

# Elementos de Lógica Matemática y Álgebra Proposicional.

Enfoque Utilitario

Ing. Arturo Gustavo Tajani

## 1. Introducción:

- En algún libro de “**Lógica**” hemos leído que la “**lógica Aristotélica**” se puede definir como: “**la conformidad de la razón con la verdad**”.
- A la “**lógica formal**” se la define asimismo, como “**el conjunto de leyes y reglas relativas al razonamiento deductivo, que permiten distinguir lo verdadero de lo falso**”.
- Se admite también definir a la lógica diciendo que: “**es la ciencia que expone las leyes, modos y formas del conocimiento científico**”.
- Hay otras definiciones tanto para la “lógica Aristotélica” como para la “lógica formal”. Por ejemplo puede decirse que el objeto de la “lógica”, “**es el estudio de los métodos y principios aptos para distinguir el razonamiento correcto del incorrecto**”.

- La lógica formal nos propone razonamientos del tipo:
  1. Todos los hombres son mortales.
  2. Todos los griegos son hombres.
  3. luego todos los griegos son mortales.
- Estos planteos se llaman “**Silogismos**”.
- Pero peligrosamente puede hacerse un razonamiento falso o capcioso que se pretenda hacer pasar por verdadero, tal como:
  1. El perro tiene cuatro patas y camina.
  2. El caballo tiene cuatro patas y camina.
  3. luego la mesa, que tiene cuatro patas, camina.
- O bien:
  1. Tomé vino con soda y me hizo mal.
  2. Tomé wysky con soda y me hizo mal.
  3. luego la soda me hace mal.
- A estos razonamientos engañosos se los llama “**Sofismas**”.

- Los brillantes matemáticos
- Bernard Bolzano (1781-1848), que creó la teoría **de conjuntos**;
- Augustus De Morgan (1806-1871), con su **lógica de las clases** y
- George Boole (1815-1864) con la creación del **álgebra proposicional**, fundamentaron un nuevo capítulo de la matemática llamado:

## “Lógica Matemática”

- Básicamente se le aplica a la lógica, las definiciones concretas y los razonamientos rigurosos propios de la matemática.
- Se establece para cada expresión del lenguaje un significado exacto y se adopta además un simbolismo apropiado, con una interpretación sin ambigüedades. Los argumentos verbales se pueden analizar así desde un punto de vista lógico.
- Cabe señalar ahora que, el cálculo electrónico, la computación y la automatización, son modernos y avanzados desarrollos científicos y tecnológicos que se fundamentan precisamente en la **“Lógica Matemática”**.

## 2. Proposiciones:

- Si se aceptan como intuitivos los conceptos de “**verdad**” ó “**falsedad**” y no se pretende dar una definición formal, se puede decir que:

**Proposición** es toda expresión o afirmación, con significado en un idioma, de la cual tenga sentido decir si es “**verdadera**” o “**falsa**”.

- Las proposiciones son bivalentes, es decir que pueden asumir dos valores claramente diferentes: “**verdadero (v)**” o “**falso (f)**”.
- Resulta conveniente hacer corresponder a las dos posibilidades “**v**” y “**f**” los signos “**1**” y “**0**”, respectivamente.
- Las diversas partes elementales de un discurso pueden ser tomadas como “**proposiciones**”. Estas se pueden ligar entre sí mediante “**conectivos lógicos**”, formando así estructuras de significado claro y preciso.

- Las siguientes **son** proposiciones:
  - a)  $\frac{3}{4}$  es un número fraccionario.
  - b) El tigre es un insecto.
  - c) El carburador tiene una falla.
  - d) El transistor está conduciendo.
  - e) Hoy es lunes.
  - f) Llueve.
- No le compete a la lógica establecer el valor de verdad de las proposiciones.

De ello deben ocuparse por ejemplo:

para a) y b) las ciencias particulares (matemática, biología).

para c) y d) las especialidades de la técnica (mecánica, electrónica).

para e) y f) simplemente la observación o comprobación directa.

- **No** son proposiciones en cambio:

frases imperativas u órdenes: ( Escriba esto.)

interjecciones o exclamaciones: ( ¡Que barbaridad! )

instrucciones: ( Volver al paso anterior.)

frases sin sentido de “v” o “f” : ( El mineral “x” es una piedra preciosa.)

igualdades matemáticas tales como:  $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

- Estas expresiones, aunque formalmente tengan sentido, no son susceptibles de ser calificadas como v ó f , que es la esencia del concepto de proposición.

- Vinculando dos o mas proposiciones se pueden obtener otras. Todo razonamiento lógico elaborado, debe partir necesariamente de una adecuada vinculación de algunas proposiciones elementales.
- En una demostración de lógica matemática se parte precisamente de proposiciones elementales tales como axiomas, postulados o hipótesis y se desea saber, mediante razonamientos lógicos, si las conclusiones que se obtienen son “v” o “f” , para cada valor de verdad de las proposiciones componentes.
- Las relaciones entre proposiciones se llaman “**conectivos lógicos**” o también “**operaciones lógicas**” y se corresponden con algunas partículas gramaticales que les sirven de nombre.

- Si se presentan en una tabla las distintas posibilidades lógicas de las proposiciones componentes y a cada combinación, se le hace corresponder el valor lógico de la proposición resultante, se tiene lo que se denomina “**tabla de verdad**”, que expresa la llamada “**función valor de verdad:  $v(p)$** ”.

- Es generalizado representar las proposiciones con letras minúsculas:

**p; q; r; s; t; . .**

- También suelen utilizarse en aplicaciones prácticas, abreviaturas o nombres significativos.

### 3. Operaciones del Álgebra Proposicional:

#### 3.1. Conjunción:

La partícula gramatical “ y ” que relaciona dos proposiciones en el lenguaje corriente, es en general de significado claro.

- Por ejemplo la frase “Si el domingo llueve, iré al cine”, puede ser descompuesta para su análisis lógico, en proposiciones simples :

**p:** es domingo

**q:** llueve

**r:** iré al cine

Estas proposiciones se pueden conectar lógicamente en forma de razonamiento:

**si p y q entonces r**

- Las diferentes combinaciones para **p** y **q** , con sus dos valores posibles son:

a) no es domingo **y** no llueve; no voy al cine. —→

b) no es domingo **y** llueve; no voy al cine. —→

c) es domingo **y** no llueve; no voy al cine. —→

d) es domingo **y** llueve; iré al cine. —→

<b>p</b>	<b>q</b>	<b>r</b>
<b>f</b>	<b>f</b>	<b>f</b>
<b>f</b>	<b>v</b>	<b>f</b>
<b>v</b>	<b>f</b>	<b>f</b>
<b>v</b>	<b>v</b>	<b>v</b>

- Las diferentes combinaciones para  $p$  y  $q$ , con sus dos valores posibles son:

- a) no es domingo **y** no llueve; no voy al cine.  $\longrightarrow$
- b) no es domingo **y** llueve; no voy al cine.  $\longrightarrow$
- c) es domingo **y** no llueve; no voy al cine.  $\longrightarrow$
- d) es domingo **y** llueve; iré al cine.  $\longrightarrow$

$p$	$q$	$r$
f	f	f
f	v	f
v	f	f
v	v	v

la “ $r$ ”, como proposición resultante, suele escribirse:

“ $p$  **y**  $q$ ” ó solamente “ $y$ ”

- La correspondiente “tabla de verdad” con “0” y “1” en lugar de “f” y “v”, será:  $\longrightarrow$

$p$	$q$	$y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Un enunciado industrial como: “Sistema de seguridad para el operador de un balancín”, conduce a igual razonamiento.

**p**: el brazo derecho está apoyado en la butaca.

**q**: el brazo izquierdo está apoyado en la butaca.

**r**: funciona el balancín.

el razonamiento sería:

**si p y q entonces r**

- El producto de dos números binarios es: **0.0 = 0; 0.1 = 0; 1.0 = 0 y 1.1 = 1**

Se pueden dar las siguientes proposiciones:

**p**: el primer factor vale 1.

**q**: el segundo factor vale 1.

**r**: el producto vale 1.

de manera similar se puede expresar:

**si p y q entonces r**

- Estos últimos razonamientos y muchos otros semejantes, conducen a una **tabla de verdad** similar a la del primer ejemplo, por lo que el conectivo lógico “**y**” ó “**conjunción**” queda identificado con esta tabla.

<b>p</b>	<b>q</b>	<b>y</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

- De la observación de la tabla, puede expresarse que “la conjunción solo es verdadera cuando ambas proposiciones son verdaderas”.
- También se puede decir que: “para que el resultado sea falso basta con que lo sea una cualquiera de las proposiciones ó ambas”.

### 3.2. Disyunción:

La partícula gramatical “ o ” que relaciona dos proposiciones en el lenguaje corriente, debe ser interpretada teniendo en cuenta el sentido de la oración en la que está incluida.

- Por ejemplo la frase “Regalaré la ropa que me quede chica o que esté fuera de moda” puede ser descompuesta para su análisis lógico, en proposiciones simples :

p: esta prenda me queda chica.

q: esta prenda está fuera de moda.

r: la regalaré

- Estas proposiciones se pueden conectar lógicamente en forma de razonamiento:

**si p o q entonces r**

- Resulta claro, por el sentido de la frase, que si una prenda me queda chica y a la vez, también está fuera de moda, la regalaré.
- Es decir que el “  $\circ$  ” incluye el caso en que ambas proposiciones sean verdaderas.

• Se puede considerar también, como otro ejemplo, un “Sistema de alarma para la seguridad de una sala, que tiene solo una puerta y una ventana”. Las proposiciones pueden ser:

**p:** la puerta es violentada.

**q:** la ventana es violentada.

**r:** se activa la alarma.

- Aquí también vale poner:

**si  $p$  o  $q$  entonces  $r$**

Y por supuesto se incluye como “verdadero” el caso en que se violente la puerta y la ventana a la vez.

- Este segundo conectivo lógico, la “**disyunción o**”, se corresponde con la partícula gramatical “o”, mas comunmente utilizada.
- La tabla de verdad correspondiente es, en sus dos versiones:

p	q	o
f	f	f
f	v	v
v	f	v
v	v	v

p	q	o
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- En palabras puede describirse la tabla diciendo que: “la disyunción solo es falsa cuando ambas proposiciones son falsas”
- También puede decirse que: “para que el resultado sea verdadero basta que sea verdadera una cualquiera de las proposiciones o ambas”.

### 3.3. Disyunción Excluyente:

- La partícula gramatical “ **o** ” en el sentido de la frase: “Debo necesariamente estar presente en un acto, mañana a las 12:00 hs, en la ciudad de Salta o en la ciudad de Neuquén”, excluye lógicamente la posibilidad de estar a la vez en ambos lados.
- Sean las proposiciones:
  - p:** estaré en Salta.
  - q:** estaré en Neuquén.
  - r:** concurre al acto.
- Estas proposiciones se pueden conectar lógicamente en forma de razonamiento:

**si  $p$  o  $q$ , pero no ambas, entonces  $r$**

• Otro caso semejante sería el siguiente planteo: “Se trata de crear un sistema para envasar juntos dos productos A y B, de iguales medidas pero de diferente color (por ejemplo rojo y azul)”.

• Las proposiciones podrían ser:

**p:** A es rojo

**q:** B es rojo

**r:** se envasa el par A;B

• Y la expresión lógica sería:

**si p o q , pero no ambas, entonces r**

- Se tiene así el conectivo lógico “ **disyunción excluyente** ” ó también “**o exclusivo**”, cuyo símbolo es “**o**” (o subrayado) y su tabla de verdad es:

<b>p</b>	<b>q</b>	<b><u>o</u></b>
<b>f</b>	<b>f</b>	<b>f</b>
<b>f</b>	<b>v</b>	<b>v</b>
<b>v</b>	<b>f</b>	<b>v</b>
<b>v</b>	<b>v</b>	<b>f</b>

Ó bien

<b>p</b>	<b>q</b>	<b><u>o</u></b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>

- La descripción verbal de la tabla de verdad puede ser: La disyunción excluyente es verdadera solo cuando ambas proposiciones son diferentes.
- O también: El o exclusivo es falso cuando las dos proposiciones tienen igual valor lógico (o son iguales).

### 3.4. Negación:

- Con cierta frecuencia se utiliza la negación de una proposición dada.

Sea la proposición:

**p:** el uranio es un metal.

su negación será: **- p:** el uranio no es un metal.

- La tabla de verdad correspondiente es:

p	-p
f	v
v	f

O  
bien

p	-p
0	1
1	0

- Los símbolos que se utilizan para la negación suelen ser “ $\neg$ ”; “ $\sim$ ” ó también una barra horizontal sobre la proposición que se niega ( $\bar{p}$ ).

- En la teoría pura de la Lógica Matemática se definen dos conectivos lógicos adicionales: “Implicación” ( $\Rightarrow$ ) y “Doble Implicación” ( $\Leftrightarrow$ ), pero a los fines del presente trabajo, se prefiere no tenerlos en cuenta.
- **Se han definido cuatro conectivos lógicos básicos:**

**Conjunción ( y )**

**Disyunción ( o )**

**Disyunción exclusiva ( o )**

**Negación ( - )**

que deben utilizarse siempre teniendo en cuenta sus respectivas tablas de verdad.

- Es bueno aclarar que en la confección de las tablas de verdad se ha utilizado (y se seguirá empleando en lo sucesivo) la notación con “0” y “1” en lugar de “falso” y “verdadero”. Asimismo se adopta el orden dado por la numeración binaria natural. La conveniencia de esta adopcción quedará clara mas adelante.

## 4. Enunciados Compuestos:

- Del mismo modo que pueden manejarse expresiones algebraicas complejas mediante el uso de las operaciones aritméticas elementales, así también se pueden emplear varios conectivos lógicos en forma simultánea para construir “enunciados lógicos compuestos”.
- Las distintas operaciones lógicas se pueden enlazar mediante sus símbolos y el uso de paréntesis y corchetes tiene el significado normal del álgebra.
- El valor lógico de un enunciado compuesto depende exclusivamente del valor lógico de las proposiciones simples y el resultado lógico que se obtenga quedará claramente expresado sólo cuando se de la tabla de verdad correspondiente.

- Para resolver el enunciado compuesto que se proponga, se debe confeccionar una tabla donde se destine una columna para cada variable o proposición.
- Luego hacia la derecha, habrá además de una columna para cada proposición, una columna para cada conector lógico del enunciado, en el mismo orden en que está escrita la expresión simbólica.
- Se procede a llenar la tabla con los “0s” y “1s” correspondientes, comenzando por las proposiciones dadas y luego siguiendo con los conectores en el orden indicado por la expresión, teniendo en cuenta claramente la tabla de verdad de cada uno.
- El enunciado o fórmula proposicional, tiene su valor de verdad expresada en la columna final correspondiente. Esa columna final, es precisamente el resultado del enunciado lógico compuesto y suele destacarse con una doble barra vertical. Las columnas intermedias son solo pasos útiles que aclaran el procedimiento.

• El problema general de la confección de la tabla de verdad para un enunciado lógico compuesto a partir de las proposiciones simples, se ejemplifica a continuación:

• Sea el enunciado compuesto:  $((p \vee \neg q) \wedge \neg p)$

Origina la siguiente tabla:

<b>p</b>	<b>q</b>	<b>(p</b>	<b>o</b>	<b>-q)</b>	<b>y</b>	<b>-p</b>

• El problema general de la confección de la tabla de verdad para un enunciado lógico compuesto a partir de las proposiciones simples, se ejemplifica a continuación:

• Sea el enunciado compuesto:  $((p \vee \neg q) \wedge \neg p)$

Origina la siguiente tabla:

<b>p</b>	<b>q</b>	<b>(p</b>	<b>o</b>	<b>-q)</b>	<b>y</b>	<b>-p</b>
<b>0</b>						
<b>0</b>						
<b>1</b>						
<b>1</b>						
<u>1°</u>						

• El problema general de la confección de la tabla de verdad para un enunciado lógico compuesto a partir de las proposiciones simples, se ejemplifica a continuación:

• Sea el enunciado compuesto:  $((p \vee \neg q) \wedge \neg p)$

Origina la siguiente tabla:

<b>p</b>	<b>q</b>	<b>(p</b>	<b>o</b>	<b>-q)</b>	<b>y</b>	<b>-p</b>
<b>0</b>	<b>0</b>					
<b>0</b>	<b>1</b>					
<b>1</b>	<b>0</b>					
<b>1</b>	<b>1</b>					
	<u>2°</u>					

• El problema general de la confección de la tabla de verdad para un enunciado lógico compuesto a partir de las proposiciones simples, se ejemplifica a continuación:

• Sea el enunciado compuesto:  $((p \vee \neg q) \wedge \neg p)$

Origina la siguiente tabla:

<b>p</b>	<b>q</b>	<b>(p</b>	<b>o</b>	<b>-q)</b>	<b>y</b>	<b>-p</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>				
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>				
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>				
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>				
		<u>3º</u>				

• El problema general de la confección de la tabla de verdad para un enunciado lógico compuesto a partir de las proposiciones simples, se ejemplifica a continuación:

• Sea el enunciado compuesto:  $((p \vee \neg q) \wedge \neg p)$

Origina la siguiente tabla:

<b>p</b>	<b>q</b>	<b>(p</b>	<b>o</b>	<b>-q)</b>	<b>y</b>	<b>-p</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>		<b>1</b>		
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>		<b>0</b>		
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>		<b>1</b>		
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>		<b>0</b>		
				<u>4°</u>		

• El problema general de la confección de la tabla de verdad para un enunciado lógico compuesto a partir de las proposiciones simples, se ejemplifica a continuación:

• Sea el enunciado compuesto:  $((p \vee \neg q) \wedge \neg p)$

Origina la siguiente tabla:

<b>p</b>	<b>q</b>	<b>(p</b>	<b>∨</b>	<b>¬q)</b>	<b>∧</b>	<b>¬p</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>		
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>		
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>		
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>		
			<u>5°</u>			

• El problema general de la confección de la tabla de verdad para un enunciado lógico compuesto a partir de las proposiciones simples, se ejemplifica a continuación:

• Sea el enunciado compuesto:  $((p \vee \neg q) \wedge \neg p)$

Origina la siguiente tabla:

<b>p</b>	<b>q</b>	<b>(p</b>	<b>o</b>	<b>-q)</b>	<b>y</b>	<b>-p</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>		<b>1</b>
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>		<b>1</b>
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>		<b>0</b>
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>		<b>0</b>
						<u>6°</u>

• El problema general de la confección de la tabla de verdad para un enunciado lógico compuesto a partir de las proposiciones simples, se ejemplifica a continuación:

• Sea el enunciado compuesto:  $((p \vee \neg q) \wedge \neg p)$

Origina la siguiente tabla:

<b>p</b>	<b>q</b>	<b>(p</b>	<b>∨</b>	<b>¬q)</b>	<b>∧</b>	<b>¬p</b>
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0
					<u>7°</u>	

final

- En el ejemplo visto, se puede verificar que el resultado obtenido es el mismo que correspondería a la simple **conjunción entre p y q, luego negadas** . De manera que:

$$((p \vee \neg q) \wedge \neg p) \equiv \neg(p \wedge q)$$

- La equivalencia anterior permite enunciar, sin que esto sea una demostración formal, el importante “Teorema de la Equivalencia Lógica”:

Dos enunciados lógicos compuestos diferentes, que tengan la misma tabla de verdad, son “lógicamente equivalentes” (o equivalentes o iguales desde el punto de vista lógico).

Esta afirmación es importante para las aplicaciones:

El “comportamiento lógico equivalente” puede extenderse a cualquier dispositivo cuyo funcionamiento responda a una tabla de verdad, en forma totalmente independiente de la naturaleza del mismo.

• Dos equivalencias entre enunciados compuestos son de gran trascendencia tanto teórica como en las aplicaciones del álgebra proposicional. Se conocen como leyes de De Morgan y se pueden expresar simbólicamente:

$$1. \quad \neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$2. \quad \neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

• Para la demostración de la equivalencia lógica se confeccionan las tablas de verdad correspondientes a cada miembro del enunciado, verificando así la igualdad de los resultados:

p	q	¬	(p	∨	q)		¬p	∧	¬q
						≡			

• Dos equivalencias entre enunciados compuestos son de gran trascendencia tanto teórica como en las aplicaciones del álgebra proposicional. Se conocen como leyes de De Morgan y se pueden expresar simbólicamente:

$$1. \quad \neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$2. \quad \neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

• Para la demostración de la equivalencia lógica se confeccionan las tablas de verdad correspondientes a cada miembro del enunciado, verificando así la igualdad de los resultados:

p	q	¬	(p	∨	q)		¬p	∧	¬q
	0								
	1								
	0								
	1								
	<u>1°</u>					≡			

• Dos equivalencias entre enunciados compuestos son de gran trascendencia tanto teórica como en las aplicaciones del álgebra proposicional. Se conocen como leyes de De Morgan y se pueden expresar simbólicamente:

$$1. \quad \neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$2. \quad \neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

• Para la demostración de la equivalencia lógica se confeccionan las tablas de verdad correspondientes a cada miembro del enunciado, verificando así la igualdad de los resultados:

p	q	¬	(p	∨	q)		¬p	∧	¬q
0	0								
0	1								
1	0								
1	1								
<u>2°</u>						≡			

• Dos equivalencias entre enunciados compuestos son de gran trascendencia tanto teórica como en las aplicaciones del álgebra proposicional. Se conocen como leyes de De Morgan y se pueden expresar simbólicamente:

$$1. \quad \neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$2. \quad \neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

• Para la demostración de la equivalencia lógica se confeccionan las tablas de verdad correspondientes a cada miembro del enunciado, verificando así la igualdad de los resultados:

p	q	¬	(p	∨	q)		¬p	∧	¬q
0	0		0						
0	1		0						
1	0		1						
1	1		1						
			3°			≡			

• Dos equivalencias entre enunciados compuestos son de gran trascendencia tanto teórica como en las aplicaciones del álgebra proposicional. Se conocen como leyes de De Morgan y se pueden expresar simbólicamente:

$$1. \quad \neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$2. \quad \neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

• Para la demostración de la equivalencia lógica se confeccionan las tablas de verdad correspondientes a cada miembro del enunciado, verificando así la igualdad de los resultados:

p	q	¬	(p	∨	q)		¬p	∧	¬q
0	0		0		0				
0	1		0		1				
1	0		1		0				
1	1		1		1				
					4°	≡			

• Dos equivalencias entre enunciados compuestos son de gran trascendencia tanto teórica como en las aplicaciones del álgebra proposicional. Se conocen como leyes de De Morgan y se pueden expresar simbólicamente:

$$1. \quad \neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$2. \quad \neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

• Para la demostración de la equivalencia lógica se confeccionan las tablas de verdad correspondientes a cada miembro del enunciado, verificando así la igualdad de los resultados:

p	q	¬	(p	∨	q)		¬p	∧	¬q
0	0		0	0	0				
0	1		0	1	1				
1	0		1	1	0				
1	1		1	1	1				
				5°		≡			

• Dos equivalencias entre enunciados compuestos son de gran trascendencia tanto teórica como en las aplicaciones del álgebra proposicional. Se conocen como leyes de De Morgan y se pueden expresar simbólicamente:

$$1. \quad \neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$2. \quad \neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

• Para la demostración de la equivalencia lógica se confeccionan las tablas de verdad correspondientes a cada miembro del enunciado, verificando así la igualdad de los resultados:

p	q	¬	(p	∨	q)		¬p	∧	¬q
0	0	1	0	0	0				
0	1	0	0	1	1				
1	0	0	1	1	0				
1	1	0	1	1	1				
		<u>6°</u>				≡			

• Dos equivalencias entre enunciados compuestos son de gran trascendencia tanto teórica como en las aplicaciones del álgebra proposicional. Se conocen como leyes de De Morgan y se pueden expresar simbólicamente:

$$1. \quad \neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$2. \quad \neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

• Para la demostración de la equivalencia lógica se confeccionan las tablas de verdad correspondientes a cada miembro del enunciado, verificando así la igualdad de los resultados:

p	q	¬	(p	∨	q)		¬p	∧	¬q
0	0	1	0	0	0		1		
0	1	0	0	1	1		1		
1	0	0	1	1	0		0		
1	1	0	1	1	1		0		
						≡	<u>7°</u>		

• Dos equivalencias entre enunciados compuestos son de gran trascendencia tanto teórica como en las aplicaciones del álgebra proposicional. Se conocen como leyes de De Morgan y se pueden expresar simbólicamente:

$$1. \quad \neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$2. \quad \neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

• Para la demostración de la equivalencia lógica se confeccionan las tablas de verdad correspondientes a cada miembro del enunciado, verificando así la igualdad de los resultados:

p	q	¬	(p	∨	q)		¬p	∧	¬q
0	0	1	0	0	0		1		1
0	1	0	0	1	1		1		0
1	0	0	1	1	0		0		1
1	1	0	1	1	1		0		0
						≡			<u>8°</u>

• Dos equivalencias entre enunciados compuestos son de gran trascendencia tanto teórica como en las aplicaciones del álgebra proposicional. Se conocen como leyes de De Morgan y se pueden expresar simbólicamente:

$$1. \quad \neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$2. \quad \neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

• Para la demostración de la equivalencia lógica se confeccionan las tablas de verdad correspondientes a cada miembro del enunciado, verificando así la igualdad de los resultados:

p	q	¬	(p	∨	q)		¬p	∧	¬q
0	0	1	0	0	0		1	1	1
0	1	0	0	1	1		1	0	0
1	0	0	1	1	0		0	0	1
1	1	0	1	1	1		0	0	0
						≡		<u>9°</u>	

• Dos equivalencias entre enunciados compuestos son de gran trascendencia tanto teórica como en las aplicaciones del álgebra proposicional. Se conocen como leyes de De Morgan y se pueden expresar simbólicamente:

$$1. \quad \neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$2. \quad \neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

• Para la demostración de la equivalencia lógica se confeccionan las tablas de verdad correspondientes a cada miembro del enunciado, verificando así la igualdad de los resultados:

p	q	¬	(p	∨	q)		¬p	∧	¬q
0	0	1	0	0	0		1	1	1
0	1	0	0	1	1		1	0	0
1	0	0	1	1	0		0	0	1
1	1	0	1	1	1		0	0	0
						≡			

- Para la segunda ley de De Morgan se tiene:

p	q	$\neg$	(p	y	q)		$\neg$ p	$\neg$ q	$\neg$ (p	y	q)
0	0	1	0	0	0		1	1	1		
0	1	1	0	0	1		1	0	0		
1	0	1	1	0	0		0	1	1		
1	1	0	1	1	1		0	0	0		
						$\equiv$					

## 5. Clasificación de enunciados.

Sea la proposición **p**: **reina la paz**; si le aplicamos algunos conectivos lógicos podemos expresar enunciados tales como:

1. **-p**: **existe una guerra**
2. **( p o -p )**: **reina la paz o existe una guerra**
3. **( p y -p )**: **reina la paz y existe una guerra**

Mientras que 1. puede ser “v” o “f”, mediante una comprobación empírica, 2. es siempre verdadero y 3. es intrínsecamente falso.

Estos dos últimos independientemente de los hechos reales.

**La veracidad de 2. y la falsedad de 3. son propias de sus estructuras lógicas, no importando el contenido de la proposición p.**

- Generalizando el concepto anterior, se puede afirmar que cuando una fórmula proposicional, tiene todos los resultados de la tabla de verdad que la describe “verdaderos”, se llama **“tautología”**.
- Si en cambio todas las consecuencias de un enunciado compuesto son “falsas”, se está frente a una **“contradicción”**.
- Finalmente, cuando la tabla de verdad que describe a un enunciado contiene tanto renglones “verdaderos” como “falsos”, se tiene una **“contingencia”**.

- Por razones de claridad en la exposición, en todo lo tratado hasta ahora en lo referente a conectivos lógicos, tablas de verdad y enunciados compuestos, se utilizaron solo dos proposiciones simples.
- Sin embargo los resultados se pueden generalizar a un número cualquiera de variables lógicas.
- Siendo dos, los posibles valores de verdad de cada proposición, el número total de filas  $n_f^o$  (o renglones) de la tabla, para “n” variables será:

$$n_f^o = 2^n$$

Es decir que para 2, 3, 4, 5 o mas variables lógicas, se tendrán respectivamente 4, 8, 16, 32, etc., filas o renglones.

- Como ejemplo se desarrolla la tabla de verdad de un enunciado compuesto, de tres proposiciones **p**, **q** y **r**:

$p \text{ y } (q \text{ o } r)$
---------------------------------

- Como ejemplo se desarrolla la tabla de verdad de un enunciado compuesto, de tres proposiciones  $p$ ,  $q$  y  $r$ :

$$p \text{ y } (q \text{ o } r)$$

$p$	$q$	$r$	$p$	$y$	$(q$	$o$	$r)$

- Como ejemplo se desarrolla la tabla de verdad de un enunciado compuesto, de tres proposiciones  $p$ ,  $q$  y  $r$ :

$$p \text{ y } (q \text{ o } r)$$

$p$	$q$	$r$	$p$	$y$	$(q$	$o$	$r)$
		0					
		1					
		0					
		1					
		0					
		1					
		0					
		1					
		1°					

- Como ejemplo se desarrolla la tabla de verdad de un enunciado compuesto, de tres proposiciones  $p$ ,  $q$  y  $r$ :

$$p \text{ y } (q \text{ o } r)$$

$p$	$q$	$r$	$p$	$y$	$(q$	$o$	$r)$
	0	0					
	0	1					
	1	0					
	1	1					
	0	0					
	0	1					
	1	0					
	1	1					
	2°						

- Como ejemplo se desarrolla la tabla de verdad de un enunciado compuesto, de tres proposiciones  $p$ ,  $q$  y  $r$ :

$$p \text{ y } (q \text{ o } r)$$

$p$	$q$	$r$	$p$	$y$	$(q$	$o$	$r)$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					
3°							

- Como ejemplo se desarrolla la tabla de verdad de un enunciado compuesto, de tres proposiciones  $p$ ,  $q$  y  $r$ :

$$p \text{ y } (q \text{ o } r)$$

$p$	$q$	$r$	$p$	$y$	$(q$	$o$	$r)$
0	0	0	0				
0	0	1	0				
0	1	0	0				
0	1	1	0				
1	0	0	1				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				
			4°				

- Como ejemplo se desarrolla la tabla de verdad de un enunciado compuesto, de tres proposiciones  $p$ ,  $q$  y  $r$ :

$$p \text{ y } (q \text{ o } r)$$

$p$	$q$	$r$	$p$	$y$	$(q$	$o$	$r)$
0	0	0	0		0		
0	0	1	0		0		
0	1	0	0		1		
0	1	1	0		1		
1	0	0	1		0		
1	0	1	1		0		
1	1	0	1		1		
1	1	1	1		1		
					5°		

- Como ejemplo se desarrolla la tabla de verdad de un enunciado compuesto, de tres proposiciones  $p$ ,  $q$  y  $r$ :

$$p \text{ y } (q \text{ o } r)$$

$p$	$q$	$r$	$p$	$y$	$(q$	$o$	$r)$
0	0	0	0		0		0
0	0	1	0		0		1
0	1	0	0		1		0
0	1	1	0		1		1
1	0	0	1		0		0
1	0	1	1		0		1
1	1	0	1		1		0
1	1	1	1		1		1
							6°

- Como ejemplo se desarrolla la tabla de verdad de un enunciado compuesto, de tres proposiciones  $p$ ,  $q$  y  $r$ :

$$p \text{ y } (q \text{ o } r)$$

$p$	$q$	$r$	$p$	$y$	$(q$	$o$	$r)$
0	0	0	0		0	0	0
0	0	1	0		0	1	1
0	1	0	0		1	1	0
0	1	1	0		1	1	1
1	0	0	1		0	0	0
1	0	1	1		0	1	1
1	1	0	1		1	1	0
1	1	1	1		1	1	1
						7°	

- Como ejemplo se desarrolla la tabla de verdad de un enunciado compuesto, de tres proposiciones  $p$ ,  $q$  y  $r$ :

$$p \text{ y } (q \text{ o } r)$$

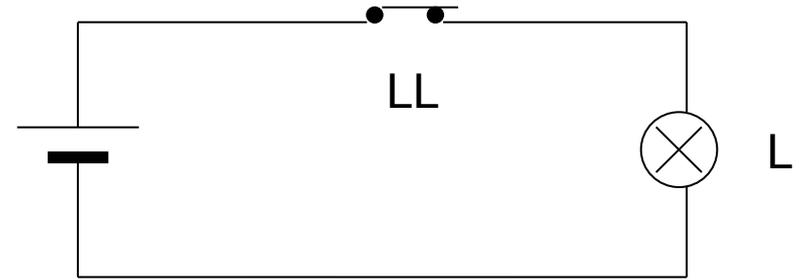
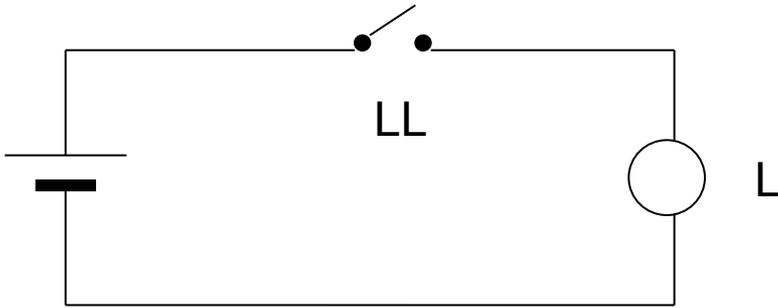
$p$	$q$	$r$	$p$	$y$	$(q$	$o$	$r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1
				8°			

## 6. Álgebra de Redes Eléctricas – (Circuitos Eléctricos Lógicos).

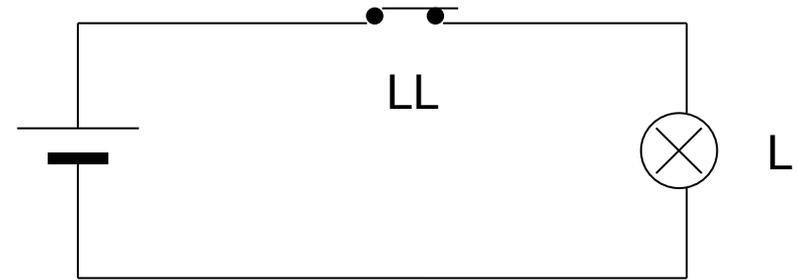
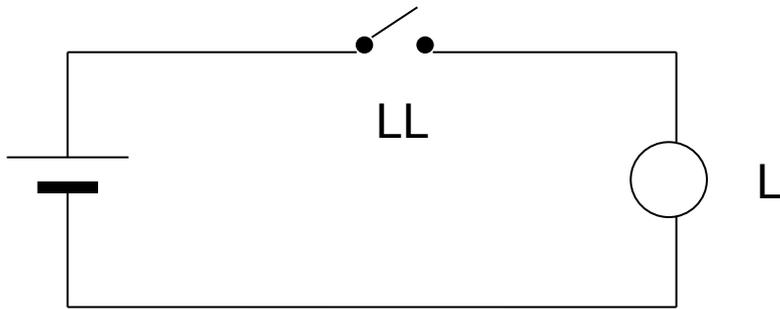
Se introducirá ahora el empleo de circuitos eléctricos simples para estudiar las relaciones lógicas entre proposiciones. Como se señaló al comienzo, el carácter bivalente de las proposiciones se expresa por “v” ó “f” o también por “1” ó “0”.

- Las dos posibilidades claramente diferentes pueden simbolizarse haciendo corresponder respectivamente a “v” (o “1”) una llave eléctrica cerrada (equivalente al paso de corriente por un circuito), mientras que la llave abierta (o interrupción de la corriente) significará “ f “ (o “0”), para la proposición en cuestión. También los dos estados pueden ser representados por una lámpara encendida (“1”) o apagada (“0”).
- No se trata de un mero simbolismo, sino que se establecerá una analogía fácilmente comprensible, que tiene específicas aplicaciones prácticas en la técnica

- Sea un circuito eléctrico elemental formado por una pila, una llave (LL) y una lámpara común (L):

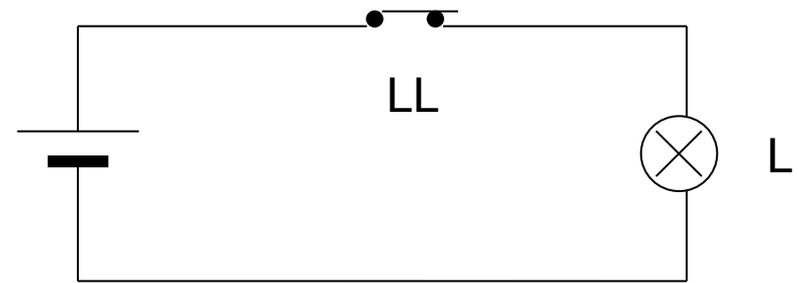
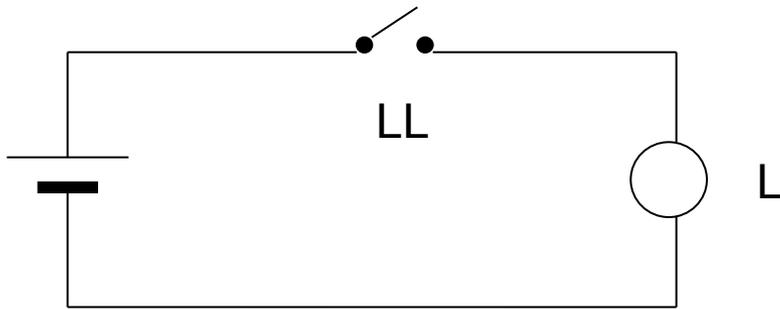


- Sea un circuito eléctrico elemental formado por una pila, una llave (LL) y una lámpara común (L):



- Con la llave (o interruptor) LL abierta la lámpara L está apagada, mientras que si se cierra LL, la lámpara brilla normalmente.

- Sea un circuito eléctrico elemental formado por una pila, una llave (LL) y una lámpara común (L):

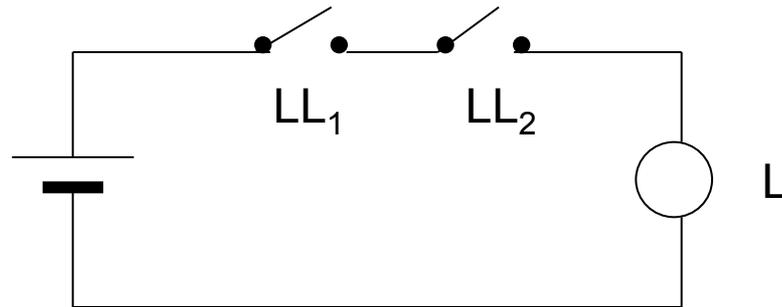


- Con la llave (o interruptor) LL abierta la lámpara L está apagada, mientras que si se cierra LL, la lámpara brilla normalmente.
- Si la llave y la lámpara representan proposiciones, pueden tenerse las siguientes equivalencias en los estados lógicos:

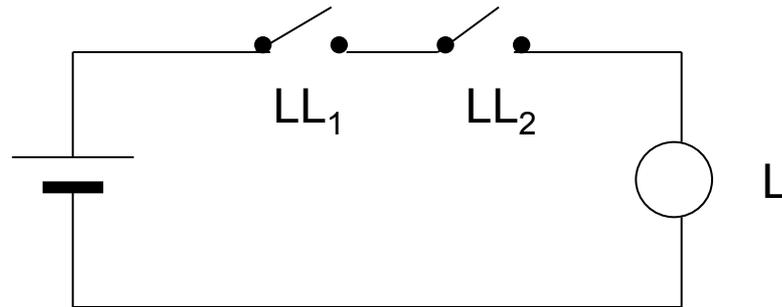
LL  $\rightarrow$  llave cerrada  $\equiv$  1  
 llave abierta  $\equiv$  0

L  $\rightarrow$  lámpara encendida  $\equiv$  1  
 lámpara apagada  $\equiv$  0

- Con la convención adoptada, supongamos tener el circuito anterior pero con una segunda llave conectada “en serie” con la primera:

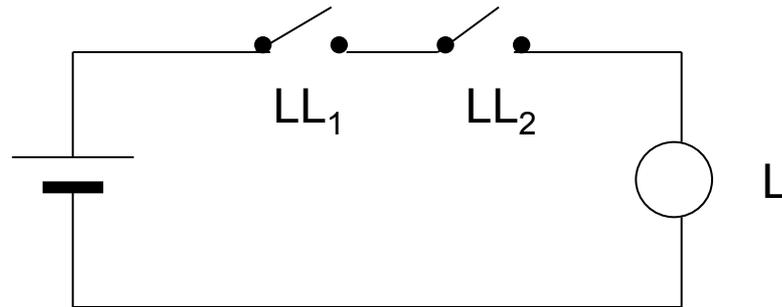


- Con la convención adoptada, supongamos tener el circuito anterior pero con una segunda llave conectada “en serie” con la primera:



- La lámpara se enciende solo si ambas llaves están cerradas. El comportamiento del circuito se describe en forma completa con su tabla de verdad, la cual es igual a la correspondiente a la **conjunción**.

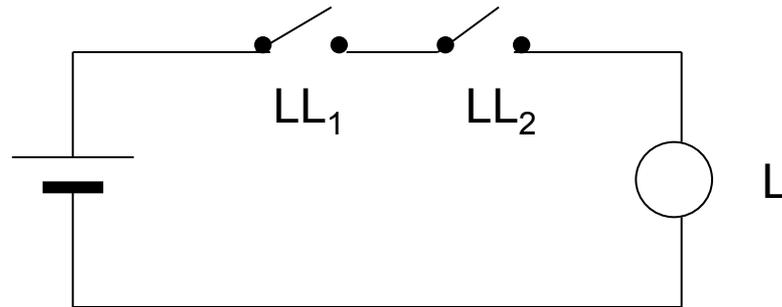
- Con la convención adoptada, supongamos tener el circuito anterior pero con una segunda llave conectada “en serie” con la primera:



- La lámpara se enciende solo si ambas llaves están cerradas. El comportamiento del circuito se describe en forma completa con su tabla de verdad, la cual es igual a la correspondiente a la **conjunción**.

$LL_1$	$LL_2$	$L$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Con la convención adoptada, supongamos tener el circuito anterior pero con una segunda llave conectada “en serie” con la primera:

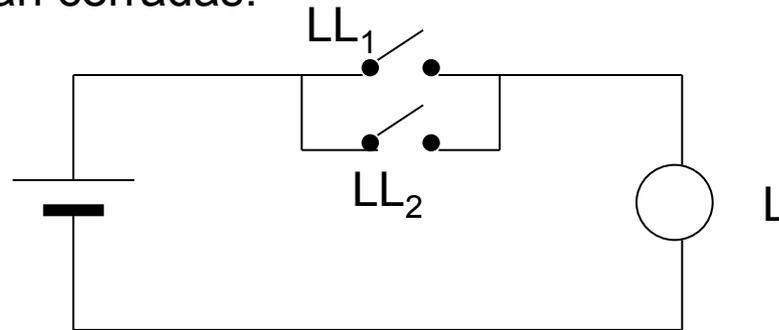


- La lámpara se enciende solo si ambas llaves están cerradas. El comportamiento del circuito se describe en forma completa con su tabla de verdad, la cual es igual a la correspondiente a la **conjunción**.

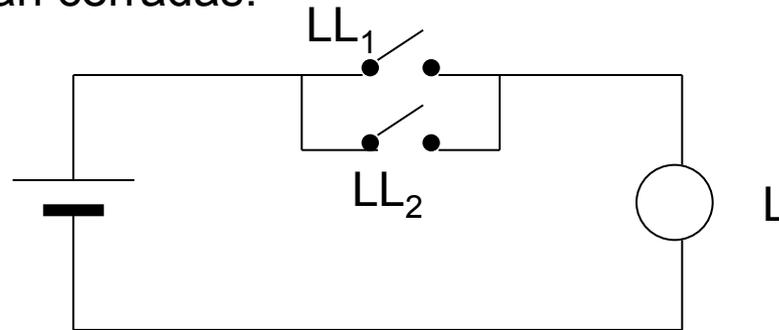
LL <sub>1</sub>	LL <sub>2</sub>	L
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Recordando el teorema de la equivalencia lógica se puede considerar en consecuencia, que el circuito propuesto, de **dos llaves “en serie”**, tiene un comportamiento lógico igual al conectivo “**y**”.

- Si al circuito original se le agrega ahora, la segunda llave pero conectada “en paralelo” con la primera, la lámpara brillará “si una cualquiera de las llaves o ambas”, están cerradas.



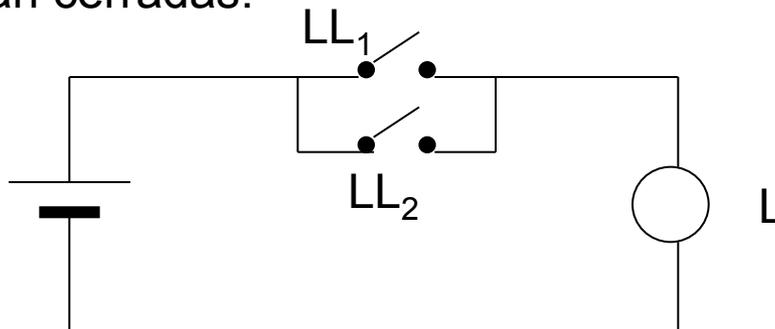
- Si al circuito original se le agrega ahora, la segunda llave pero conectada “en paralelo” con la primera, la lámpara brillará “si una cualquiera de las llaves o ambas”, están cerradas.



- El funcionamiento de este circuito responde ahora a una tabla de verdad igual a la tabla de la **disyunción**:

$LL_1$	$LL_2$	$L$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Si al circuito original se le agrega ahora, la segunda llave pero conectada “en paralelo” con la primera, la lámpara brillará “si una cualquiera de las llaves o ambas”, están cerradas.



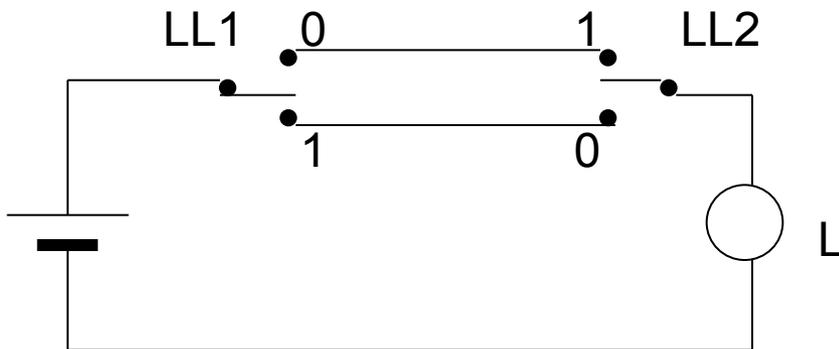
- El funcionamiento de este circuito responde ahora a una tabla de verdad igual a la tabla de la **disyunción**:

LL <sub>1</sub>	LL <sub>2</sub>	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

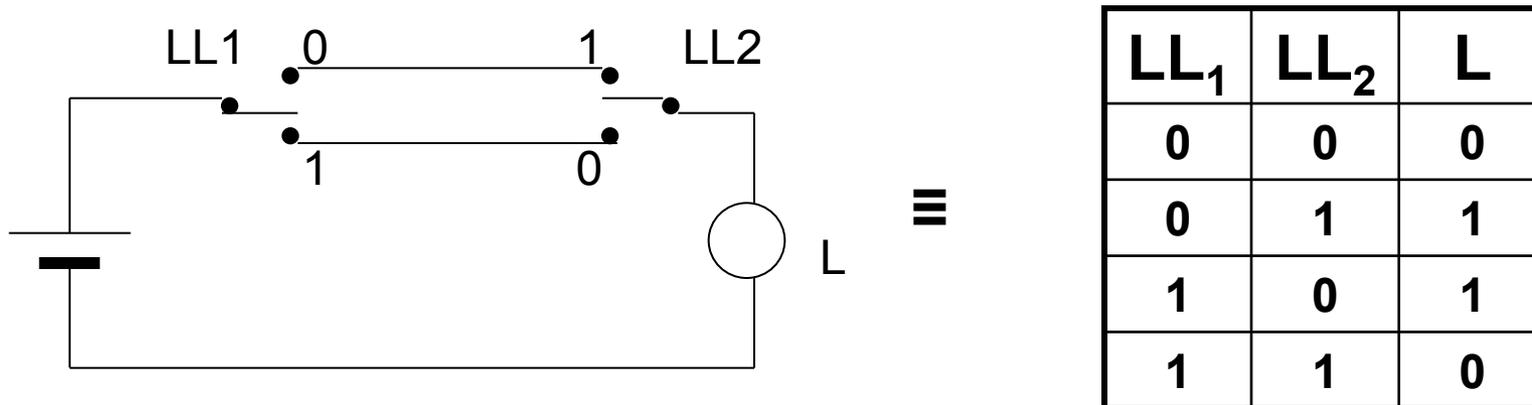
- En forma semejante al caso anterior, se puede tomar al circuito con “**dos llaves en paralelo**” como un circuito lógico semejante al conectivo “**o**”.

- Se tratará ahora de crear un circuito eléctrico simple cuyo comportamiento coincida lógicamente con la “**disyunción excluyente**” (“o”).

- Se tratará ahora de crear un circuito eléctrico simple cuyo comportamiento coincida lógicamente con la “**disyunción excluyente**” (“o”).
- En este caso la lámpara es comandada por dos llaves (LL1 y LL2) que en la jerga eléctrica suelen llamarse llaves de combinación o conmutadoras. Tienen dos posiciones estables identificadas en la figura como “0” y “1”. y la conexión es utilizada con el nombre de “combinación de escalera”.

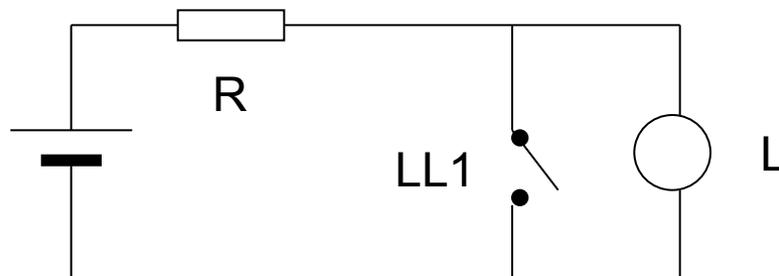


- Se tratará ahora de crear un circuito eléctrico simple cuyo comportamiento coincida lógicamente con la “**disyunción excluyente**” (“o”).
- En este caso la lámpara es comandada por dos llaves (LL1 y LL2) que en la jerga eléctrica suelen llamarse llaves de combinación o conmutadoras. Tienen dos posiciones estables identificadas en la figura como “0” y “1”. y la conexión es utilizada con el nombre de “combinación de escalera”.



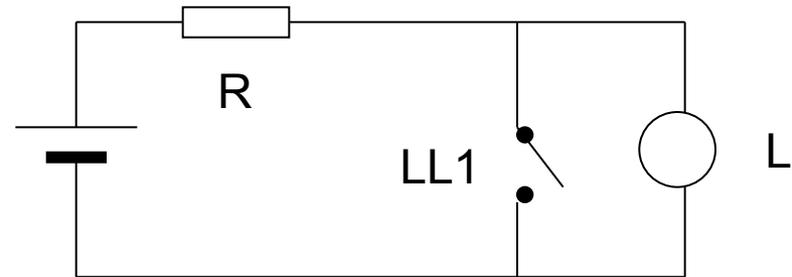
- El funcionamiento se comprende fácilmente. La lámpara solo brilla cuando las dos llaves están en posiciones de nombre opuesto. Con contactos de igual nombre, la lámpara permanece apagada.

- Finalmente se muestra un circuito eléctrico cuyo comportamiento es diferente a lo "normal".



- Finalmente se muestra un circuito eléctrico cuyo comportamiento es diferente a lo "normal".

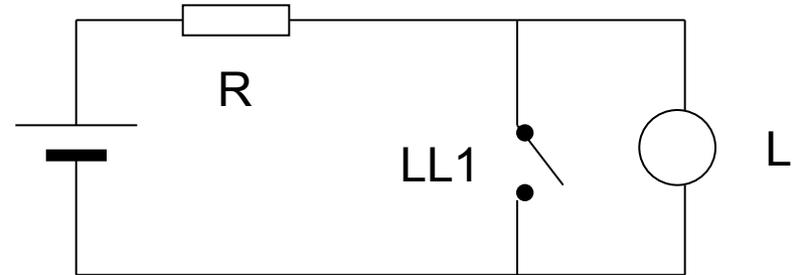
- En efecto, con la llave LL1 abierta (0) la lámpara está encendida(1), mientras que si LL1 se cierra(1) la lámpara se apaga (0).



- El elemento resistivo R se coloca para prevenir un cortocircuito directo cuando LL1 se cierra.

- Finalmente se muestra un circuito eléctrico cuyo comportamiento es diferente a lo "normal".

- En efecto, con la llave LL1 abierta (0) la lámpara está encendida (1), mientras que si LL1 se cierra (1) la lámpara se apaga (0).



- El elemento resistivo R se coloca para prevenir un cortocircuito directo cuando LL1 se cierra.

- La tabla de verdad correspondiente al funcionamiento del circuito, es igual a la del conector lógico “**Negación (-)**”

LL <sub>1</sub>	L
0	1
1	0

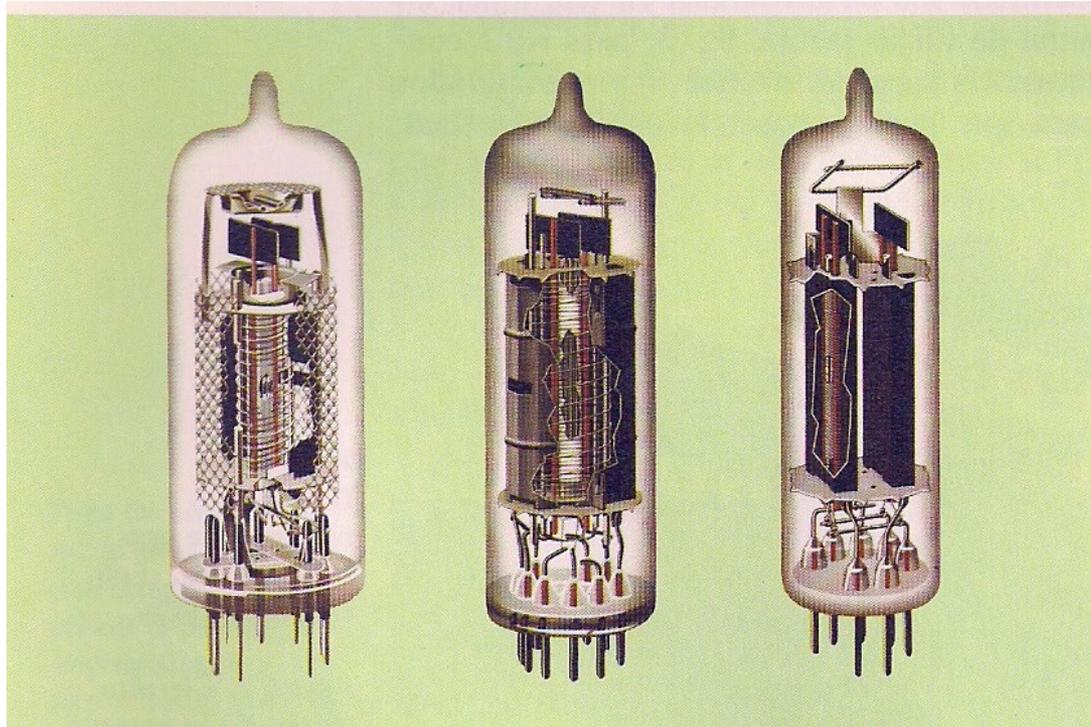
## **7. Compuertas lógicas - Generalización:**

- Hemos visto con cierto detalle, cuatro circuitos eléctricos simples cuyos funcionamientos se corresponden respectivamente con los cuatro conectivos lógicos básicos.
- Nuestro objetivo es mostrar como diferentes elementos, se han utilizado históricamente como “llaves”. Así se sintetizaron sistemas que si bien tenían diferentes aspectos (y tamaños), todos se comportaron siempre en la forma en que se describió anteriormente.
- Sin pretender profundizar en el funcionamiento de los dispositivos eléctricos y electrónicos que nombraremos, ya que esto pertenece a una especialidad de la técnica, solo se los describirá en forma superficial.

## 7.1. Relé electromecánico.

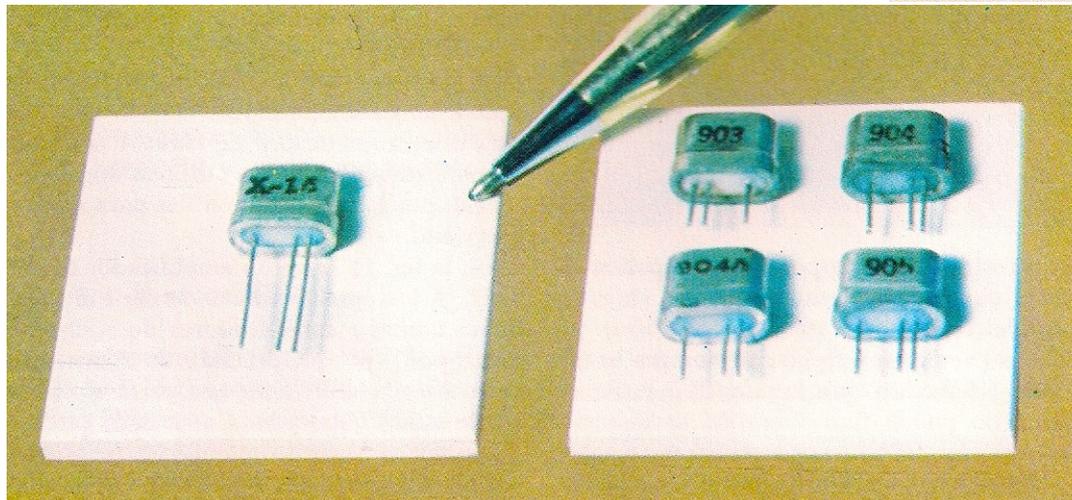
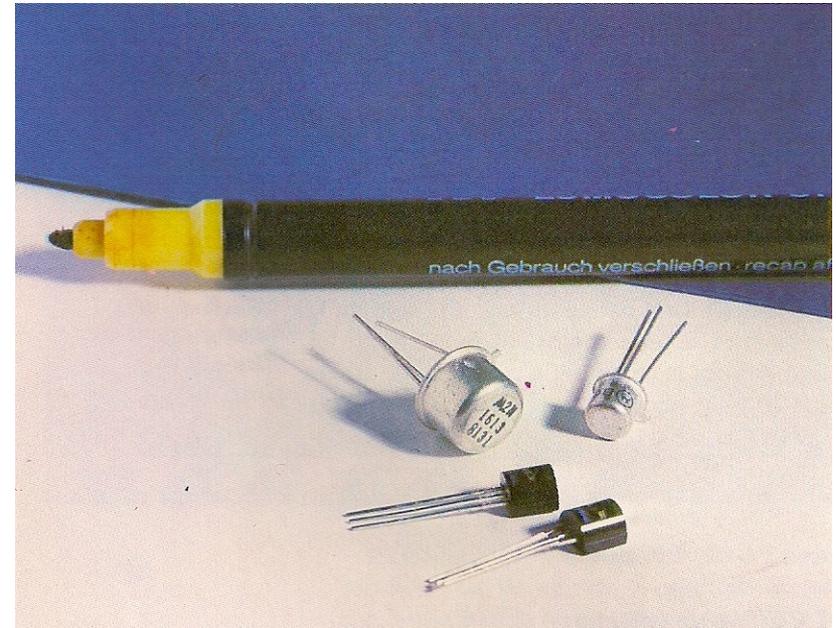
- Estamos familiarizados con las llaves eléctricas convencionales con las que manualmente encendemos las luces y accionamos cualquier electrodoméstico.
- Un “relé electromecánico” es simplemente una llave, accionada en forma eléctrica mediante una bobina, que al ser energizada, atrae magnéticamente una armadura que mueve los contactos eléctricos. Estos pueden ser simples, dobles, múltiples o inversores y forman parte directa de los circuitos lógicos.
- Los relés fueron utilizados en los comienzos de la telefonía y por supuesto, integrando circuitos lógicos, también en las primeras calculadoras y computadoras electromecánicas. Se señala que su tamaño es considerable y la velocidad de accionamiento se la puede calificar de “lenta”.

## 7.2. Válvulas electrónicas o termoiónicas o también tubos de vacío.



- La válvula de vacío fue utilizada en electrónica (radio, televisión y amplificación de sonido) desde su invención a comienzos del siglo pasado, hasta hace pocos años. También se pudo emplear como llave.
- Básicamente consiste en una ampolla de vidrio donde se hace “vacío” y dentro de la cual hay electrodos metálicos. Entre dos de ellos puede circular una corriente eléctrica, que puede ser interrumpida por el potencial de otro electrodo.
- El funcionamiento como “llave” resulta así sin movimiento mecánico alguno, ganándose de esta forma velocidad de accionamiento. Exigía gran energía para funcionar lo que se traducía en excesivo calor.
- Fue utilizada en circuitos lógicos de computación hasta aproximadamente 1955.

**Transistores** Son elementos de estado sólido, fabricados inicialmente a partir del elemento Germanio y modernamente a partir del abundantísimo Silicio.



Destacamos su pequeñez frente a la válvula de vacío.

- El transistor, desde su invención en 1947, comenzó a reemplazar a la válvula de vacío en todas sus aplicaciones electrónicas, ya que, aunque basándose en principios físicos diferentes, también permite controlar una corriente eléctrica de cierto valor, mediante otra corriente mucho mas pequeña.
- Aunque inicialmente fue usado en la construcción de pequeños receptores de radio, rápidamente también se lo empleó como “llave”, incorporándolo a “circuitos lógicos”, sin partes mecánicas y con mucho menor consumo de energía (1955).
- La necesidad de interconectar varios transistores pequeños para construir un circuito lógico, llevó a la idea de crear en una misma plaquita de silicio, varios transistores debidamente unidos, formando un conjunto “sólido” al que se llamó “circuito integrado”.

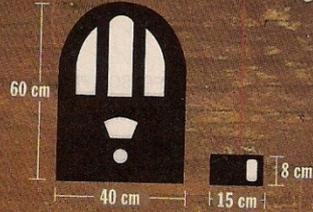
Reemplazó a las antiguas válvulas y permitió el diseño y fabricación de equipos electrónicos compactos.

#### VALVULA

Cumplía las mismas funciones que el transistor, pero era más cara, más grande y más frágil.

#### TRANSISTOR

Robusto, pequeño y liviano, más barato y confiable. Tiene una vida útil más prolongada que la de las válvulas.



Radio "Capilla"    Radio "Spica"

Las radios a válvula tardaban varios minutos en calentarse. Las radios de transistores funcionan al instante.

Reemplazó a las antiguas válvulas y permitió el diseño y fabricación de equipos electrónicos compactos.

**VALVULA**  
 Cumplía las mismas funciones que el transistor, pero era más cara, más grande y más frágil.

**TRANSISTOR**  
 Robusto, pequeño y liviano, más barato y confiable. Tiene una vida útil más prolongada que la de las válvulas.

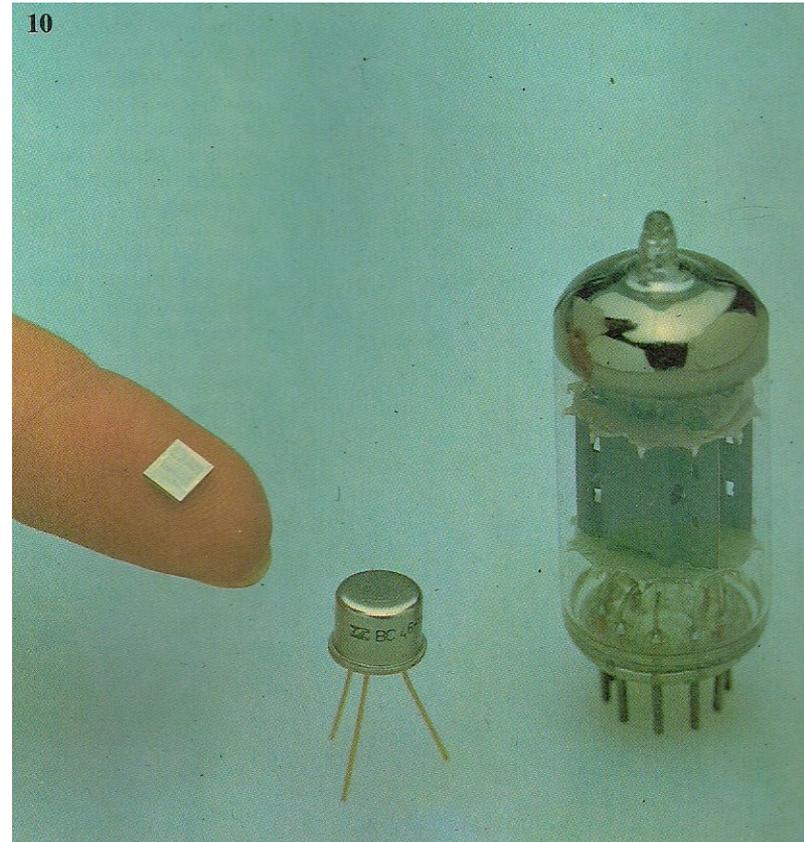
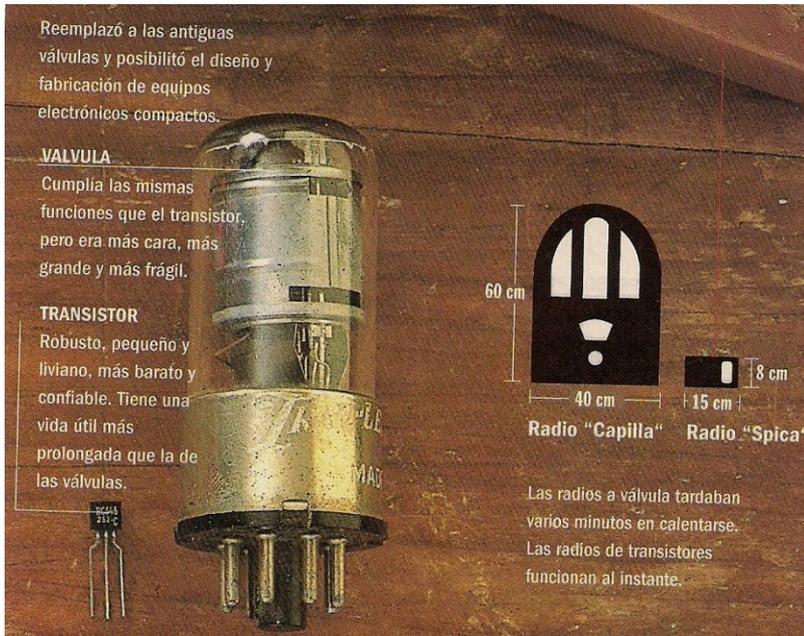
60 cm  
40 cm  
8 cm  
15 cm

Radio "Capilla" Radio "Spica"

Las radios a válvula tardaban varios minutos en calentarse.  
 Las radios de transistores funcionan al instante.



## Válvula, transistor y circuito integrado



- La noción de “Circuito Lógico”, el teorema de la “Equivalencia Lógica” y la tecnología del “Circuito Integrado con Transistores”, nos lleva a definir un nuevo concepto: la **“Compuerta Lógica”**.
- En efecto, así como la noción de **“falso y verdadero”** fue reemplazada por la notación **“0 y 1”** y los dos estados “claramente diferentes” se hicieron corresponder respectivamente a **“llave abierta o cerrada”** o **“lampara apagada o encendida”**, adoptaremos ahora la **“Compuerta Lógica”**, que mediante un símbolo convencional, indicará un circuito integrado con transistores, que se comportará como un conectivo lógico básico .
- No nos preocupa el circuito eléctrico íntimo de la compuerta lógica, que suele ser técnicamente complicado. Nos interesa sí, la tabla de verdad correspondiente al funcionamiento, que por supuesto es conocida y sin cambios.
- A título informativo se señala que los **“0”** y **“1”** son en la realidad potenciales eléctricos ( por ejemplo **“0 y 5 voltios**), que provienen de una fuente de energía adecuada (acumuladores, pilas o línea domiciliaria).

Conectivo Lógico

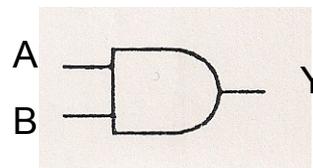
Compuerta Lógica

Símbolo

Tabla de Verdad

Conjunción

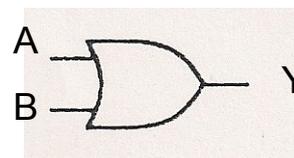
Y (AND)



A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disyunción

O (OR)



A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Disyunción Excluyente

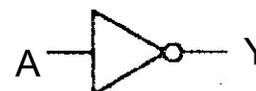
O (EXOR)



A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Negación (Inversor)

No (NOT)



A	Y
0	1
1	0

Teniendo razonablemente claras las ideas de “proposición”, “conectivos lógicos”, “tablas de verdad” y “compuertas lógicas básicas”, se estima que puede detenerse aquí el estudio de este tema y pasar al siguiente, Algebra de Boole, que tendrá un carácter aplicativo.

**Gracias por su atención**

**Se sugiere hacer comentarios**

**F i N**