SUPERFICIES CUADRÁTICAS

Introducción:

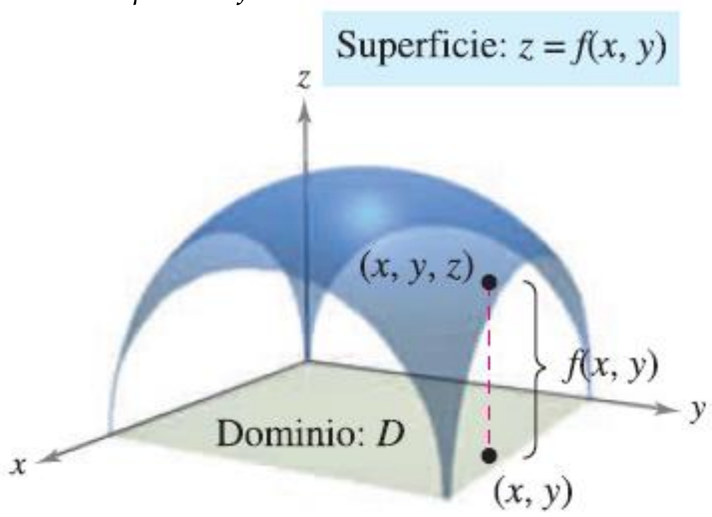
La presente monografía tiene como objetivo identificar las superficies cuadráticas y reconocer su presencia en la naturaleza, así como mostrar ejemplos visuales de la aplicación de éstas en diferentes ámbitos del desarrollo humano. Debemos precisar que no se da una definición rigurosa de superficie, más bien intuitiva.

Superficie

- Se llama superficie al conjunto de puntos del espacio euclidiano tridimensional cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$. Aunque la ecuación anterior expresa una relación entre tres variables, no siempre será así, por ejemplo:

  - La ecuación $y = 2$, representa un plano en $\mathbb{R}^3$
  - La ecuación $x^2 + y^2 = 1$, representa un cilindro en $\mathbb{R}^3$
  - También debemos aclarar que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ no siempre representa una superficie. Así tenemos $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ que no tiene solución en $\mathbb{R}^3$

  Podemos decir heurísticamente que: visto desde cerca los alrededores de un punto de una superficie estos se parecen al plano cartesiano. O también, podemos imaginar a una superficie como un plano deformado.



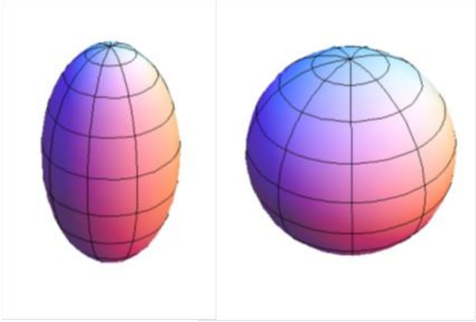
- Se llama superficie cuadrática o cuádrica, aquella cuya ecuación es de la forma: $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0$
  Donde, al menos uno de los seis primeros coeficientes A, B, C, D, E y F es diferente de cero.

Las superficies cuadráticas se clasifican en:

- ✓Elipsoides.
- ✓Paraboloides.
- ✓Hiperboloides.
- ✓Conos.
- ✓Cilindros.

Identificación de las superficies cuadráticas

Para identificar una cuádrica tenemos varias opciones.
Por ejemplo: Cuando los tres coeficientes D, E y F son nulos simultáneamente, el eje o los ejes de la superficie son paralelos a los ejes coordenados. En estas circunstancias, los signos de los coeficientes A, B y C permiten hacer una pre-identificación de la superficie: Si A, B y C tienen el mismo signo, la ecuación representará un elipsoide cuando dichos valores sean diferentes; sin embargo si son iguales, representará a una esfera*.



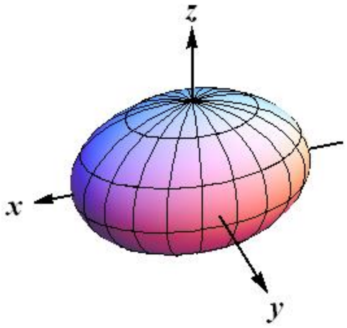
Elipsoide   Esfera

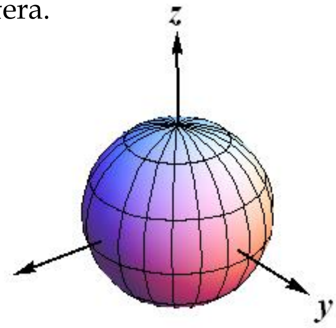
*los gráficos mostrados en este paper han sido creados con el software científico MATHEMATICA 7.0

EL ELIPSOIDE:

La ecuación de un elipsoide con centro en el origen de coordenadas y ejes coincidentes con los ejes cartesianos, es: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, donde $a>0, b>0$ y $c>0$ son las longitudes de los semiejes del elipsoide respecto de los ejes x, y, z, y determinan la forma del elipsoide. Si los tres son iguales, se trata de una esfera.

Gráficamente se tiene:





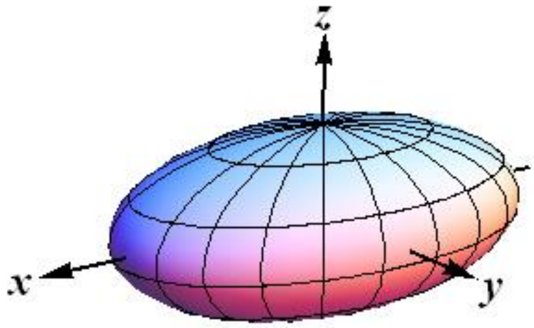
Ejemplo:

Clasificar y dibujar la superficie cuya ecuación cuadrática es $x^2 + 4y^2 + 6z^2 = 1$.

Solución: Debemos empezar dándole forma a los coeficientes, para poner la ecuación en la forma canónica:

$$x^2 + 4y^2 + 6z^2 = 1$$
$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} + \frac{z^2}{\frac{1}{6}} = 1$$

La última ecuación tiene la forma canónica de un elipsoide elíptico, donde $a = 1, b = \frac{1}{2}$ y $c = \frac{1}{\sqrt{6}}$, cuya gráfica se muestra, observar que en la proyección sobre el plano XY, el eje mayor de la elipse está sobre el eje X.

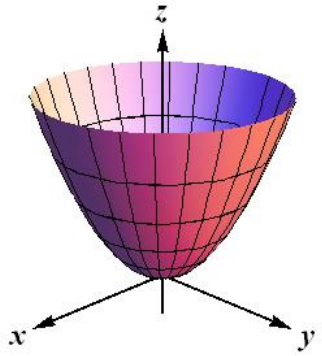


Un vistazo al mundo: Arquitecturas maravillosas!!!


- ✓ La forma natural de los huevos es un elipsoide.
- ✓ La estructura arquitectónica corresponde al Centro Nacional de las Artes Escénicas (Pekín, China-2007), se trata en realidad de un espacio en forma elipsoidal de 12 000 m² con capacidad para 5 452 butacas. A su vez el edificio está rodeado por un lago artificial.

EL PARABOLOIDE ELÍPTICO:

La ecuación de un paraboloide elíptico con vértice en el origen de coordenadas y eje sobre el eje z tiene por ecuación: $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, donde $a>0, b>0$ y $c>0$



Análogamente se tendrán los paraboloides: $\frac{x}{a}=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$; $\frac{y}{b}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}$

Nota: Si $a=b$, asume el nombre de **paraboloide circular**.

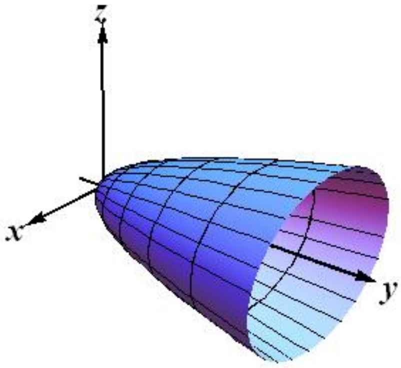
Ejemplo:

Clasificar y dibujar la superficie cuya ecuación cuadrática es $2x^2+4z^2-y=0$.

Solución: Debemos empezar escribiendo su ecuación en forma canónica:

$$2x^2+4z^2-y=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{1}-\frac{y}{4}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{4}=\frac{x^2}{\sqrt{2}^2}+\frac{z^2}{1^2}$$

La última ecuación tiene la forma canónica de un paraboloide elíptico, donde $a=\sqrt{2}, b=4$ y $c=1$, observar que en la proyección sobre el plano XZ, el eje mayor de la elipse es paralela al eje X.

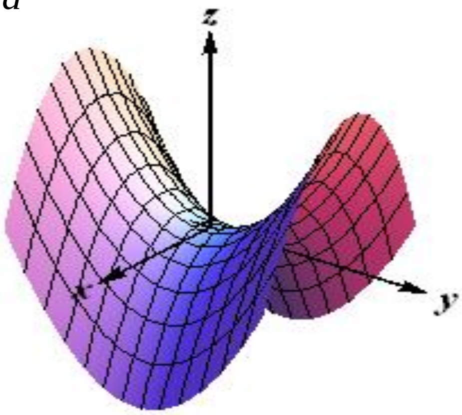


Un vistazo al mundo: Arquitecturas maravillosas!!!

- ✓ Las copas de champagne nos dan una idea "digestible" de un paraboloide.
- ✓ Las antenas parabólicas son un claro ejemplo de la aplicación que tienen los paraboloides. Puesto que, se demuestra que todos los rayos son reflejados hacia el foco de la parábola generatriz. De igual modo son usados en los faros de los automóviles, en las linternas.

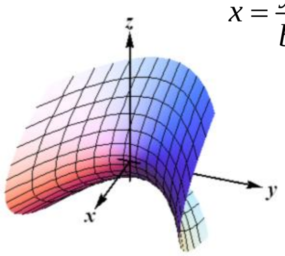
EL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO:

La ecuación de un paraboloide hiperbólico con vértice en el origen de coordenadas, también es conocido como "**la silla de montar**" por su parecido a una montura, tiene por ecuación: $z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$, donde $a > 0$ y $b > 0$.

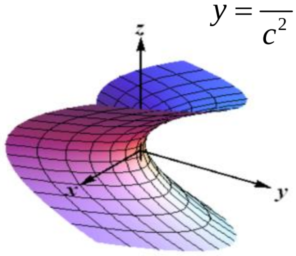


Análogamente se tendrán los paraboloides hiperbólicos:

$x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$



$y = \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}$



Nota: Observar que hay tres variantes más.

Un vistazo al mundo: Arquitecturas maravillosas!!!

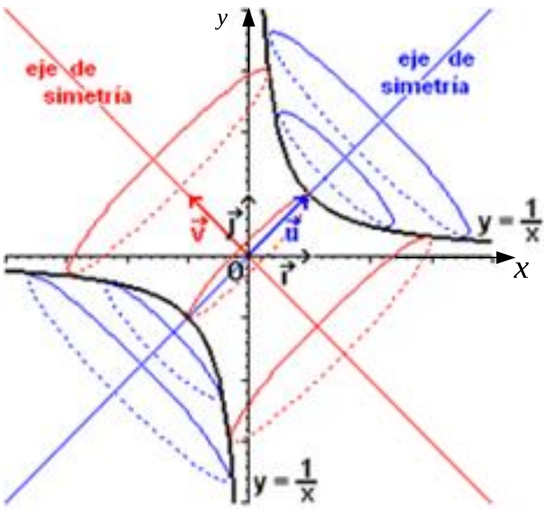
- ✓ Algunas empresas se basan en atractivas geometrías para registrar su marca.

- ✓ La estructura arquitectónica corresponde al L'Oceanographic (El oceanográfico), que se halla en la ciudad de Ciudad de las Artes y las Ciencias (Valencia – España 2002) donde se representa los diferentes hábitats marinos (de mares y océanos), de aproximadamente unos 100 000 m^2.

HIPERBÓLOIDES:

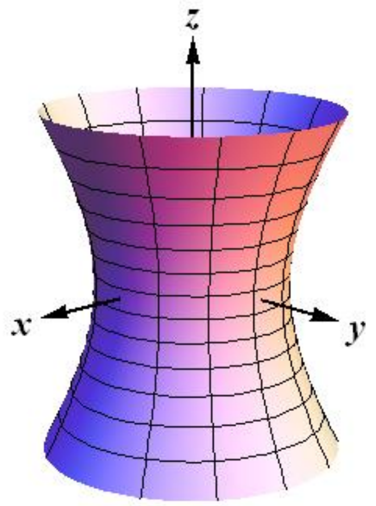
El **hiperboloide** es la superficie de revolución (al igual que el elipsoide y el paraboloide circular) generada por la rotación de una hipérbola alrededor de uno de sus dos ejes de simetría. Dependiendo del eje elegido, el hiperboloide puede ser de una o dos hojas.

Para entenderlo mejor, se considera a continuación el caso de la hipérbola $y = \dfrac{1}{x}$ de referencia, si lo giramos alrededor del eje transversal (azul), se obtiene el hiperboloide de una hoja. Pero, si lo hacemos girar respecto al eje conjugado (rojo), tendrá dos hojas.



EL HIPERBÓLOIDE DE UNA HOJA:

La ecuación de un hiperboloide de una hoja, con eje sobre el eje z tiene por ecuación: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, donde $a>0, b>0$ y $c>0$



Análogamente se tendrán los hiperboloides:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Nota: Obsérvese que el eje está definido por la variable con coeficiente negativo.

Ejemplo:

Clasificar y dibujar la superficie cuya ecuación es $2x^2-6y^2+4z^2-12=0$.

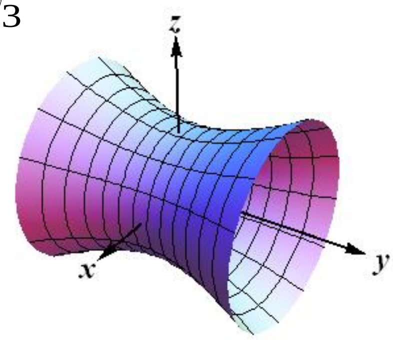
Solución: Debemos empezar escribiendo su ecuación en forma canónica:

$$2x^2-6y^2+4z^2-12=0$$

$$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}-1=0 \qquad \text{dividiendo entre 12}$$

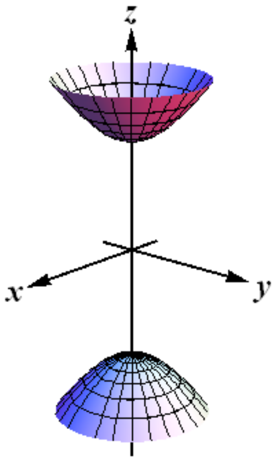
$$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}=1 \qquad \text{pasando } (-1) \text{ al otro miembro}$$

La última ecuación tiene la forma canónica de un hiperboloide de una hoja, donde $a=\sqrt{6}, b=\sqrt{2}$ y $c=\sqrt{3}$



EL HIPERBÓLOIDE DE DOS HOJAS:

La ecuación de un hiperboloide de dos hoja, con eje sobre el eje z tiene por ecuación:
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, donde $a>0, b>0$ y $c>0$



Análogamente se tendrán los hiperboloides de dos hojas:

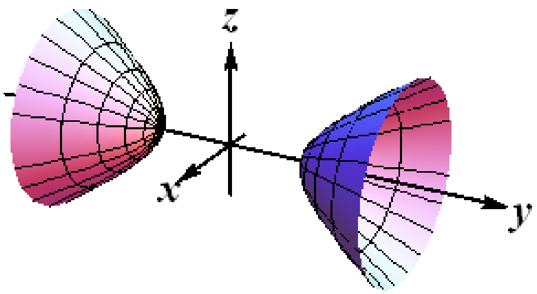
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1; \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Ejemplo: Clasificar y dibujar la superficie cuya ecuación cuadrática es $2x^2-6y^2+4z^2+12=0$.

Solución: Debemos empezar escribiendo su ecuación en forma canónica:

$$\begin{aligned}
&2x^2-6y^2+4z^2+12=0 \\
&\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}+1=0 && \text{dividiendo entre 12} \\
&\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}=-1 && \text{multiplicando por } (-1) \\
&\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{6}-\frac{z^2}{3}=1 && \text{ordenando}
\end{aligned}$$

La última ecuación tiene la forma canónica de un hiperboloide de dos hojas, donde $a=\sqrt{6}, b=\sqrt{2}$ y $c=\sqrt{3}$



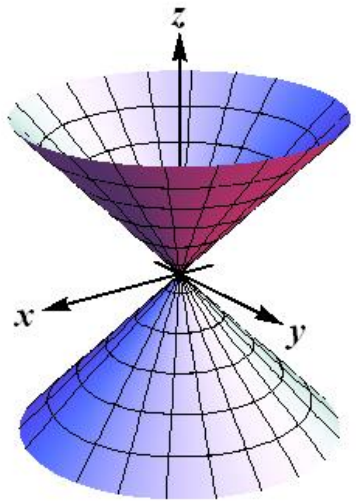
CONOS: Son cuádricas formada por el desplazamiento de una recta (llamada generatriz) que pasa siempre por un punto fijo (llamado vértice) a lo largo de una curva plana (cerrada o abierta) que se halla en una plano diferente al del vértice, denominada directriz del cono.

Pueden visitar está dirección, para visualizar la idea:

http://www.youtube.com/watch?v=tfcL1vU8pFk

CONO ELÍPTICO:

Cuando el vértice es el origen de coordenadas y la directriz es una elipse sobre un plano paralelo al plano XY, la superficie generada es un cono elíptico con eje sobre el eje z tiene por ecuación: $\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, donde $a>0, b>0$ y $c>0$



Análogamente se tendrán conos: $\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}$; $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$

Nota: Si $a = b$, asume el nombre de **cono circular**.

Ejemplo: Clasificar y dibujar la superficie cuya ecuación cuadrática es $x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 0$.

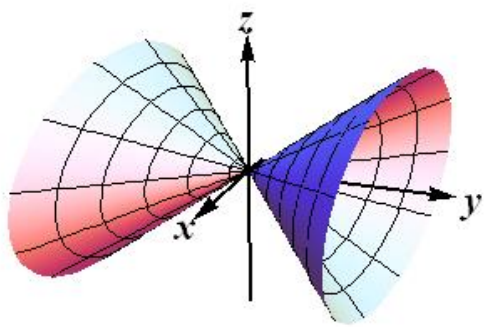
Solución: Debemos empezar escribiendo su ecuación en forma canónica:

$$x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 0$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{1} = 0 \qquad \text{dividiendo entre 4}$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{1} \qquad \text{despejando } \left(y^2\right)$$

La última ecuación tiene la forma canónica de cono elíptico con eje sobre el eje Y, donde $a = 2, b = \sqrt{2}$ y $c = 1$, observe la forma elíptica del cono.



CILINDROS: Son cuádricas formada por el desplazamiento paralelo de una recta llamada generatriz a lo largo de una curva plana, que puede ser cerrada o abierta, denominada directriz del cilindro.

Pueden visitar está dirección, para visualizar la idea:

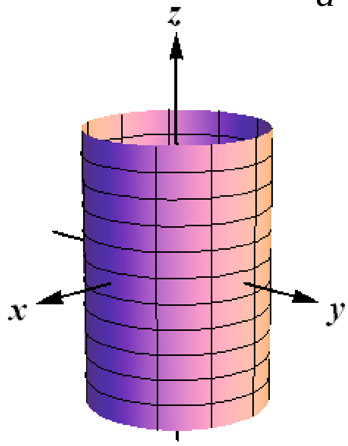
http://www.youtube.com/watch?v=15olaoynp7A

Las superficies cilíndricas son de tipos diversos, y por tanto sus ecuaciones son variadas, entre las notables tenemos:

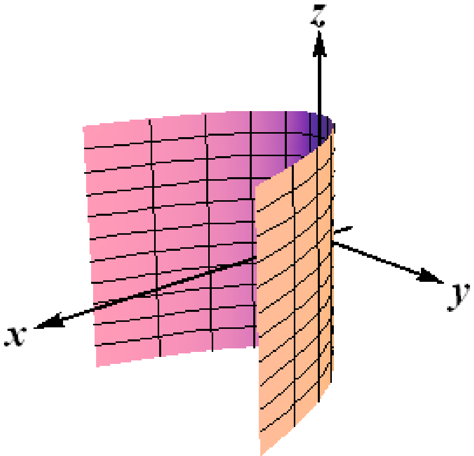
- ✓ Cilindro Elíptico.
- ✓ Cilindro Parabólico
- ✓ Cilindro Hiperbólico.

Luego se muestran tan sólo tres ejemplos de la variedad de las superficies cilíndricas que se pueden construir.

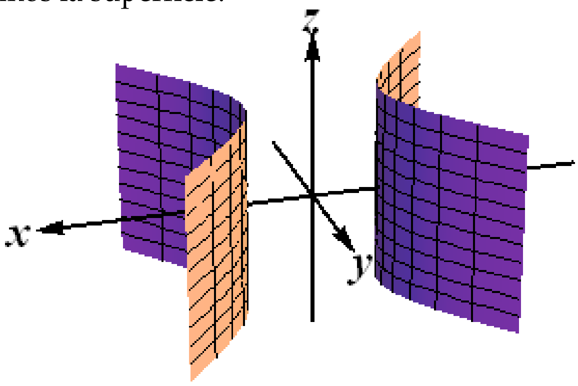
CILINDRO ELÍPTICO: Por ejemplo para la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>0, b>0$, se tiene la superficie:



CILINDRO PARABÓLICO: Por ejemplo para la ecuación $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y}{b},\ a>0, b>0$, tenemos la superficie:



CILINDRO HIPERBÓLICO: Por ejemplo para la ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>0, b>0$, tenemos la superficie:



Esperamos haber cumplido con nuestro objetivo, rogamos a los estudiantes en quienes caiga esta monografía no dejar de maravillarse con las matemáticas. También sugerimos el uso del empleo de software científico para enriquecer vuestra comprensión, por ejemplo: pueden acceder ONLINE a http://www.wolframalpha.com

Específicamente podrían acceder a

http://www.wolframalpha.com/input/?i=quadratic+surfaces&lk=4&num=1

Para terminar, unos

Ejercicios: Identificar y bosquejar la gráfica de las siguientes superficies.

01. $4y^2+z^2-x-16y-4z+20=0$
02. $x^2-y^2+z^2-2x+2y+4z+2=0$
03. $x^2-y^2+z^2-4x-2y-2z+4=0$
04. $x^2=y^2+4z^2$
05. $x=y^2+4z^2$
06. $x=y^2-4z^2$
07. $16x^2-4y^2-z^2+1=0$
08. $x^2+y^2+4x-6y-z-9=0$
09. $y^2-9z^2-x^2-9=0$
010. $x^2+y^2-3z^2-2x+1=0$
011. $y=4z^2$
012. $x^2+4z^2=1$

Comentarios o sugerencias: ellis.unp@facebook.com , www.facebook.com/ellis.unp

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

1.- RON LARSON – BRUCE EDWARDS **"CÁLCULO 2".** 9na Ed. México D.F., Mc Graw-Hill, 2010

2.- JAMES STEWART **"MULTIVARIABLE CALCULUS"** 7va Ed. USA, Cengage Learning, 2008.

3.- JERROLD MARSDEN – ANTHONY TROMBA **"CÁLCULO VECTORIAL"** 5ta Ed. Madrid, Addison-Wesley, 2004.

4.- EDUARDO ESPINOZA RAMOS **"GEOMETRÍA VECTORIAL EN R^3"** Servicios Gráficos J.J., Lima 2004

5.- CLAUDIO PITA RUIZ **"CÁLCULO VECTORIAL"** 1^a Ed. MéxicoD.F., Prentice-Hall, 1995.