-pla de *K*-espacios vectoriales $(V_1, \cdots, V_n)$ le hace corresponder su producto tensorial:

$$\forall (V_1, \cdots, V_n) \in \Gamma, \psi_0 (V_1, \cdots, V_n) = \left(f, \bigotimes_{i=1}^{n} V_i \right) \in \Phi$$

Función-morfismo: podemos definir la función morfismo ψ_m por la condición:

$$\forall \prod_{i=1}^{n} f_i \in \left((V_1, \cdots, V_n), (V_1', \cdots, V_n') \right)_\Gamma, \psi_m (\prod_{i=1}^{n} f_i) = g \in \left((f, \bigotimes_{i=1}^{n} V_i), (f', \bigotimes_{i=1}^{n} V_i') \right)_\Phi$$

Vemos que, efectivamente, se trata de un funtor ya que se verifican las dos condiciones de la definición de funtor, o sea, la condición sobre el morfismo identidad y sobre la composición de morfismos:

$$\Psi_m \left(\prod_{i=1}^{n} f_i' \circ \prod_{i=1}^{n} f_i \right) = g' \circ g = \Psi_m \left(\prod_{i=1}^{n} f_i' \right) \circ \Psi_m \left(\prod_{i=1}^{n} f \right)$$

$$\Psi_m\left(\prod_{i=1}^{n} Id_i\right) = Id$$

Tal funtor se denomina *funtor producto tensorial*, siendo, en definitiva las funciones constituyentes:

- Función-objeto:

$$\forall (V_1,\cdots,V_n) \in \Gamma, \psi_0(V_1,\cdots,V_n) = \left(f, \bigotimes_{i=1}^{n} V_i\right) \in \Phi$$

- Función-morfismo:

$$\forall \prod_{i=1}^{n} f_i \in \left((V_1,\cdots,V_n),(V_1^{'},\cdots,V_n^{'})\right)_\Gamma, \psi_m(\prod_{i=1}^{n} f_i) = g \in \left((V_1 \otimes \cdots \otimes V_n),(V'_1 \otimes \cdots \otimes V_n')\right)_\Phi$$

03. Bibliografía

Abellanas, P.: Geometría Básica, Ed. Romo, 1969.

Bobillo Ares, Nilo C., Dehesa Martinez, C.; Introducción al cálculo tensorial, Universidad de Oviedo, 2005.

Bourbaki, N.: Elements of mathematics, Algebra, Springer-Verlag, 1989.

Cartan, E.: Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars, 1946.

Lawden, D.F.: An introduction to tensor calculus, relativity and cosmology, Wiley 1986.

Lichnerowicz, A.: Elementos de cálculo tensorial, Ediciones Aguilar, 1972.

Mc Lane, S., Birkhoff, J. H.; Algèbre, Gauthiers-Villars, 1973.

Olivert Pellicer, J.: Estructuras de Algebra Multilineal, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Valencia, 1996

Ryand, Raymond A.; Introduction to Tensor Products of Banach Spaces, Springer, 2002.

ALEPH SUB – CERO

SERIE DE DIVULGACIÓN

$\aleph_0$ 2014 – II $\aleph_0$

pp. 261 - 269

EDMUND HUSSERL Y LA FENOMENOLOGÍA DEL NÚMERO NATURAL

(Edmund Husserl and the phenomenology of the natural number)

Joaquín González Álvarez[1]

Recepción: Octubre 2014. Revisión y aceptación: Noviembre 2014.

Resumen. Se presenta un análisis de los aspectos fundamentales de la corriente filosófica propugnada por el filósofo y matemático alemán Edmund Husserl conocida como Fenomenología, aspectos que fueron tomados por éste para desarrollar su tesis sobre el surgimiento en la conciencia del concepto de número natural entero y positivo o número cardinal. Se detalla como el filósofo morabo considera el concepto de número es precedido por el de conjunto como primitivo o primario en un proceso psicológico-lógico, siguiendo ideas de sus profesores Weierstraß (escrito Weierstrass cuando no está disponible el carácter "ß") y Brentano. Se definen los conceptos Intencionalidad y Reducción Eidética.

Palabras claves: Fenomenología, número, conjunto, intencionalidad, reducción eidética.

Abstract. An analysis of the fundamental aspects of the philosophical stream advocated by the German philosopher and mathematician Edmund Husserl called phenomenology and aspects that were taken by him to develop his thesis of the risen in the awareness of the concept of positive integer natural number or cardinal number is presented. It details how the moroccan philosopher considers the concept of number is preceded by the set as primitive or primary in a psychological-logical process, following ideas of his teachers Weierstraß (written Weierstrass when

[1] Joaquín González Álvarez, graduado de Carrera Profesoral Superior de Física y de Optometrista en la Universidad de la Habana. Profesor Universitario de Física Instituto Superior Pedagógico de Holguín (jubilado). Autor de varios textos de Física y de divulgación científica, así como de diversos artículos sobre ciencias, publicados en Cuba, España, México y Nicaragua. Miembro de Mérito de la Sociedad Cubana de Física. Actualmente reside en Miami Florida USA.
j.gonzalez.a@hotmail.com

unavailable character "ß") and Brentano. Concepts of Intentionality and Eidetic Reduction are defined.

Key Words: Phenomenology, number, set, intentionality, eidetic reduction.

Desarrollo

El filósofo y matemático alemán Edmund Husserl propuso una de las más analizadas, citadas e influyentes corrientes filosóficas del siglo XX la cual se conoce como Fenomenología y prueba de su importancia es que hoy en la alborada del XXI mantiene su vigencia plena.

La Fenomenología busca captar las cosas mismas como son dadas directamente a la conciencia sin implicarse en la conceptualización. En su tesis Husserl como él mismo declara ha recibido la influencia de sus profesores Weierstraß y Franz Brentano para exponer su filosofía de la aritmética, del primero el considerar el concepto de número como primitivo o primario en la mente, y de Brentano el tener el acto de captación de lo observado como dirigido a algo, a un objeto proceso que se denomina intencionalidad el cual está presente en la captación no conceptualizada, que Brentano considera y Husserl acepta como acción psicológica-lógica a la cual el filósofo morabo llama Reducción Eidética (RI).

Fijémonos en que la RI la califica Husserl de psicológica-lógica y en efecto al acto psíquico de captación no conceptualizada espontáneamente sigue la estructuración lógica de lo percibido guiada por la intencionalidad la cual en la fenomenología del número natural se dirige al proceso de contar. La corriente hursseliana se ha denominado Fenomenología porque de los aspectos del observar,

fenómeno y esencia, la captación psíquica es sólo del fenómeno y la esencia, de la estructuración lógica. Se advierte en Husserl la influencia del idealismo de Inmanuel Kant con su tesis de la imposibilidad de conocer la cosa en sí y su concepto del noúmeno[2]. De esos dos momentos del acto fenomenológico captación psíquica y elaboración lógica trata Jacques Derrida en su obra Génesis y Estructura en la que toma como ejemplo la Arithmetika de Husserl señalando que en la fenomenología del número el filósofo-matemático refiere génesis al conjunto de los números y estructura a la forma como de éstos se establecen sus relaciones u operaciones las cuales dan como resultado elementos del mismo conjunto. En las líneas anteriores se ha utilizado los términos conjunto y estructura. El concepto conjunto refiere a elementos relacionados por alguna o algunas propiedades y estructura es un importante concepto establecido de manera parecida por Levi-Strauss y Piaget definiéndolo como un conjunto cuyos elementos al realizarse determinada operación entre dos de éstos. El resultado es un elemento del mismo conjunto. Ejemplo evidente es el de los números enteros y positivos los cuales respecto a la suma construirán una estructura pero no respecto a la resta. Este tipo de estructura es la de grupo.

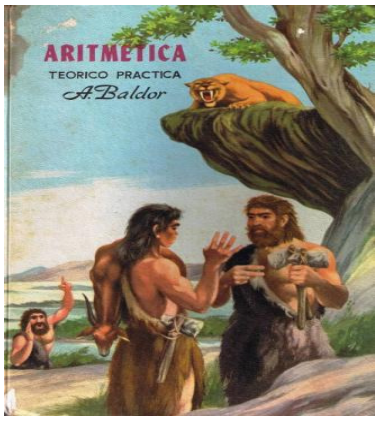
Ya, anteriormente, se expuso el criterio hursseliano de la naturaleza primitiva del concepto de número natural o cardinal, por lo cual seguidamente se presenta una idea de cómo el hombre primitivo llegó a captar fenomenológicamente el

---

[2] El **noúmeno** (del **griego** "νοούμενον" "noúmenon": "lo pensado" o "lo que se pretende decir"), en la filosofía de Immanuel Kant, es un término problemático que se introduce para referir a un objeto no **fenoménico**, es decir, que no pertenece a una **intuición sensible**, sino a una **intuición intelectual** o suprasensible. Por otra parte, el término también ha sido usado para hablar de la cosa-en-sí, es decir, la cosa en su existencia pura independientemente de cualquier representación. Ver en: http://es.wikipedia.org/wiki/No%C3%BAmeno

crucial concepto, por simple observación mediante la RI dirigida intencionalmente a la necesidad instintiva de contar. La primitiva conciencia captó lo que era un colectivo de cosas semejantes esto es, un conjunto. Ejemplo un conjunto de frutas con características iguales para el observador según su intencionalidad, tamaño, color, sabor u otra. Para obtener fresas, el primitivo denominado *A*, algunas veces era pidiéndolas por lo general para canje, a otro primitivo *B* y como notó que tenía que precisar cuántas fresas quería, optó por buscar la forma de mostrar a *B* un conjunto cada uno de cuyos elementos correspondiera a cada una de las fresas. O sea en términos actuales *A* buscó un conjunto coordinable uno a uno o unívoca con el conjunto de fresas, esto es buscó que entre ambos conjuntos existiera correspondencia biyectiva.

En la portada del libro Aritmética del insigne matemático cubano Dr. Aurelio Baldor[3], uno de los mejores libros de esa materia escrito en lengua castellana, se representa a un primitivo levantando una mano mostrando cuatro dedos levantados a otro primitivo. Una lamina de ingeniosa didáctica ilustrativa de lo explicado sobre los primitivos *A* y *B*.



[3] Tomado de: http://matematica1.com/category/aritmetica-de-baldor/

Se está entonces, ante la evidencia de cómo surgió fenomenológicamente la noción de número natural. En la portada del libro de Baldor ya ha nacido en la conciencia del hombre la noción de número natural como lo es el número cuatro. No es de dudar que cuando hubo que referirse a más de diez objetos en la transacción y por tanto no bastar los dedos, se recurriera a otros objetos para conformar o construir los conjuntos necesarios y se utilizarán piedras o cálculos[4], de ahí nacen las palabras calcular y cálculo. Los conjuntos (símbolos imperfectos de objetos) no tienen que ser de elementos iguales, para "simbolizar" por ejemplo el seis, no tienen que ser seis piedrecitas, pueden dos fruticas, tres florecitas y una hojita, la cosa es que la cardinidad sea seis. La necesidad de símbolos para abreviar o facilitar el manejo de conjuntos que expresan números, ya más avanzado el uso de la lógica, el humano ideó símbolos procediendo a la formalización de la matemática.

La correspondencia biyectiva entre un conjunto como el de los números enteros con el subconjunto de los pares, se cumple con cualquiera de sus subconjuntos como son los de los impares y los de los cuadrados, y ésta es una propiedad de los conjuntos infinitos en general.

Antes de dar la definición de número natural en base a lo que del mismo se ha venido exponiendo, considérese la siguiente pregunta: ¿qué tienen en común los enanitos de Blanca Nieves, los días de la semana y el nombre Joaquín? Claro que si, el número siete. Entonces puede darse entre otras muchas, la siguiente definición

[4] La palabra "cálculo" viene del latín (*cálculo*) y se refiere a una pequeña piedra utilizada para el recuento. Más en general, *cálculo (cálculos* plural) se refiere a cualquier método o sistema de cálculo guiado por la manipulación simbólica de expresiones. Ver en: http://translate.google.co.ve/translate?hl=es&sl=en&u=http://en.wikipedia.org/wiki/Calculus&prev=search.

del número siete: Se llama número siete al ente común a los enanitos de Blanca Nieves, los días de la semana y el nombre Joaquín.

Con todo lo antes expuesto cae por su propio peso la definición abstracta de número natural

"Se llama número natural al ente abstracto común a todos los conjuntos en los cuales todos sus elementos están en correspondencia biunívoca entre sí.

Los conjuntos a los cuales se ha hecho referencias son finitos y han servido para definir el número natural o cardinal. Seguidamente, se consideran conjuntos infinitos como el de los números enteros y positivos 1, 2, 3…, encontrándose con una interesante peculiaridad al intentar establecer la correspondencia biunívoca entre elementos de conjuntos infinitos para hallar el número natural por ese proceso definido.

Para analizar la referida peculiaridad se utiliza el conjunto sucesión de números antes citado 1, 2, 3, …, que no es posible escribirlo completo porque no tiene fin, por algo se dice que es infinito (esto de no poderlo escribir o construir y sólo intuirlo se tratará más adelante).

Indiscutiblemente el conjunto de los números pares será un subconjunto del de los números enteros antes citado. Resulta claro que dicho subconjunto será también infinito puesto que a cada entero n le corresponderá un $2n$, luego habrá correspondencia biunívoca entre los conjuntos 1, 2, 3…. y 2, 4, 6… Se está entonces, en condiciones de preguntar ¿cuál es el número natural definido por esa biyección? Pues esa biyección no define un número natural o cardinal finito sino lo que se denomina un Número Cardinal Transfinito y se representa por el símbolo

Aleph Subcero. Aleph es la primera letra del alfabeto hebreo y a ese símbolo y su transcendental significado matemático-filosófico dedicó el genial escritor argentino su antológica narración El Aleph.

El concepto de cardinal transfinito se debe al eminente matemático alemán de origen ruso Georg Cantor que lo introdujo en su fundamental Teoría de Conjuntos base de la llamada Matemática Moderna. El profundo sentimiento religioso de Cantor se trasluce en su obra a la vez científica y filosófica y al infinito conjunto de obras de la perenne Creaclón Evolutiva le supone un elemento final el cual simboliza con la letra griega Omega y lo identifica con Dios. Ideas como ésta y la del Cardinal Transfinito provocó despiadadas críticas de matemáticos de la época que llevó a Cantor a profunda depresión que en definitiva le causó la muerte.

En párrafos anteriores se anunció que se iba a tratar sobre la imposibilidad de escribir un conjunto infinito, algo que ha dado lugar al surgimiento de importantes corrientes de pensamiento matemático y filosófico. La no posibilidad de escribir o construir un conjunto infinito, al cual llaman los autores infinito actual los llevan a establecer corrientes de pensamiento como la del matemático holandés Jan Brower según la cual sostiene que el conjunto infinito actual al no poder ser construido no es un conjunto real y será un infinito potencial que sólo puede ser *intuido* y considerado como un platonismo matemático. Se destaca en cursiva intuido porque *Intuicionismo* se denomina la tesis de Brower. Semejante al Intuicionismo existe el Constructivismo cuyas tesis se diferencian en la consideración del principio lógico del tercero excluido que ambas niegan de manera diferente.

Conclusión

Como se ha podido observar la Fenomenologá de Huserl y específicamente la Reducción Eidética constituye un método de observación de fundamental efectividad que todo científico y todo aquel que practique el difícil ejercicio del recto pensar, debe interiorizar para lograr la necesaria objetividad para analizar no sólo la problemática científica sino también la existencial. Objetividad libre de prejuicios ideológicos o de cualquier índole, o de ideas preconcebidas o consignas lanzadas quien sabe por qué minusválido mental o manejador consciente de voluntades. La Fenomenología hursseliana bien entendida permite **conocer**, experimentar el objeto de observación. Conocer en el sentido de experimentar no es lo mismo que saber, un científico daltónico puede saber lo que es el color verde su longitud de onda, la energía de sus fotones, etc. pero no puede conocer, experimentar el verde porque no lo puede ver.

Bibliografía

Casanchi. **Acerca de la Fenomenología de Husserl, Joaquín González.** Febrero 2009. Disponible: http://www.casanchi.freeiz.com/ref/husserl01.htm. [Consulta: 2014, Septiembre 3].

Derrida en castellano. **«GÉNESIS Y ESTRUCTURA» Y LA FENOMENOLOGÍA, Jacques Derrida.** Febrero 1989. Disponible: http://www.jacquesderrida.com.ar/textos/husserl.htm. [Consulra: 2014, Agosto 20].

Derrida en castellano. **SOBRE LA FENOMENOLOGÍA, Jacques Derrida.** Julio 1999. Disponible: http://www.jacquesderrida.com.ar/textos/fenomenologia.htm. [Consulra: 2014, Agosto 20].

MATEMÁTICAS EJERCICIOS RESUELTOS. **ARITMÉTICA DE BALDOR-EJERCICIOS CON RESPUESTAS EN TEXTO PDF**. Abril 2013. Disponible: http://matematica1.com/category/aritmetica-de-baldor/. [Consulta: 2014, Octubre 5].

Wikipedia. La enciclopedia libre. **Noúmeno**. Marzo 2013. Disponible: http://es.wikipedia.org/wiki/No%C3%BAmeno. [Consulta: 2014, Septiembre 10].

Wikipedia. La enciclopedia libre. **Cálculo**. Mayo 2014. Disponible: http://translate.google.co.ve/translate?hl=es&sl=en&u=http://en.wikipedia.org/wiki/Calculus&prev=search. [Consulta: 2014, Septiembre 10].

ALEPH SUB – CERO
SERIE DE DIVULGACIÓN
$\aleph_0$ 2014 – II $\aleph_0$
pp. 270 - 306

TEORÍA CATEGORIAL DE DUALIDADES

Con Aplicaciones a Dominios, Convexidad y la Mónada de Distribuciones.

(Categorial Dualities Theory With applications to Domains, Convexity, and the Distribution Monad)

Adunador: **Alberto Mejías**[1]

Sin embargo; a pesar de mi marcada dualidad, no era en ningún sentido hipócrita y mis dos caras eran sinceras. Igualmente era yo, cuando abandonando todo freno me entregaba a actos que podrían llamarse deshonestos, que cuando me dedicaba a profundizar mis conocimientos y a aliviar el dolor ajeno.

DR. JEKYLL

Recepción: Noviembre 2014. Revisión y aceptación: mes 2014.

Resumen. Utilizando y ampliando conceptos categoriales de álgebra y topología, se desarrolla una teoría moderadamente general de dualidades entre espacios algebraicos donde no se consideran puntos (apuntíferos) y espacios puntíferos, que abarca a las dualidades STONE infinitarias, como la conocida dualidad entre marcos (o escenarios) y espacios topológicos y una dualidad entre álgebras Boole σ-completos y espacios medibles, así como las clásicas dualidades PONTRYAGIN, GELFAND y STONE, finitarias.

Entre las diferentes aplicaciones de nuestra teoría, nos centramos en la dualidad dominio-convexidad en particular: de la teoría se deriva una dualidad entre retículos SCOTT continuos y espacios de convexidad y se aprovechan los conocimientos resultantes para identificar intrínsecamente la parte de equivalencia dual de una adjunción dual para álgebras de la mónada de distribuciones; la adjunción dual fue descubierta por BART JACOBS, pero sin ninguna caracterización de la equivalencia inducida, que damos aquí. En el apéndice, se establecen las dualidades categoriales en un contexto más amplio y se dilucidan los fundamentos filosóficos de las dualidades.

Descriptores. Dualidad, Mónada, topología categorial, teoría de dominios, estructura convexa.

---

[1] Alberto R. Mejías E. es Licenciado en Matemática, egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes (ULA) Mérida- Venezuela. Es profesor jubilado de la Universidad de los Andes. alrame59@gmail.com

Teoría Categorial de Dualidades

Abstract. Utilizing and expanding concepts from categorial topology and algebra, one contrive a moderately general theory of dualities between algebraic, point-free spaces and set-theoretical, point-set spaces, which encompasses infinitary STONE dualities, such as the well-known duality between frames (aka. locales) and topological spaces, and a duality between σ-complete Boolean algebras and measurable spaces, as well as the classic finitary STONE, GELFAND, and PONTRYAGIN dualities.

Among different applications of our theory, we focus upon domain-convexity duality in particular: from the theory we derive a duality between SCOTT's continuous lattices and convexity spaces, and exploit the resulting insights to identify intrinsically the dual equivalence part of a dual adjunction for algebras of the distribution monad; the dual adjunction was uncovered by BART JACOBS, but with no characterization of the induced equivalence, which we do give here. In the Appendix, we place categorial dualities in a wider context, and elucidate philosophical underpinnings of dualities.

Keywords. Duality, monad, categorial topology, domain theory, convex structure.

1. INTRODUCCIÓN

Hay dos concepciones de espacio: una viene de la idea óntica de que los constituyentes definitivos del espacio, son puntos sin extensión; la otra no presupone el concepto de puntos en el primer lugar y comienza con un concepto epistémicamente más seguro como regiones o propiedades observables. Por ejemplo, un espacio topológico es una incorporación de la primera idea de espacio y un marco (o escenario) es una incorporación de la última.

A menudo existen dualidades entre los conceptos de espacio apuntífero (espacio que no lleva puntos) y la de espacio puntífero (espacio que lleva puntos) (dicho de otra manera, entre epistemología y ontología del espacio; véase también el apéndice), ejemplificada por la dualidad bien conocida, entre marcos y espacios topológicos (véase, por ejemplo, JOHNSTONE [12]).

Este es el teorema de dualidades más general: cada categoría **C** es dualmente equivalente a su correspondiente categoría opuesta $\mathbf{C}^{op}$. Por supuesto, no tiene sentido sustancial. Sin embargo, considérese que prescribe una forma genérica de dualidad, de una manera no evidente (decimos "no evidente" porque puede haber diferentes conceptos de una forma genérica de dualidad, algunas de las cuales pueden no basarse en Teoría de Categorías en absoluto). En este documental intentamos e-

vitar tal trivialidad centrándonos en un contexto más específico: nuestro objetivo es desarrollar una teoría moderadamente general, de dualidades entre espacios apuntíferos y espacios puntíferos, teniendo en mente aplicaciones a la dualidad dominio-convexidad, donde los dominios son vistos como estructuras convexas apuntíferas.

Nuestra teoría general de las dualidades entre los espacios apuntíferos y los puntíferos, se basa en la idea de una dualidad inducida por un objeto janusiano (esquizofrénico, ambimorfo): "una potencial dualidad surge cuando un mismo objeto habita en dos categorías diferentes" (palabras de LAWVERE citado en BARR et al., [3]).

Nótese que en este trabajo, entendemos como dualidades a las adjunciones duales, en general; las equivalencias duales se interpretan como casos especiales. Hay diversas teorías de dualidades, basadas en la misma idea (véase, por ejemplo, [3, 5, 12, 17]); algunas de ellas utilizan Algebra Universal, mientras que otras son categoriales.

Nuestra teoría está entre Teoría de Categorías y Álgebra Universal (aunque usamos terminología categorial, sin embargo, todo puede ser interpretado en términos de Álgebra Universal y de los espacios puntíferos generales introducidos en MARUYAMA [15]). A continuación se expone una más detallada comparación con trabajos relacionados.

Nuestra teoría de dualidades nos permite derivar una serie de dualidades concretas, incluyendo dualidades STONE infinitarias, tales como la mencionada dualidad en topología apuntífera y una cierta dualidad entre algebras BOOLE σ-completos y espacios medibles; así como las clásicas dualidades PONTRYAGIN, GELFAND y STONE, finitarias (puesto que la dualidad PONTRYAGIN es una autodualidad, hay que tratarla de manera ligeramente diferente que a las demás, como se indica adelante).

En el presente trabajo nos centramos, *inter alia*, sobre las dualidades entre estructuras apuntíferas y convexas de conjuntos puntíferos. Por un lado, consideramos los retículos SCOTT continuos para representar estructuras convexas apuntíferas, por razones explicadas, en el apartado 3.1. Por otro lado, hay dos tipos de estructuras convexas de conjuntos puntíferos: es decir, espacios de convexidad (ver VAN DE VEL [18] o COPPEL [6]; la definición está dada en Preliminares en Sección 2) y álgebras de la mónada de distribuciones (álgebras baricéntricos; ver FRITZ [8]).

Nuestra teoría general establece que existe una dualidad entre retículos continuos y espacios de convexidad. En contraste, JACOBS [11] muestra una adjunción

dual entre premarcos y álgebras de la mónada de distribución, que puede ser reformulada como una adjunción dual entre retículos continuos y álgebras de la Mónada de distribución. Aunque JACOBS [11] deja abierta la identificación intrínseca de la equivalencia dual inducida, en este trabajo, damos una caracterización intrínseca de la parte de equivalencia dual de la adjunción dual para álgebras de la Mónada de distribuciones.

Resumen Técnico. En nuestra teoría de dualidades, nos basamos principalmente en la Teoría de Categorías concretas como en ADÁMEK et al [1], especialmente para conceptos de topología categorial (ver también, [2, 4]) y álgebra categorial (en particular la teoría de mónadas). Comenzamos con una categoría monádica **C** sobre **Set** (que es equivalente a las variedades posiblemente infinitarias en términos de Álgebra Universal) y con una categoría topológica **D** de cierto tipo y luego asumimos que existe un objeto janusiano $\boldsymbol{\Omega}$ que habita en **C** y en **D**. De paso, introducimos el nuevo concepto de axioma topológico clásico y lo utilizamos para identificar a una cierta clase de las subcategorías completas de una categoría estructurada por funtor, que representan a categorías de espacios puntíferos. Bajo el supuesto de lo que llamamos la condición de armonía, que básicamente, significa que las operaciones algebraicas son continuas en el sentido adecuado, finalmente mostramos que hay una adjunción dual entre **C** y **D**, dada por la determinación de morfismos a $\boldsymbol{\Omega}$.

La adjunción dual se restringe formalmente a una equivalencia dual, mediante el método estándar de tomar los objetos de **C** y **D,** que son fijos con respecto a la unidad y la counidad de la adjunción; por decirlo de forma intuitiva, los objetos cuyos dobleduales son isomorfos a sí mismos. Al mismo tiempo, sin embargo, es a menudo, altamente no trivial, identificar intrínsecamente la parte de la equivalencia dual de una adjunción dual, en una situación concreta, como se observa en PORST-THOLEN [17], "esto puede ser un problema muy difícil y es hasta donde puede llegar la orientación categorial."[2]

Usando métodos especializados, contextuales, en vez del genérico, mencionado anteriormente, damos caracterizaciones intrínsecas de equivalencias duales

[2] Para ejemplificar lo que se quiere decir aquí, considérese la adjunción dual entre marcos y espacios, que se restringe a una equivalencia dual entre marcos y espacios cuyos dobleduales son isomorfos a sí mismos; esto es trivial. Sin embargo, no es trivial en absoluto, notar que esos marcos son exactamente, los marcos con suficientes puntos (es decir, marcos espaciales) y esos espacios son precisamente, los espacios en los que cada conjunto cerrado irreducible no vacío, es la clausura de un punto único (es decir, espacios sobrios).

inducidas por la adjunción dual para espacios de convexidad y por la adjunción dual para álgebras de la mónada de distribuciones. El concepto de politopos desempeña un papel crucial en las caracterizaciones y en la comprensión de cómo los semiretículos involucran estructuras convexas.

Comparación con trabajos relacionados. Nuestra teoría general de dualidades puede ser comparada con otras teorías de dualidades, de la siguiente manera. La teoría CLARK-DAVEY de dualidades naturales [5] se basa en la misma idea de una dualidad inducida por un objeto janusiano. Sin embargo, nuestra teoría es más amplia que la teoría de las dualidades naturales: en el sentido de que, mientras que la teoría de las dualidades naturales se especializa en dualidades para álgebras finitarios, nuestra teoría pretende abarcar álgebras infinitarios también (por ejemplo, marcos, álgebras Boole σ-completos y retículos continuos).

Así, nuestra teoría abarca dualidades tipo STONE, tanto finitarias como infinitarias. La dualidad concreta general JOHNSTONE [12, VI.4] y la adjunción dual natural PORST-THOLEN [17] son más afines a la nuestra.[3] Sin embargo, una diferencia crucial es que nos atengamos a la consideración de dualidades tipo STONE tanto como sea posible. En sus teorías, no hay ninguna preocupación concreta con respecto a equipar al "espectro" de un "álgebra" con una "topología" o cómo dotar a las (colecciones de) "funciones" en un "espacio", con estructura "algebraica".

Consideramos que los procesos de algebrización y topologización son esenciales en la consideración de dualidades tipo STONE. En particular, algebrización y topologización son, sorprendentemente, diferentes procesos en la práctica; a pesar de esto, los dos procesos son tratados en sus teorías, como si fueran paralelos y simétricos, a un nivel de abstracción, que parece a una abstracción excesiva desde nuestra perspectiva de la práctica de las dualidades.

Insistimos enfáticamente en la asimetría entre los dos procesos de algebrización y topologización en la consideración de dualidades tipo STONE y así pretendemos simular los procesos dentro de nuestra teoría, lo que representa la consideración de las dualidades, de una manera adecuada. Para alcanzar esta meta, nuestra

[3] La adjunción dual JOHNSTONE (lema VI.4.2) parece no ser muy rigurosa, porque él se atreve a decir "elegimos no involucrarnos en darle un significado preciso a la palabra 'conmutar' en la última frase" (pág. 254) y el resultado de adjunción dual realmente se basa en la suposición de esa conmutatividad. En este documental, formulamos precisamente el concepto de conmutatividad como lo que llamamos la condición de armonía.

teoría no puede y no debe ser tan general como para simetrizar la asimetría; esta es la razón por qué llamamos a nuestra teoría "moderadamente" general.

En comparación con MARUYAMA [15], donde se discute una teoría de dualidades tipo T_1, basándose en espacios CHU y un concepto genérico de condiciones de clausura, el presente documento tiene como objetivo una teoría de dualidades tipo sobrio; un ejemplo de dualidad tipo T_1 es una (no muy conocida) dualidad entre espacios T_1 y marcos coatomisticos (una sutileza es que los morfismos de marcos deben ser "maximales" para dualizar aplicaciones continuas; ver [15]).

Las dualidades tipo sobrio se basan en espectros primos, mientras que las dualidades tipo T_1 se basan en espectros maximales. Las variedades afines (excepto conjuntos singulares) en $\mathbb{C}^n$, con topologías ZARISKI, son espacios T_1 no-sobrios; son homeomorfas a los espectros maximales de sus anillos de coordenadas. Las primeras y las últimas teorías pueden aplicarse a diferentes tipos de espacios, dando dualidades tipo T_1 y tipo sobrio, respectivamente.

JACOBS [11] y Maruyama [14], independientemente revelaron (diferentes) dualidades para la convexidad (los álgebras de convexidad en [14], se sustituyen en este documento por retículos continuos) y el presente trabajo pretende dilucidar un vínculo preciso entre ellos, que hasta ahora ha sido poco claro. Las dos dualidades resultan para ser esencialmente la misma a pesar de sus diferentes perspectivas.

2. TEORÍA GENERAL DE DUALIDADES

Después de preliminares, primero repasamos topología categorial y luego consideramos una teoría general de dualidades, basada en los conceptos de mónada, (co)categoría estructurada por funtor y (co)axioma topológico. Entre otras cosas, presentamos el nuevo concepto de axioma topológico clásico, con el objetivo de tratar distintos tipos de espacios puntíferos, en forma unificada.

Preliminares. Una categoría concreta es una tupla (**C**, U) con una categoría **C** y un functor fiel U: **C** → **Set**, donde **Set** denota a la categoría de conjuntos y funciones. U se llama el functor subyacente de la categoría concreta. Por razones de simplicidad, a menudo se omite y hace implícito al functor U de una categoría concreta (**C**, U). También podemos definir la noción de categoría concreta sobre una categoría

general. Para una categoría **C** y un funtor fiel U: **C** → ***D***, (**C**, U) se llama una categoría concreta sobre **D**. Una categoría concreta (sobre **Set**) en este documento, se llama en [1], un constructo.
Top denota a la categoría de espacios topológicos y funciones continuas.
Conv denota a la categoría de los espacios de convexidad y aplicaciones que preservan convexidad, siendo un espacio de convexidad una tupla (X, $\mathcal{C}$) tal que X es un conjunto y $\mathcal{C}$ es un subconjunto del conjunto potencia, $\mathbf{2}^X$, de X, que es cerrado con respecto a uniones dirigidas e intersecciones arbitrarias; la aplicación que preserva convexidad es tal que la imagen inversa de cada conjunto convexo con respecto a ella, es convexo (véase VAN DE VEL [18] y COPPEL [6], que desarrollan gran cantidad de geometría convexa basándose en este concepto general de espacio de convexidad).
Meas denota a la categoría de espacios medibles y funciones medibles.
Frm denota a la categoría de los marcos y sus homomorfismos.
ContLat denota a la categoría de retículos continuos y sus homomorfismos (es decir, aplicaciones que preservan a las juntas (joins) dirigidas y a las concurrencias (meets)).
$\mathbf{BA}_\sigma$ denota a la categoría de los álgebras Boole σ-completos con σ-distributividad y sus homomorfismos, donde σ-distributividad significa que las juntas contables se distribuyen sobre concurrencias contables.
$\mathcal{Q}$: $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ → **Set**, denota al funtor contravariante conjunto potencia.

2.1. Una concepción Categorial de Espacios Puntíferos

Aquí presentamos un concepto general del espacio que abarca espacios topológicos, espacios de convexidad y espacios medibles. Nuestra teoría de dualidades se desarrollará en base a ese concepto de espacio (generalizado). Para los fundamentos de categoría (co)estructurada por funtor y (co)axioma topológico, nos referimos a ADÁMEK et al. [1]. Primero repasamos la noción de categoría estructurada por funtor. En lo siguiente, sea (**C**, U: **C** → **Set**) una categoría concreta.

Definición 2.1 ([1])**.** Se define una categoría **Spa**(U) como sigue.

1. Un objeto en **Spa**(U) es una tupla (C, $\mathcal{O}$) donde $C \in$ **C** and $\mathcal{O} \subseteq U(C)$.
2. Un morfismo en **Spa**(U) desde (C, $\mathcal{O}$) a (C', $\mathcal{O}'$) es un morfismo f: $C \to C'$, en **C,** tal que $U(f)[\mathcal{O}] \subseteq \mathcal{O}'$.

Una categoría de la forma **Spa**(U), se llama una categoría estructurada por funtor. Una categoría de la forma $(\mathbf{Spa}(U))^{\mathrm{op}}$ se llama una categoría coestructurada por funtor.

Consideramos a **Spa**(U) como una categoría concreta equipada con un funtor fiel $U \circ F$: **Spa**(U) → **Set**, donde F: **Spa**(U) → **C**, es el funtor olvidadizo que asigna $(C, \mathcal{O})$ a C.

Entonces podemos mostrar lo siguiente (para la definición de la categoría topológica, véase [1]; aunque hay diferentes nociones de una categoría topológica, seguimos la terminología de [1]).

Proposición 2.2 ([1])**.** Tanto la categoría estructurada por funtor **Spa**(U), como la categoría coestructurada por funtor $(\mathbf{Spa}(U))^{\mathrm{op}}$ son topológicas.

El concepto de (co)axioma topológico se define como sigue.

Definición 2.3 ([1])**.** Un axioma topológico en (**C**, U) se define como un morfismo p: $C \to C'$, en **C**, tal que

1. $U(C) = U(C')$;
2. $U(p)$: $U(C) \to U(C)$, es el morfismo identidad sobre $U(C)$.

Un objeto C en **C**, satisface un axioma topológico p: $D \to D'$, en (**C**, U) syss para cada morfismo f: $D \to C$, en **C**, hay un morfismo f': $D' \to C$, en **C** tal que $U(f) = U(f')$.

Un coaxioma topológico se define como un axioma topológico con el siguiente concepto de satisfacción. Un objeto C en **C,** satisface un coaxioma topológico p: $D' \to D$, en (**C**, U) syss para cada morfismo f: $C \to D$, en **C**, hay un morfismo f: $C \to D'$, en **C** tal que $U(f) = U(f')$.

Axiomas y coaxiomas topológicos son lo mismo, pero las correspondientes nociones de satisfacción son duales una de otra. Para ejemplos de (co)axiomas topológicos, nos referimos a [1].

Definición 2.4 ([1])**.** Sea X una clase de (co)axiomas topológicos en una categoría concreta **C**. Una subcategoría completa **D** de **C** es definible por X en **C** syss los objetos en **D**, coinciden con los objetos en **C**, que satisfacen todos los (co)axiomas topológicos en X.

Al igual que en la siguiente proposición, podemos demostrar un análogo topológico del teorema BIRKHOFF en Álgebra Universal (para más detalles, véase teorema 22.3 y corolario 22.4 en [1]).

Proposición 2.5 ([1]). Sea **C** una categoría concreta. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. **C** es de fibras pequeñas y, también, topológica;
2. **C** es isomorfa a una subcategoría de una categoría funtor-estructurada, que es definible por una clase de axiomas topológicos en la categoría funtor-estructurada.
3. **C** puede ser inmersa en una categoría funtor-estructurada como una subcategoría completa que es cerrada respecto a la formación de productos, subobjetos iniciales y objetos indiscretos.

Ahora introducimos el nuevo concepto de (co)axioma topológico clásico, que deberá desempeñar un papel crucial en la formulación de nuestro teorema de adjunción dual.

Definición 2.6. Un axioma topológico clásico en **Spa**(U), es un axioma topológico p: $(C, \mathcal{O}) \to (C', \mathcal{O}')$ in **Spa**(U) tal que

≡ Cada elemento de $\mathcal{O}' \setminus \mathcal{O}$ puede expresarse como una combinación booleana (posiblemente infinitaria) de elementos de $\mathcal{O}$.

Un coaxioma topológico clásico en $(\mathbf{Spa}(U))^{\mathrm{op}}$ se define como un coaxioma topológico p: $(C, \mathcal{O}) \to (C', \mathcal{O}')$ en $(\mathbf{Spa}(U))^{\mathrm{op}}$ tal que

≡ Cada elemento de $\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}'$ puede expresarse como una combinación booleana (posiblemente infinitaria) de elementos de $\mathcal{O}'$.

Sea $\mathcal{Q}$: $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, el functor contravariante conjunto potencia. Cada una de las categorías **Top** de espacios topológicos, **Conv** de espacios de convexidad y **Meas** de espacios medibles, es una subcategoría completa de $(\mathbf{Spa}(\mathcal{Q}))^{\mathrm{op}}$, que es

definible por una clase de coaxiomas topológicos clásicos como en la siguiente proposición, que se puede demostrar detallando las definiciones involucradas.

Proposición 2.7. Top es definible por la siguiente clase de coaxiomas topológicos clásicos en $(\mathbf{Spa}(\mathcal{Q}))^{\mathrm{op}}$:

(i) 1_S: $(S, \{\emptyset, S\}) \to (S, \emptyset)$,

(ii) 1_S: $(S, \{X, Y, X \cap Y\}) \to (S, \{X, Y\})$,

(iii) 1_S: $(S, \mathcal{O} \cup \{\bigcup \mathcal{O}\}) \to (S, \mathcal{O})$

para todos los conjuntos S, todos los subconjuntos X, Y de S y todos los subconjuntos $\mathcal{O}$ del conjunto potencia, $\mathbf{2}^S$,de S.

Conv es definible por la siguiente clase de coaxiomas topológicos clásicos en $(\mathbf{Spa}(\mathcal{Q}))^{\mathrm{op}}$:

(iv) 1_S: $(S, \{\emptyset, S\}) \to (S, \emptyset)$;

(v) $(S, \mathcal{C} \cup \{\bigcap \mathcal{C}\}) \to (S, \mathcal{C})$

(vi) 1_S: $(S, \mathcal{C}' \cup \{\bigcup \mathcal{C}'\}) \to (S, \mathcal{C}')$

para todos los conjuntos S, todos los subconjuntos $\mathcal{C}$ de $\mathbf{2}^S$ y todos los subconjuntos $\mathcal{C}'$ de $\mathbf{2}^S$, que están dirigidos con respecto a la inclusión.

Meas es definible por la siguiente clase de coaxiomas topológicos clásicos en $(\mathbf{Spa}(\mathcal{Q}))^{\mathrm{op}}$:

(i) 1_S: $(S, \{\emptyset, S\}) \to (S, \emptyset)$;

(ii) 1_S: $(S, \{X, X^c\}) \to (S, \{X\})$;

(iii) 1_S: $(S, \mathcal{B} \cup \{S, \bigcup \mathcal{B}\}) \to (S, \mathcal{B})$

para todos los conjuntos S, todos los subconjuntos X de S y todos los subconjuntos $\mathcal{B}$ de $\mathbf{2}^S$, que tienen cardinalidad $\leq \omega$.

Por lo tanto, con el fin de desarrollar una teoría general de dualidades, nos

centramos en una subcategoría completa **Spa**, de $(\mathbf{Spa}(\mathcal{Q}))^{\mathrm{op}}$, que es definible por una clase de coaxiomas topológicos clásicos en $(\mathbf{Spa}(\mathcal{Q}))^{\mathrm{op}}$.

Llamaremos a $(S, \mathcal{O}) \in$ **Spa,** un espacio generalizado y a $\mathcal{O}$ una topología generalizada.

Dado un subconjunto $\mathcal{P}$, de $\mathbf{2}^S$, para algún conjunto S, podemos generar una topología de S, a partir $\mathcal{P}$, que es la más débil topología de S, que contiene a $\mathcal{P}$. También podemos hacer lo mismo en el caso de topología generalizada.

Proposición 2.8. Para un conjunto S, sea $\mathcal{P}$ un subconjunto de $\mathbf{2}^S$. Entonces, hay una topología generalizada más débil, de S, que contiene a $\mathcal{P}$, en **Spa**, es decir, hay $(S, \mathcal{O})$ en **Spa**, tal que, si $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{O}'$ $(S, \mathcal{O}')$ en **Spa**, entonces $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$. En tal caso, decimos que $\mathcal{O}$ es generado en **Spa**, por $\mathcal{P}$.

Demostración. Definir $\mathcal{O} = \bigcap\{\mathcal{X}\,;\, \mathcal{P} \subseteq \mathcal{X}$ y $(S, \mathcal{X}) \in \mathbf{Spa}\}$. Es suficiente demostrar que es una topología generalizada de S, en **Spa**, es decir, $(S, \mathcal{O})$ cumple con la clase de coaxiomas topológicos que definen a **Spa**. Sea p: $(X, \mathcal{B}') \to (X, \mathcal{B})$, uno de esos coaxiomas y sea f: $(S, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{B})$ un morfismo en $(\mathbf{Spa}(\mathcal{Q}))^{\mathrm{op}}$. Para $B \in \mathcal{B}' \setminus \mathcal{B}$, se tiene $f^{-1}(B) \in \mathcal{X}$ para cada $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{X}$ y $(S, \mathcal{X}) \in$ **Spa**, lo que implica que $f^{-1}(B) \in \mathcal{O}$.

2.2. Adjunción Dual vía Condición de Armonía

A lo largo de esta subsección:

- **Alg** denota a una subcategoría completa de la categoría EILENBERG-MOORE de una mónada T en **Set**;
- **Spa** denota a una subcategoría completa de $(\mathbf{Spa}(\mathcal{Q}))^{\mathrm{op}}$ que es definible por una clase de coaxiomas topológicos clásicos en $(\mathbf{Spa}(\mathcal{Q}))^{\mathrm{op}}$.

Nuestro objetivo es establecer una adjunción dual entre **Alg** y **Spa** bajo los dos supuestos:

≡ Hay un objeto $\boldsymbol{\Omega}$ que habita tanto en **Alg** como en **Spa**, es decir, existen $\boldsymbol{\Omega} \in$ **Set** y una asignación estructurante h_{Ω}: $T(\boldsymbol{\Omega}) \to \boldsymbol{\Omega}$, tal que $(\boldsymbol{\Omega}, h_{\Omega}) \in$ **Alg** y con una topología generalizada $\mathcal{O}_{\Omega} \subseteq \mathcal{Q}(\boldsymbol{\Omega})$ tal que $(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{O}_{\Omega}) \in$ **Spa**;

≡ (**Alg**, **Spa**, $\boldsymbol{\Omega}$) satisface la condición de armonía en definición 2.9, abajo.

Intuitivamente, $\boldsymbol{\Omega}$ es un conjunto de valores veritativos y obrará como, un llamado, objeto dualizante (no usamos el término "esquizofrénico", ya que tiene un significado técnico diferente en un determinado contexto). Escribiremos simplemente $\boldsymbol{\Omega}$, en vez de $(\boldsymbol{\Omega}, h_{\Omega})$ o de $(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{O}_{\Omega})$, cuando no haya lugar a confusión.

La condición de armonía, intuitivamente, significa que la estructura algebraica de **Alg** y la estructura geométrica de **Spa** están en armonía vía $\boldsymbol{\Omega}$. La definición precisa se expone a continuación.

Definición 2.9. Se dice que (**Alg**, **Spa**, $\boldsymbol{\Omega}$) satisface la condición de armonía syss para cada $S \in$ **Spa**,

$$(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S, \boldsymbol{\Omega}),\ h_S\colon T(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S, \boldsymbol{\Omega})) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S, \boldsymbol{\Omega}))$$

es un objeto en **Alg**, tal que, para cada $s \in S$, (siendo p_s la proyección correspondiente desde $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S, \boldsymbol{\Omega})$ a $\boldsymbol{\Omega}$), el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
T(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S,\Omega)) \arrow[r, "h_S"'] \arrow[d, "T(p_s)"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S,\Omega) \arrow[d, "p_s"] \\
T(\Omega) \arrow[r, "h_\Omega"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Observación 2.10. El diagrama conmutativo anterior significa que las operaciones inducidas de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S, \boldsymbol{\Omega})$ se definen puntualmente. La condición de armonía consiste entonces, en las dos partes:

(i) $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S, \boldsymbol{\Omega})$ es cerrado con respecto a las operaciones puntuales;

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S, \boldsymbol{\Omega})$ con las operaciones puntuales está en **Alg**.

Aquí, (ii) no es tan importante, por la razón de que podemos desechar la condición (ii) si **Alg** es la categoría EILENBERG-MOORE de una mónada sobre **Set**, en lugar de una subcategoría completa; esto se desprende del hecho de que, puesto que **Alg** es cerrado con respecto a los productos y subálgebras, tenemos un producto $\boldsymbol{\Omega}^S$ en **Alg** y, por tanto, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S, \boldsymbol{\Omega})$ en **Alg** como subálgebra de $\boldsymbol{\Omega}^S$ (obviamente, en realidad basta suponer que **Alg** es una cuasi-variedad o una subcategoría implicacional completa de la categoría EILENBERG-MOORE de una mónada sobre **Set,** en el sentido de [1]). Considerando a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S, \boldsymbol{\Omega})$ como el conjunto de funciones continuas generalizadas en S, (i) anterior, significa que las funciones continuas son cerradas con respecto a las operaciones algebraicas definidas puntualmente, que es la parte más importante de la condición de armonía y por la cual se llama condición de "armonía".

Asumimos la condición de armonía en la parte siguiente de esta subsección.

La estructura geométrica del $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(A, \boldsymbol{\Omega})$ para $A \in \mathbf{Alg}$ puede suministrarse como sigue. Por Proposición 2.8, se dota a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(A, \boldsymbol{\Omega})$ con la topología generalizada (en **Spa**) por

$$\{ \langle a \rangle_O ; a \in A \text{ y } O \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{\Omega}} \}$$

donde

$$\langle a \rangle_O := \{ v \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(A, \boldsymbol{\Omega}); v(a) \in O \}.$$

La estructura algebraica de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S, \boldsymbol{\Omega})$ es proporcionada por h_S ya descrita.

Se puede demostrar que los Hom-funtores contravariantes inducidos $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(-, \boldsymbol{\Omega})$: **Alg** → **Spa** y $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(-, \boldsymbol{\Omega})$: **Spa** → **Alg**, están bien definidos y forman una adjunción dual entre las categorías **Alg** y **Spa**, es decir, tenemos el siguiente teorema de adjunción dual:

Teorema 2.11. Hay una adjunción dual entre **Alg** y **Spa**, dada por funtores contravariantes $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(-, \boldsymbol{\Omega})$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(-, \boldsymbol{\Omega})$. Para ser precisos, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(-, \boldsymbol{\Omega})$ es levoad-

junto de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(-, \boldsymbol{\Omega})^{\mathrm{op}}$.

Se da una prueba del teorema después la siguiente observación.

Observación 2.12. El teorema abarca la adjunción dual, bien conocida, entre los marcos y los espacios topológicos; en este caso, $\boldsymbol{\Omega}$ es el marco de dos elementos con la topología SIERPINSKI y la condición de armonía se resume en el hecho obvio de que la colección de conjuntos abiertos es cerrada con respecto a las operaciones de uniones arbitrarias e intersecciones finitas. La dualidad marco-espacio es así un corolario inmediato del teorema anterior; esto muestra un marcado contraste con las teorías generales de dualidades que requieren trabajo sustancial en derivar resultados concretos. Nuestra teoría es de dualidad en contexto, ideada para ser eficaz en situaciones concretas.

De manera similar, podemos derivar una adjunción dual entre espacios medibles y álgebras BOOLE σ-completas dejando a $\boldsymbol{\Omega}$ ser el álgebra de dos elementos con la topología discreta (de hecho, cualquier álgebra con la topología discreta sirve como $\boldsymbol{\Omega}$), donde los álgebras Boole σ-completos pueden ser vistos como espacios apuntíferos medibles. En Sección 3, discutimos detalladamente una adjunción dual entre retículos continuos y espacios de convexidad.

El caso más simple es la adjunción dual entre **Set** y **Set**, inducida por el conjunto de dos elementos como objeto dualizante $\boldsymbol{\Omega}$ (en realidad cualquier conjunto funciona); en este caso la condición de armonía no es nada. La adjunción discreta STONE entre álgebras Boole y **Set** es bien conocida. El teorema anterior nos da una amplia generalización de ello: hay una adjunción dual entre cada categoría algebraica (o variedad en términos de Álgebra Universal) y **Set**, inducida por cada $\boldsymbol{\Omega} \in$ **Alg**; también este caso la condición de armonía no es nada, gracias a la naturaleza discreta de **Set** (es decir, el conjunto de todas las funciones $f\colon S \to \boldsymbol{\Omega}$, es cerrado con respecto a operaciones arbitrarias en él).

Además, el teorema anterior abarca la adjunción topológica STONE entre álgebras BOOLE y espacios topológicos, sus diversas extensiones para retículos distributivos, MV-álgebras (en este caso [0, 1] funciona como un objeto dualizante) y álgebras de lógicas subestructurales y la adjunción GELFAND entre C*-álgebras conmutativos con unidades 1 y espacios topológicos; nótese que la categoría de C*-

álgebras conmutativos con 1, es monádica sobre **Set** (véase [16]). Cada adjunción dual, automáticamente, se reduce a una equivalencia dual como se explica más adelante y el método se puede aplicar a todas las adjunciones duales antes mencionadas, para obtener equivalencias duales (aunque, a menudo, no es fácil dar caracterizaciones intrínsecas de las equivalencias duales resultantes como ya se discutió en Sección 1).

Consideremos a la auto-dualidad PONTRYAGIN para grupos abelianos localmente compactos. Aunque por razones de simplicidad no hemos asumido una estructura topológica en **Alg** y una estructura algebraica en **Spa** en nuestra configuración, esto se hace pertinente con el fin de tratar la dualidad PONTRYAGIN dentro de nuestro contexto. Es realmente sencillo: comenzamos con **Alg** topológica y **Spa** algebraica y asumimos dos condiciones de armonía y la siguiente demostración se puede adaptar fácilmente, a esa situación (sólo hay que repetir los mismos argumentos para las estructuras adicionales en **Alg** y **Spa**).

2.2.1. Demostración del Teorema de Adjunción Dual

Primero mostraremos que los dos Hom-funtores están bien definidos.

Lema 2.13. El functor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(-, \boldsymbol{\Omega})$: **Alg** → **Spa** está bien definido.

Demostración. La parte del objeto está bien definida por la Proposición 2.8. Demostraremos que la parte de morfismo está bien definida. Sea f: $A \to A'$, un morfismo en **Alg**. Probaremos que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(f, \boldsymbol{\Omega})$: $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(A', \boldsymbol{\Omega}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(A, \boldsymbol{\Omega})$ es un morfismo en **Spa**.

Para $a \in A$ y $O \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{\Omega}}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(f, \boldsymbol{\Omega})^{-1}(\langle a\rangle_O) &= \{v \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(A', \boldsymbol{\Omega}); \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(f, \boldsymbol{\Omega})(v) \text{ en } \langle a\rangle_O\}\\ &= \{v \text{ en } \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(A', \boldsymbol{\Omega}); v \circ f(a) \in O\}\\ &= \langle f(a)\rangle_O.\end{aligned}$$

Puesto que **Spa** es definible por una clase coaxiomas topológicos de tipo BOOLE y puesto que las operaciones conjuntistas BOOLE son preservadas por la función imagen inversa f^{-1}, esto implica que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(f, \boldsymbol{\Omega})$ es un morfismo en **Spa**.

Lema 2.14. El functor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}$ (-,$\boldsymbol{\Omega}$): **Spa** → **Alg** está bien definido.

Demostración. La parte del objeto está bien definida por la condición de armonía (o puede ser verificada como en (i) o (ii) en observación 2.10 si empleamos a cualquiera de las otras dos definiciones de Alg).

Demostraremos que la parte del morfismo está bien definida. Sea f: $S \to S'$ ser un morfismo en **Spa**. Demostraremos que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(f, \boldsymbol{\Omega})$: $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S', \boldsymbol{\Omega}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S, \boldsymbol{\Omega})$ es un morfismo en **Alg**, es decir, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
T(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S',\Omega)) \arrow[r, "h_{S'}"] \arrow[d, "T(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(f,\Omega))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S',\Omega) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(f,\Omega)"] \\
T(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S,\Omega)) \arrow[r, "h_S"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S,\Omega)
\end{tikzcd}$$

Por la condición de armonía aplicada a S (o la conmutatividad del cuadrado inferior en la figura de abajo), esto es equivalente a la conmutatividad del cuadrado exterior en el siguiente diagrama para cada $s \in S$:

$$\begin{tikzcd}
T(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S',\Omega)) \arrow[r, "h_{S'}"] \arrow[d, "T(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(f,\Omega))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S',\Omega) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(f,\Omega)"] \\
T(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S,\Omega)) \arrow[r, "h_S"'] \arrow[d, "T(p_s)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S,\Omega) \arrow[d, "p_s"] \\
T(\Omega) \arrow[r, "h_\Omega"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

donde, recuérdese, p_s denota la proyección correspondiente. Por la condición de armonía aplicada a S', tenemos: para cada $s' \in S'$, $h_{\boldsymbol{\Omega}} \circ T(p_{s'}) = p_{s'} \circ h_{S'}$. Poniendo $s' = f(s)$ en esta ecuación, tenemos $h_{\boldsymbol{\Omega}} \circ T(p_{f(s)}) = p_{f(s)} \circ h_{S'}$. Es sencillo verificar que

$p_{f(s)} = p_s \circ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(f, \boldsymbol{\Omega})$. Así obtenemos $h_{\boldsymbol{\Omega}} \circ T(p_s \circ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}) = p_s \circ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(f, \boldsymbol{\Omega}) \circ h_{S'}$. Puesto que T es un functor, esto produce la conmutatividad del cuadrado exterior de arriba. Por lo tanto, la parte de morfismo está bien definida.///

Ahora definiremos dos transformaciones naturales con el fin de mostrar la adjunción dual.

Definición 2.15. Se definen transformaciones naturales

$$\boldsymbol{\Phi}: 1_{\mathbf{Alg}} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(-, \boldsymbol{\Omega}), \boldsymbol{\Omega})$$

y

$$\boldsymbol{\Psi}: 1_{\mathbf{Spa}} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(-, \boldsymbol{\Omega}), \boldsymbol{\Omega})$$

como sigue. Para $A \in \mathbf{Alg}$, $\boldsymbol{\Phi}_A$ viene dado por $\boldsymbol{\Phi}_A(a)(v) = v(a)$ donde $a \in A$ y $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(A, \boldsymbol{\Omega})$. Para $S \in \mathrm{Spa}$, $\boldsymbol{\Psi}_S$ viene dado por $\boldsymbol{\Psi}_S(f)(x) = f(x)$ donde $x \in S$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S, \boldsymbol{\Omega})$.

Tenemos que demostrar que $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Psi}$ están bien definidas.

Lema 2.16. Para A en **Alg** y $a \in A$, $\boldsymbol{\Phi}_A(a)$ es un morfismo en **Spa**.

Demostración. Para $O \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{\Omega}}$, se tiene

$$\boldsymbol{\Phi}_A(a)^{-1}(O) = \{v \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(A, \boldsymbol{\Omega}); \boldsymbol{\Phi}_A(a)(v) \in O\} = \langle a \rangle_O.$$

Por tanto, $\boldsymbol{\Phi}_A(a)$ es un morfismo en **Spa**.///

Lema 2.17. Para S en **Spa** y $x \in S$, $\boldsymbol{\Psi}_S(a)$ es un morfismo en **Alg**.

Demostración. Este lema se deduce inmediatamente, de la condición de armonía aplicada a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S, \boldsymbol{\Omega})$ junto con el hecho de que $p_x = \boldsymbol{\Psi}_S(x)$.///

También tenemos que demostrar que $\boldsymbol{\Phi}_A$ es un morfismo en **Alg** y que $\boldsymbol{\Psi}_S$ es

un morfismo en **Spa**.

Lema 2.18. Para A en **Alg**, $\boldsymbol{\Psi}_A$ es un morfismo en **Alg**.

Demostración. Sea h_A: $T(A) \to A$, la asignación de estructura A. Para simplificar la descripción, denotemos por $\mathrm{H}(A)$ a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(A, \boldsymbol{\Omega})$ y por $\mathrm{H} \circ \mathrm{H}(A)$ a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(A, \boldsymbol{\Omega}), \boldsymbol{\Omega})$. Para probar la conmutatividad del cuadrado superior en el siguiente diagrama, es suficiente probar que es conmutativo para cada $v \in \mathrm{H}(A)$, ya que el cuadrado inferior es conmutativo por la condición de armonía aplicada a $\mathrm{H} \circ \mathrm{H}(A)$.

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "h_A"] \arrow[d, "T(\Phi_A)"'] & A \arrow[d, "\Phi_A"] \\
T(\mathrm{H} \circ \mathrm{H}(A)) \arrow[r, "h_{\mathrm{H}(A)}"'] \arrow[d, "T(p_v)"'] & \mathrm{H} \circ \mathrm{H}(A) \arrow[d, "p_v"] \\
T(\Omega) \arrow[r, "h_\Omega"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Es sencillo verificar que $p_v \circ \boldsymbol{\Phi}_A = v$. Así que basta probar que $v \circ h_A = h_{\boldsymbol{\Omega}} \circ T(v)$. Esto no es más que el hecho de que $v \in \mathrm{H}(A)$.///

Lema 2.19. Para S en **Spa** $\boldsymbol{\Psi}_S$ es un morfismo en **Spa**.

Demostración. Para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(-, \boldsymbol{\Omega}), \boldsymbol{\Omega})$ and $O \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{\Omega}}$, se tiene

$$\boldsymbol{\Psi}_S^{-1}(\langle f \rangle_O) = \{x \in S; \boldsymbol{\Psi}_S(x) \in \langle f \rangle_O\} = f^{-1}(O).$$

Puesto que **Spa** es definible por una clase de coaxiomas topológicos tipo BOOLE y puesto que las operaciones booleanas de conjuntos son preservadas por la función imagen inversa $\boldsymbol{\Psi}^{-1}$, esto implica que $\boldsymbol{\Psi}_S$ es un morfismo en **Spa**.///

Ahora es sencillo verificar que $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Psi}$, en realidad, son transformaciones na-

turales.

Finalmente damos una prueba del teorema de adjunción dual, Teorema 2.11: $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(\text{-}, \boldsymbol{\Omega})$ es levoadjunto a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(\text{-}, \boldsymbol{\Omega})^{\mathrm{op}}$, con $\boldsymbol{\Phi}$ la unidad y $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{op}}$ la counidad de la adjunción.

Demostración. Sean $A \in \mathbf{Alg}$ y $S \in \mathbf{Spa}$. Es suficiente demostrar que, para cada f: $A \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S, \boldsymbol{\Omega})$ en **Alg**, hay un único g: $S \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(A, \boldsymbol{\Omega})$, en **Spa** tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H} \circ \mathrm{H}(A) \arrow[r, "H(g)"] & H(S) \\ A \arrow[u, "\Phi_A"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\mathrm{H}(S)$ denota a $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Spa}}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{\Omega})$, $\mathrm{H}(g)$ denota a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(g, \boldsymbol{\Omega})$, $\mathrm{H}(A)$ denota a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(A, \boldsymbol{\Omega})$ y $\mathrm{H} \circ \mathrm{H}(A)$ denota a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(A, \boldsymbol{\Omega}), \boldsymbol{\Omega})$. Primero mostraremos que existe tal g. Definimos g: $S \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(A, \boldsymbol{\Omega})$, por $g(x)(a) = \boldsymbol{\Psi}_S(x)(f(a))$ donde $x \in S$ y $a \in A$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(g, \boldsymbol{\Omega}) \circ \boldsymbol{\Phi}_A(a))(x) &= (\boldsymbol{\Phi}_A(a) \circ g)(x) = g(x)(a) \\ &= \boldsymbol{\Psi}_S(x)(f(a)) = f(a)(x).\end{aligned}$$

Así, el diagrama de arriba conmuta para este g. Queda por demostrar que g es un morfismo en **Spa**. Para a en A y $O \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{\Omega}}$, tenemos

$$\begin{aligned} g^{-1}(\langle a \rangle_O) &= \{x \in S;\ g(x) \in \langle a \rangle_O\} \\ &= \{x \in S;\ g(x)(a) \in O\} \\ &= \{x \in S;\ f(a)(x) \in O\} \\ &= f(a)^{-1}(O). \end{aligned}$$

Puesto que $f(a) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(S, \boldsymbol{\Omega})$ y **Spa** es definible por una clase de coaxiomas topológicos tipo BOOLE, esto implica que g es un morfismo en **Spa**.

Finalmente, para demostrar la unicidad de tal g, supongamos que g': $S \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}}(A,\ \boldsymbol{\Omega})$, en **Spa** hace que el diagrama de arriba sea conmutativo. Entonces tenemos

$$f(a)(x) = (\mathrm{Hom}_{\mathbf{Spa}}(g',\ \boldsymbol{\Omega}) \circ \boldsymbol{\Phi}_A(a))(x) = (\boldsymbol{\Phi}_A(a) \circ g')(x) = g'(x)(a).$$

Puesto que también tenemos $f(a)(x) = g(x)(a)$, se sigue que $g = g'$. Esto completa la prueba.///

2.2.2. Derivación de equivalencia a partir de la adjunción

Repasaremos brevemente métodos estándar para derivar una equivalencia (dual) de una adjunción (dual).

Supongamos que F: $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ es levoadjunto de G: $\mathbf{D} \to \mathbf{C}$, con $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Psi}$ la unidad y la counidad de la adjunción, respectivamente.

Definición 2.20. $\mathrm{Fix}(\mathbf{C})$ es una subcategoría completa de **C,** tal que $C \in \mathrm{Fix}(\mathbf{C})$ syss $\boldsymbol{\Phi}_C$ es un isomorfismo en **C**. $\mathrm{Fix}(\mathbf{D})$ es una subcategoría completa de **D** tal que $D \in \mathrm{Fix}(\mathbf{D})$ iff $\boldsymbol{\Psi}_D$ es un isomorfismo en **D**.

Proposición 2.21. $\mathrm{Fix}(\mathbf{C})$ y $\mathrm{Fix}(\mathbf{D})$ son categorialmente equivalentes. Por otra parte, esta equivalencia es la máximal que puede derivarse de la adjunción entre **C** y **D**.

Si se requiere una condición sobre la adjunción original, tenemos otra manera de describir Fix(**C**) y Fix(**D**). Primero introducimos las siguientes anotaciones.

Definición 2.22. $\mathrm{Img}(\mathbf{C})$ es una subcategoría completa de **C** tal que $C \in \mathrm{Img}(\mathbf{C})$ syss $C \simeq G(D)$ para algún $D \in \mathbf{D}$. Img(**D**) es una subcategoría completa de **D** tal que $D \in$ Img(**D**) syss $D \simeq F(C)$ para algún $C \in \mathbf{C}$.

Proposición 2.23. Sean $F(C) \in$ Fix(**D**) para cada $C \in \mathbf{C}$ y $G(D) \in$ Fix(**C**) para cada D $\in$ **D**. Entonces $\mathrm{Img}(\mathbf{C}) = \mathrm{Fix}(\mathbf{C})$ e $\mathrm{Img}(\mathbf{D}) = \mathrm{Fix}(\mathbf{D})$. Por lo tanto, $\mathrm{Img}(\mathbf{C})$ e

$\mathrm{Img}(\mathbf{D})$ son categorialmente equivalentes.

Nótese que la suposición anterior queda satisfecha en el caso de la dualidad entre marcos espaciales y espacios topológicos sobrios y también en el caso de una dualidad entre retículos continuos espaciales y espacios de convexidad sobrios, que se presenta a continuación.

3. DUALIDAD DOMINIO-CONVEXIDAD

En esta sección, aplicamos la teoría general para obtener una adjunción dual entre retículos continuos y espacios de convexidad y luego refinar la adjunción dual en una doble equivalencia entre retículos algebraicos y espacios de convexidad sobrios, que permita caracterizar la parte de equivalencia dual de la adjunción JACOBS dual para álgebras de la mónada de distribuciones, con la ayuda de la noción de idempotencia para esos álgebras.

3.1 Dualidad por Teoría de Convexidad para Retículos SCOTT Continuos

El concepto de retículo continuo generalmente se define en términos de relaciones de por debajo: es decir, un retículo continuo es un retículo completo en el que cada elemento se puede expresar como junta de los elementos que están por debajo de él. Desde nuestra perspectiva de la dualidad entre los espacios apuntíferos y los púntíferos, otra caracterización de retículos continuos es útil:

Proposición 3.1 (Teorema I-2.7 en [7])). Un conjuntopo es un retículo continuo syss satisface lo siguiente: (i) tiene juntas dirigidas que incluyen a 0; (ii) tiene concurrencias dirigidas que incluyen a 1; (iii) las concurrencias arbitrarias se distribuyen con respecto a las juntas dirigidas.

La proposición anterior sugiere que los retículos continuos pueden ser considerados como espacios de convexidad apuntíferos. Recordemos que un espacio de convexidad es una tupla $(S, \mathcal{C})$ donde S es un conjunto y $\mathcal{C}$ es un subconjunto de $\mathcal{P}(S)$, cerrado con respecto a uniones dirigidas e intersecciones arbitrarias; $\mathcal{C}$ se llama la convexidad del espacio. Muchos teoremas en geometría convexa, como los teoremas tipo HELLY (véase [9]), pueden ser tratados en términos de espacios de convexidad, con condiciones adecuadas (véase [6, 18]).

Así como un marco es una abstracción apuntífera de un espacio topológico, un retículo continuo es una abstracción apuntífera de un espacio de convexidad; esto es lo que nos dice la proposición anterior. Tenga en cuenta que el punto 1 anterior, es matemáticamente redundante, pero sugiere la definición de un homomor-

fismo, que preserva a las juntas dirigidas y a las concurrencias arbitrarias.

Esta idea a su vez, sugiere que existe una dualidad entre **ContLat** y **Conv**. Para aplicar nuestra teoría de dualidad, recordemos que los retículos continuos son los álgebras de la Mónada de filtros sobre **Set** (véase [7]) y que los espacios de convexidad se pueden expresar como una subcategoría completa de $(\mathbf{Spa}(\mathcal{Q}))^{\mathrm{op}}$ que es definible por una clase de coaxiomas topológicos clásicos.

Podemos ver a **2** (es decir, $\{0, 1\}$) como un retículo continuo por su ordenamiento natural $0 < 1$ y también, como un espacio de convexidad, dotándolo de la convexidad SIERPINSKI $\{\emptyset, \{1\}, \mathbf{2}\}$. Para mostrar que determinar morfismos a **2,** da una adjunción dual entre retículos continuos y espacios de convexidad, es suficiente verificar la condición de armonía. Esto es inmediato porque la condición de armonía en este caso se reduce al hecho de que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Conv}}(S, \mathbf{2})$, que puede verse como el conjunto de conjuntos convexos en S, forma un retículo continuo. Así, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2. Hay una adjunción dual entre **ContLat** y **Conv**, dada por funtores contravariantes $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Conv}}(-, \mathbf{2})$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ContLat}}(-, \mathbf{2})$.

Podemos refinar formalmente, la adjunción dual en una equivalencia dual, en la manera canónica ya discutida. Sin embargo, es no trivial, encontrar una descripción intrínseca de la equivalencia dual inducida. Lo lograremos en lo que sigue. Aunque no tenemos espacio para dar las pruebas en esta subsección, las pruebas pertinentes se encuentran en MARUYAMA [14]; tenga en cuenta que no provoca ningún cambio fundamental en las pruebas, reemplazar álgebras de convexidad en [14], por retículos continuos.

$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Conv}}(X, \mathbf{2})$ puede ser visto como la colección de conjuntos convexos en X, por lo que escribiremos Conv(-) en vez de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Conv}}(-, \mathbf{2})$. Asimismo, escribiremos Spec(-) en vez de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ContLat}}(-, \mathbf{2})$, por la razón que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ContLat}}(L, \mathbf{2})$ puede ser visto como la colección de filtros SCOTT-abiertos, de L, completos con respecto a concurrencias; donde la compleción con respecto a concurrencias se define como la cerradura con respecto a concurrencias arbitrarias.

Definición 3.3. Denotar por $\boldsymbol{\Phi}$: $\mathrm{Id}_{\mathbf{ContLat}} \to \mathrm{Conv} \circ \mathrm{Spec}$ y $\boldsymbol{\Psi}$: $\mathrm{Id}_{\mathbf{Conv}} \to \mathrm{Spec} \circ \mathrm{Conv}$ a la unidad y a la counidad de la adjunción dual entre **ContLat** y **Conv**, respectivamente.

La cuestión es cuándo la unidad $\boldsymbol{\Phi}$ y la counidad $\boldsymbol{\Psi}$ dan isomorfismos.

Definimos la noción de espacialidad de retículos continuos como la existencia de suficientes filtros SCOTT-abiertos, completos con respecto a concurrencias:

Definición 3.4. Un retículo continuo L es espacial syss para cada $a,\ b \in L$ con $a \nleq b$, existe un filtro P Scott-abierto, completo con respecto a concurrencias, de L, tal que $\mathrm{a} \in P$ y $b \notin \mathrm{P}$.

La siguiente proposición es crucial.

Proposición 3.5. Un retículo continuo L es espacial syss $\boldsymbol{\Phi}_L$: $L \to \mathrm{Conv} \circ \mathrm{Spec}(L)$ es un isomorfismo.

La espacialidad se caracteriza como algebraicidad.

Proposición 3.6. Sea L un retículo continuo. Entonces, L es espacial syss L es algebraico (es decir, cada elemento se puede expresar como la junta de un conjunto dirigido de elementos compactos).

Los espacios de convexidad sobrios se definen en términos de politopos, lo cual tiene sentido en los espacios de convexidad generales, como sigue.

Definición 3.7. La cápsula convexa $\mathrm{ch}(Y)$ de un subconjunto Y de un espacio de convexidad $(X, \mathcal{C})$ se define como $\bigcap\{Z;\ Z \in \mathcal{C}$ y $Y \subseteq Z\}$. Entonces, un politopo en un espacio de convexidad, se define como la cápsula convexa de un conjunto finito de puntos.

Un conjunto convexo C en $\mathcal{C}$, se dice que es dirigido-irreducible syss $C = \bigcup_{i \in I} C_i$ para un subconjunto dirigido $\{C_i;\ i \in I\}$, de $\mathcal{C}$ implica que existe $j \in I$ tal que

$C = C_j$.

Proposición. 3.8. Un subconjunto convexo de un espacio de convexidad es dirigido-irreducible syss es un politopo.

Los politopos forman una base canónica para cada convexidad (si asumimos el axioma de elección):

Proposición 3.9. Cada conjunto convexo en un espacio de convexidad se puede expresar como la unión de un conjunto dirigido de Politopos.

La sobriedad se define como sigue (politopos puede reemplazarse por conjuntos dirigidos-irreducibles).

Definición 3.10. Un espacio de convexidad es sobrio syss cada politopo en él, es la cápsula convexa de un único punto.

En contraste con la primera impresión, la sobriedad es un concepto natural. Veamos ejemplos.

Definición 3.11. Dado un espacio de convexidad S, podemos equipar el conjunto de politopos en S con la convexidad ideal: es decir, un conjunto convexo es un ideal del retículo de politopos.

El espacio de politopos entonces es sobrio y da la sobrificacion del espacio original. El espacio de politopos corresponde al espacio de variedades irreducibles en geometría algebraica; dicho de otra manera, "un único punto" por encima, juega, en geometría convexa, el papel de "un punto genérico" en términos de geometría algebraica.

En Geometría Algebraica, se sobrifica a una variedad agregando variedades irreducibles como puntos genéricos adicionales (en otras palabras, el espectro del anillo de coordenadas de una variedad principal da la sobrificación). En geometría convexa se sobrifica a un espacio mediante la adición de politopos como puntos genéricos (en otras palabras, el espectro principal del retículo de conjuntos convexos, da la sobrificación). Recordar aquí que los politopos pueden caracterizarse por irreductibilidad dirigida.

Proposición 3.12. Para un espacio de convexidad S, S es sobrio syss Ψ_S es un iso-

morfismo en **Conv**.

Sean **SobConv** la categoría de espacios sobrios y aplicaciones que preservan la convexidad, **AlgLat** la categoría de retículos algebraicos y homomorfismos y **SpaContLat** la categoría de retículos espaciales continuos y homomorfismos. Finalmente obtenemos el siguiente

Teorema 3.13. **AlgLat** (= **SpaContLat**) y **SobConv** son dualmente equivalentes.

3.2 Dualidad JACOBS para Álgebras de la Mónada de Distribuciones

Sea $\mathcal{D}$: **Set** → **Set**, la mónada de distribuciones sobre **Set**. La parte de objeto viene definida por:

$$\mathcal{D}(X) := \{f\colon X \to [0, 1];\ \sum_{x \in X} f(x) = 1 \text{ y } f \text{ tiene soporte finito}\}.$$

La parte de morfismo viene definida por:

$$\mathcal{D}(f\colon X \to Y)(g\colon X \to [0, 1])(y) = \sum_{f(x) = y} g(x).$$

Como en [8, 11], los álgebras de $\mathcal{D}$ pueden ser descritos concretamente, como álgebras baricéntricos, que básicamente son conjuntos con operaciones de combinación convexas; la definición precisa se expone a continuación.

JACOBS [11] muestra una adjunción dual entre premarcos y álgebras de $\mathcal{D}$. Primero observamos que podemos restringir la categoría de premarcos a la categoría de retículos continuos, puesto que el dual de un álgebra de $\mathcal{D}$ (es decir, PF(X) más abajo) es en realidad, un retículo continuo. Y entonces se caracteriza la equivalencia dual inducida mediante el concepto de álgebras idempotentes de $\mathcal{D}$.

Definición 3.14. Un $\mathcal{D}$-álgebra (álgebra baricéntrico) es un conjunto X con una función ternaria

$$\langle -, -, - \rangle\colon [0, 1] \times X \times X \to X$$

tal que

1. $\langle r, x, x \rangle = x$;
2. $\langle 0, x, y \rangle = y$;
3. $\langle r, x, y \rangle = \langle 1 - r, y, x \rangle$;

4. $\langle r,\, x,\, \langle s,\, y,\, z\rangle\rangle = \langle r + (1 - r)s,\, \langle r/(r + (1 - r)s),\, x,\, y\rangle,\, z\rangle$.

Los morfismos de $\mathcal{D}$-álgebras son aplicaciones afines; es decir, aplicaciones f que preservan a $\langle$-,-, -$\rangle$ de la siguiente manera:

$$f\langle\langle r,\, x,\, y\rangle\rangle = \langle r,\, f(x),\, f(y)\rangle.$$

Alg($\mathcal{D}$) denota a la categoría de $\mathcal{D}$-álgebras y aplicaciones afines.

Alg($\mathcal{D}$) en el sentido antedicho es equivalente a la categoría EILENBERG-MOORE de la mónada de distribuciones (véase [11, 8]).

Los semiretículos pueden considerarse como $\mathcal{D}$-álgebras, de forma canónica.

Proposición 3.15. Cada semirretículo por concurrencias L forma un $\mathcal{D}$-álgebra: definir $\langle$-, -, -$\rangle$: $[0,\, 1] \times L \times L \to L$ por

$$\langle r,\, x,\, y\rangle = x \wedge y,$$

si $r \in (0,\, 1)$; de lo contrario, definir $\langle r,\, x,\, y\rangle = x$ si $r = 1$ y $\langle r,\, x,\, y\rangle = y$ si $r = 0$. Del mismo modo, Cada semirretículo por juntas forma un $\mathcal{D}$-álgebra (reemplazando a $\wedge$ como arriba, por $\vee$).

En lo siguiente, suponemos que cada semirretículo está equipado con la estructura convexa definida en la proposición anterior. Repasamos los siguientes conceptos, de JACOBS [11].

Definición 3.16. Para un $\mathcal{D}$-álgebra (X, $\langle$-, -, -$\rangle$), un subconjunto Y de X se define como

- un subálgebra syss $y_1,\, y_2 \in Y$ implica que, para cada $r \in [0,\, 1]$, $\langle r,\, y_1,\, y_2\rangle \in Y$;
- un filtro syss $\langle r,\, x_1,\, x_2\rangle \in Y$ y $r = 0, 1$, conjuntamente, implica que $x_1,\, x_2 \in Y$;
- un filtro primo syss es un subálgebra y un filtro.

Definamos un funtor contravariante

$$\mathrm{PF}(\text{-})\colon \mathbf{Alg}(\quad)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{ContLat}.$$

Para un $\mathcal{D}$-álgebra X, PF(X) es el retículo de filtros primos de X. Para una aplicación afín f, ponemos PF(f) = f^{-1}.

Definimos un funtor contravariante

$$\mathrm{Sp}(\text{-})\colon \mathbf{ContLat}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Alg}(\mathrm{D}),$$

como sigue. Para un retículo continuo L, definir $\mathrm{Sp}(L)$ como el conjunto de filtros en L, Scott-abiertos, completos con respecto a concurrencias, dotado de una estructura de semirretículo por intersecciones finitas y, por tanto, con una estructura de $\mathcal{D}$-álgebra (ver Proposición 3.15). Para un homomorfismo f, ponemos Sp(f) = f^{-1}.

Puesto que $\mathrm{PF}(X)$ siempre forma un retículo continuo, los métodos de JACOBS [11] funcionan totalmente en la situación actual, dando así el siguiente teorema de adjunción dual.

Teorema 3.17. Hay una adjunción dual entre **ContLat** y **Alg**($\mathcal{D}$), dada por

$$\mathrm{Sp}\colon \mathbf{ContLat}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Alg}(\mathcal{D}) \quad \text{y} \quad \mathrm{PF}\colon \mathbf{Alg}(\mathcal{D})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{ContLat}.$$

A continuación, tenemos como objetivo identificar la equivalencia dual inducida por la adjunción dual anterior. Con este fin, se introduce el concepto de $\mathcal{D}$-álgebras idempotentes.

Definición 3.18. Un $\mathcal{D}$-álgebra (X, $\langle$-,-, -$\rangle$ es idempotente syss para cada $x,\ y \in X$ y para cada $r,\ s \in (0,\ 1)$ (es decir, el intervalo unidad abierto),

$$\langle r,\ x,\ y\rangle = \langle s,\ x,\ y\rangle.$$

Es fácil ver lo siguiente.

Proposición 3.19. Cada semirretículo por concurrencias y cada semirretículo por juntas forma un $\mathcal{D}$-álgebra idempotente. En particular, $\mathrm{Sp}(L)$ es un $\mathcal{D}$-álgebra idempotente.

Proposición 3.20. Para un $\mathcal{D}$-álgebra X, $\mathrm{PF}(X)$ es un retículo algebraico.

Demostración. Esto se desprende del hecho de que $\mathrm{PF}(X)$ es un subálgebra del retículo algebraico del conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$ con respecto a las uniones dirigidas e intersecciones arbitrarias y que la clase de los retículos algebraicos es cerrada con respecto a subálgebras.///

Proposición 3.21. Si L es un retículo algebraico, entonces L es isomorfo a PF ∘ Sp(L).

Demostración. En primer lugar, $\mathrm{Sp}(L)$ puede considerarse como $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ContLat}}(L,\ \mathbf{2})$ mediante la identificación de subconjuntos con sus funciones características. Asimismo, $\mathrm{PF} \circ \mathrm{Sp(L)}$ puede ser considerado como $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Conv}}(\mathrm{Sp}(L),\ \mathbf{2})$. Entonces, la dualidad previamente obtenida, entre retículos algebraicos y espacios de convexidad sobrios, inmediatamente nos dice que L es en efecto isomorfo a $\mathrm{PF} \circ \mathrm{Sp}(L)$.///

Proposición 3.22. Si X es un $\mathcal{D}$-álgebra idempotente, entonces X es isomorfo a Sp ∘ PF (X).

Demostración. Para $x,\ y \in$ X, definir $y \wedge x$ por $\langle 1/2,\ x,\ y\rangle$. Por idempotencia, X con $\wedge$ forma un semirretículo por concurrencia. Puesto que por Proposición 3.19, $\mathrm{Sp} \circ \mathrm{PF(X)}$ es un $\mathcal{D}$-álgebra idempotente, $\mathrm{Sp} \circ \mathrm{PF}(X)$ también forma un semirretículo por concurrencia, de la misma manera. Se tiene que si los semiretículos por concurrencia de dos $\mathcal{D}$-álgebras idempotentes son isomorfos, entonces los $\mathcal{D}$-álgebras originales también son isomorfos. Por lo tanto, es suficiente demostrar que X es isomorfo a Sp ∘ PF(X), como semirretículo por concurrencia.

Ahora, X a su vez, puede ser equipado con la convexidad ideal: los conjuntos convexos se definen como los ideales de X. Así, X es un espacio de convexidad sobrio (con los conjuntos convexos de X formando un retículo algebraico). Los politopos de X, denotado $\mathrm{Poly}(X)$, forman un semirretículo por juntas: para dos politopos ch(X) y ch(Y) con X, Y finitos, su junta se define como ch($X \cup Y$), donde ch(-),

recordemos, denota la operación capsula convexa. Y, así, $\mathrm{Poly}(X)^{\mathrm{op}}$, el orden dual del semirretículo por juntas de politopos Poly(X), es isomorfo a X como semirretículo por concurrencias; esto se da para cada semirretículo por juntas X, por una equivalencia entre las categorías de los semiretículos por juntas y de los espacios de convexidad sobrios como se apunta en MARUYAMA [14]. Dado que PF(X) es el retículo de ideales de X, resulta que $\mathrm{Sp} \circ \mathrm{PF}(X)$ es el semirretículo por concurrencias de los elementos compactos (dirigidos-irreducibles) del retículo ideal, el cual es precisamente $\mathrm{Poly(X)}^{\mathrm{op}}$ (ver Proposición 3.8); Recordando que $\mathrm{Poly(X)}^{\mathrm{op}}$ es isomorfo a X, concluye la demostración.///

Denotemos por **IdemAlg**$(\mathcal{D})$ a la categoría de $\mathcal{D}$-álgebras idempotentes. Las proposiciones 3.21 y 3.22, arriba, finalmente nos dan el siguiente teorema que identifica la parte de equivalencia dual de la adjunción dual entre **ContLat** y **Alg**($\mathcal{D}$).

Teorema 3.23. La adjunción dual entre **ContLat** y **Alg**($\mathcal{D}$) se restringe a una doble equivalencia entre **AlgLat** y **IdemAlg**($\mathcal{D}$). Esta es la más grande equivalencia dual inducida por la adjunción dual.

Puesto que las recíprocas de las proposiciones 3.21 y 3.22 son válidas por las proposiciones 3.19 y 3.20, respectivamente, el teorema anterior da la equivalencia dual maximal que puede resultar de restringir la adjunción dual entre **ContLat** y **Alg**($\mathcal{D}$). Aunque no tenemos espacio para trabajar en detalles, la dualidad de arriba, está estrechamente relacionada con la clásica dualidad HOFMANN-MISLOVE-STRALKA [10]; De hecho, la dualidad anterior revela un aspecto teórico-convexital de la dualidad HOFMANN-MISLOVE-STRALKA.

Resumiendo, hemos obtenido las siguientes dualidades en esta sección:

$$\textbf{IdemAlg}(\mathrm{D}) \simeq \textbf{AlgLat}_{\mathrm{op}} \simeq \textbf{SobConv}.$$

Por lo tanto, se deduce que **IdemAlg**($\mathcal{D}$) $\simeq$ **SobConv**; detrás de la equivalencia, en realidad se tiene una adjunción entre **IdemAlg**($\mathcal{D}$) y **Conv**. Y el functor de **Conv** a **IdemAlg**($\mathcal{D}$) tiene un significado claro en términos de politopos: aplica un espacio de convexidad S al $\mathcal{D}$-álgebra de $\mathrm{Poly}(S)^{\mathrm{op}}$, es decir, el orden dual del semirretícu-

lo por juntas de politopos de S. Estas dualidades de dominio-convexidad nos dicen que la teoría de dominios y la geometría convexa están naturalmente entrelazadas en el universo de las matemáticas (a veces hermoso, a veces loco).

Referencias

1 J. Adámek, H. Herrlich, and G. E. Strecker, Abstract *and Concrete Categories*, John Wiley and Sons, Inc., 1990.

2 J. Adámek and J. Reiterman, Topological categories presented by small sets of axioms, *Journal of Pure and Applied Algebra* 42 (1986) 1-14.

3 M. Barr, J. F. Kennison and R. Raphael, Isbell duality, *Theory and Applications of Categories* 20 (2008) 504-542.

4 G. C. L. Brümmer, Topological categories, *Topology and its Applications*, 18 (1984) 27-41.

5 D. M. Clark and B. A. Davey, *Natural Dualities for the Working Algebraist*, CUP, 1998. *Ann. Math. Artif. Intell.* 56 (2009) 339-360.

6 W. A. Coppel, *Foundations of Convex Geometry*, CUP, 1998.

7 G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. W. Mislove, and D. S. Scott, *Continuous Lattices and Domains*, CUP, 2003.

8 T. Fritz, Convex Spaces I: Definition and Examples, arXiv:0903.5522.

9 P. M. Gruber and J. M. Wills (eds.), *Handbook of Convex Geometry Vol. A. B*, North- Holland, 1993.

10 K. H. Hofmann, M. Mislove and A. Stralka, *The Pontryagin Duality of Compact 0-Dimensional Semilattices and its Applications*, Lecture Notes in Math. 394, Springer, 1974.

11 B. Jacobs, Convexity, Duality, and Effects, *Proc. of 6th IFIP International Conference on Theoretical Computer Science (*2010) 1-19.

12 P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, CUP, 1986.

13 E. G. Manes, *Algebraic Theories*, Springer, 1976.

14 Y. Maruyama, Fundamental results for pointfree convex geometry, Ann. *Pure Appl. Logic* 161 (2010) 1486-1501.

15 Y. Maruyama, From operational duality to coalgebraic quantum symmetry, Proc. of CALCO'13, *Springer LNCS* 8089 (2013) 220-235.

16 J. W. Pelletier and J. Rosický, Generating the equational theory of C*-algebras and related categories, *Proc. of Conference on Categorical Topology* (1989) 163-180.

17 H.-E. Porst and W. Tholen, Concrete dualities, *Category Theory at Work (*1991) 111-136.

18 M. L. J. van de Vel, *Theory of Convex Structures*, North-Holland, 1993.

19 Y. Maruyama, Categorical Duality Theory: With Applications to Domains, Convexity, and the Distribution Monad, Computer Science Logic 2013 (CSL 2013), Editor: Simona Ronchi Della Rocca; pp. 500–520.

Anexo

DUALIDAD CATEGORIAL COMO FILOSOFÍA DEL ESPACIO

Finalmente especulamos sobre dualidad categorial en un contexto más amplio y tratamos de dilucidar los fundamentos conceptuales de la dualidad categorial, especialmente en lo referente a la filosofía del espacio. Comencemos con el siguiente cuadro (rudimentario) de dualidades categoriales en diversas disciplinas, casi todas de las cuales pueden ser concebidas como emergentes entre lo epistemológico y lo ontológico. El concepto de dualidad entre ontología y epistemología, pensamos, da una perspectiva unificadora sobre dualidades categoriales en campos de amplio rango; es como "dualidad entre lo conceptual y lo formal" en términos de LAWVERE en su hiperdoctrinario artículo seminal "Adjointness in Foundations" (más vinculos con otros pensadores se plantearán luego).

	Ontológico	Epistemológico	Dualidad
Lógica	Modelo	Teoría	STONE
Lógica Algebraica	Semántica Algebraica	Sistema Lógico	TARSKI
Geometría Compleja	Superficie RIEMANN	Campo de Funciones Algebraicas	RIEMANN
Geom. Alg. Clásica	Variedad sobre k	k-Algebra	HILBERT
Geom. Alg. Moderna	Esquema	Anillo	GROTHENDIECK
Teoría de Representación	Grupo	Representación	PONTRYAGIN
Topología	Punto	Conjunto Abierto	ISBELL, PAPERT
Geometría Convexa	Punto	Conjunto Convexo	MARUYAMA
Teoría GALOIS	G-conjunto (Profinito)	Extensión del Algebra	GALOIS
Semántica de Programas	Denotación de Programas	Propiedad Observable	ABRAMSKY
Ciencia de Sistemas	Sistema de Computación	Su Comportamiento	Coalg|Alg
Relatividad General	Variedad Espaciotiempo	Campo	WEYL

Teoría Categorial de Dualidades

Física Quántica	Estado	Observable	GELFAND

La mencionada dualidad entre denotaciones y propiedades observables de los programas básicamente asciende a variantes dominio-teóricas de dualidades STONE infinitarias, tales como la ISBELL-PAPERT. La teoría de dualidades del presente trabajo es relevante para dualidades finitarias e infinitarias STONE, GELFAND, PONTRYAGIN e incluso HILBERT (porque las dualidades HILBERT y STONE están estrechamente relacionadas como se explica más abajo). La dualidad anterior entre sistemas informáticos y sus comportamientos se reduce a la dualidad álgebra-coalgebra en términos matemáticos. El caso más básico es la dualidad ABRAMKSY entre álgebras modales y coalgebras del endofunctor VIETORIS sobre la categoría de espacios STONE, que más tarde fue redescubierta y explicada por KUPKE-KURZ-VENEMA. Una teoría general algebraico-universal de estas dualidades álgebra-coalgebra se desarrolla en trabajo anterior de MARUYAMA "Natural Duality, Modality and Coalgebra" en *Journal of Pure and Applied Algebra*.

Algunas de las dualidades anteriores están, de hecho, firmemente entrelazadas. La dualidad STONE para la lógica clásica es exactamente equivalente a una dualidad HILBERT para la geometría sobre $\mathbb{GF}(2)$ (es decir, el cuerpo primo de dos elementos). Además, compleción lógica para la lógica clásica corresponde a Nullstellensatz para la geometría sobre GF(2), de una forma matemáticamente rigurosa; nótese que esto es diferente de la correspondencia en teoría de modelos entre la lógica y la geometría algebraica. Aquí cabe señalar que la compleción lógica nos habla de una dualidad de conjuntopos entre modelos y teorías y Nullstellensatz de una dualidad de conjuntopos entre variedades afines e ideales radicales, que pueden actualizarse a las dualidades categoriales correspondientes, es decir la dualidad STONE y la dualidad HILBERT, respectivamente (notar que la dualidad STONE es una generalización de la compleción, la equivalencia sintaxis-semántica, en un sentido matemáticamente preciso). En este sentido, puede decirse que compleción y Nullstellensatz son "predualidades". La correspondencia entre lógica y geometría algebraica puede resumirse como sigue:

	Lógica	Geometría Algebraica
Álgebra	Fórmulas	Polinomios
Espectro	Modelos	Variedad
Dualidad de conjuntopos	Compleción	Nullstellensatz
Dualidad Categorial	Dualidad STONE	Dualidad HILBERT

Investigaciones recientes de MARUYAMA muestran que esta correspondencia entre

lógica y geometría algebraica se extiende a lógica $\mathbb{GF}(p^n)$-valuada y geometría sobre $\mathbb{GF}(p^n)$ donde p es un número primo, y n es un entero mayor que 1 (y $\mathbb{GF}(p^n)$ es el cuerpo GALOIS de orden p^n).

El concepto de espacio ha inducido una revolución en la modernización de las matemáticas, al desplazar el énfasis de espacios subyacentes, de conjuntos puntíferos, a estructuras algebraicas sobre ellos; para ponerlo más concretamente, de espacios topológicos a marcos (escenarios) (o topología formal como marco de predicados), toposes, esquemas (es decir, haces de anillos) y espacios apuntíferos no conmutativos (como álgebras C* y VON NEUMANN). La dualidad categorial ha apoyado y facilitado el cambio de espacio puntífero al apuntífero, ya que básicamente nos dice que la estructura algebraica apuntífera en un espacio puntífero, mantiene la misma cantidad de información que el espacio puntífero original, permitiéndonos recuperar los puntos como el espectro de la estructura algebraica.

Después de haber visto que diferentes dualidades categoriales, aparentemente, comparten cierta esencia conceptual, parece natural preguntar acerca del origen (matemático) de esas dualidades, aunque puede no haber ningún origen único y el concepto de origen *per se* puede ser erróneo. Puesto que la dualidad nos permite considerar al álgebra mismo, como espacio (apuntífero), otra importante cuestión es dónde se origina el cambio de espacio puntífero a espacio apuntífero.

El primer matemático que dilucidó la cuestión podría haber sido RIEMANN, que demostró que (lo que ahora se llama) una superficie RIEMANN puede ser recuperada de su campo de funciones. Al mismo tiempo, sin embargo, podemos pensar en varios contendientes serios, especialmente KRONECKER y DEDEKIND-WEBER por un lado, que se consideran (por ejemplo, por HAROLD EDWARDS) precursores de la geometría aritmética y BROUWER por el otro. Mientras parece que RIEMANN no tomó al álgebra mismo como espacio, KRONECKER y DEDEKIND-WEBER algebraizaron a la geometría compleja (por ejemplo, el teorema de RIEMANN-ROCH), considerando a los campos de funciones algebraicas *per se*, como (equivalentes a) espacios (y descubriendo un gran vínculo con teoría de números algebraica, la analogía crucial entre campos de números algebraicos y campos de funciones). BROUWER, aunque entró en escena después que ellos, vigorosamente formuló y articuló, en términos de las llamadas dispersiones y secuencias de elección, el concepto de continuo que no presupone puntos, transformando una idea especulativa, desnuda en una empresa completamente desarrollada, matemáticamente substancial.

Teoría Categorial de Dualidades

Cambios comparables parecen haber sido causados también en filosofía. La filosofía de procesos de WHITEHEAD pone más énfasis en *procesos* dinámicos que en *sustancias* estáticas. Su filosofía del espacio es, en su espíritu, muy similar a la idea de topología apuntífera:

> El pensamiento básico de WHITEHEAD fue que obtenemos la idea abstracta de un punto espacial teniendo en cuenta el límite de una secuencia de la vida real, de volúmenes que se extienden unos sobre otros, por ejemplo de manera muy semejante a como podríamos considerar una serie de muñecas rusas anidadas o una secuencia anidada de ollas y sartenes. Sin embargo, sería un error considerar a un punto espacial como algo más que una abstracción.

Esto proviene del artículo de IRVINE en la *Stanford Encyclopedia of Philosophy,* sobre WHITEHEAD y, de hecho, puede interpretarse como un brillante ejemplo de la idea de ideales primos (o filtros) como puntos en teoría de la dualidad y geometría algebraica: recordar que las vecindades abiertos de un punto en un espacio topológico forman un filtro completamente primo de su marco conjunto abierto, cuyo complemento da un ideal primo. Aunque la filosofía del espacio, de Whitehead, tiende a ser discutida en el contexto de la mereología, que es una clase de matemáticas peculiar, sin embargo, es de hecho muy relevante para la idea central de la geometría moderna en matemáticas dominante; la idea de puntos como ideales primos es particularmente importante en la geometría algebraica y no conmutativa.

La filosofía de procesos de WHITEHEAD sería relevante para la teoría de categorías en general: por ejemplo, afirma JOHN BAEZ "una categoría es el marco más simple donde podemos hablar de sistemas (objetos) y procesos (morfismos)" en su artículo “Physics, Topology, Logic and Computation: A Rosetta Stone”.

La mecánica quántica categorial de ABRAMSKY-COECKE sigue una línea similar de pensamiento, con respecto a una categoría †-compacta como un "universo" de procesos quánticos expresado en un lenguaje gráfico intuitivamente significativo; esto es el pictoralismo quántico de BOB COECKE. Al mismo tiempo, sin embargo, debemos tener cuidado de la posibilidad de que la formalización distorsione o pierda un punto crucial de una original idea filosófica. De hecho, el concepto de proceso de Whitehead sería informalizable por su propia naturaleza. Esta observación es aplicable a toda la discusión aquí dada y tenemos que ser cautelosos con la distorsión mediante formalización, un error común que el matemático o el logicista tiende a cometer.

Otro filósofo del espacio apuntífero es WITTGENSTEIN: "¿Qué es lo que hace evidente que el espacio no es una colección de puntos, sino la realización de una ley?" (*Philosophical Remarks*, p. 216). El enfoque intensional de WITTGENSTEIN sobre el espacio es una consecuencia convincente de su persistente desacuerdo con el enfoque extensional conjuntista de las matemáticas:

> Las matemáticas están montadas a lo largo y ancho con los modismos perniciosos de teoría de conjuntos. Un ejemplo de esto es la forma en que la gente habla de una recta como compuesta por puntos. Una recta es una ley y no está compuesta de nada en absoluto (*Philosophical Grammar*, p. 211).

¿Qué significa "ley" para él? BROUWER define su concepto de dispersión como cierta ley para aproximar a un "punto" y esto podría ser un caso particular de la influencia de BROUWER en la filosofía de WITTGENSTEIN. Hay una discusión más detallada en el escrito de Maruyama: "Wittgenstein's Conception of Space and the Modernist Transformation of Geometry via Duality", *Papers of 36th International Wittgenstein Symposium*, Austrian Wittgenstein Society, 2013.

¿Dónde está el origen de esa modalidad de pensamiento filosófico? Tal como se comentó en el caso del origen matemático, puede no haber ningún origen y hasta podría ser erróneo buscar un origen en todo. Algunos filósofos posmodernos afirman que la idea del original tiende a ser inventada a través de un número de copias: después de todo, puede haber sólo copias sin esencia ni origen común. De todos modos, podríamos sólo prever un montón de copias con parecido de familia (que posiblemente no compartan ninguna característica genuina en común) en forma de una lista de dicotomías:

Cambio CASSIRER	Substancia	Función
Cambio WHITEHEAD	Material	Proceso
Cambio BROUWER	Punto	Secuencia de Elección
Cambio WITTGENSTEIN	Tratado	Investigaciones
Cambio BOHR	Realismo Clásico	Complementariedad
Cambio GÖDEL	Derecha	Izquierda
Dualidad LAWVERE	Conceptual	Formal
Dualidad GRANGER	Objeto	Operación
Paradoja de ZENÓN	Continuo	Discreto
ARISTÓTELES	Materia	Forma
Filosofía Natural	NEWTON	LEIBNIZ
KANT	La Cosa Misma	Apariencia
Fenomenología	Objeto	Sujeto
Teoría del Significado	DAVIDSON	DUMMETT

Teoría Categorial de la Dualidad

"Cambio" significa que cada pensador enfatiza en su dicotomía, el traslado desde un concepto en el lado izquierdo al del lado derecho. CASSIRER posiblemente podría ser un origen filosófico del modernista cambio discutido hasta ahora. En contraste con "cambio", "dualidad" no implica nada acerca de cuál concepto es anterior al otro; por el contrario, sugiere equivalencia entre dos opiniones interesadas. Finalmente, no se pretende que se mantengan relaciones uniformes entre los dos conceptos en cada una del resto de dicotomías, que no se centran particularmente en el cambio de un concepto a otro. Podría ser conceptualmente significativo reflexionar sobre la tabla de dualidades categoriales, a la luz de estas dicotomías filosóficas.

Dualidad es más que dualismo, así como la dualidad categorial en geometría apuntífera comienza con el dualismo de espacio y luego nos dice que los dos conceptos de espacio son equivalentes vía funtores (reduciendo en un cierto sentido el dualismo a monismo o, podría decirse monismo en la cima del dualismo). La teoría de categorías, a menudo va más allá del dualismo. Otros tipos de dualismo incluyen "geometría vs álgebra" y "semántica de teoría de modelos vs. semántica de teoría de la demostración". Por ejemplo, el concepto de álgebras de mónadas abarca incluso, estructuras geométricas como espacios topológicos y estructuras convexas. La lógica categorial nos habla de suficiente semántica de teoría de modelos, para interpretar la lógica en categorías basadas en conjuntos y semántica de teoría de la demostración para interpretar la lógica en las llamadas categorías sintácticas. Por tanto, podemos decir que la teoría de categorías trasciende al dualismo.

El cambio de GÖDEL de "derecha" a "izquierda" debería de ser explicado. En su obra “The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy” GÖDEL dice:

> El desarrollo de la filosofía desde el renacimiento, en general, ha ido de derecha a izquierda [...] Particularmente en física, este desarrollo ha alcanzado un pico en nuestro tiempo, en que, en gran parte, se niega la posibilidad del conocimiento de los estados objetivizables de los asuntos y se afirma debemos contentarnos con predecir resultados de observaciones. Este es el final de la ciencia teórica en el sentido habitual [...]

En el contexto físico, por lo tanto, para GÖDEL "derecha" significa el énfasis en realidad, sustancia y todo eso e "izquierda": algo así como fenómenos observacionales. En otros contextos, Gödel considera "derecha" a la metafísica y lógica formal es "izquierda" en su terminología.

Finalmente podemos articular tres sentidos para fundamentos de las matemáticas, argumentando que la filosofía del espacio cuenta como fundamentos de las

matemáticas en uno de los tres sentidos. Una concepción popular, predominante de fundamentos de las las matemáticas es lo que puede llamarse un " Fundamento Reductivo absoluto ", que reduce todo a un marco, dando un contexto para trabajar, absoluto, independiente del dominio. Lo más popular (actualmente) son los fundamentos conjuntistas; pero, la teoría de categorías (por ejemplo, ETCS de LAWVERE y toposes) puede hacer ese trabajo también.

Teoría de categorías puede dar otro sentido a fundamento. Esto es un "fundamento estructural relativo", que cambia de marco según nuestro enfoque estructural (y ver lo que permanece invariable y lo que no) y da un dominio-contexto específico relativo en el que trabajar: por ejemplo, la categoría de cintas para los fundamentos de la teoría de nudos y categorías †-compactas para los fundamentos de la mecánica cuántica y la información (en estos dos casos, ciertas estructuras monoidales o lógicas lineales son compartidas e invariantes). Recuérdese el punto de vista relativo de GROTHENDIECK y que el cambio de base es una idea fundamental de la teoría de categorías. La distinción reductivo-estructural se toma de las nociones PRAWITZ de teoría de demostración reductiva y estructural.

La filosofía del espacio como hemos comentado anteriormente, creemos, cuenta como una " Fundamentación Conceptual de las Matemáticas", cuyo objetivo es dilucidar la naturaleza de los conceptos fundamentales en las matemáticas y, presumiblemente, son apremiantes para el trabajo matemático también (donde nos referimos básicamente a espacio matemático más que a espacio físico o intuitivo). En esta línea, la Categorical Universal Logic de YOSHIHIRO MARUYAMA propone un concepto lógico universal de espacio para unificar toposes y categorías de espacios quánticos en términos de las hiperdoctrinas LAWVERE mónada-relativizadas, permitiendo conciliar la mecánica quántica categorial ABRAMSKY-COECKE y la lógica quántica tradicional BIRKHOFF-VON NEUMANN, de las cuales se ha dicho (de manera ligeramente engañosa) que están mutuamente en conflicto (varios documentos sobre CUL están disponibles en la página web de YOSHIHIRO MARUYAMA).

Los Servicios Bibliotecarios de la Universidad de Los Andes – SERBIULA,
Otorgan el presente:

REVENCYT
Índice Revistas Venezolanas de Ciencia y Tecnología

CERTIFICADO DE INDIZACIÓN Y CALIDAD

a :

ALEPH SUB CERO

Código RVA009

revista editada por la Universidad Nacional Experimental del Táchira

CERTIFICADO 2013

En Mérida-Venezuela, a los trece días del mes de Mayo de 2014

REVENCYT
Indice y Biblioteca Electrónica de Revistas Venezolanas de Ciencia y Tecnología

Fernando Rodríguez
Coordinador Indice REVENCYT

REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Servicios Bibliotecarios
Mérida - Venezuela
BIBLIOTECA DIGITAL
Vicerrectorado Académico

UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA – DPTO. DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
REVISTA ALEPH SUB-CERO SERIE DE DIVULGACIÓN MATEMÁTICA
FORMATO DE ARBITRAJE EXTERNO

Título del Artículo: _____
Código: _____

Arbitraje

CRITERIOS	EXCELENTE	MUY BUENO	BUENO	REGULAR	DEFICIENTE	OBSERVACIONES
Pertinencia del título.						
Adecuada elaboración del resumen.						
Claridad y coherencia del discurso.						
Adecuada organización interna.						
Calidad de las referencias bibliográficas.						
Aportes al conocimiento del objeto.						
Apreciación general.						

Resultado del Arbitraje

	El trabajo evaluado puede ser publicado sin ninguna modificación.
	El trabajo evaluado puede ser publicado con ligeras modificaciones.
	El trabajo evaluado puede ser publicado con importantes modificaciones.
	El trabajo evaluado no puede ser publicado.

Observaciones:

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

Datos del árbitro:

Apellidos y Nombres: _____

Lugar de trabajo: _____ Categoría: _____

e-mail: _____ teléfono: _____

UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA
REVISTA ALEPH SUB-CERO, SERIE DE DIVULGACIÓN MATEMÁTICA, Dpto. DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
San Cristóbal, Edo. Táchira - Venezuela

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

Dr. Carlos Enrique Núñez Rincón
Editor y demás miembros del Comité Editorial de la Revista Aleph Sub-Cero, Serie de Divulgación Matemática.
Universidad Nacional Experimental del Táchira, San Cristóbal, Táchira, Venezuela

Cumpliendo con los requisitos detallados en las Normas a seguir por los Autores, envío(amos) a Uds. el artículo intitulado: _____
_____

para su publicación en Aleph Sub-Cero, Serie de Divulgación Matemática. Sobre el manuscrito en cuestión, declaro(amos) que:

1. Se trata de un artículo original, cuyo tema de investigación esta vinculados a: la matemática, la física o la informática; al tiempo que cumple con las normas vigentes para la publicación de artículos que se detallan en cada número.

2. Es un artículo original, que previamente no ha sido enviado a revisión ni se encuentra publicado, parcial ni totalmente, en ninguna otra revista científica, nacional o extranjera.

3. No existen compromisos ni obligaciones financieras con organismos estatales ni privados que puedan afectar el contenido, resultados o conclusiones de la presente publicación.

4. En caso de ser publicado, el(los) autor(es) autoriza(n) la reproducción parcial o total del artículo, siempre y cuando se respete la normativa de propiedad intelectual y que se reconozcan los créditos del (de los) autor(es).

A continuación presento (el) los nombre(s) y firma(s) de el(los) autor(es), que certifica(n) la aprobación y conformidad con el artículo enviado y los puntos antes señalados:

Autor: _____ **e-mail:** _____

Co-autor: _____ **e-mail:** _____

Co-autor: _____ **e-mail:**_____

El teléfono del autor principal, que será en adelante la persona de contacto, es: _____

PROFESORES DEL DEPARATAMENTO
DE MATEMATICA Y FISICA – UNET
$\aleph_0$ 2014 – II $\aleph_0$

Aldana M. Alexander. Instructor
Barazarte Gerson. M.Sc. Asociado
Barrientos Reinaldo, M.Sc.-Agregado
Becerra Lorenzo, M.Sc. – Asociado.
Borrero Alicia Msc. Asistente
Bravo Antonio, M.Sc. Dr.- Asociado
Cárdenas Yelitza, Instructora
Carrizal Blanca, Instructora.
Casanova Berlitz. Asistente
Chacón Gerardo. M.Sc.- Agregado
Chacón R. Miguel Arturo. Titular
Contreras C. Luis F. M.Sc.- Asociado
Contreras Fernando M.Sc.-Asociado
Díaz Janneth A. M.Sc. Dra.- Asociada
Díaz Leidy, M.Sc. Asistente.
Escola Giovanni. Instructor.
Gámez Blanca. M.Sc.- Agregada
Gandica Elizabeth, Agregada.
González Javier, M.Sc. Dr. Asociado
González Alfredo, M.Sc. Asistente
Guerrero Atilio, M.Sc. Dr. Asociado
Guerrero José, Instructor
Guerrero Néstor, Instructor.
Guerra Karyna, M.Sc. – Asistente.
Guillén Blanca, M.Sc.- Agregada
Hernández Pablo, Agregado
Luna Ch. Celis José. Asistente
Labrador, José. M.Sc.-Instructor.
Leal, Laura. Mgtr. Instructora.
López Jorge, Instructor.
Moncada Jeraldyne, M.Sc. Asistente.
Molina Alexander, M.Sc. Agregado
Molina William, M.Sc. Asistente.
Molina G. Ramón M.Sc. Dr.- Asociado
Mora Adelaida, M.Sc. Asistente
Moreno Olga, M.Sc.- Asistente.
Núñez Carlos. M.Sc. Dr. - Titular.
Ontiveros Efrén, Asistente.
Ortega Jhon, M.Sc. - Agregado.
Parada Gloria. M.Sc. Agregada.
Pardo Susana, M.Sc.-Asistente.
Paredes Gilberto M.Sc, Agregado.
Peña Tania M.Sc. – Agregada
Pérez Leonardo M.Sc. Agregado.
Pérez Jenny, Instructora
Porras Yazmira, M.Sc.-Asociada.
Rivera Hender, M.Sc. – Asistente.
Roa Mary Luz, Instructora
Sanabria Irma M.Sc, Asociada
Saldivia de N. Carmen Msc, Asociada
Soto Hernán – Instructor
Suárez Omar, M.Sc. Asistente
Torres Ângela E. M.Sc- Titular
Valera Jorge M.Sc. – Asistente
Velásquez Edwin, Instructor
Villarreal Luis, Instructor
Zambrano, Juan Carlos - Asistente
Zambrano, Aleyani del V. Instructor

$\aleph_0$

2014 – II
Julio - Diciembre