Funciones Matemáticas

$$y = f(x)$$

Generalidades, clasificación y gráficos Cartesianos

Ir al Índice

Ing. Arturo Gustavo Tajani

Todos sabemos que el estudio de “Matemática” implica conocer y familiarizarse con enunciados, reglas, propiedades, conceptos, teoremas, procedimientos y muchas cosas mas.

Pero resulta interesante destacar que toda la estructura de esta ciencia, desde la mas elemental “aritmética”, hasta los mas complejos desarrollos del “análisis matemático” se basan en *dos conceptos* (que se consideran fundamentales):

El primero es la noción de “**NÚMERO”**; el segundo es el concepto de “**FUNCIÓN**”.

Se podría decir que éstos son como las dos “piernas” o “columnas” sobre las que se asientan la totalidad de los capítulos en que puede dividirse la compleja estructura que forma la “Matemática actual”.

Este trabajo se refiere, con cierto detalle, al concepto de “FUNCIÓN” y a las diferentes e infinitas formas que pueden adoptar en general “las FUNCIONES”.

Funciones; conceptos básicos:

En el mundo que nos rodea existen muchos ejemplos sencillos de la noción de función .

En efecto supongamos un simple viaje en taxi. Claramente en este caso hay *dos variables* que son, una la *"distancia a recorrer (d)"* y la otra el "*precio del viaje (p)"*. Por supuesto que todos sabemos que a cada distancia "d" le corresponde un precio "p" y solo uno.

En este ejemplo las dos variables tienen una diferencia fundamental; mientras que la distancia "d" la impone el pasajero de acuerdo a su necesidad, el precio del viaje "p" lo suministra el sistema. La variable "*d es independiente*" pero la variable "*p es dependiente*" de la primera.

Si aceptamos que la palabra "*depende*", puede reemplazarse por la expresión "*es función*", podemos decir que el precio del viaje "*depende" o "es función* "de la distancia recorrida. No hay ningún inconveniente en usar el siguiente simbolismo:

$$p = f(d)$$

y decir que "p" es función de "d".

Se puede generalizar lo anterior y definir "función" empleando un lenguaje sencillo, pero no demasiado riguroso.

Se dice que una variable "y" es función de otra variable "x", cuando entre ellas existe una expresión matemática tal que, a cada valor de "x" le hace corresponder un valor de "y" y sólo uno.

$$\boxed{y = f(x)}$$

Esta correspondencia "uno a uno" entre las variables se conoce como "unívoca".

La variable "x" se llama "variable *independiente*" o *"argumento*", mientras que a la "y" se la conoce como "variable *dependiente" o "función".*

El conjunto de valores que pueden ser asignados a "x" se llama "*Dominio D"* o "conjunto de partida" mientras que se conoce como "*Codominio CD*" o "conjunto de llegada", el que agrupa a los valores que puede tomar "y".

Dentro del codominio pueden existir elementos que no se correspondan con elementos del dominio; en ese caso se puede definir como *"conjunto imagen"* al que contiene solo aquellos valores que coincidan, por la función, con elementos del conjunto "x".

Destacamos que una función no es la expresión matemática o fórmula que relaciona a las variables, sino que es el conjunto de todos los pares ordenados (x_i ; y_i) que satisfacen a la expresión dada. No obstante, suele decirse que la fórmula define a la función, pero resulta indispensable expresar claramente el "dominio" de la misma.

Varios son los métodos de representación de las funciones:

1° - Mediante diagramas de Venn
2° - Con una matriz de dos columnas en correspondencia con las variables x e y .
3° - Mediante un gráfico Cartesiano.

Nos apoyaremos en un cuadro de valores o matriz, para lo cual, utilizando la expresión dada, se calcularán en cada caso los valores numéricos correspondientes a "y", para cada valor numérico arbitrario de "x". Si bien el número de puntos que se calculen es obviamente limitado, una razonable interpolación gráfica permitirá conocer la "forma" de la función llevando los pares a coincidir con los puntos de un "grafico Cartesiano".

Debemos considerar que las expresiones matemáticas que relacionan a las variables son "infinitas". Se tratará de probar esta afirmación, pero para un estudio sistemático de las funciones las agruparemos en "familias" con características particulares.

1. *Primera clasificación de las funciones matemáticas:*

Funciones Matemáticas
- Funciones Algebraicas
- Funciones Trascendentes
- Funciones Especiales

Pero veremos una clasificación mas detallada:

2.

Funciones Algebraicas

- Racional Entera
  - Lineal o de 1° grado
  - Cuadrática o de 2° grado
  - Cúbica o de 3° grado
  - Polinomio general grado “n”
- Racional Fraccionaria
  - Hiperbólica
  - Homográfica
  - Fraccionaria General
- Irracional

3.

Funciones Trascendentes

- Exponencial
  - Creciente
  - Decreciente
- Logarítmica
  - Log. Decimales
  - Log. Naturales
- Trigonométricas
  - Directas: Sen, Cos, Tg, Ctg, Sec y Cosec
  - Inversas: arc.sen, arc.cos, etc.
- Hiperbólicas
  - Directas Sh, Ch, Th.
  - Inversas: arg.sh, arg.ch, etc.

4.

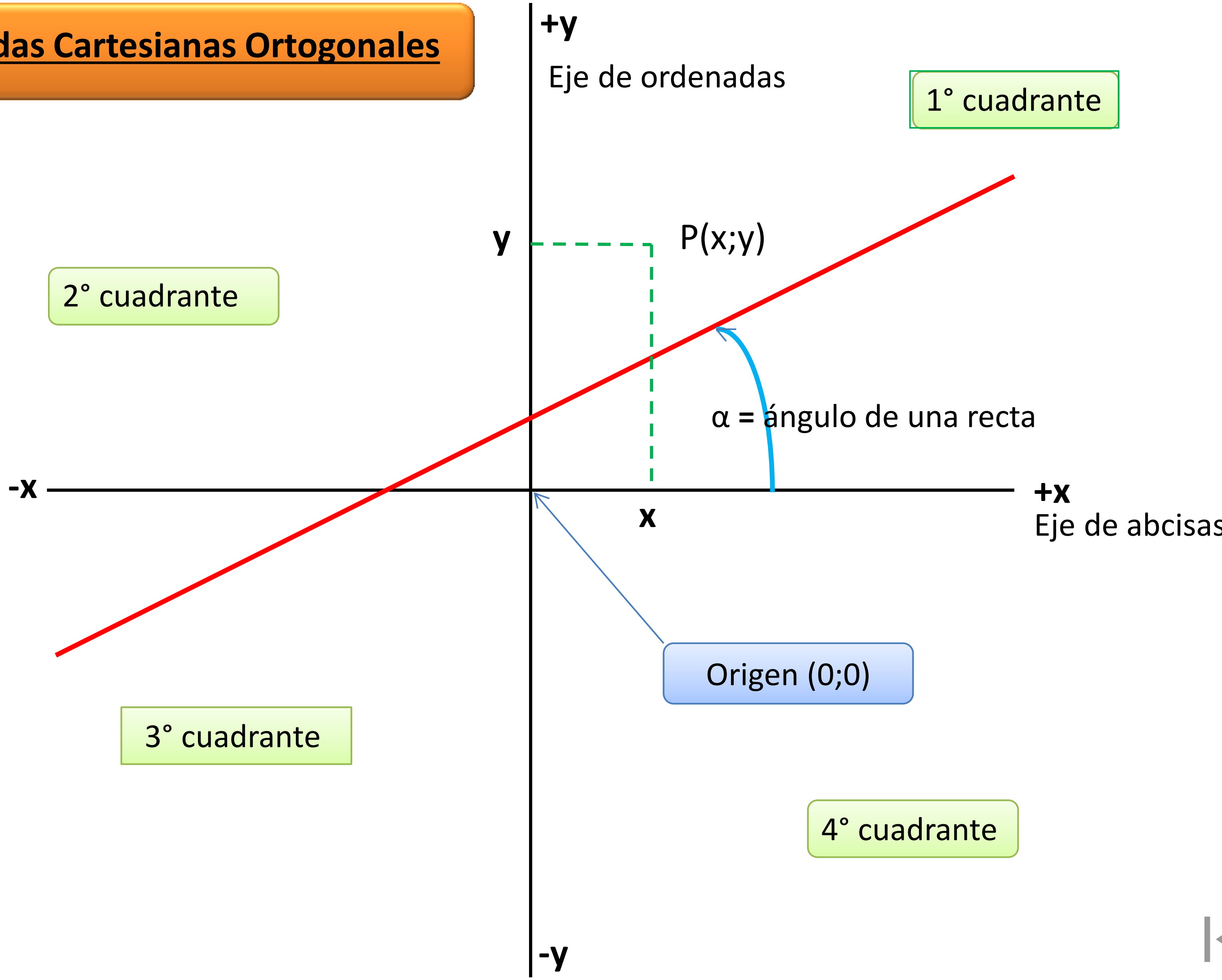
Funciones Especiales

- Lineales
  - Módulo
  - Signo
  - Parte Entera
  - Mantisa
- Operaciones entre funciones.
  - Suma, Resta, Producto y Cociente
- Compuesta o función de función.
- Paramétricas
- Definida por tramos

5.

- **Funciones Matemáticas**
  - Algebraicas
    - Racional Entera
      - Lineal o de 1° grado
      - Cuadrática o de 2° grado
      - Cúbica o de 3° grado
      - Polinomio general grado “n”
    - Racional Fraccionaria
      - Hiperbólica
      - Homográfica
      - Fraccionaria General
    - Irracional
  - Trascendentes
    - Exponencial
      - Creciente
      - Decreciente
    - Logarítmica
      - Log. Decimales
      - Log. Naturales
    - Trigonométricas
      - Directas: Sen, Cos, Tg, Ctg, Sec y Cosec
      - Inversas: arc.sen, arc.cos, etc.
    - Hiperbólicas
      - Directas Sh, Ch, Th.
      - Inversas: arg.sh, arg.ch, etc.
  - Especiales
    - Lineales
      - Módulo
      - Signo
      - Parte Entera
      - Mantisa
    - Operaciones entre funciones.
    - Compuesta o función de función.
    - Paramétricas
    - Definida por tramos

Coordenadas Cartesianas Ortogonales



1 - Función de 1° grado o Función Lineal

$$\boxed{y = a\,x + b}$$

La primera función que se estudia es la llamada: Función lineal: **y = a x + b**

El nombre de "lineal" es debido a que, como se verá, en todos los casos la representación cartesiana de esta función es una "línea recta" situada en algún lugar del plano. El dominio y el codominio, debido a su simpleza, se extiende a todos los números reales: ***R***

Como ejemplo tomemos la expresión: **y = 2 x + 3**

Dándole a la variable "x" valores numéricos cualesquiera, se calculan los correspondientes valores de "y". Luego se puede construir el siguiente "cuadro" o "tabla de valores":

X	Y
1	5
2	7
3	9
-2	-1
-3,5	4
0	3

Cada par de valores (x;y) se puede representar en un gráfico cartesiano por un punto, haciéndole corresponder al mismo las coordenadas (x;y) en ese orden.

Si se unen con un trazo continuo los puntos indicados, se verá que están alineados según una recta. Se pueden obtener por cálculo todos los pares (x;y) de valores que se deseen y los puntos que se grafiquen seguirán estando sobre la recta anterior.

Los infinitos pares de valores (x;y) tienen una correspondencia biunívoca con los infinitos puntos de la recta.

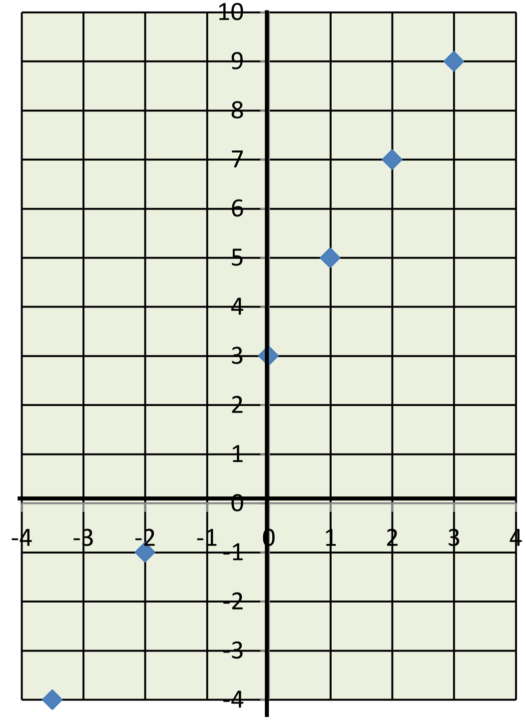
Por supuesto que, se puede trazar la recta correspondiente, calculando solo dos puntos cualesquiera (dos puntos determinan una recta).

Y = 2 x + 3 : <u>Gráfico cartesiano</u>

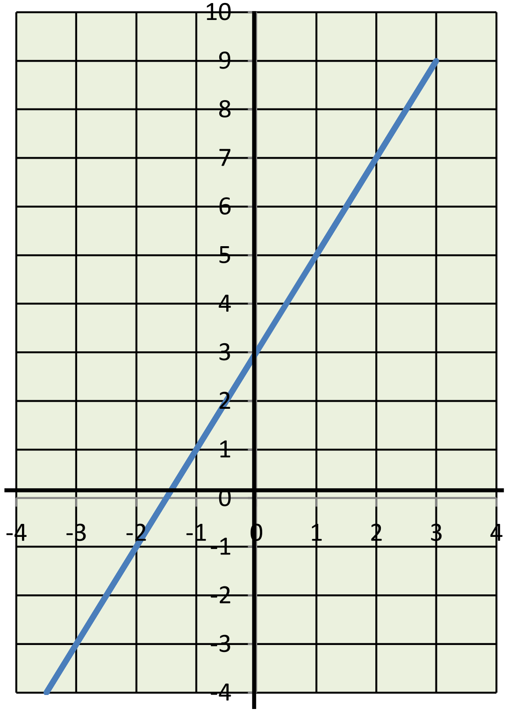
Cuadro de valores

X	Y
1	5
2	7
3	9
-2	-1
-3,5	4
0	3

Puntos aislados



Recta completa



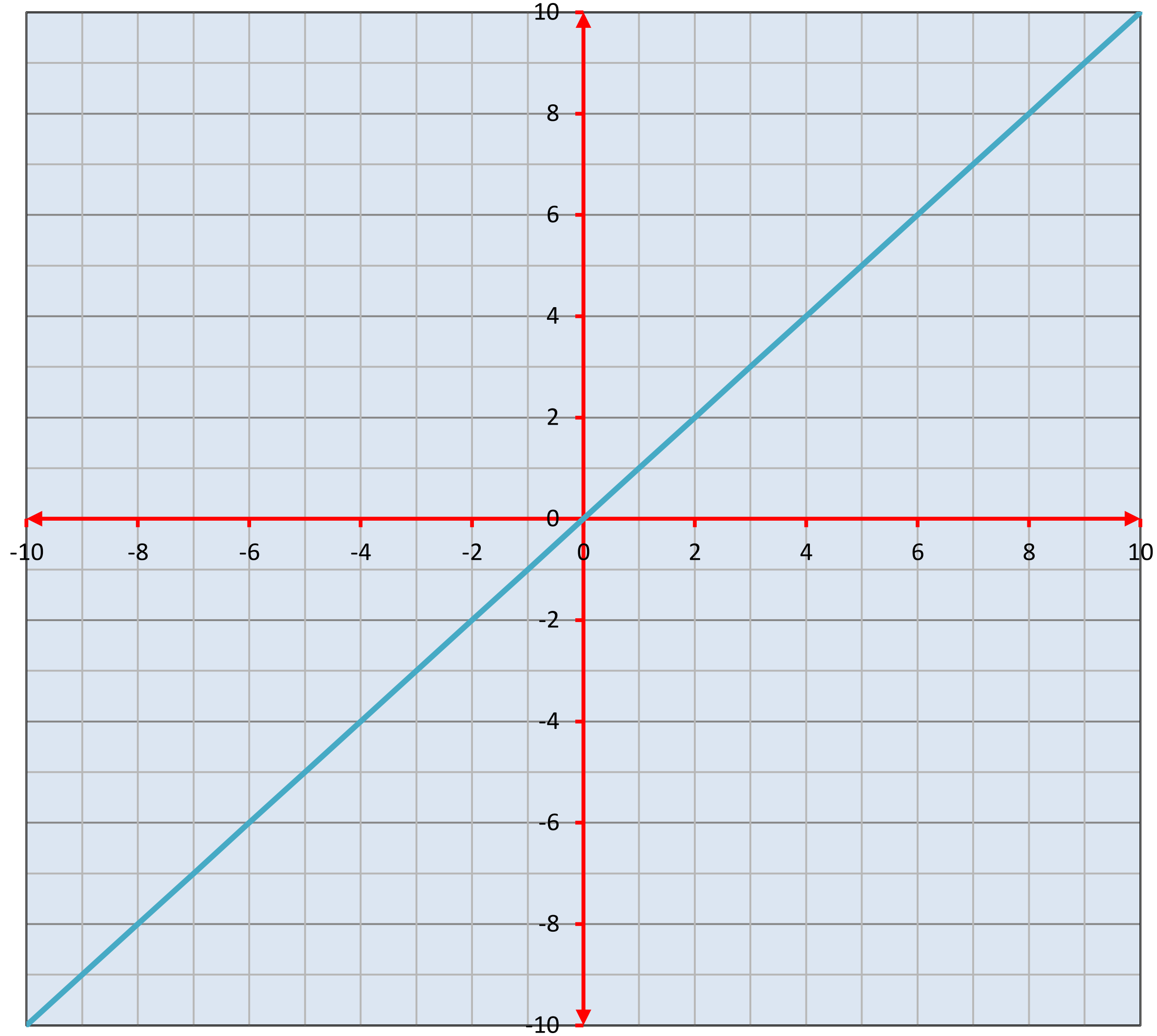
En lo que sigue, estudiaremos separadamente la influencia que tienen en la posición de la recta, los infinitos valores numéricos posibles para los parámetros **"a"** y **"b"** de la función lineal **y = a x + b** .

Función lineal**:** **y = a x + b** ; para: **0 < a < ∞** (siempre positivo) y **b = 0**

Comenzamos con:

y = 1 x (celeste)

Y luego al coeficiente “a”, le asignamos varios valores menores que 1.



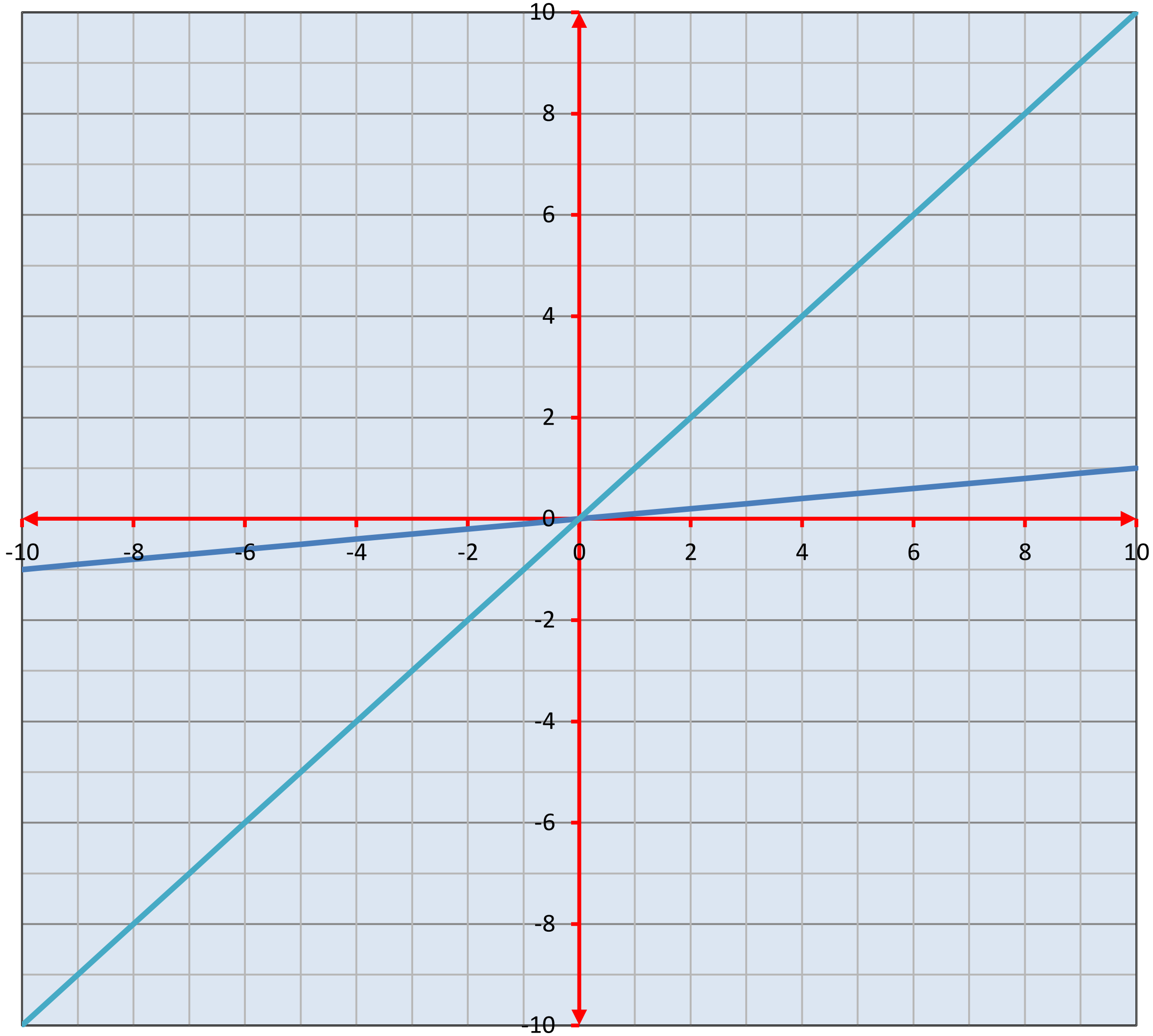
Función lineal: **y = a x + b** ; para: **0 < a < ∞** (siempre positivo) y **b = 0**

Comenzamos con:

y = 1 x (celeste)

Y luego al coeficiente "a", le asignamos varios valores menores que 1.

y = 0,1 x (azul)



<u>Función lineal</u>: **y = a x + b** ; para: **0 < a < ∞** (siempre positivo) y **b = 0**

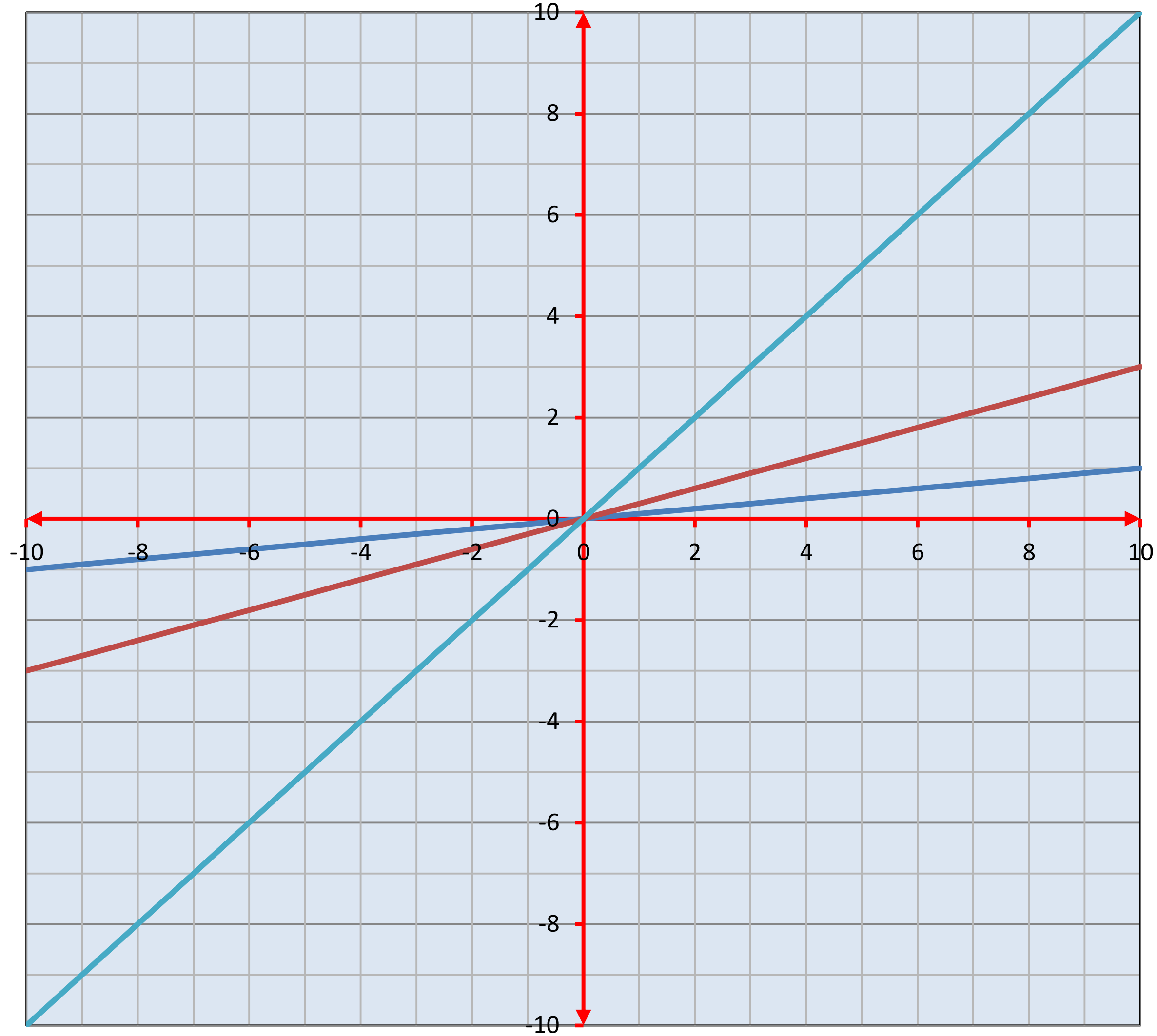
Comenzamos con:

y = 1 x (celeste)

Y luego al coeficiente "a", le asignamos varios valores menores que 1.

y = 0,1 x (azul)

y = 0,3 x (rojo)



Función lineal: $y = a\,x + b$; para: $0 < a < \infty$ (siempre positivo) y $b = 0$

Comenzamos con:

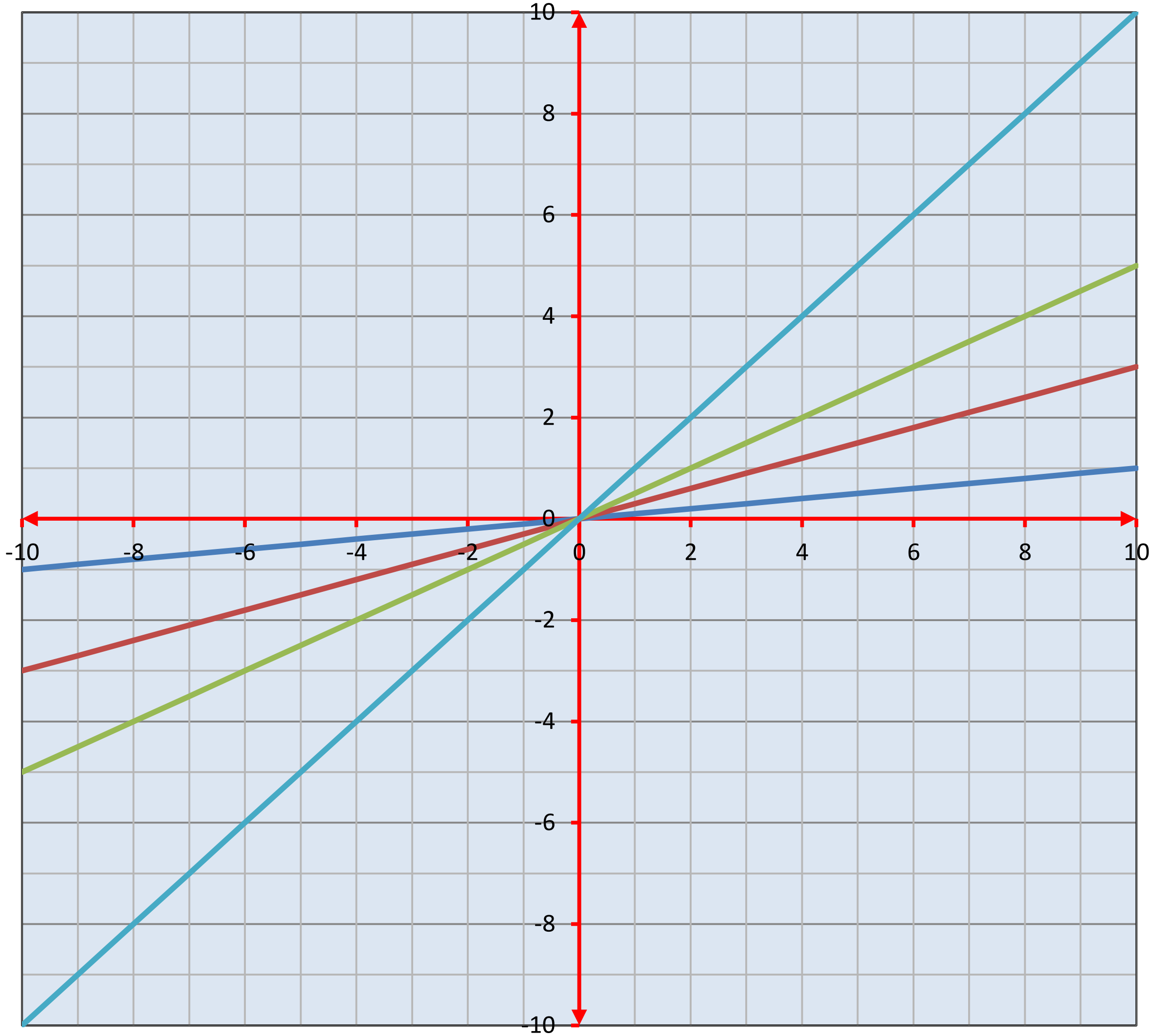
y = 1 x (celeste)

Y luego al coeficiente "a", le asignamos varios valores menores que 1.

y = 0,1 x (azul)

y = 0,3 x (rojo)

y = 0,5 x (verde)



<u>Función lineal</u>: **y = a x + b** ; para: **0 < a < ∞** (siempre positivo) y **b = 0**

Comenzamos con:

y = 1 x (celeste)

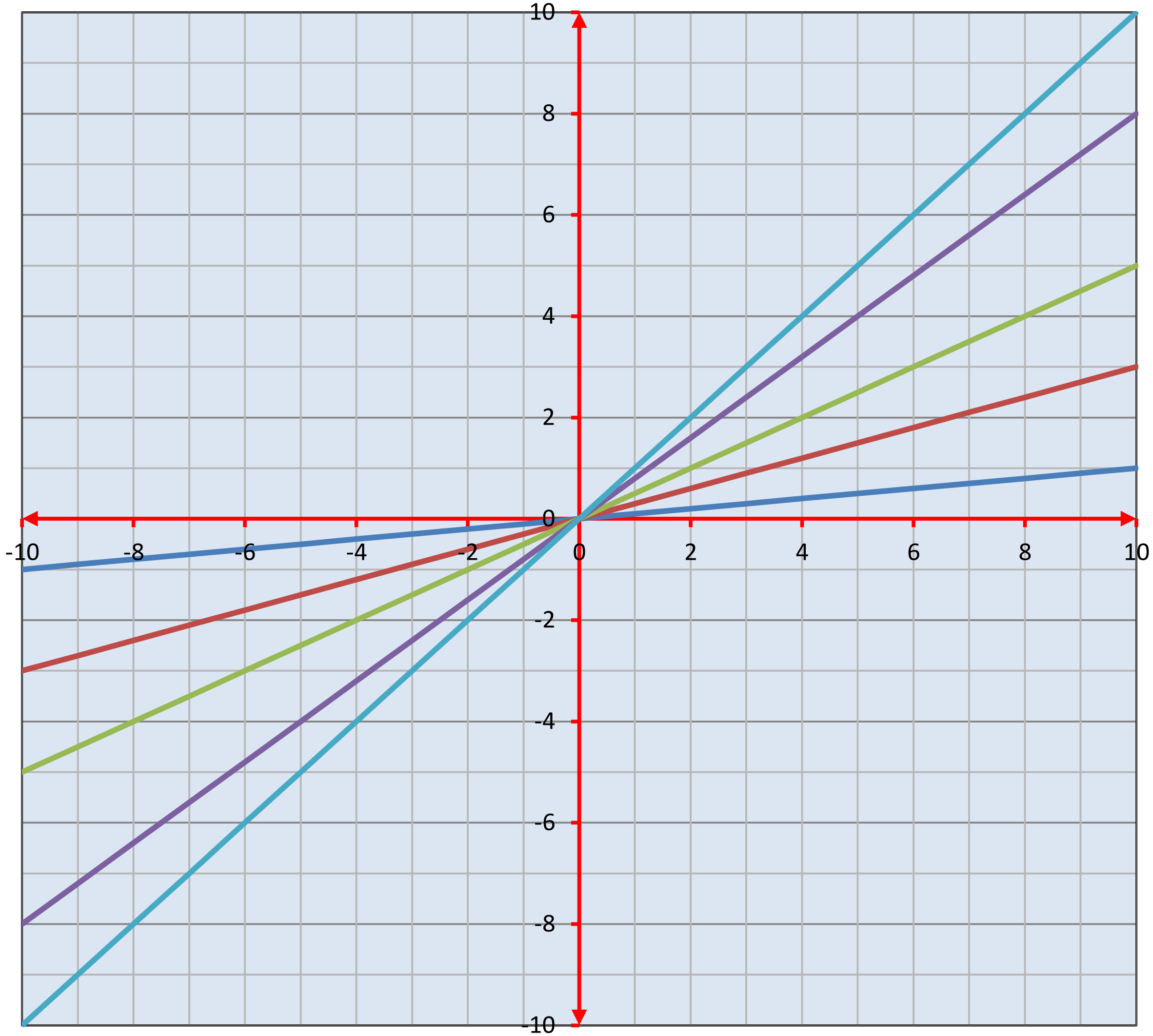
Y luego al coeficiente “a”, le asignamos varios valores menores que 1.

y = 0,1 x (azul)

y = 0,3 x (rojo)

y = 0,5 x (verde)

Y = 0,8 x (violeta)



$\underline{\text{Función lineal}}$**:** **y = a x + b** ; para: **0 < a < ∞** (siempre positivo) y **b = 0**

Comenzamos con:

y = 1 x (celeste)

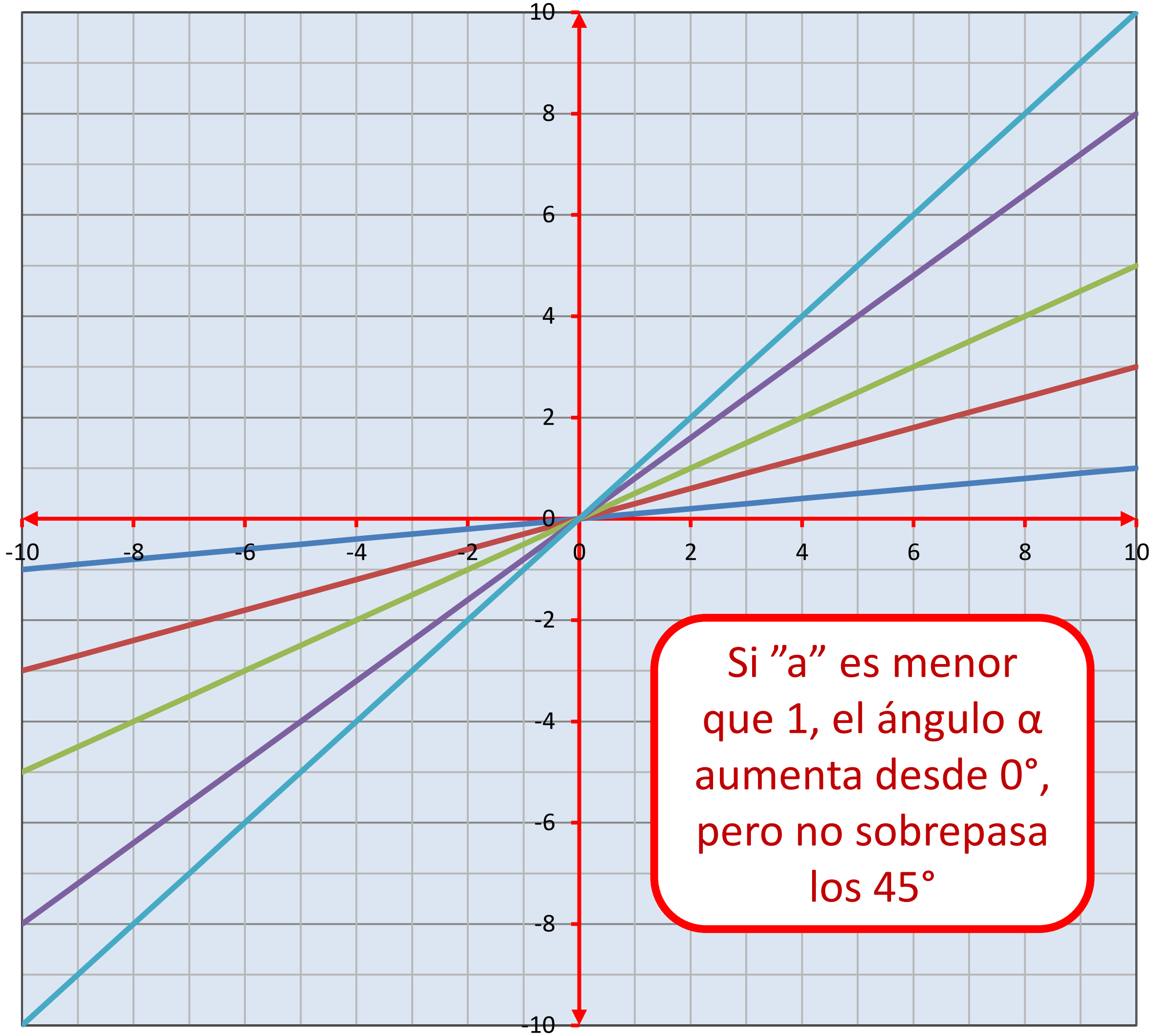
Y luego al coeficiente "a", le asignamos varios valores menores que 1.

y = 0,1 x (azul)

y = 0,3 x (rojo)

y = 0,5 x (verde)

Y = 0,8 x (violeta)

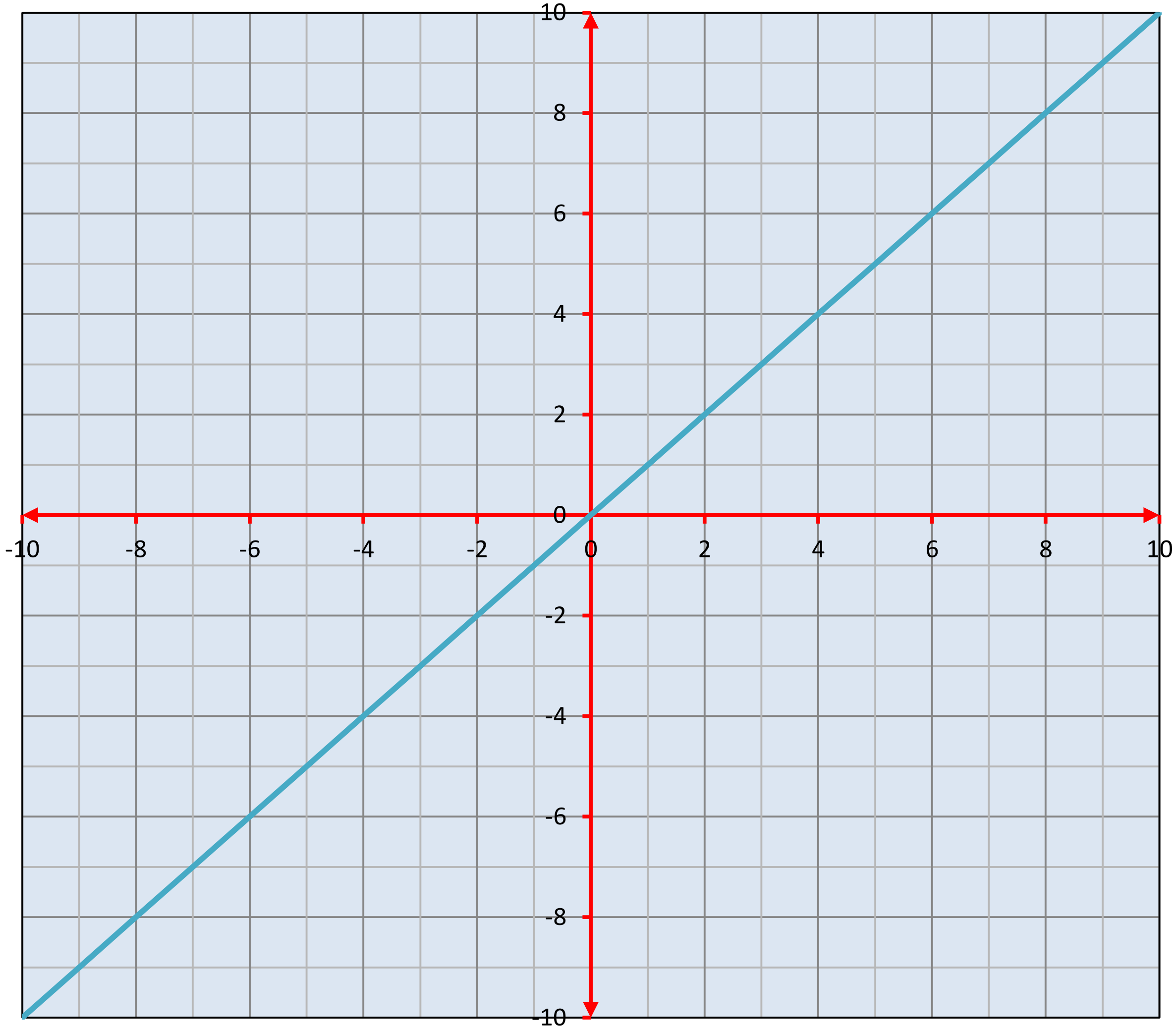


<u>Función lineal</u>: **y = a x + b** ; para: **0 < a < ∞** (siempre positivo) y **b = 0**

Ahora al coeficiente “a”, le damos algunos valores mayores que 1

Comenzamos con:

y = 1 x (celeste)



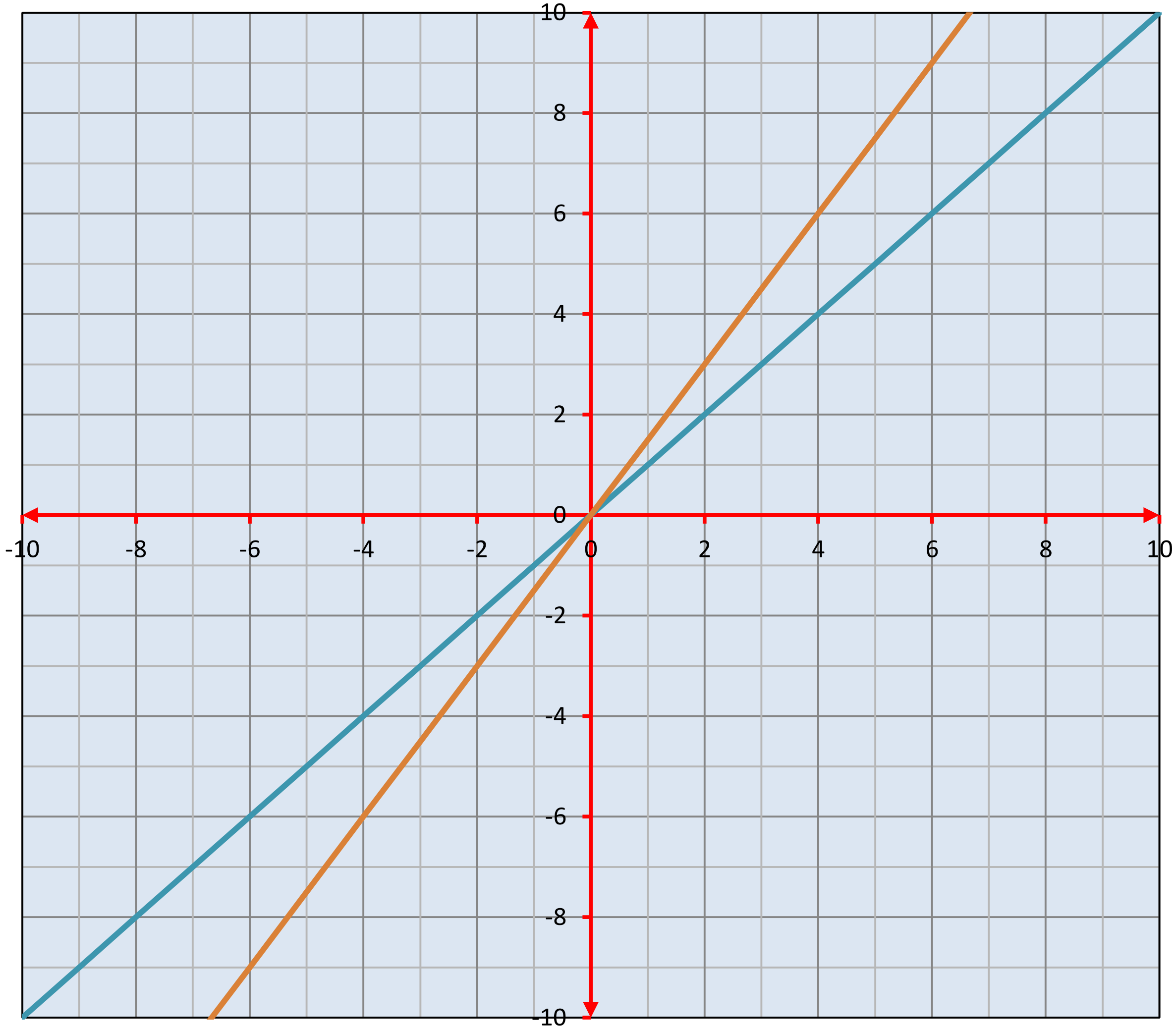
Función lineal: $y = a\,x + b$; para: $0 < a < \infty$ (siempre positivo) y $b = 0$

Ahora al coeficiente "a", le damos algunos valores mayores que 1

Comenzamos con:

y = 1 x (celeste)

y = 1,5 x (naranja)



<u>Función lineal</u>: **y = a x + b** ; para: **0 < a < ∞** (siempre positivo) y **b = 0**

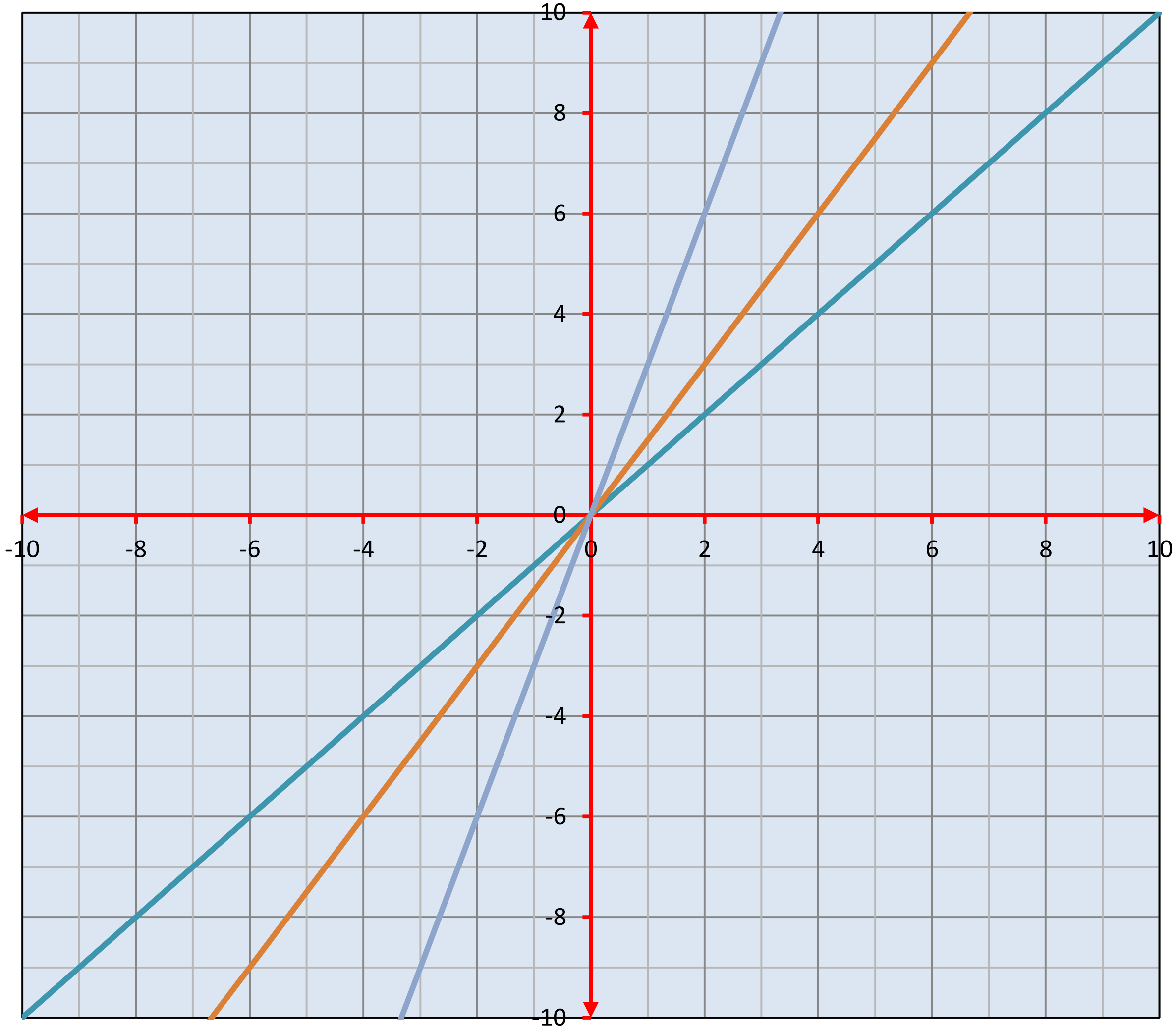
Ahora al coeficiente “a”, le damos algunos valores mayores que 1

Comenzamos con:

y = 1 x (celeste)

y = 1,5 x (naranja)

y = 3 x (azul)



Función lineal: $y = a\,x + b$; para: $0 < a < \infty$ (siempre positivo) y $b = 0$

Ahora al coeficiente "a", le damos algunos valores mayores que 1

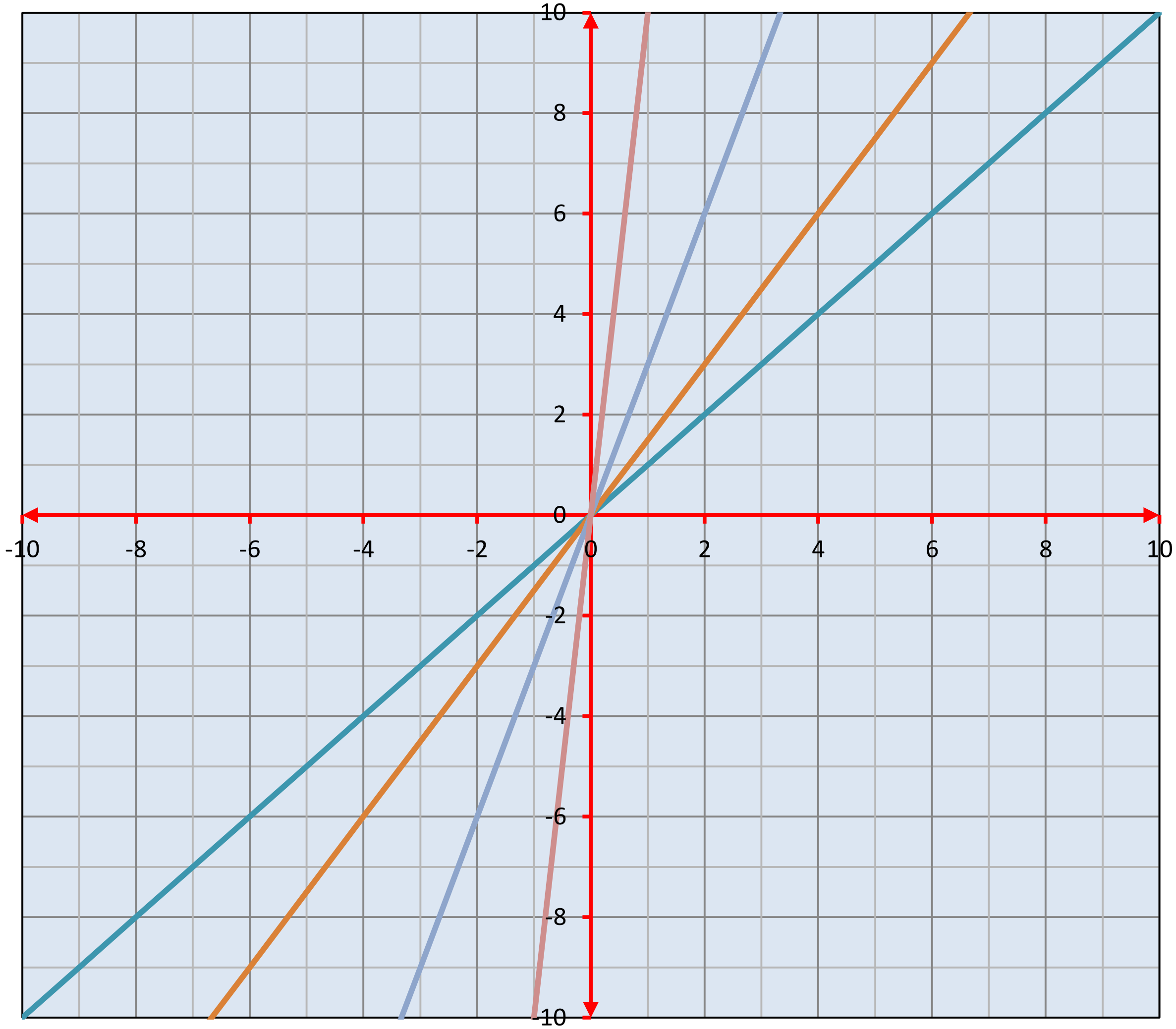
Comenzamos con:

y = 1 x (celeste)

y = 1,5 x (naranja)

y = 3 x (azul)

y = 10 x (rojo)



<u>Función lineal</u>: **y = a x + b** ; para: **0 < a < ∞** (siempre positivo) y **b = 0**

Ahora al coeficiente “a”, le damos algunos valores mayores que 1

Comenzamos con:

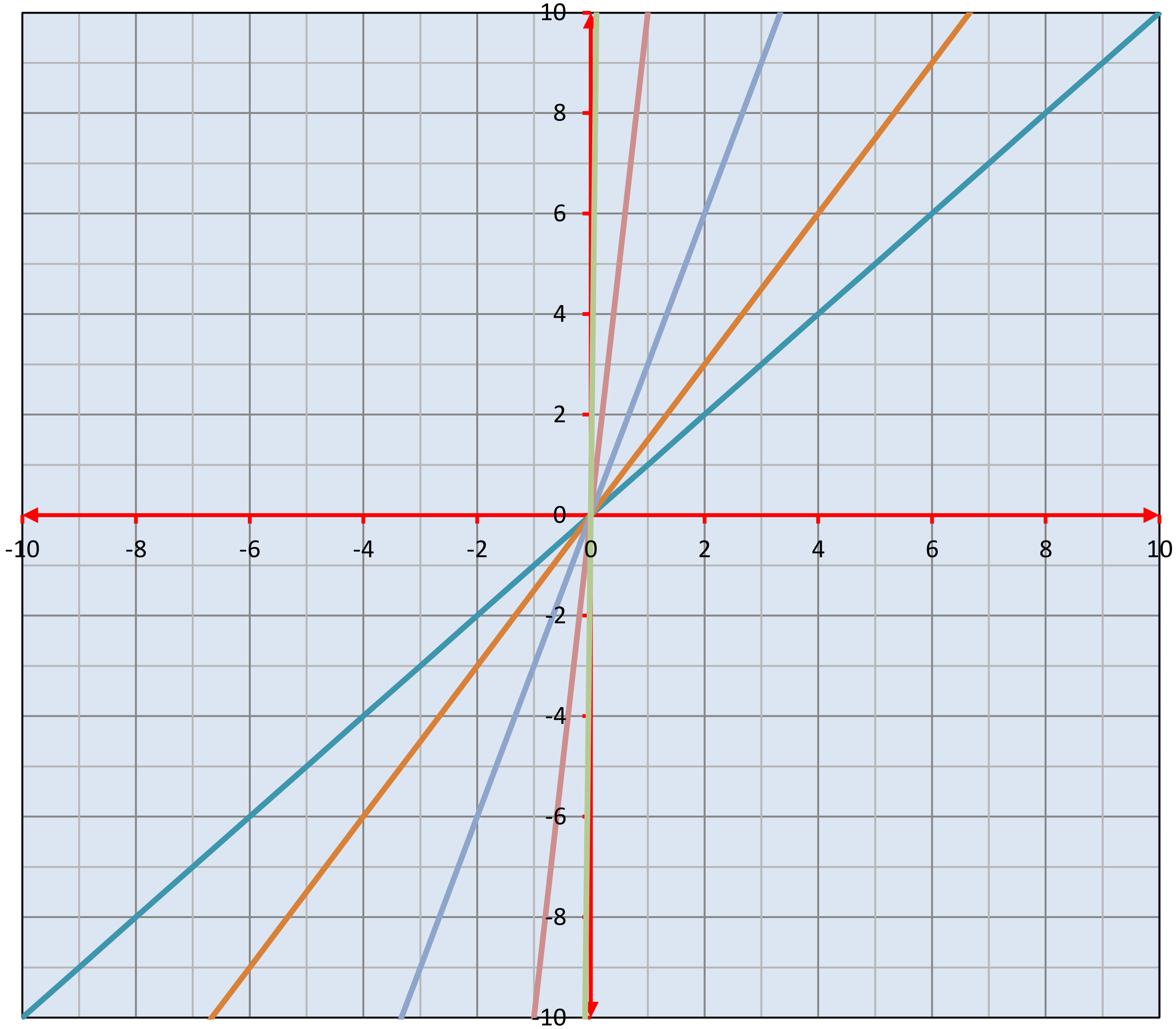
y = 1 x (celeste)

y = 1,5 x (naranja)

y = 3 x (azul)

y = 10 x (rojo)

y = 100 x (verde)



Función lineal: **y = a x + b** ; para: **0 < a < ∞** (siempre positivo) y **b = 0**

Ahora al coeficiente "a", le damos algunos valores mayores que 1

Comenzamos con:

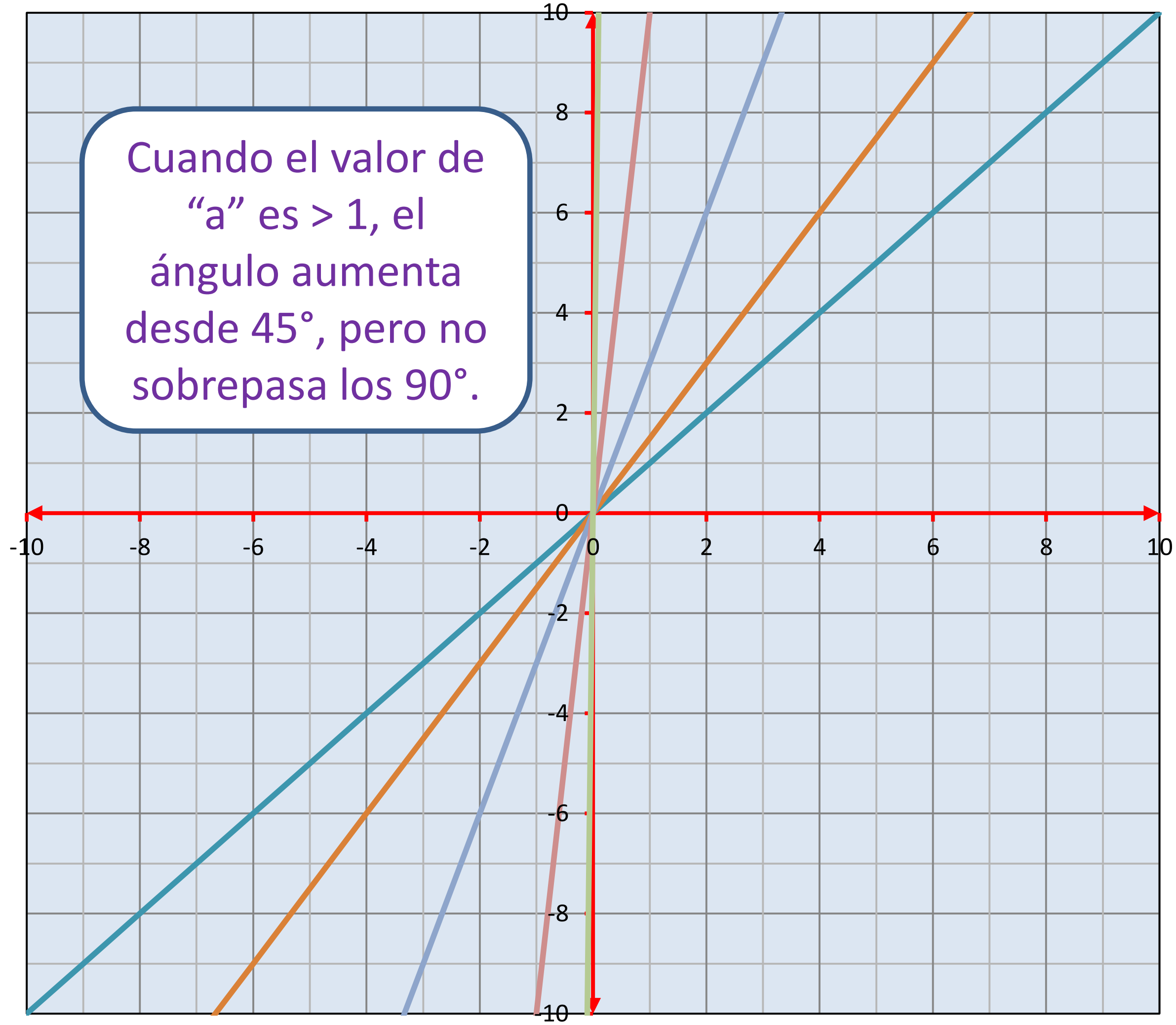
y = 1 x (celeste)

y = 1,5 x (naranja)

y = 3 x (azul)

y = 10 x (rojo)

y = 100 x (verde)



Función lineal: $y = a\,x + b$; para: $0 < a < \infty$ (siempre positivo) y $b = 0$

$y = 0{,}1\,x$ (azul)

$y = 0{,}3\,x$ (rojo)

$y = 0{,}5\,x$ (verde)

$Y = 0{,}8\,x$ (violeta)

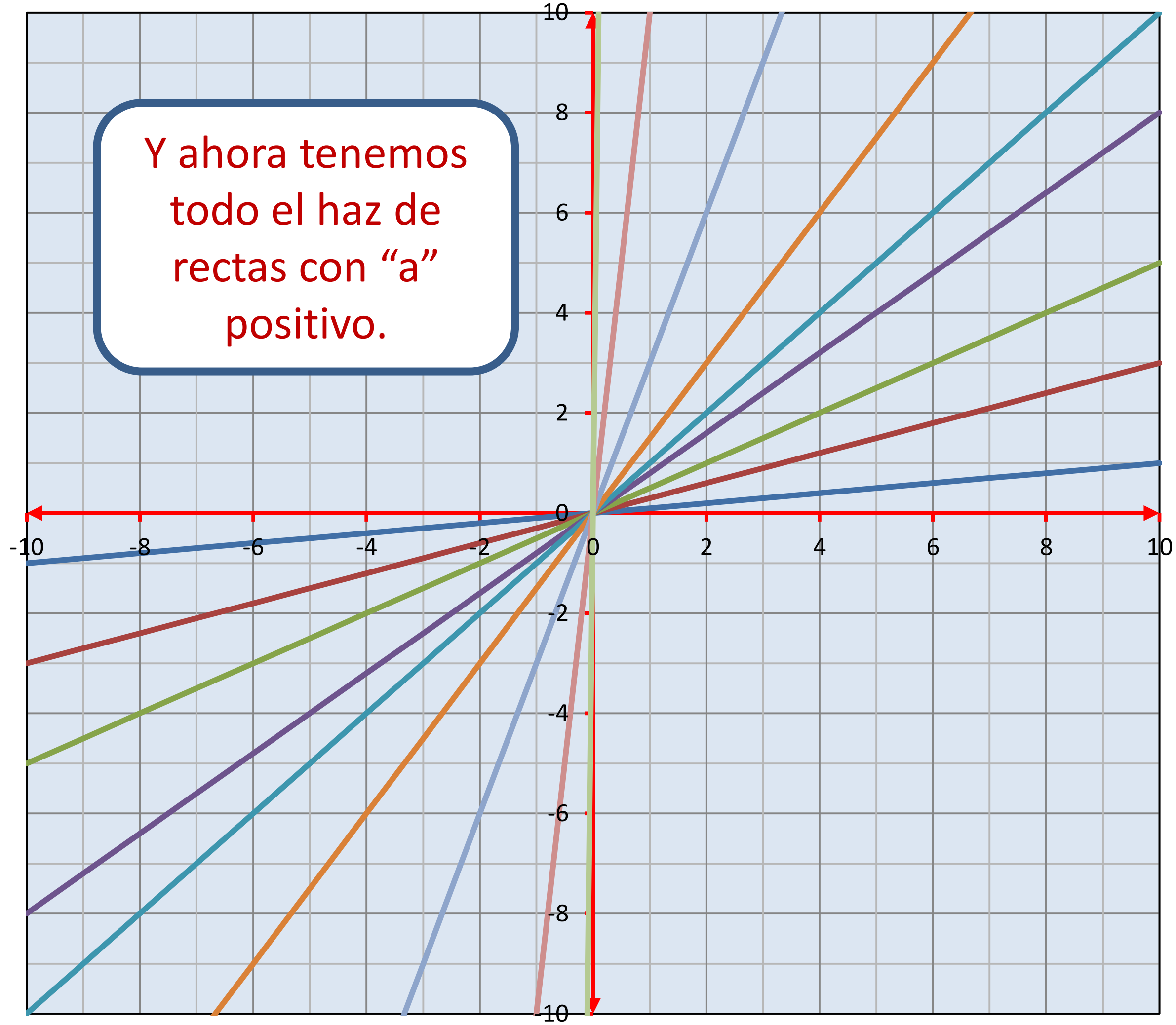
$y = 1\,x$ (celeste)

$y = 1{,}5\,x$ (naranja)

$y = 3\,x$ (azul)

$y = 10\,x$ (rojo)

$y = 100\,x$ (verde)



Función lineal: **y = a x + b** ; para: **0 < a < ∞** (siempre positivo) y **b = 0**

y = 0,1 x (azul)

y = 0,3 x (rojo)

y = 0,5 x (verde)

Y = 0,8 x (violeta)

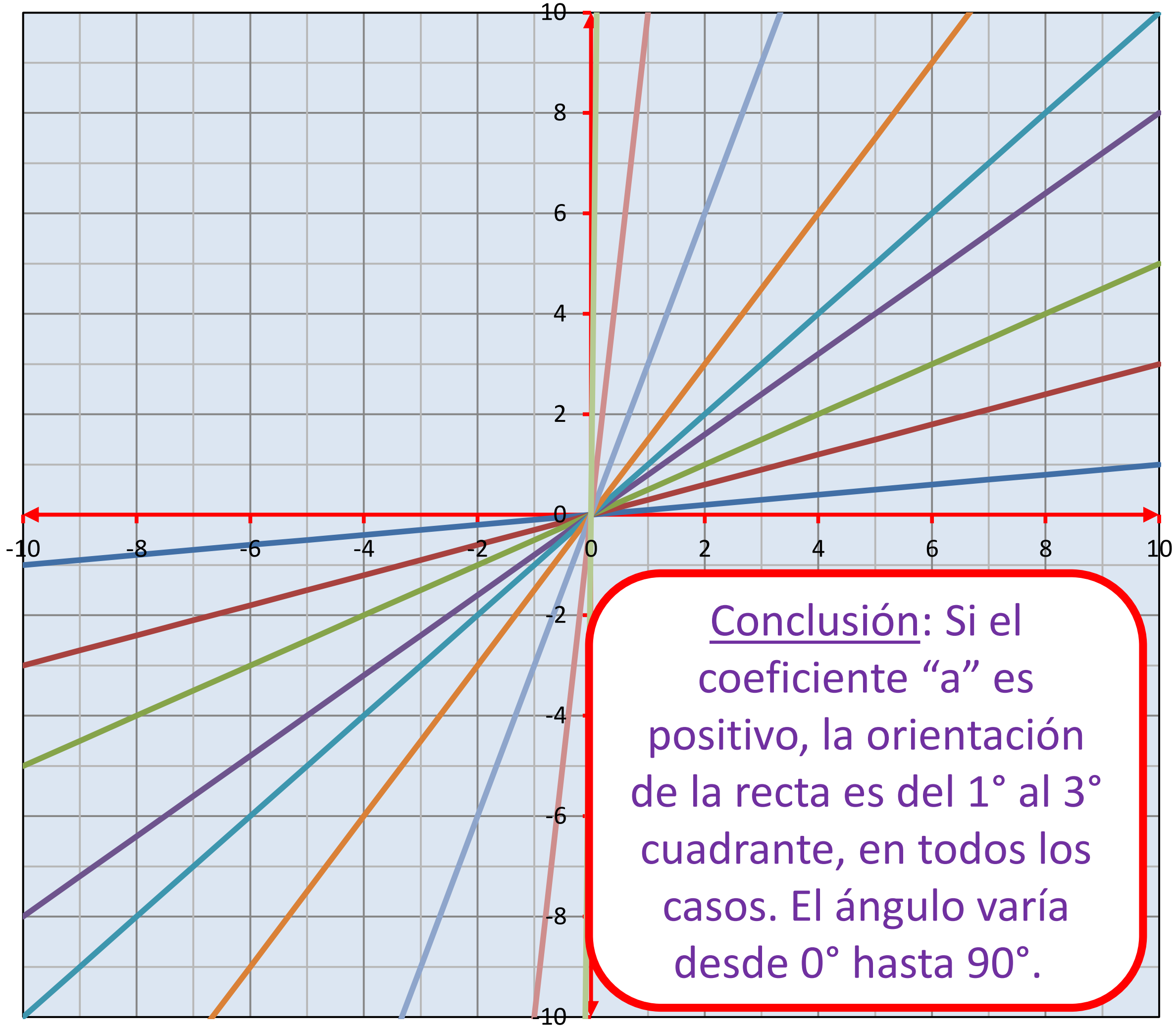
y = 1 x (celeste)

y = 1,5 x (naranja)

y = 3 x (azul)

y = 10 x (rojo)

y = 100 x (verde)

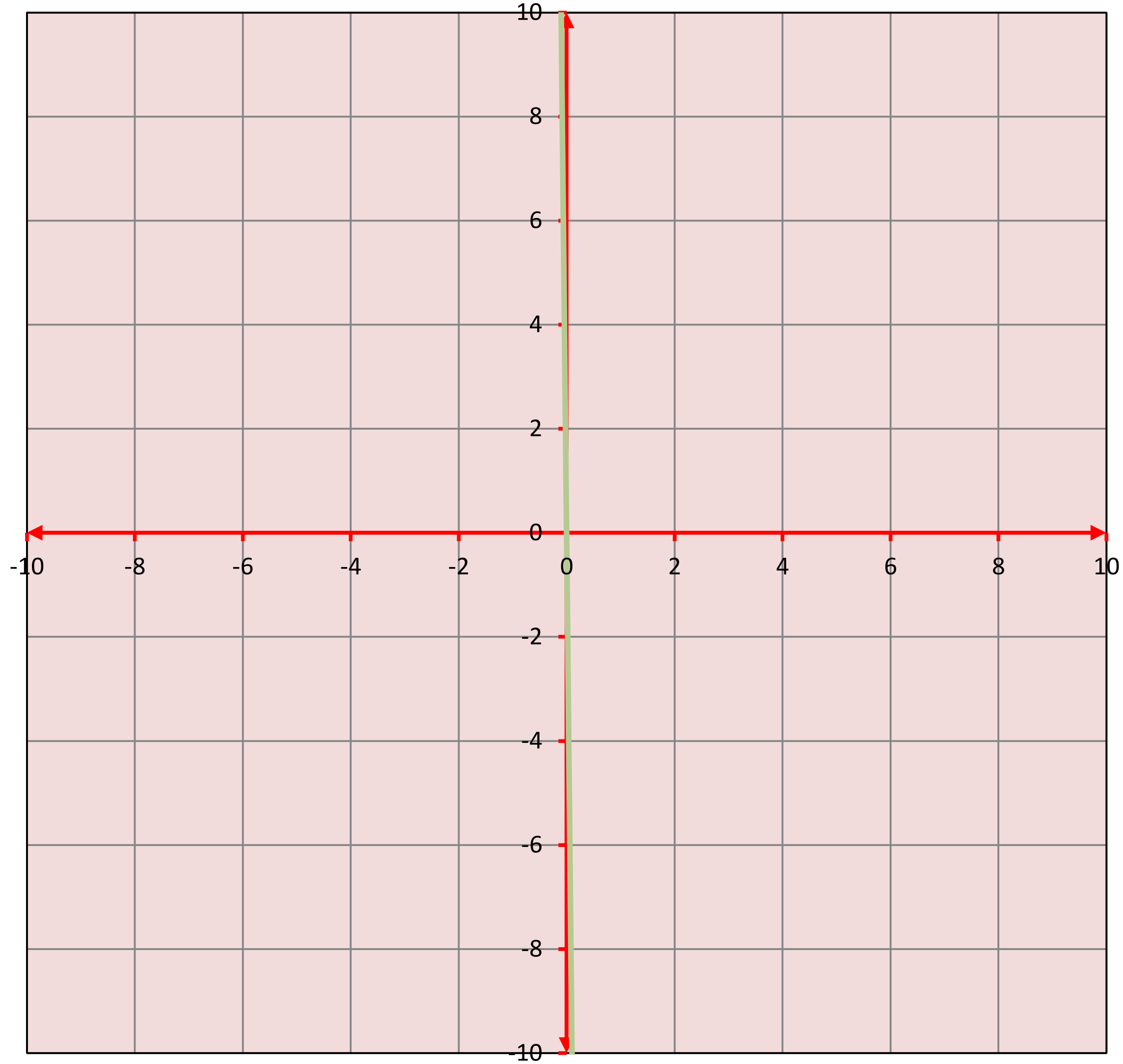


Conclusión: Si el coeficiente "a" es positivo, la orientación de la recta es del 1° al 3° cuadrante, en todos los casos. El ángulo varía desde 0° hasta 90°.

<u>Función lineal</u>: **y = a x + b** ; para: **0 > a > - ∞** (siempre negativo) y **b = 0**

A continuación al coeficiente "a", le damos valores entre – ∞ y -1 (valores negativos).

y = - 100 x (verde)

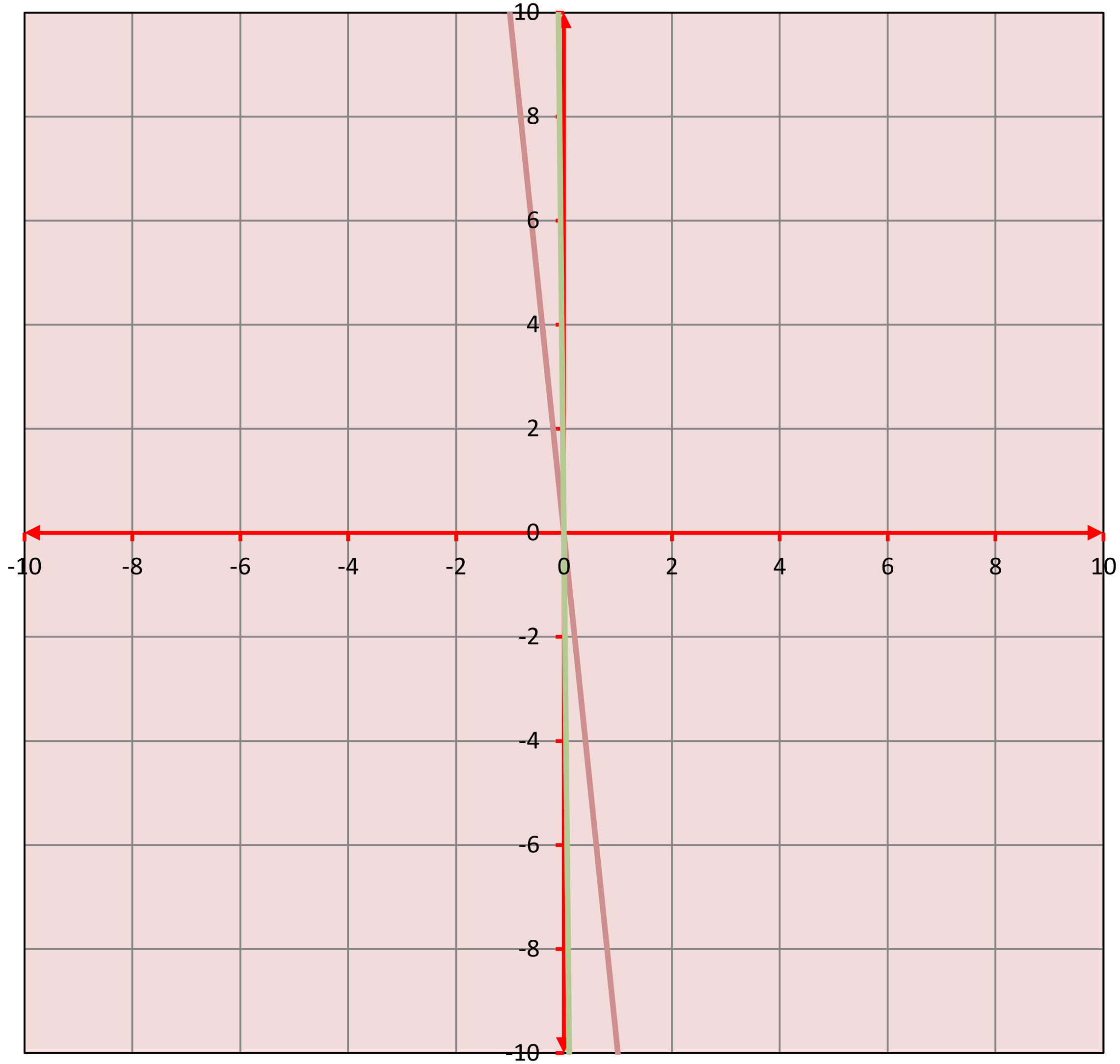


Función lineal: $y = a\,x + b$; para: $0 > a > -\infty$ (siempre negativo) y $b = 0$

A continuación al coeficiente "a", le damos valores entre – ∞ y -1 (valores negativos).

y = - 100 x (verde)

y = - 10 x (rojo)



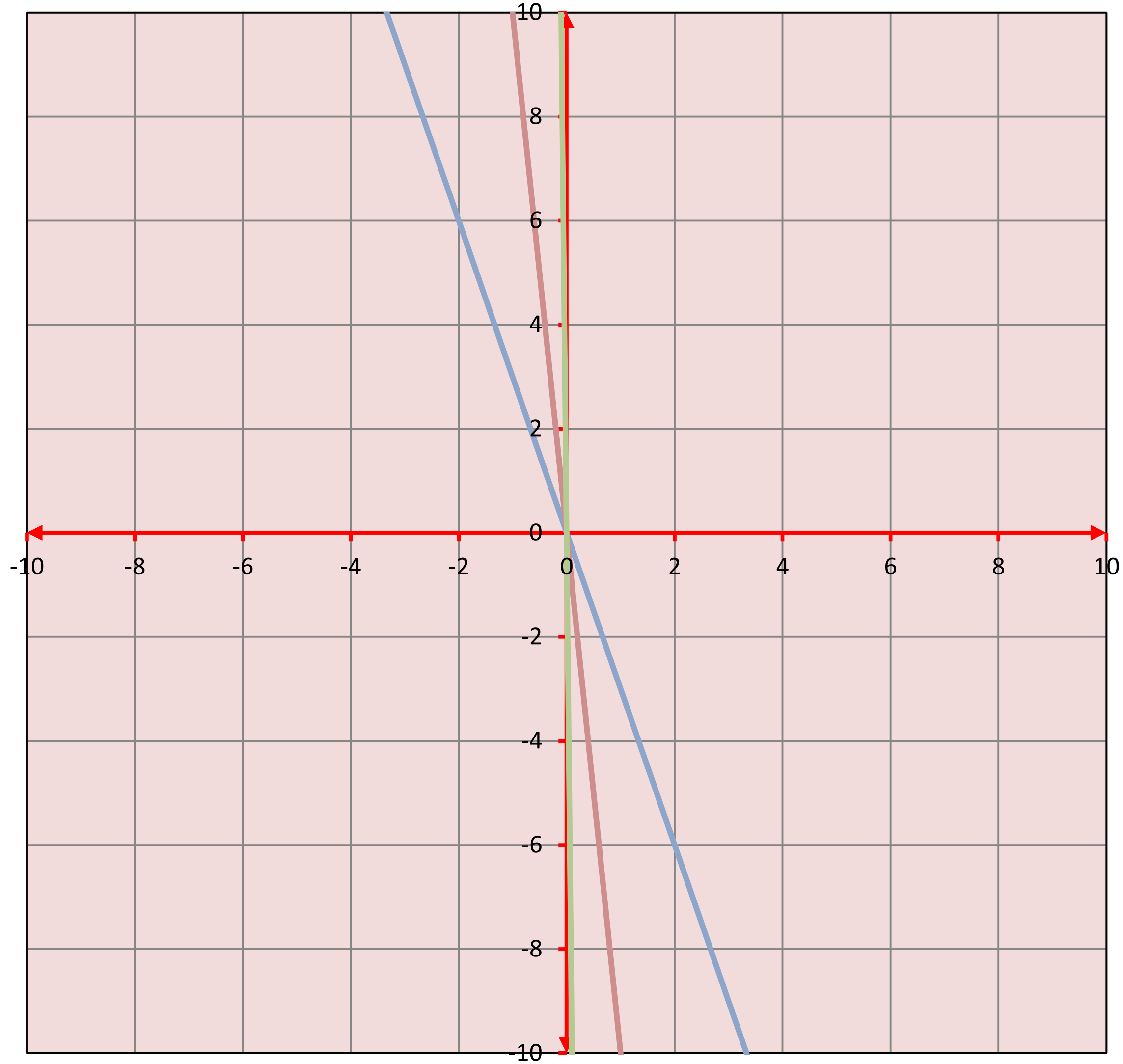
Función lineal: **y = a x + b** ; para: **0 > a > - ∞** (siempre negativo) y **b = 0**

A continuación al coeficiente "a", le damos valores entre – ∞ y -1 (valores negativos).

y = - 100 x (verde)

y = - 10 x (rojo)

y = - 3 x (azul)



Función lineal: $y = a\,x + b$; para: $0 > a > -\infty$ (siempre negativo) y $b = 0$

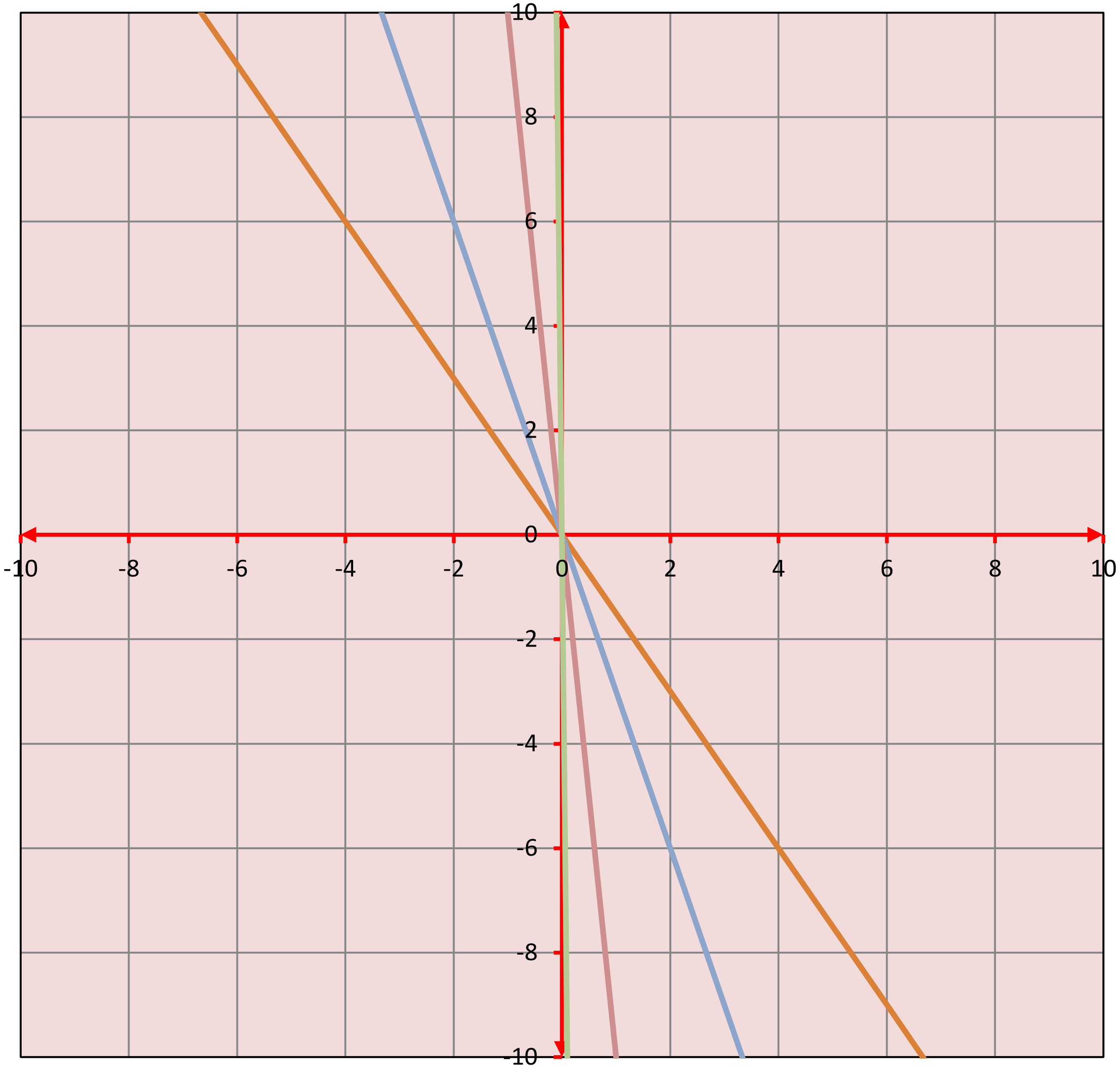
A continuación al coeficiente "a", le damos valores entre – ∞ y -1 (valores negativos).

y = - 100 x (verde)

y = - 10 x (rojo)

y = - 3 x (azul)

y = - 1,5 x (naranja)



<u>Función lineal</u>: **y = a x + b** ; para: **0 > a > - ∞** (siempre negativo) y **b = 0**

A continuación al coeficiente "a", le damos valores entre – ∞ y -1 (valores negativos).

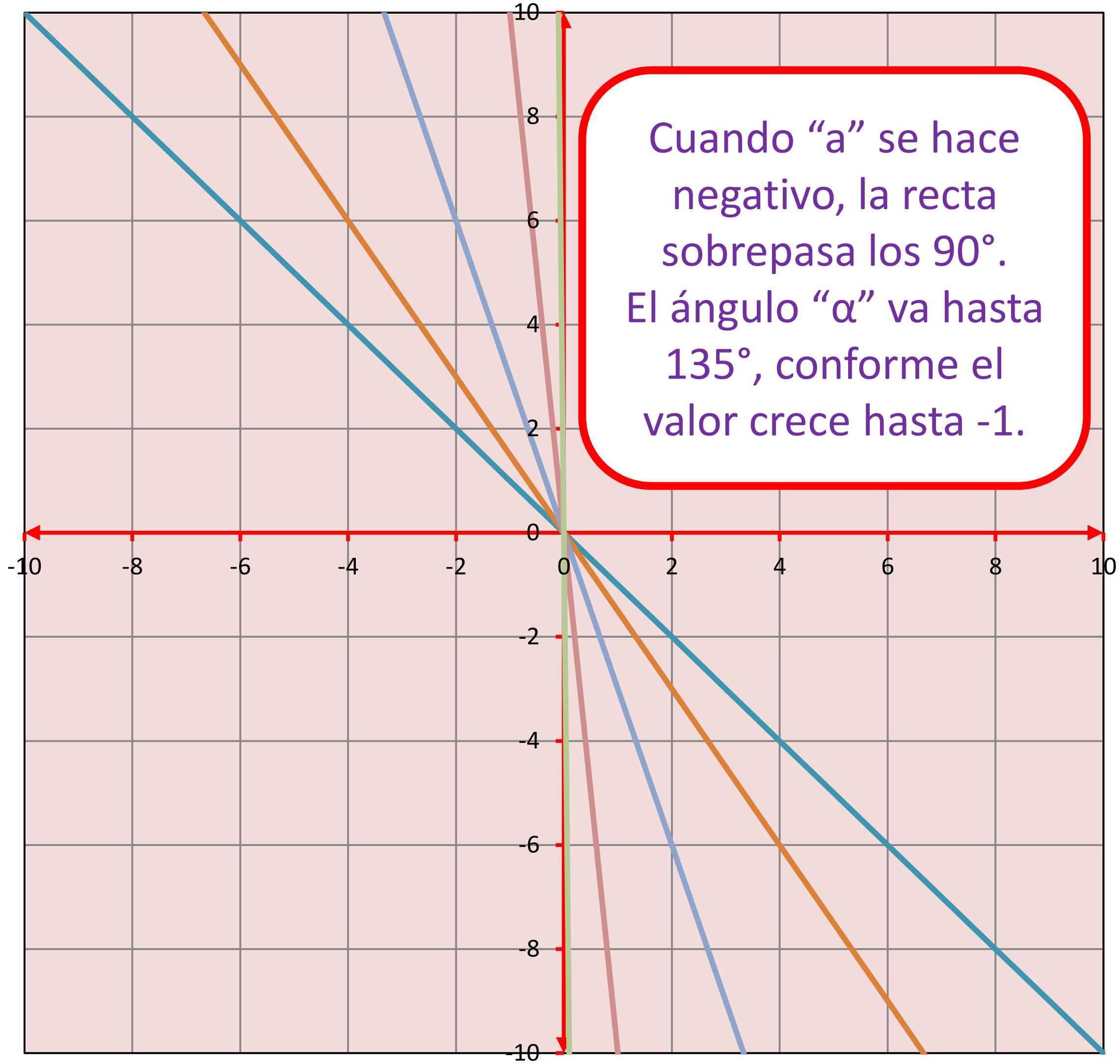
y = - 100 x (verde)

y = - 10 x (rojo)

y = - 3 x (azul)

y = - 1,5 x (naranja)

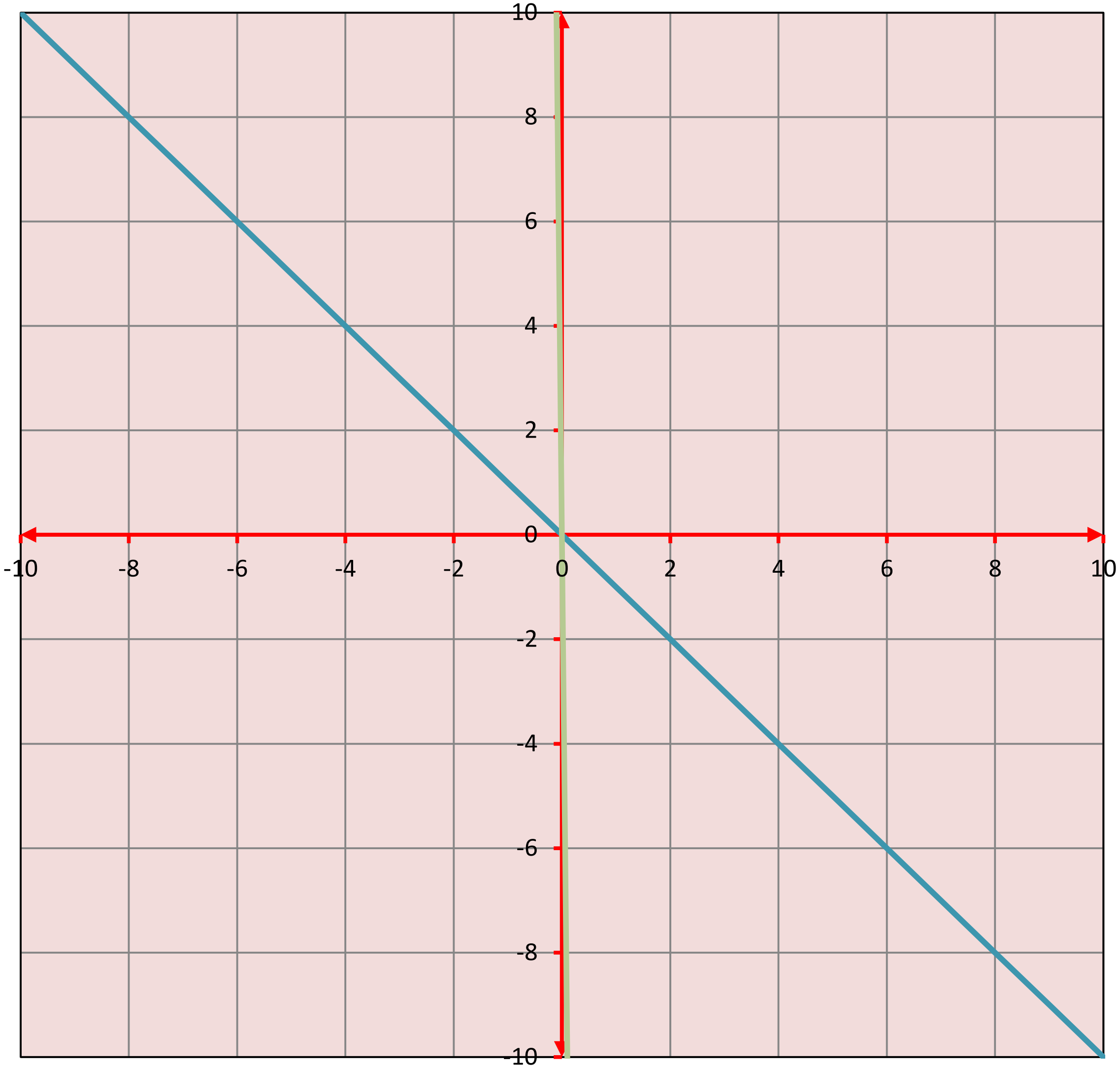
y = - 1 x (celeste)



Función lineal: **y = a x + b** ; para: **0 > a > - ∞** (siempre negativo) y **b = 0**

Y finalmente el coeficiente "a" variará entre -1 y 0 (valores negativos).

y = - 1 x (celeste)

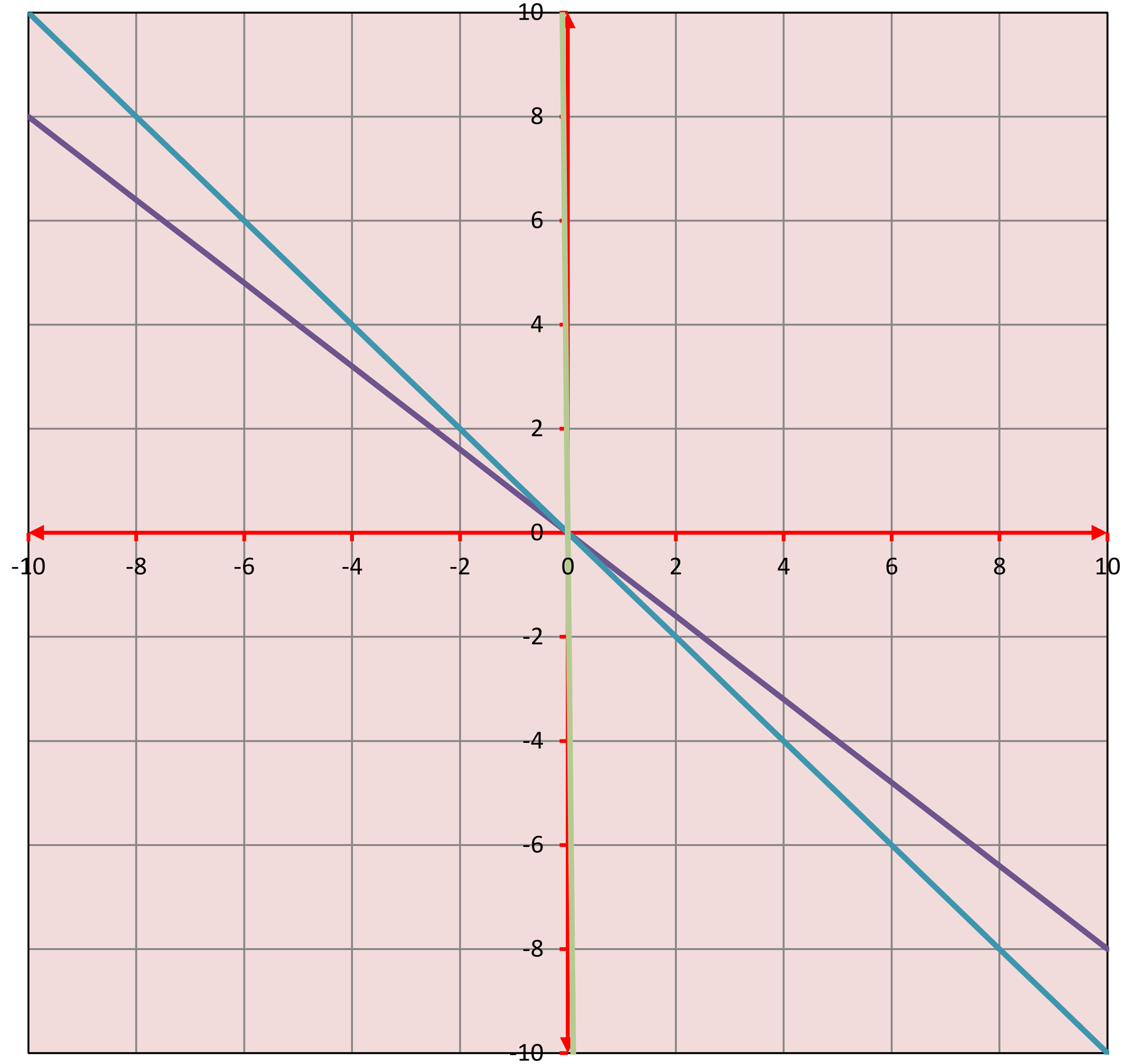


Función lineal: **y = a x + b** ; para: **0 > a > - ∞** (siempre negativo) y **b = 0**

Y finalmente el coeficiente "a" variará entre -1 y 0 (valores negativos).

y = - 1 x (celeste)

Y = - 0,8 x (violeta)



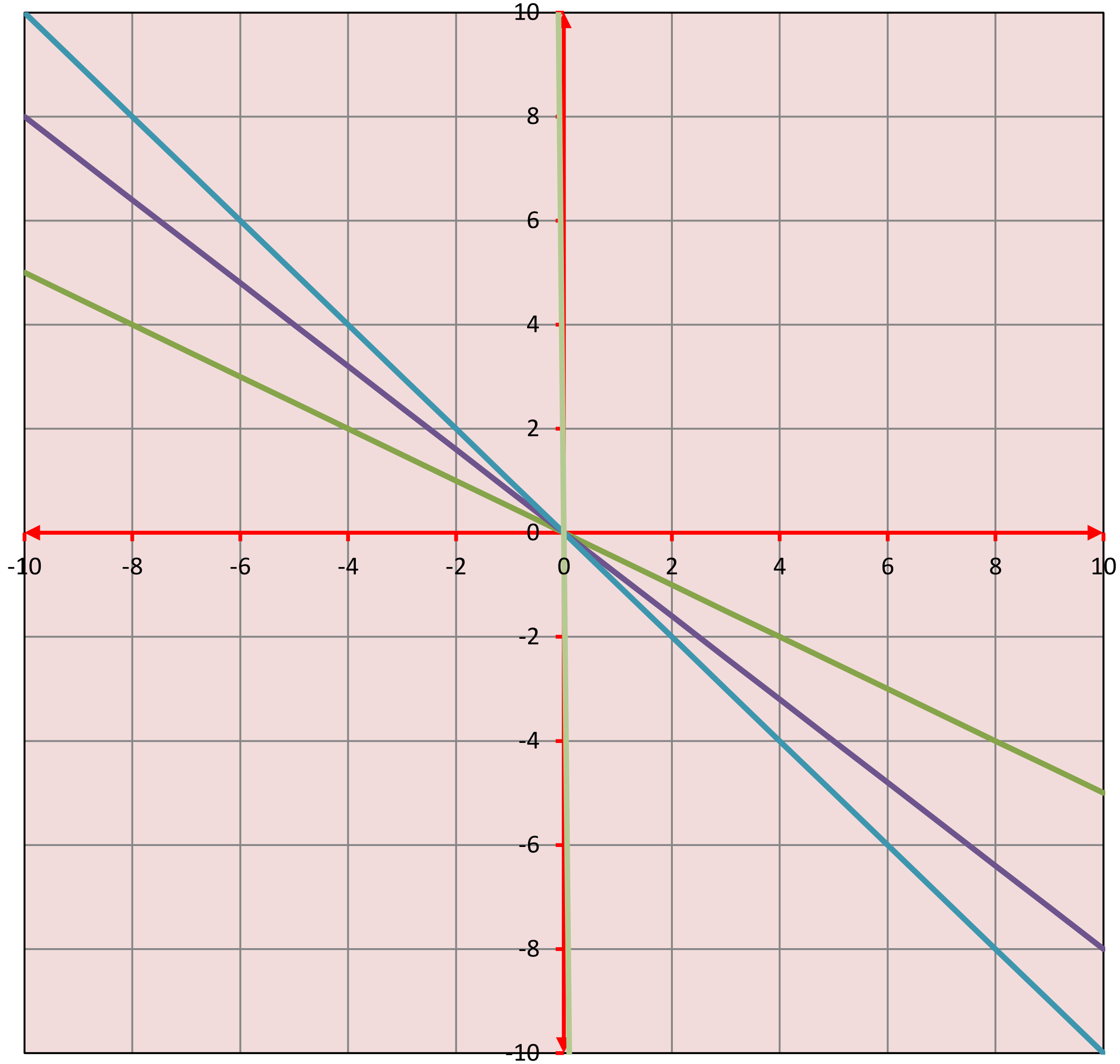
Función lineal: **$y = a\,x + b$** ; para: **$0 > a > -\infty$** (siempre negativo) y **$b = 0$**

Y finalmente el coeficiente "a" variará entre -1 y 0 (valores negativos).

$y = -1\,x$ (celeste)

$Y = -0{,}8\,x$ (violeta)

$y = -0{,}5\,x$ (verde)



Función lineal: **y = a x + b** ; para: **0 > a > - ∞** (siempre negativo) y **b = 0**

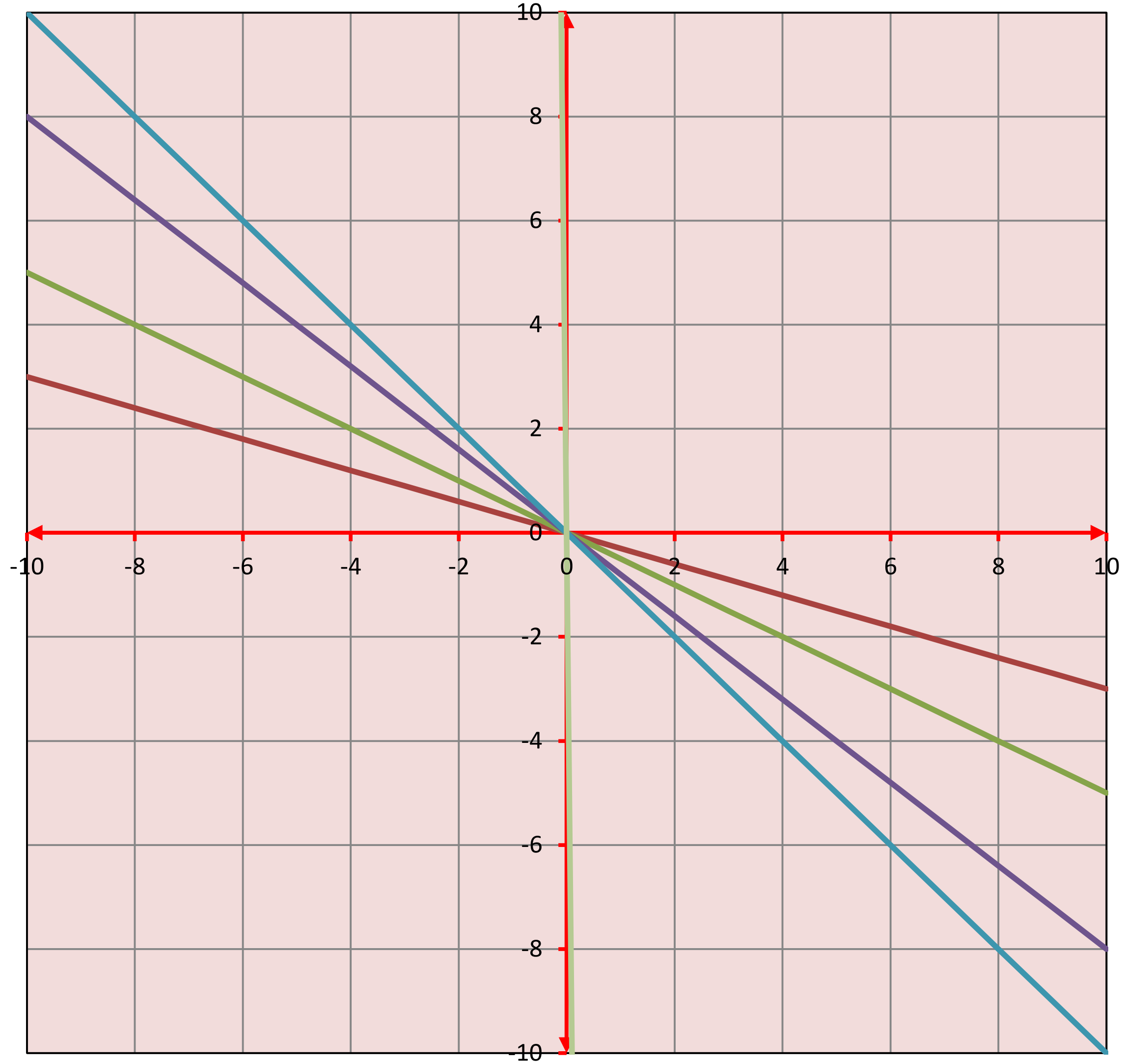
Y finalmente el coeficiente "a" variará entre -1 y 0 (valores negativos).

y = - 1 x (celeste)

Y = - 0,8 x (violeta)

y = - 0,5 x (verde)

y = - 0,3 x (rojo)



Función lineal: $y = a\,x + b$; para: $0 > a > -\infty$ (siempre negativo) y $b = 0$

Y finalmente el coeficiente "a" variará entre -1 y 0 (valores negativos).

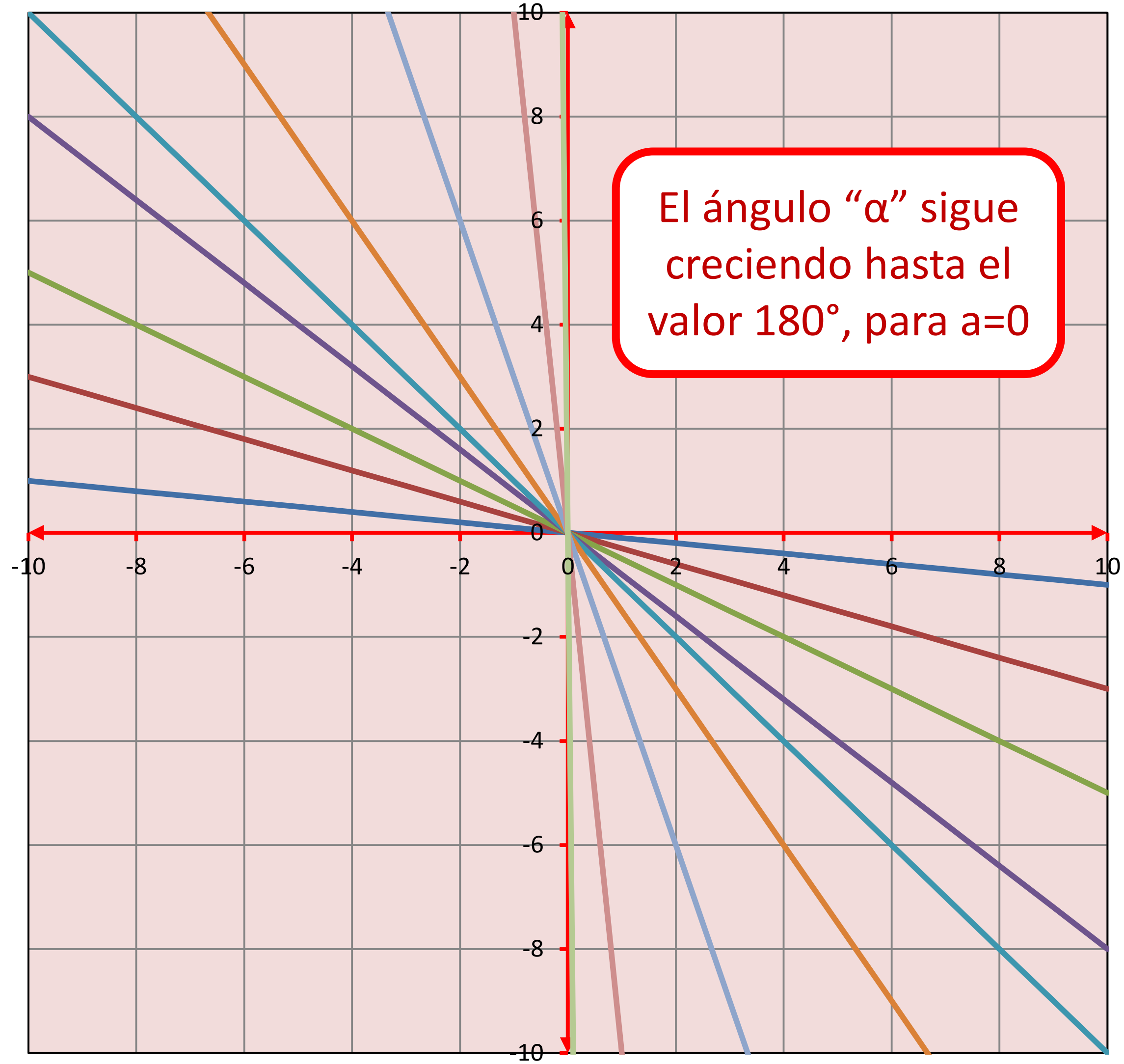
y = - 1 x (celeste)

Y = - 0,8 x (violeta)

y = - 0,5 x (verde)

y = - 0,3 x (rojo)

y = - 0,1 x (azul)



Función lineal: $y = a\,x + b$; para: $0 > a > -\infty$ (siempre negativo) y $b = 0$

$y = -0{,}1\,x$ (azul)

$y = -0{,}3\,x$ (rojo)

$y = -0{,}5\,x$ (verde)

$Y = -0{,}8\,x$ (violeta)

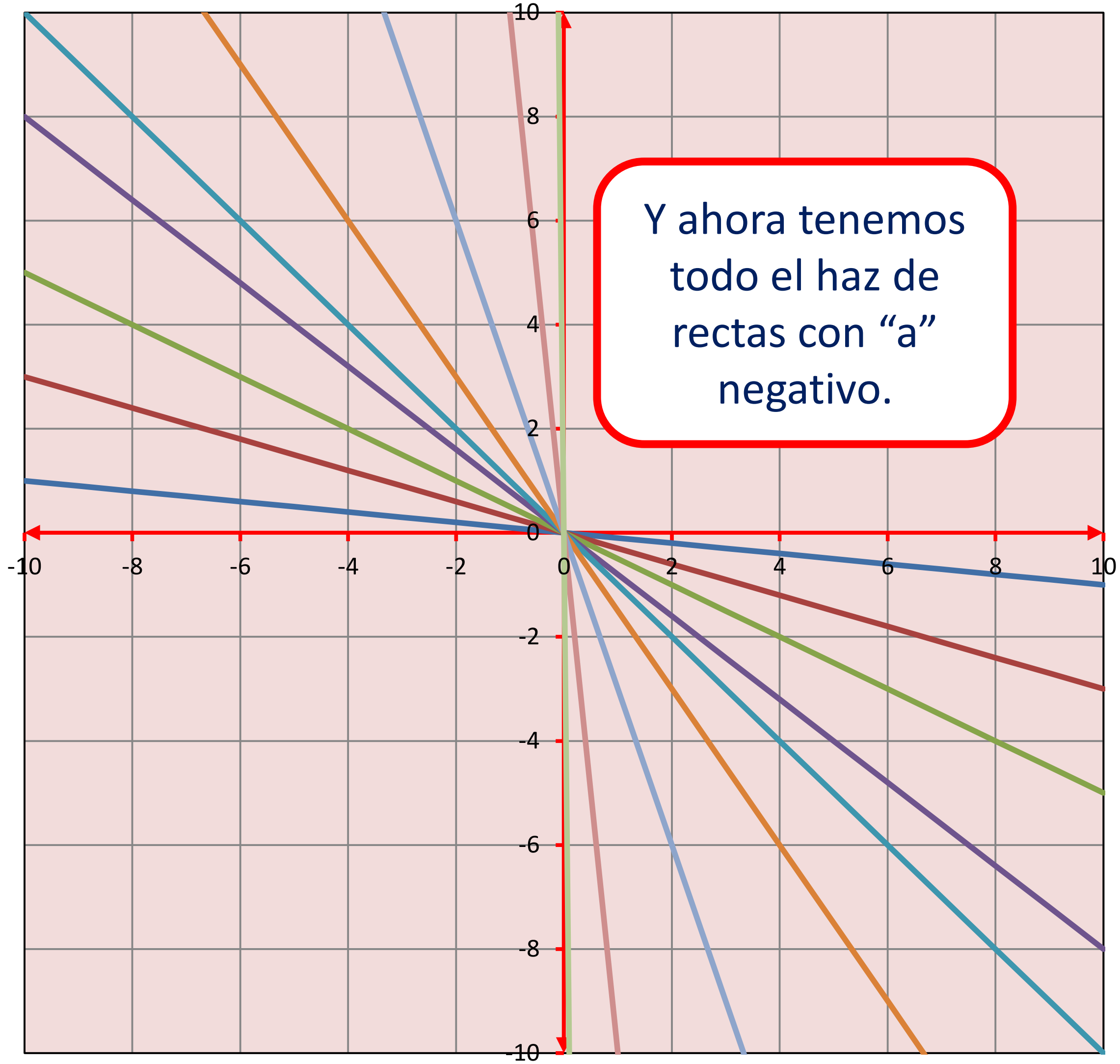
$y = -1\,x$ (celeste)

$y = -1{,}5\,x$ (naranja)

$y = -3\,x$ (azul)

$y = -10\,x$ (rojo)

$y = -100\,x$ (verde)



Función lineal: **y = a x + b** ; para: **0 > a > - ∞** (siempre negativo) y **b = 0**

y = - 0,1 x (azul)

y = - 0,3 x (rojo)

y = - 0,5 x (verde)

Y = - 0,8 x (violeta)

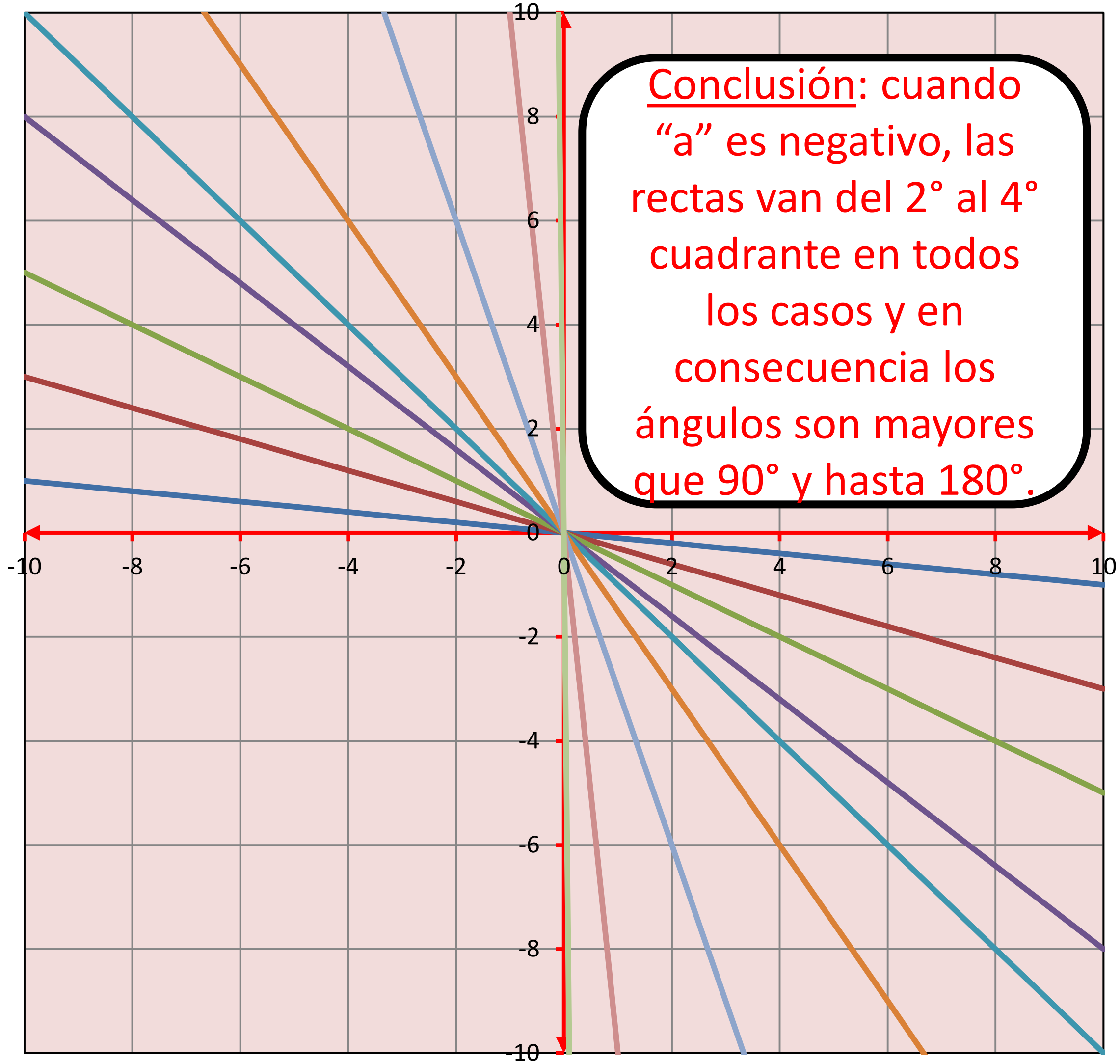
y = - 1 x (celeste)

y = - 1,5 x (naranja)

y = - 3 x (azul)

y = - 10 x (rojo)

y = - 100 x (verde)



Conclusión: cuando "a" es negativo, las rectas van del 2° al 4° cuadrante en todos los casos y en consecuencia los ángulos son mayores que 90° y hasta 180°.

Hemos podido comprobar que la influencia del coeficiente “a” de la función lineal determina en forma unívoca el ángulo de la misma.

Por lo tanto queda justificado el nombre que recibe de, *“coeficiente angular” o “pendiente”.*

En efecto repetimos que, si “a” es positivo la recta se orienta del primero al tercer cuadrante; en cambio si es negativo la dirección de la recta es del segundo al cuarto cuadrante.

Cuando siendo “a” positivo pero menor que 1, el ángulo es menor que 45°. Si vale exactamente 1, α = 45° y si el valor es mayor que 1, α supera los 45°. *Pero debe quedar claro que cuando el coeficiente “**a”** tiende a infinito, el ángulo **α** no supera los 90°.*

Mas aún se puede afirmar que la recta de 90° no existe como función.

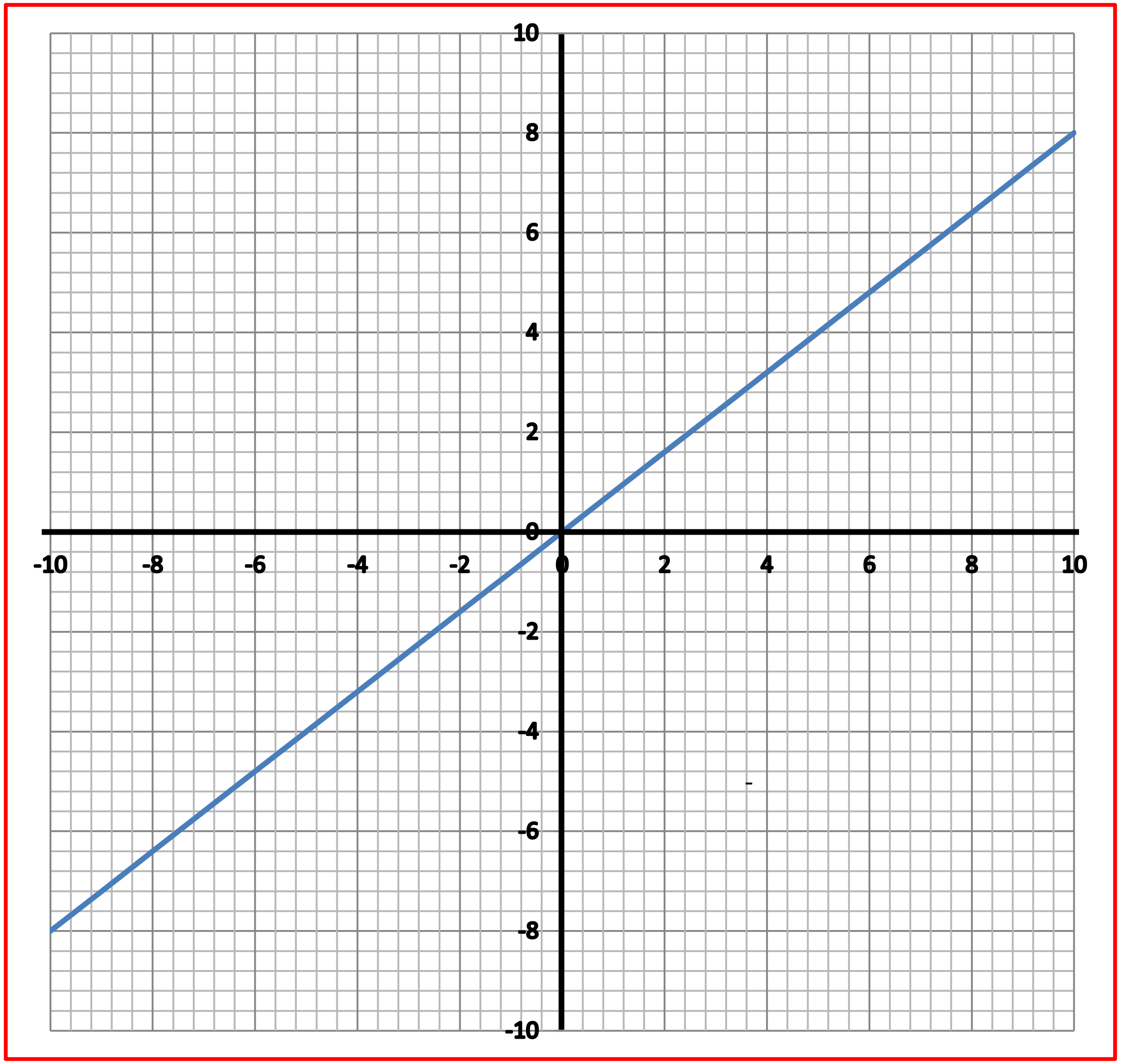
Asimismo, cuando “a” es negativo y para valores entre menos infinito y “**-1”** el ángulo varía desde 90° hasta 135° . Finalmente el ángulo α, irá desde 135° a 180° para valores de “a” entre -1 y 0.

Función lineal: **y = a x + b** ; para: **a =** constante (y arbitrario) y **b** = variable

Tomamos por ejemplo:

y = 0,8 x (Azul)

Ahora se mantiene a = 0,8 y tomamos varios valores para "b" :



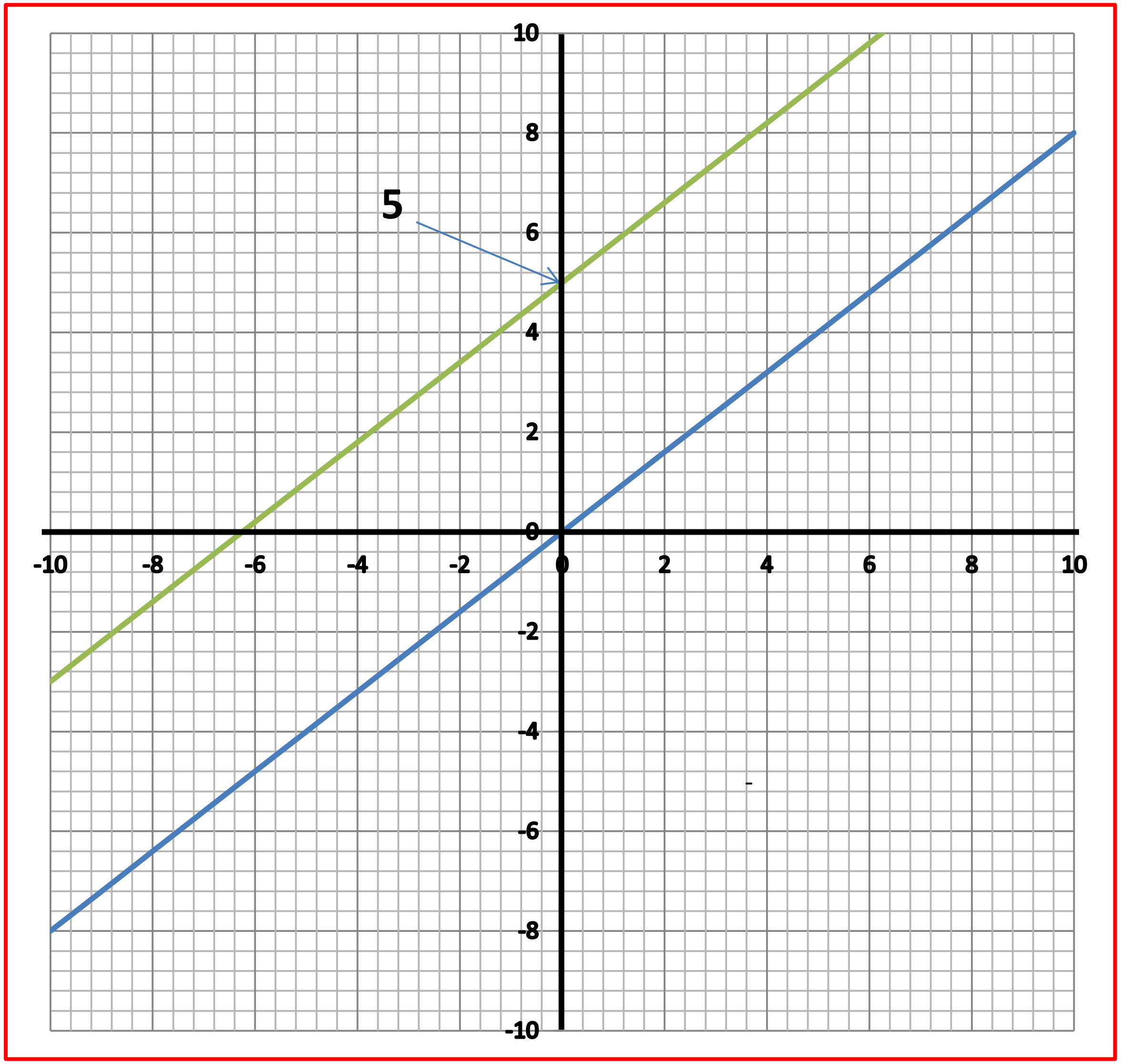
<u>Función lineal</u>**:** **y = a x + b** ; para: **a =** constante (y arbitrario) y **b** = variable

Tomamos por ejemplo:

y = 0,8 x (Azul)

Ahora se mantiene a = 0,8 y tomamos varios valores para "b" :

Y = 0,8 x + 5 (verde)



<u>Función lineal</u>: **y = a x + b** ; para: **a =** constante (y arbitrario) y **b** = variable

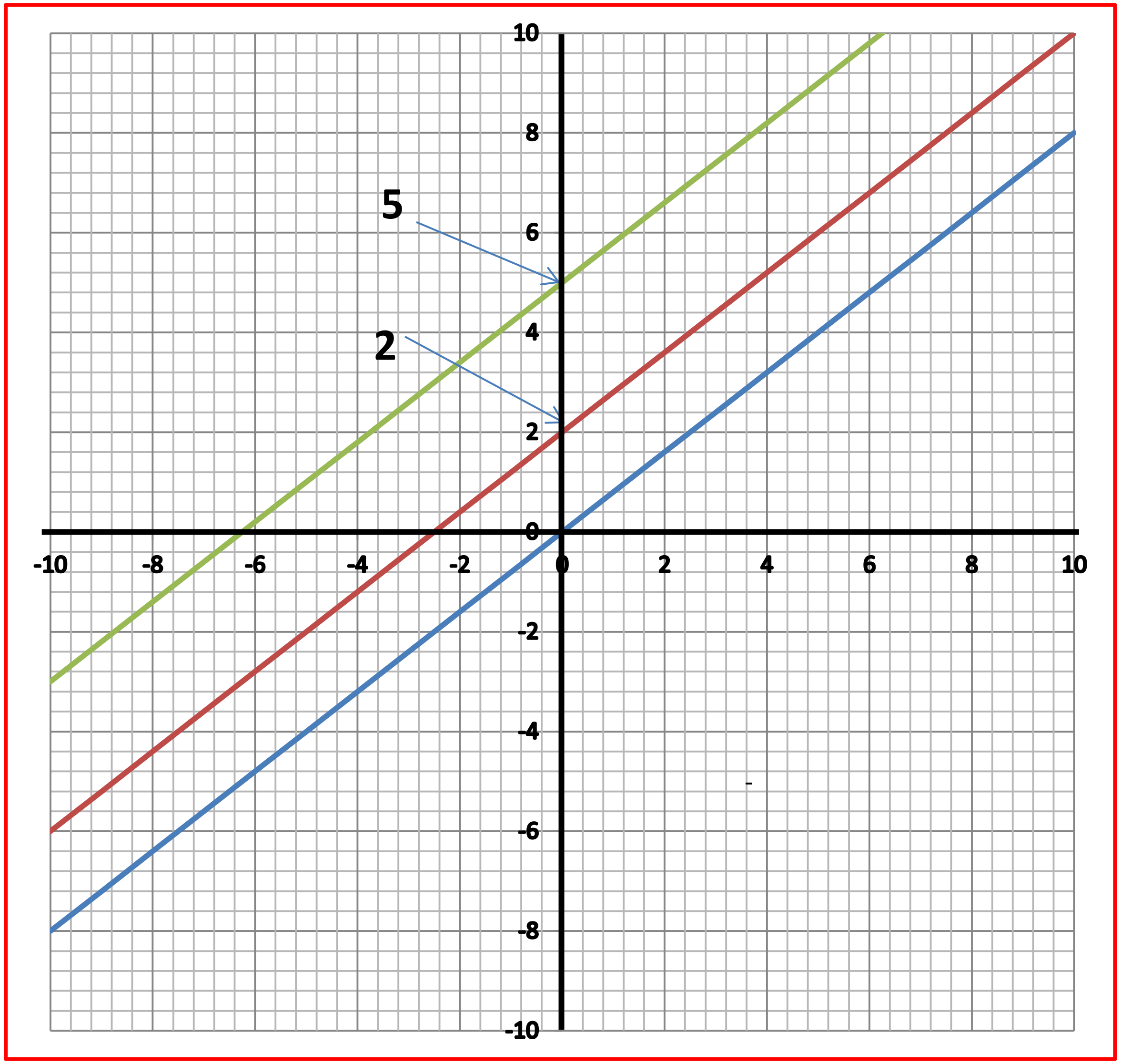
Tomamos por ejemplo:

y = 0,8 x (Azul)

Ahora se mantiene a = 0,8 y tomamos varios valores para "b" :

Y = 0,8 x + 5 (verde)

Y = 0,8 x + 2 (rojo)



Función lineal: **y = a x + b** ; para: **a =** constante (y arbitrario) y **b** = variable

Tomamos por ejemplo:

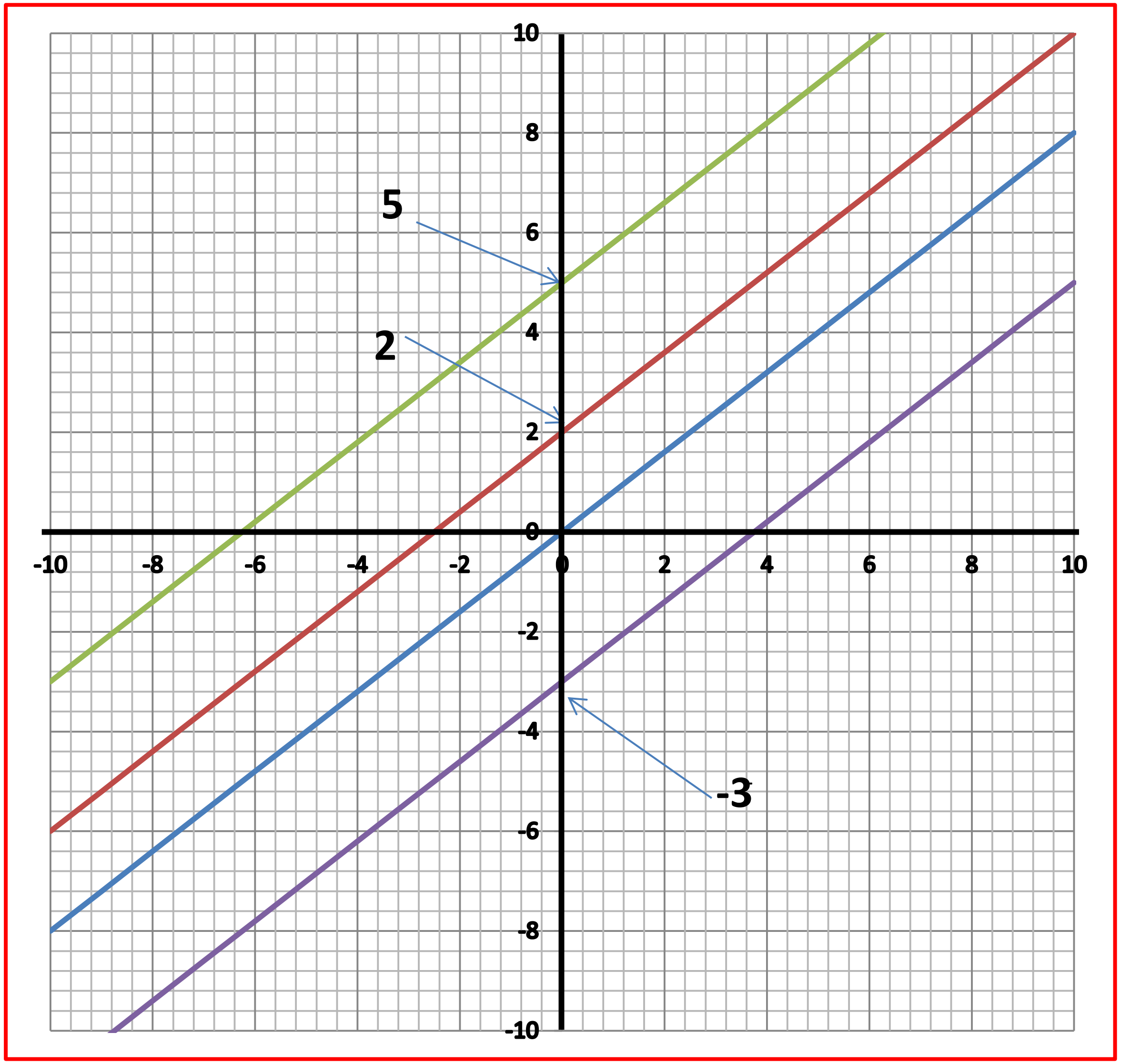
y = 0,8 x (Azul)

Ahora se mantiene a = 0,8 y tomamos varios valores para "b" :

Y = 0,8 x + 5 (verde)

Y = 0,8 x + 2 (rojo)

Y = 0,8 x – 3 (violeta)



<u>Función lineal</u>: **y = a x + b** ; para: **a =** constante (y arbitrario) y **b** = variable

Tomamos por ejemplo:

y = 0,8 x (Azul)

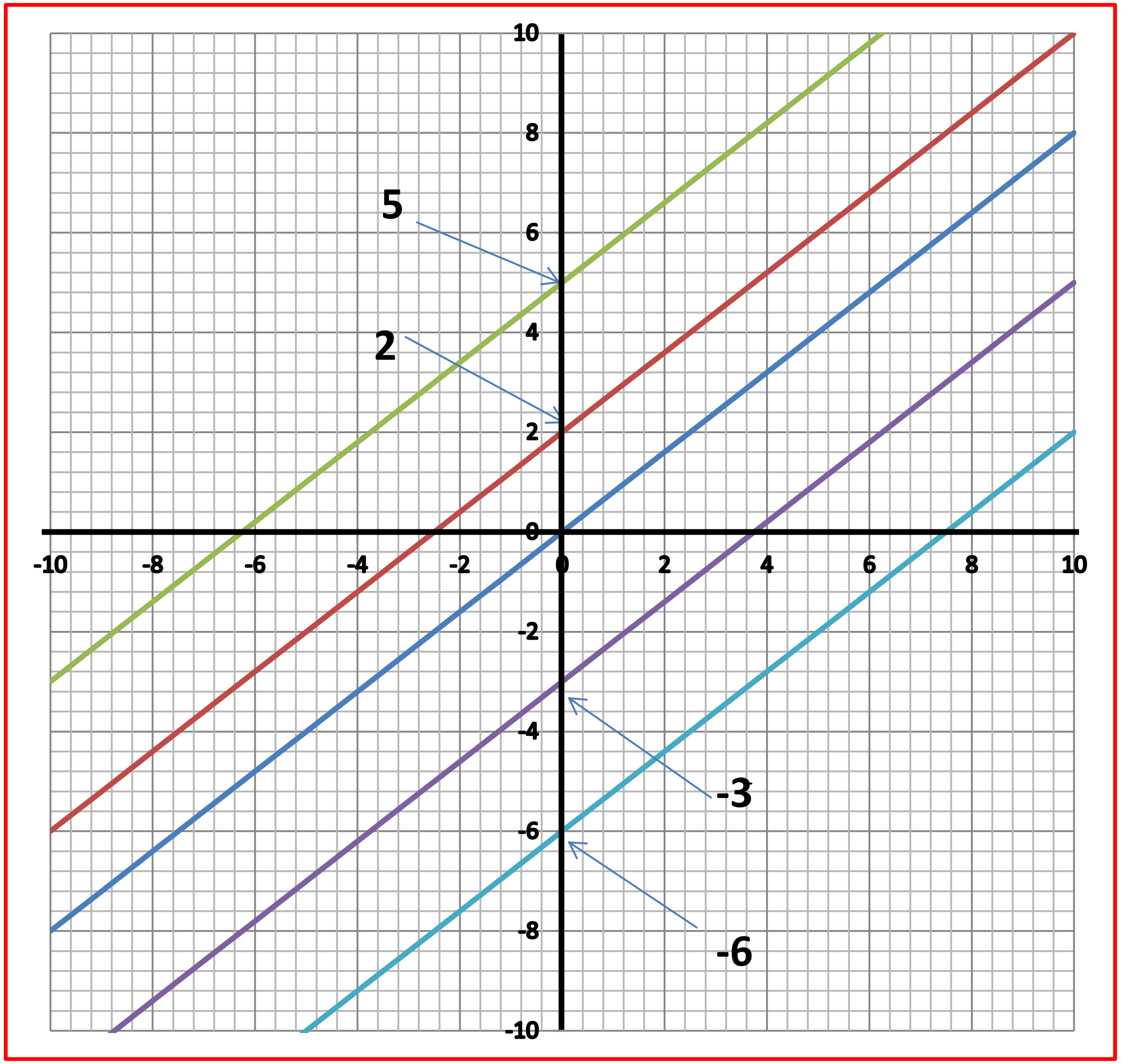
Ahora se mantiene a = 0,8 y tomamos varios valores para "b" :

Y = 0,8 x + 5 (verde)

Y = 0,8 x + 2 (rojo)

Y = 0,8 x – 3 (violeta)

Y = 0,8 x – 6 (celeste)



Resulta evidente que el parámetro “b” no afecta para nada el ángulo de la recta.

El valor numérico de “b”, corresponde al valor de la función “y” cuando la variable independiente “x” se hace “0”, es decir que el punto (0;b) es aquel donde la recta corta al eje de ordenadas “y”.

Por lo dicho, históricamente a “b” se lo denomina “ordenada al origen”, aunque se lo debiera llamar “ordenada en el origen”.

Sabemos que una recta necesita **solo dos puntos** para su trazado. El primer punto está dado directamente por el valor de **“b”** sobre el eje “y”; mientras que el segundo deberá ser calculado con la expresión de la función y = a.x + b.

Es decir que la representación gráfica de la recta solo exige calcular un único valor numérico, lo que implica una gran sencillez.

Recordemos que se ha dicho que las funciones matemáticas son infinitas.
Pues bien, ya en esta primera familia, la función lineal permite las *infinitas* combinaciones de “a” y de “b”, que se corresponderán con las *infinitas* rectas del plano.

Representamos ahora, diversas funciones lineales:

$$y = a\,x + b$$

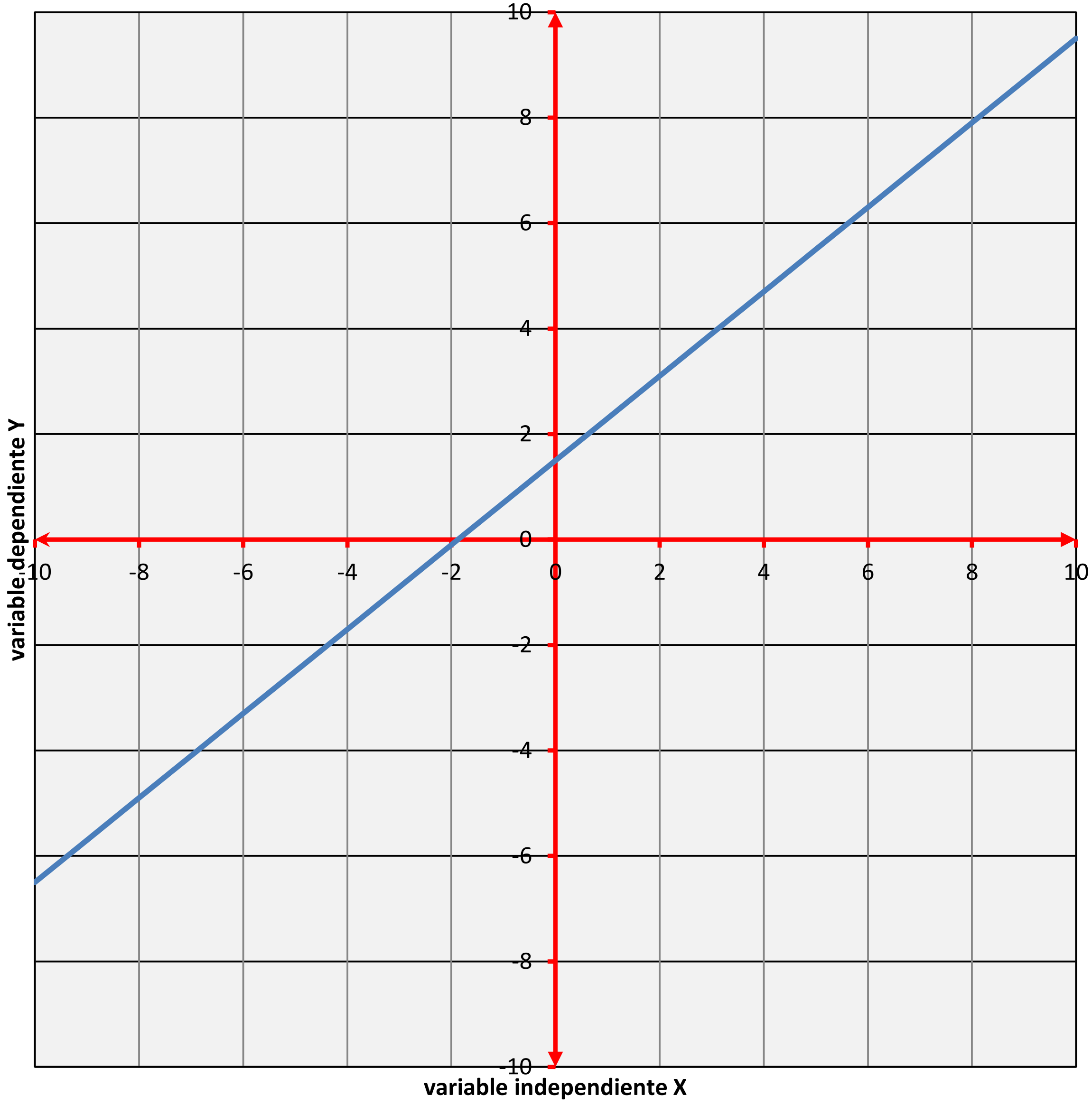
Ellas tendrán diferentes valores, tanto para sus coeficientes angulares, como para las ordenadas al origen.

Representamos ahora, diversas funciones lineales:

y = a x + b

Ellas tendrán diferentes valores, tanto para sus coeficientes angulares, como para las ordenadas al origen.

y = 0,8 x + 1,5 (azul)



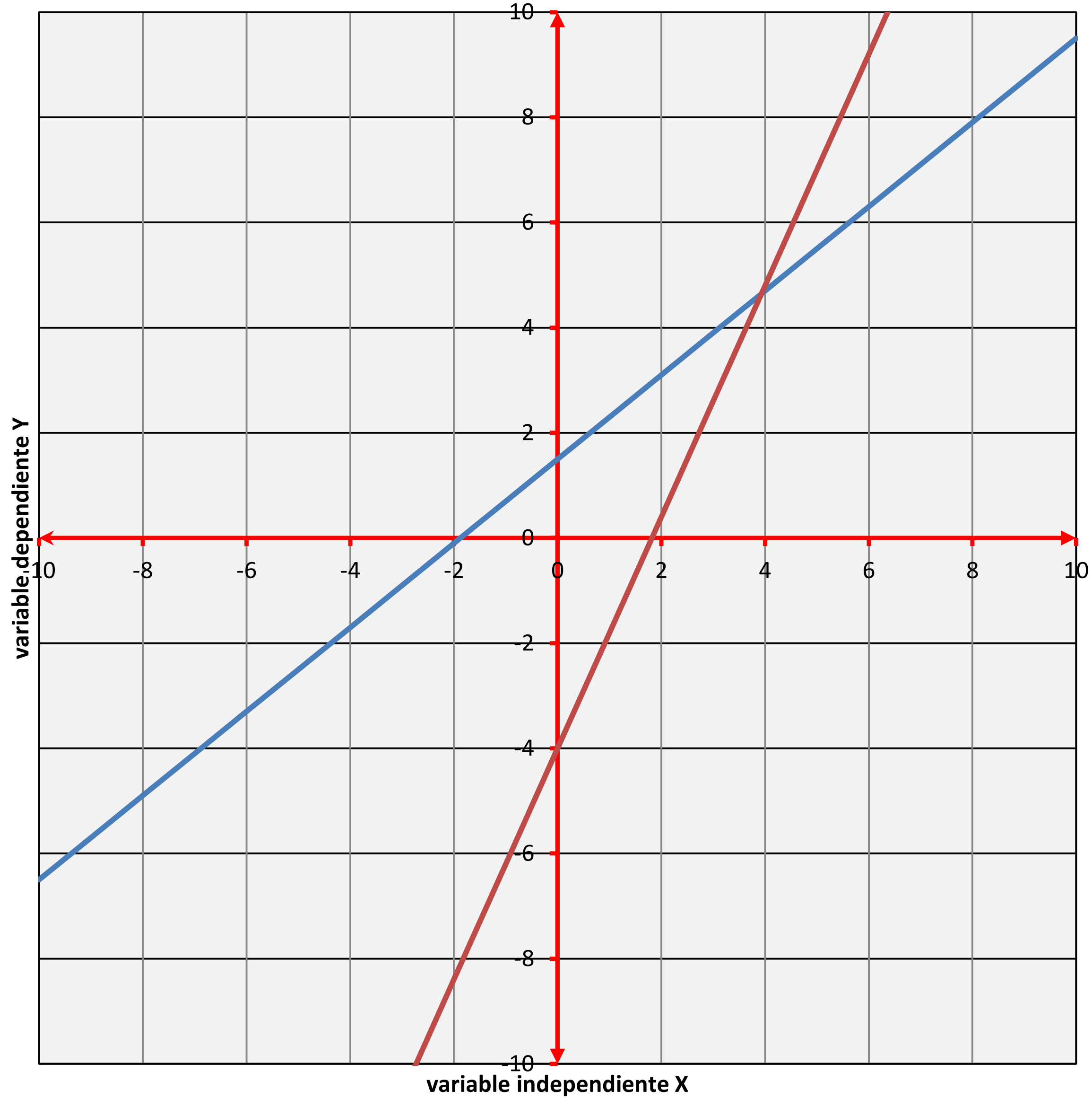
Representamos ahora, diversas funciones lineales:

$y = a\,x + b$

Ellas tendrán diferentes valores, tanto para sus coeficientes angulares, como para las ordenadas al origen.

$y = 0{,}8\,x + 1{,}5$ (azul)

$y = 2{,}2\,x - 4$ (marrón)



Representamos ahora, diversas funciones lineales:

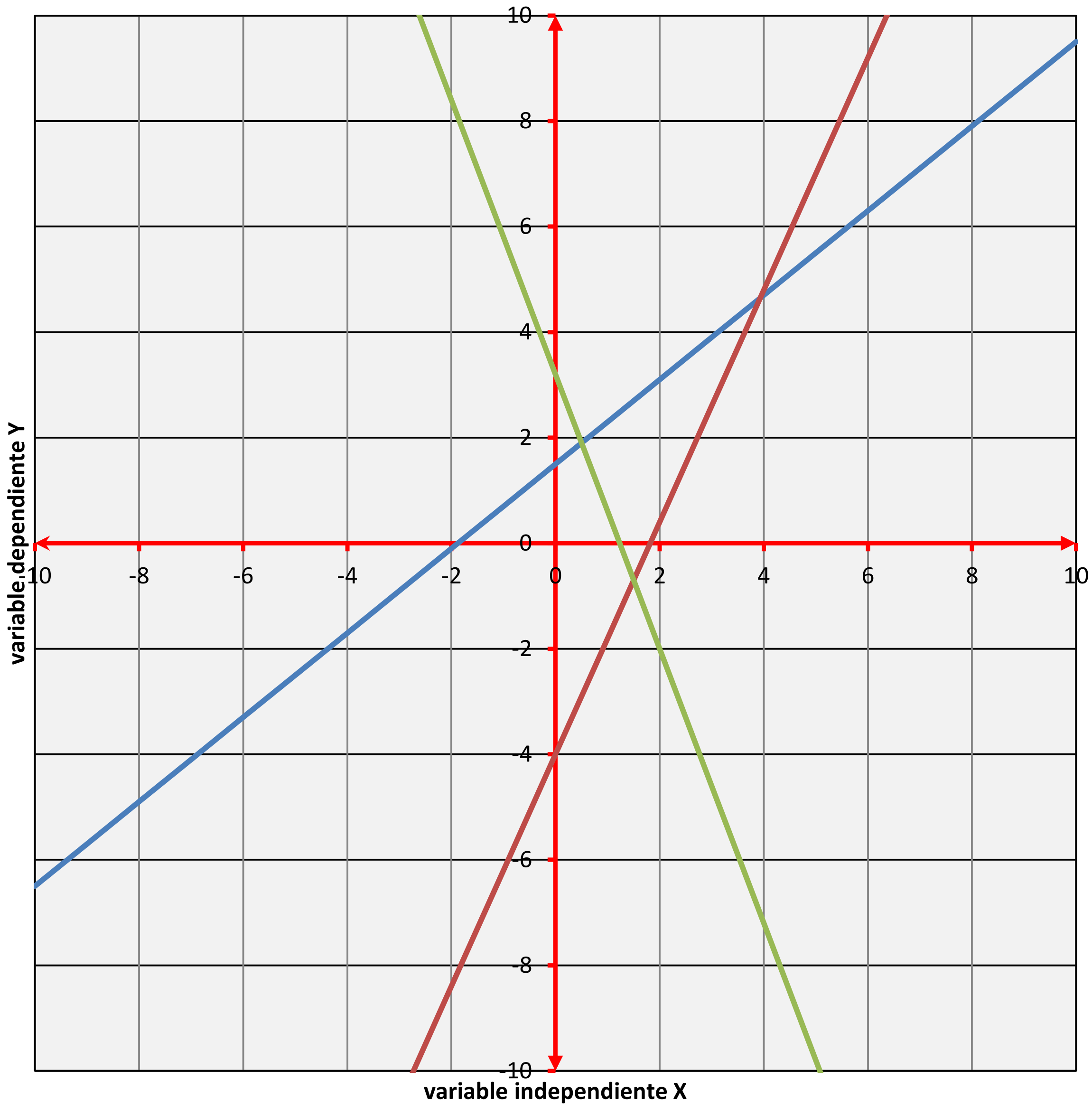
y = a x + b

Ellas tendrán diferentes valores, tanto para sus coeficientes angulares, como para las ordenadas al origen.

y = 0,8 x + 1,5 (azul)

y = 2,2 x - 4 (marrón)

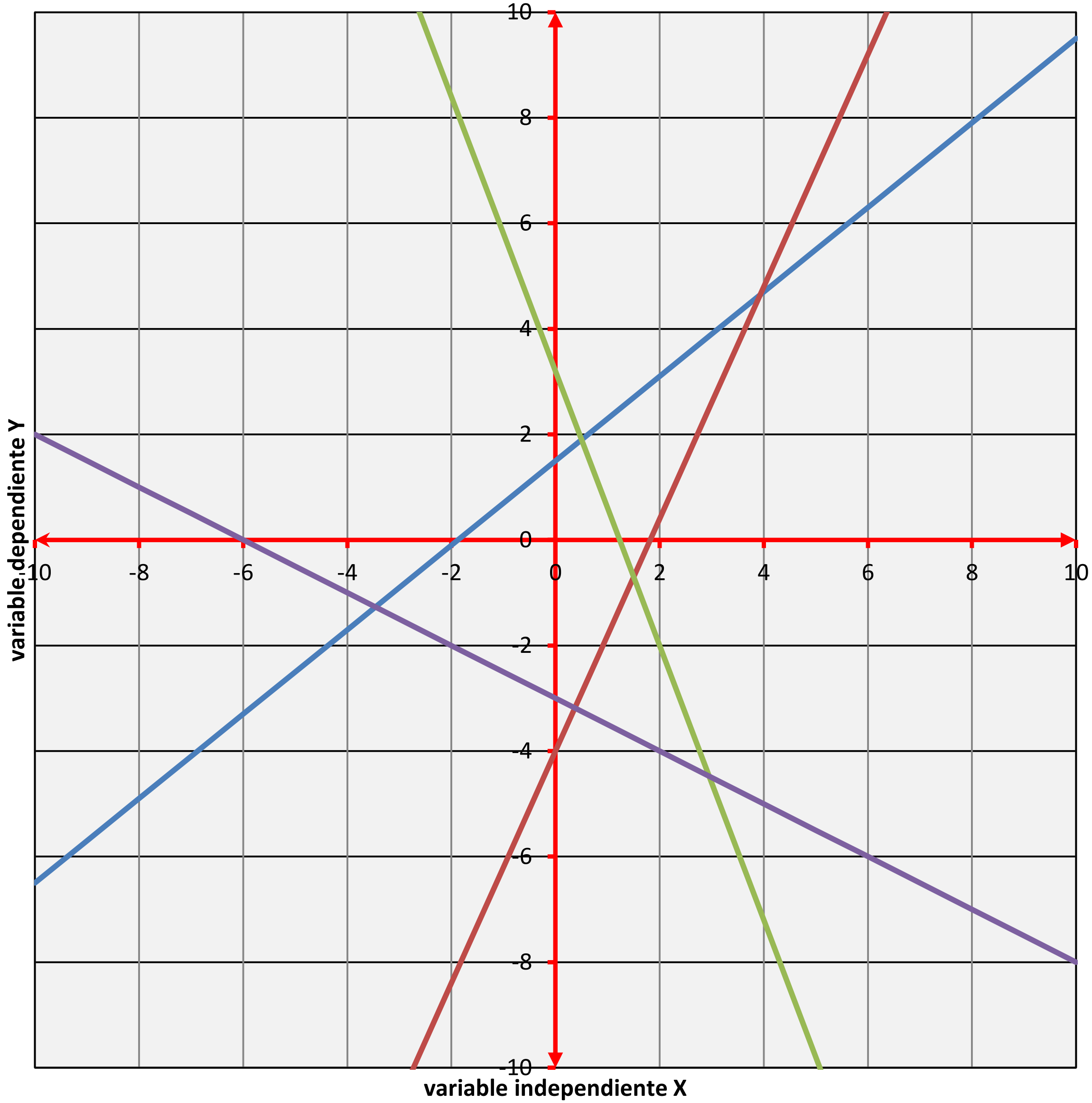
Y = -2,6 x + 3,2 (verde)



Representamos ahora, diversas funciones lineales:

$y = a\,x + b$

Ellas tendrán diferentes valores, tanto para sus coeficientes angulares, como para las ordenadas al origen.



$y = 0{,}8\,x + 1{,}5$ (azul)

$y = 2{,}2\,x - 4$ (marrón)

$Y = -2{,}6\,x + 3{,}2$ (verde)

$y = -0{,}5\,x - 3$ (violeta)

Se ha analizado el comportamiento de la función lineal con la llamada *"forma explícita":*

$$\boxed{y = a\,x + b}$$

Suele expresarse la recta, también en su *"forma implícita":*

$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B y C , son valores numéricos cualesquiera. Operando se obtiene la forma explícita:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Finalmente también puede presentarse la recta en su *"forma segmentaria"* :

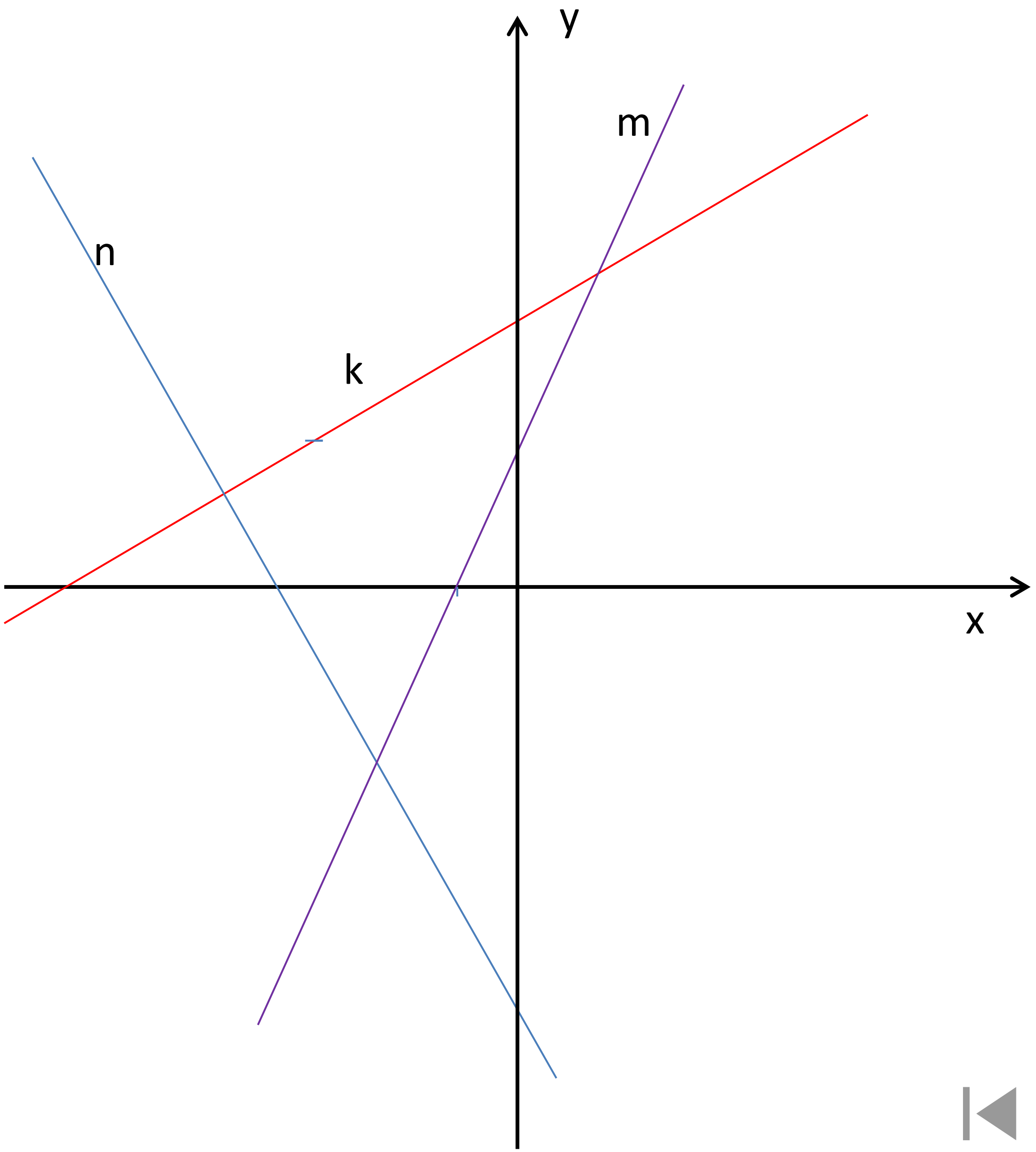
$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ donde m y n, son respectivamente la medida de los segmentos que la recta determina en su intersección con los ejes x e y . Operando se obtiene asimismo la forma explícita: $y = -\frac{n}{m}x - n$

Habiendo visto en detalle las influencias de los parámetros “a” y “b” , podemos *“imaginar”* de antemano la posición de la recta antes de representarla con exactitud.

Esto debe servirnos para comprobar en forma rápida cualquier resultado intermedio o final de un cálculo de “geometría analítica lineal”.

Asimismo se sugiere que se representen varias funciones lineales y que se estimen en forma “aproximada” las expresiones de las rectas de la figura.

Tener agilidad en este tema, se aconseja como altamente conveniente.



2 - Función de 2° grado o Función cuadrática

$$\boxed{\mathbf{y = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}}}$$

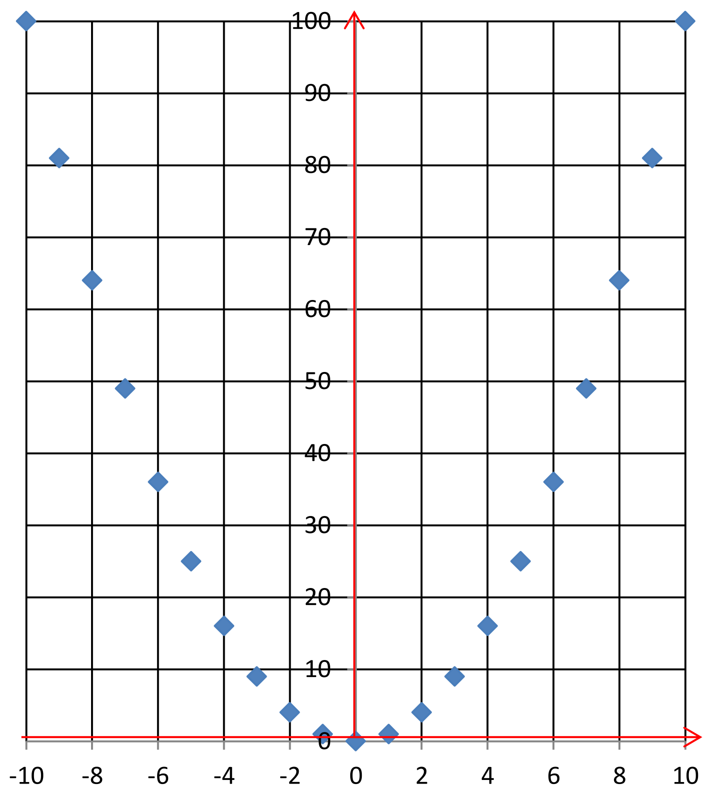
Función cuadrática: $y = ax^2 + bx + c$ (parábola de segundo grado).

Se verá primero la curva elemental (parábola básica): $y = x^2$. Para esta función no hay ninguna limitación si su dominio es : $\boldsymbol{R}$

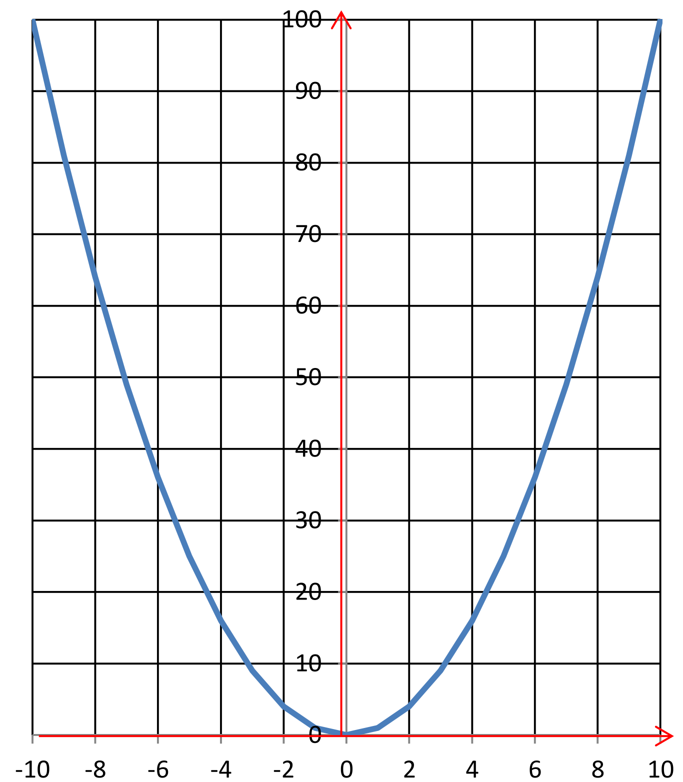
Cuadro de valores

X	Y
0	0
± 1	1
± 2	4
± 3	9
± 4	16
± 5	25
± 6	36
± 7	49
± 8	64
± 9	81
± 10	100

Puntos aislados



Parábola continua



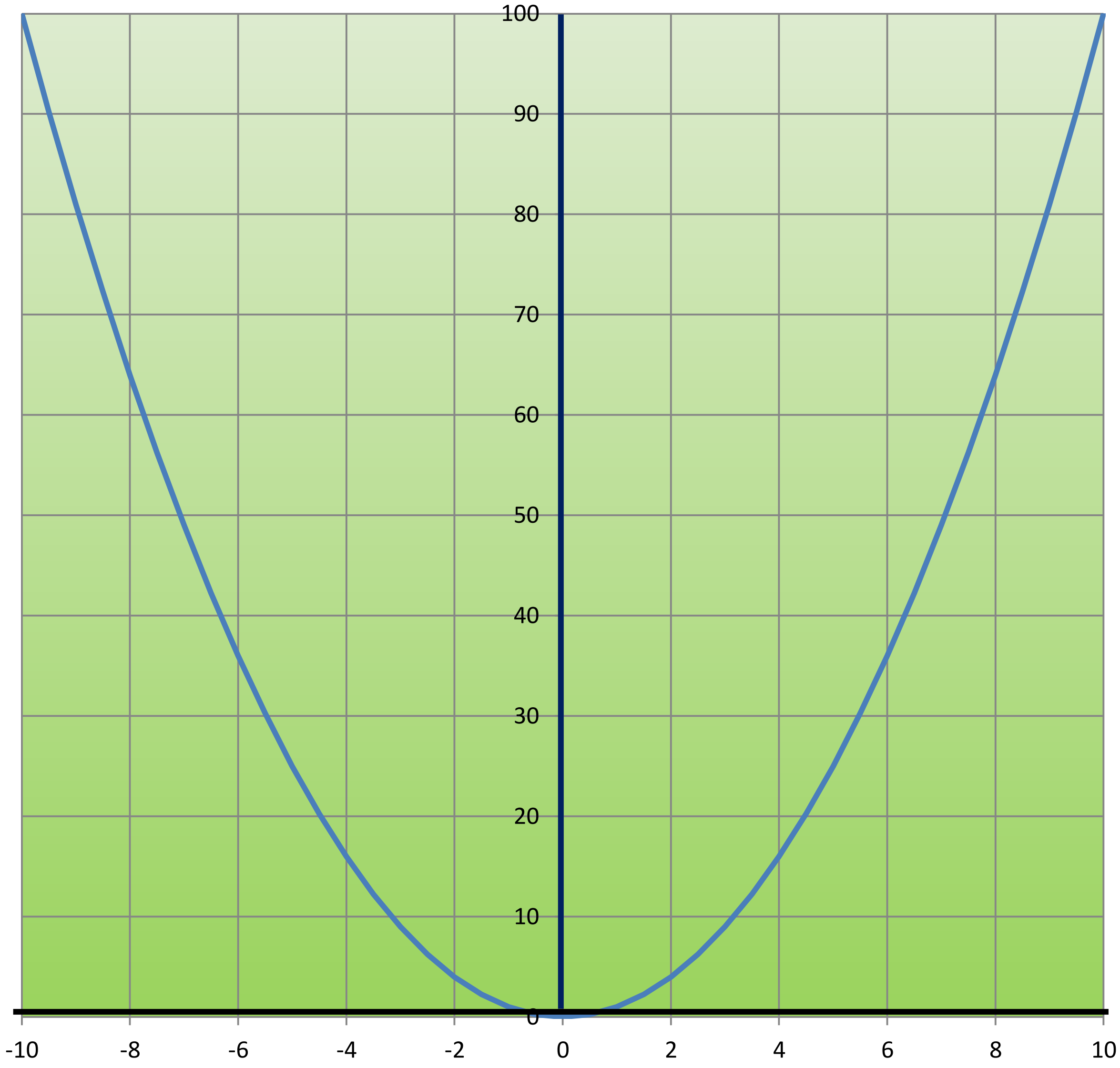
Para la función básica
y = a.x^2
modificaremos el valor
del coeficiente “a”
del término cuadrático.

Se tomarán en este caso
sólo valores positivos
mayores y menores que
“1”

Para la función básica
y = a.x^2
modificaremos el valor
del coeficiente "a"
del término cuadrático.

Se tomarán en este caso
sólo valores positivos
mayores y menores que
"1"

$y = 1 \, . \, x^2$ (azul)



Para la función básica

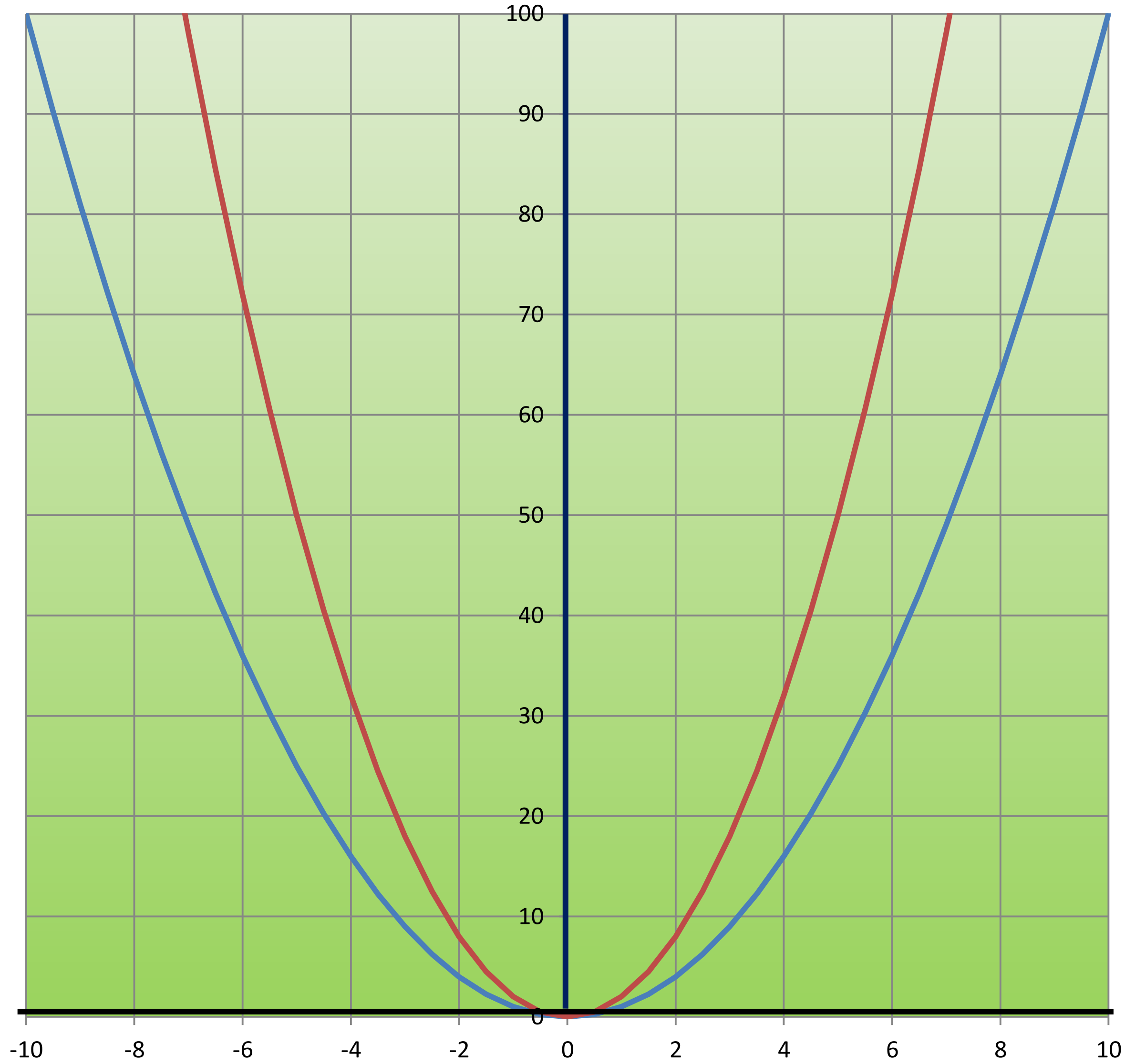
y = a.x^2

modificaremos el valor del coeficiente “a” del término cuadrático.

Se tomarán en este caso sólo valores positivos mayores y menores que “1”

$y = 1 \,.\, x^2$ (azul)

$y = 2 \,.\, x^2$ (rojo)



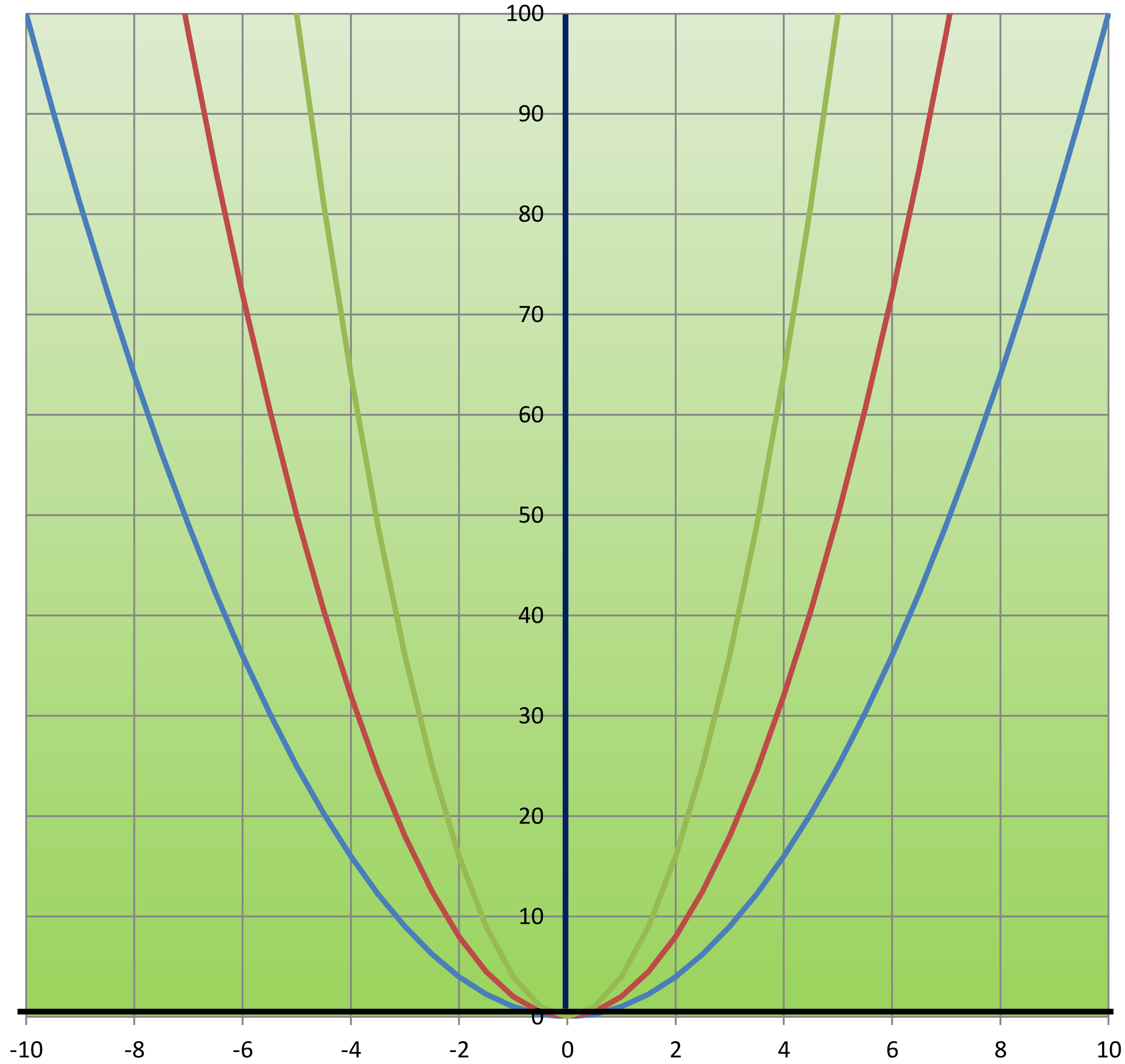
Para la función básica
y = a.x^2
modificaremos el valor
del coeficiente "a"
del término cuadrático.

Se tomarán en este caso
sólo valores positivos
mayores y menores que
"1"

$y = 1 \,.\, x^2$ (azul)

$y = 2 \,.\, x^2$ (rojo)

$y = 4 \,.\, x^2$ (verde)



Para la función básica
y = a.x^2
modificaremos el valor
del coeficiente "a"
del término cuadrático.

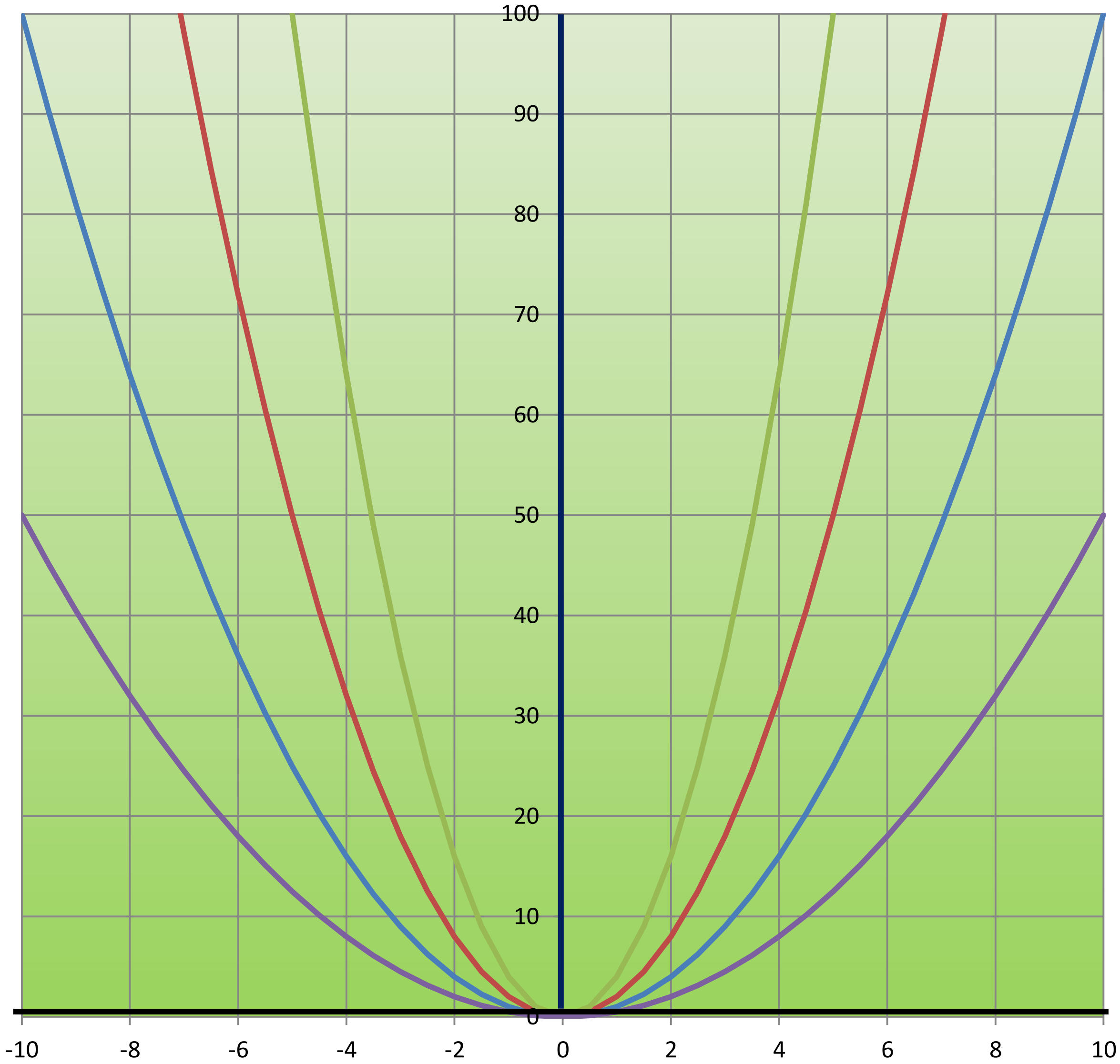
Se tomarán en este caso
sólo valores positivos
mayores y menores que
"1"

$y = 1\ .\ x^2$ (azul)

$y = 2\ .\ x^2$ (rojo)

$y = 4\ .\ x^2$ (verde)

$y = 0{,}5\ .\ x^2$ (violeta)



Para la función básica
y = a.x^2
modificaremos el valor
del coeficiente "a"
del término cuadrático.

Se tomarán en este caso
sólo valores positivos
mayores y menores que
"1"

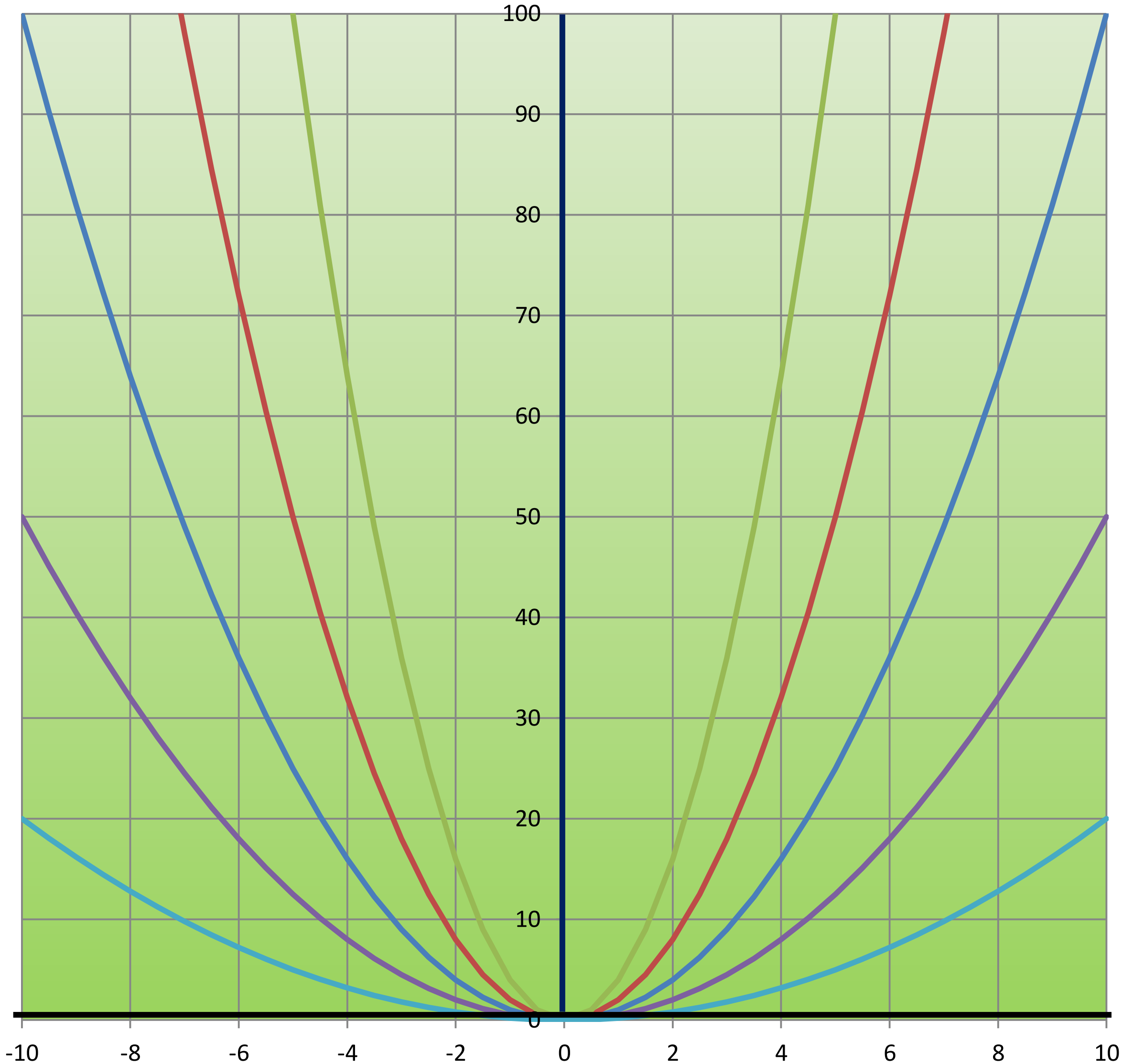
$y = 1\ .\ x^2$ (azul)

$y = 2\ .\ x^2$ (rojo)

$y = 4\ .\ x^2$ (verde)

$y = 0{,}5\ .\ x^2$ (violeta)

$y = 0{,}2\ .\ x^2$ (celeste)



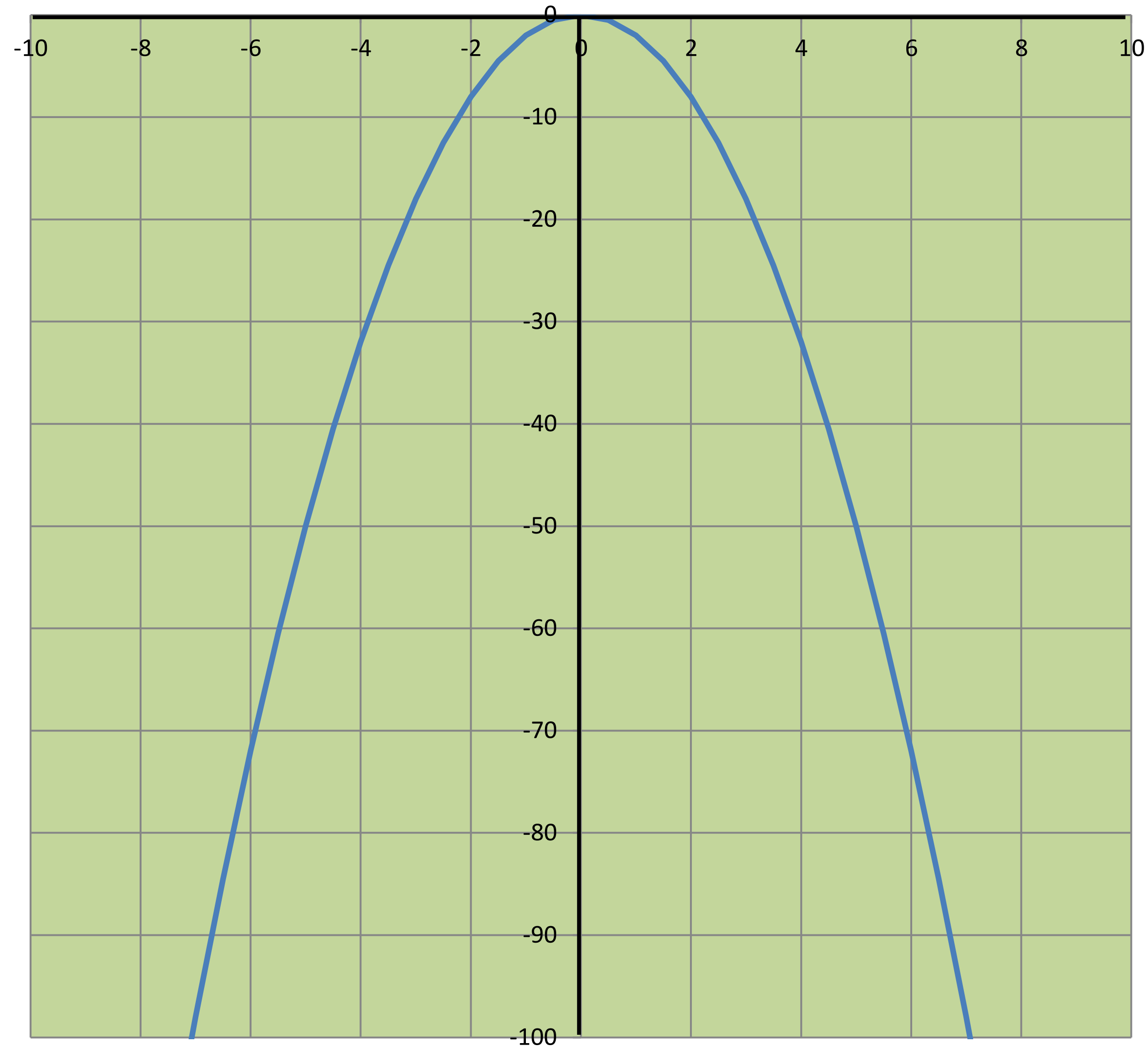
Para la función básica
y = a.x^2

modificaremos ahora el valor del coeficiente “a” del término cuadrático; pero en este caso se tomarán sólo dos valores negativos.

Para la función básica
y = a.x^2

modificaremos ahora el valor del coeficiente "a" del término cuadrático; pero en este caso se tomarán sólo dos valores negativos.

$y = -2 \cdot x^2$ (azul)

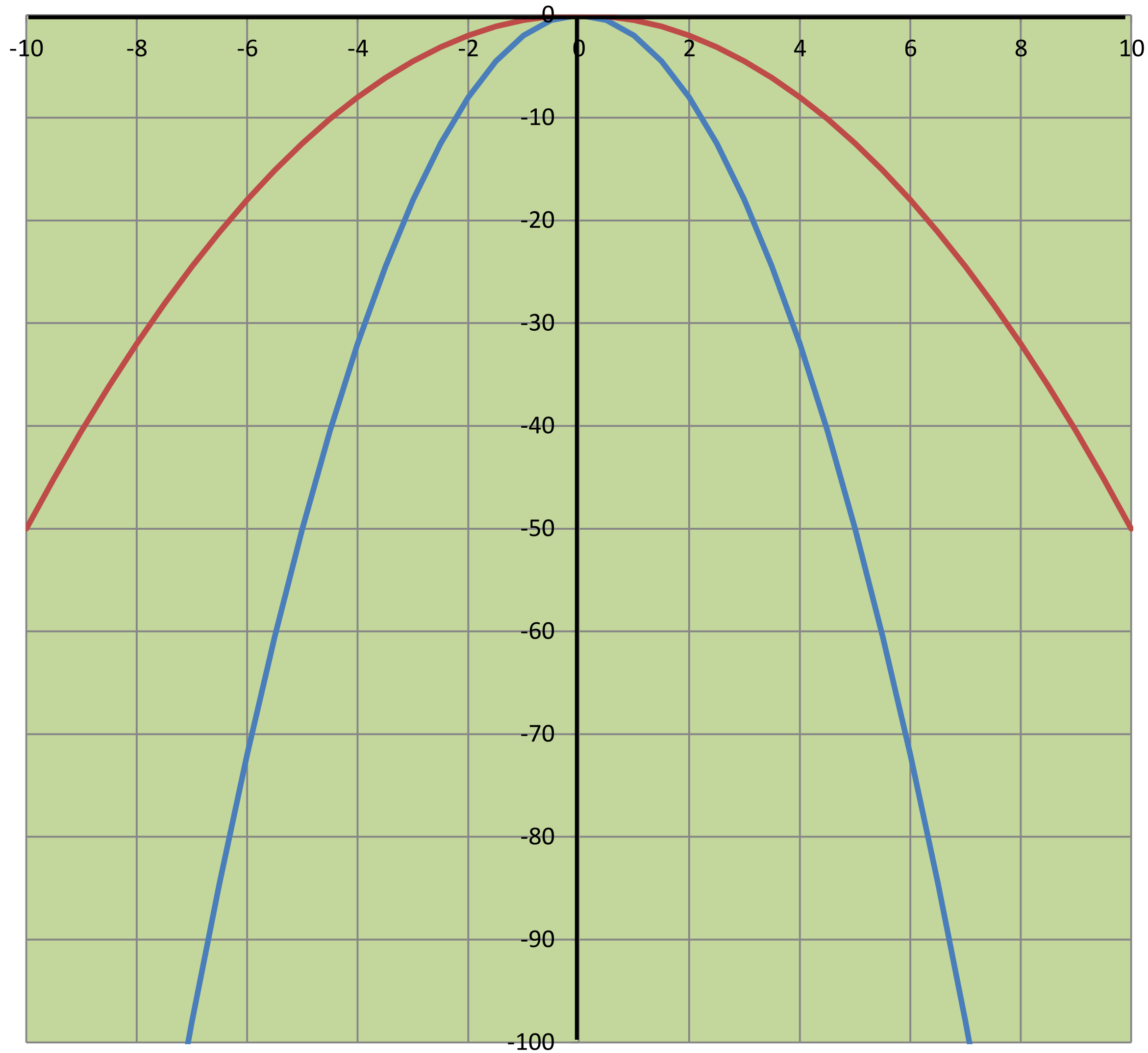


Para la función básica
y = a.x^2

modificaremos ahora el valor del coeficiente "a" del término cuadrático; pero en este caso se tomarán sólo dos valores negativos.

y = -2 . x^2 (azul)

y = -0,5 . x^2 (marrón)



Hemos comprobado que el coeficiente “a” del término cuadrático, hace que la parábola correspondiente tenga las *ramas infinitas* hacia “arriba” cuando es positivo. En cambio si el signo es negativo esas ramas son hacia “abajo”.

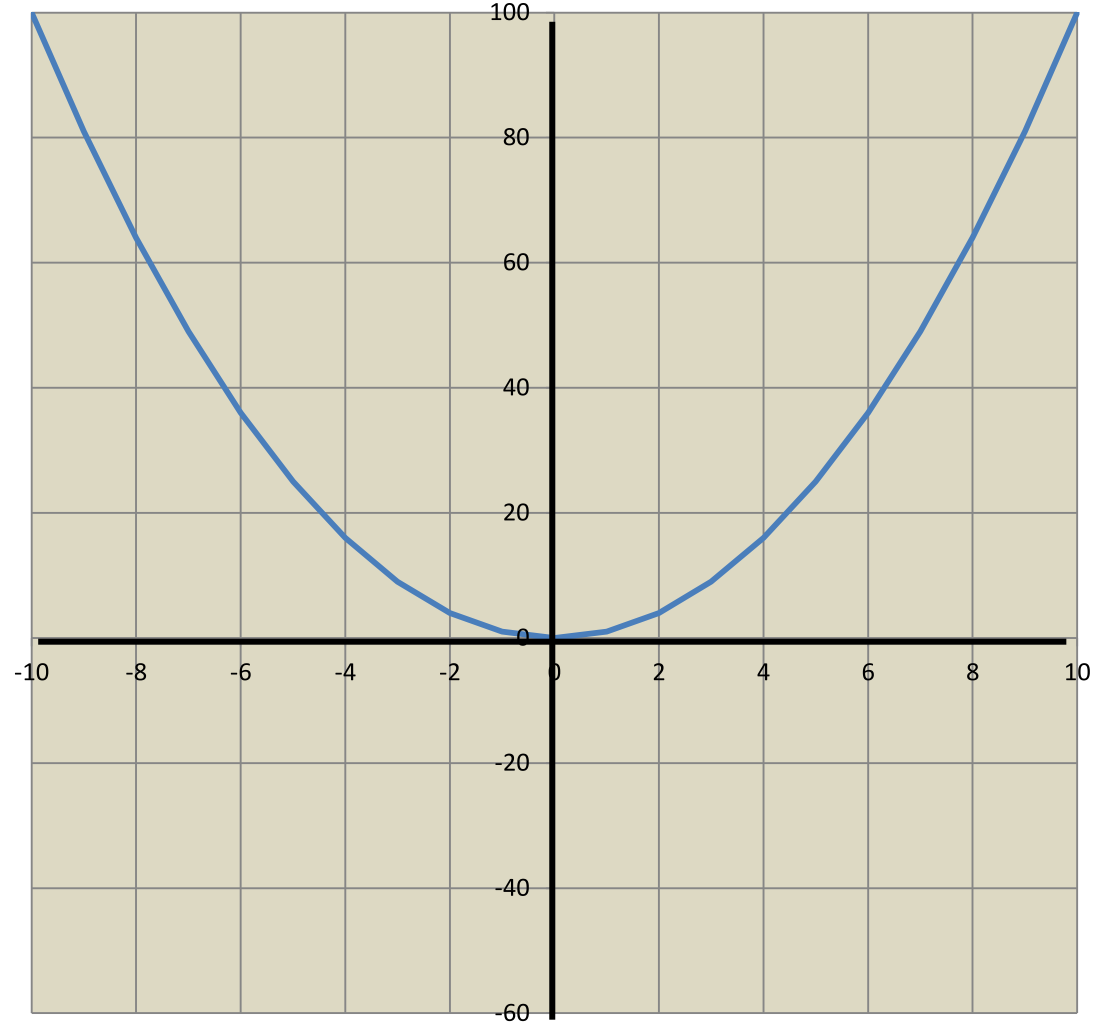
Todas las parábolas son *simétricas* respecto del eje vertical, independientemente del signo de “a”. El vértice de las mismas es, en todos los casos, el punto (0;0).

Se señala que las ramas se van ciñendo al eje cuando el **valor absoluto de “a”** es mayor que “1”, mientras que se apartan del eje cuando ese valor es menor que “1”.

Veremos ahora la influencia que tiene el coeficiente del término lineal “b”, agregado a la expresión anterior.

Agregamos a la básica, el coeficiente “b”,
que tomará valores cualesquiera, tanto positivos como negativos.

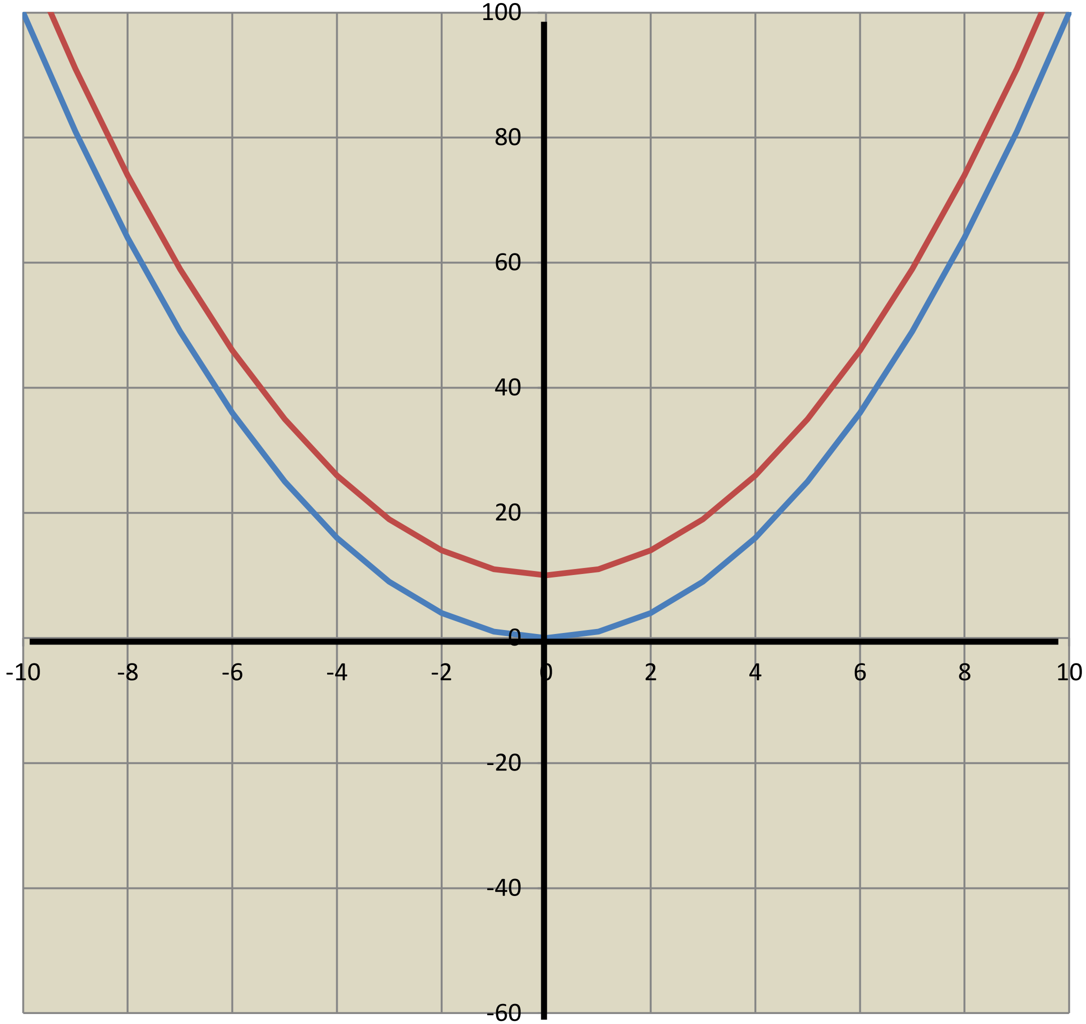
$y = 1 . x^2$ (azul)



Agregamos a la básica, el coeficiente “b”,
que tomará valores cualesquiera, tanto positivos como negativos.

$y = 1\,.x^2$ (azul)

$y = 1.\,x^2 + 10$ (rojo)

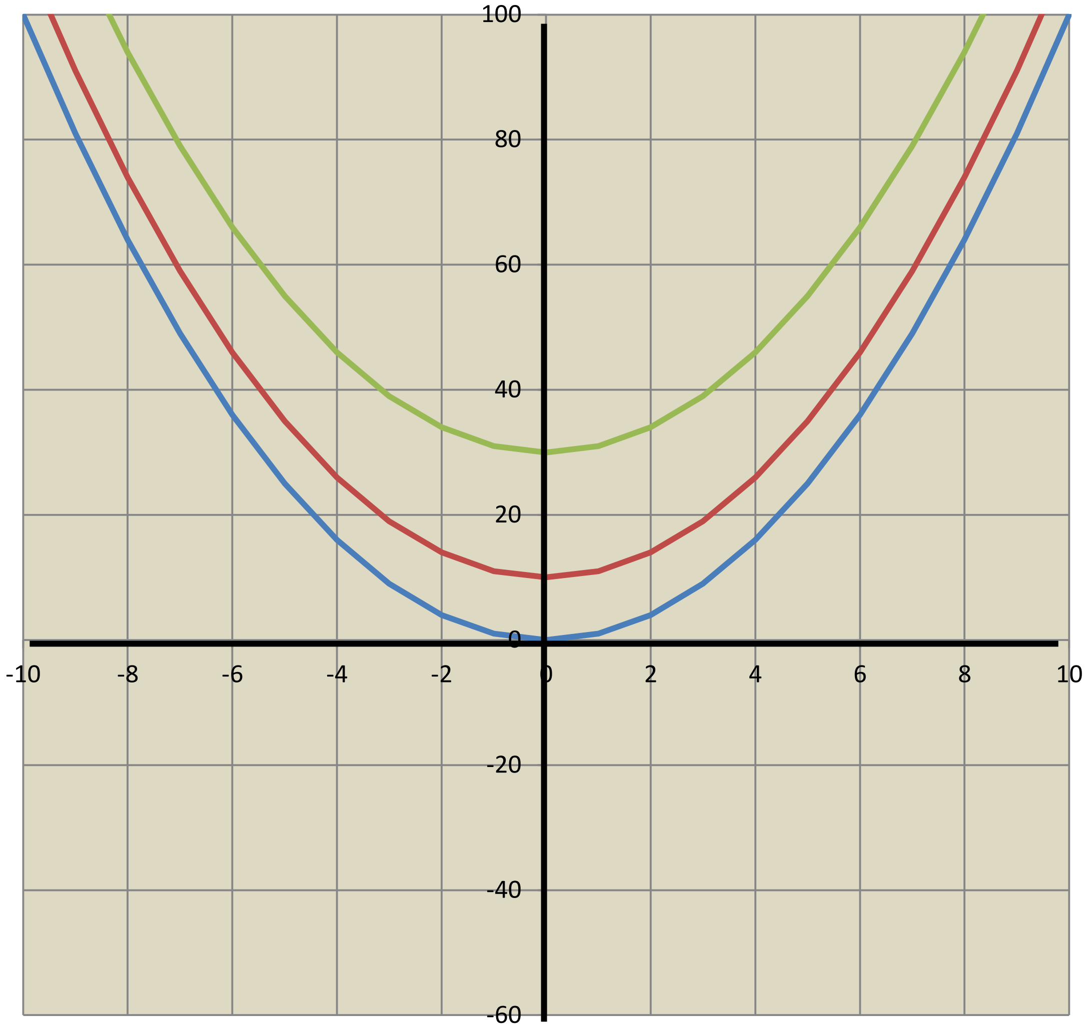


Agregamos a la básica, el coeficiente “b”, que tomará valores cualesquiera, tanto positivos como negativos.

$y = 1\,.x^2$ (azul)

$y = 1.\,x^2 + 10$ (rojo)

$y = 1.\,x^2 + 30$ (verde)



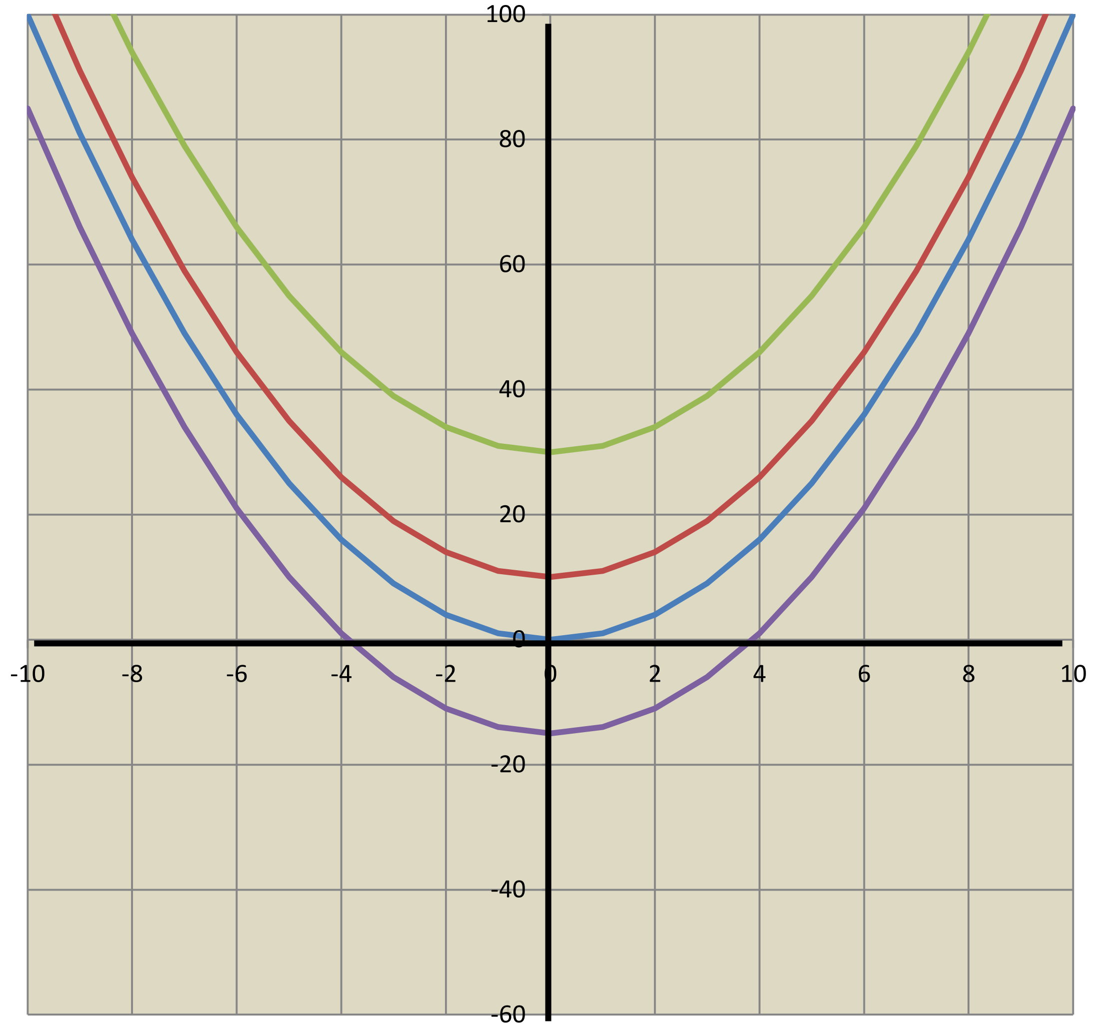
Agregamos a la básica, el coeficiente “b”,
que tomará valores cualesquiera, tanto positivos como negativos.

$y = 1\,.x^2$ (azul)

$y = 1.\,x^2 + 10$ (rojo)

$y = 1.\,x^2 + 30$ (verde)

$y = 1.\,x^2 - 15$ (violeta)



Agregamos a la básica, el coeficiente “b”,
que tomará valores cualesquiera, tanto positivos como negativos.

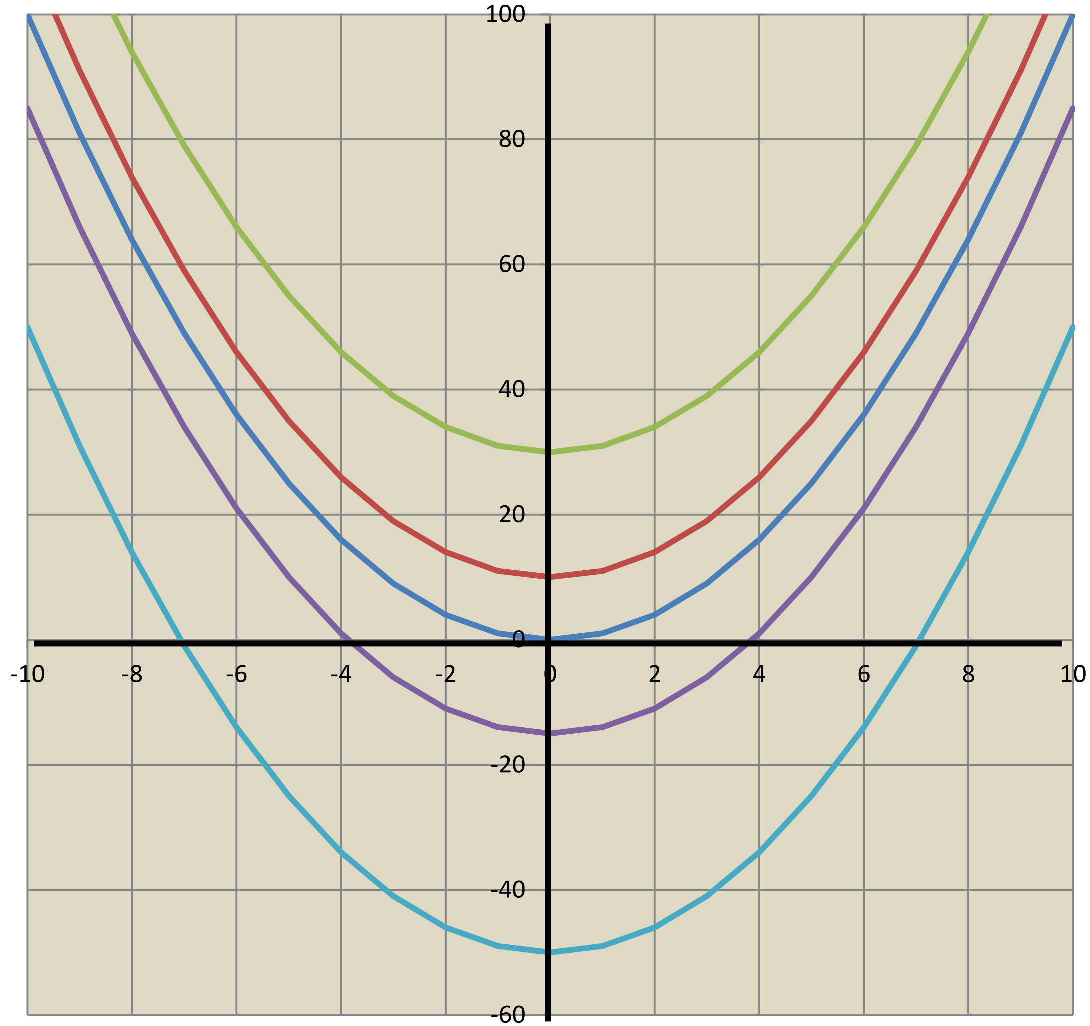
$y = 1\,.x^2$ (azul)

$y = 1.\,x^2 + 10$ (rojo)

$y = 1.\,x^2 + 30$ (verde)

$y = 1.\,x^2 - 15$ (violeta)

$y = 1.\,x^2 - 50$ (celeste)



Agregamos a la básica, el coeficiente “b”,
que tomará valores cualesquiera, tanto positivos como negativos.

$y = 1\ .x^2$ (azul)

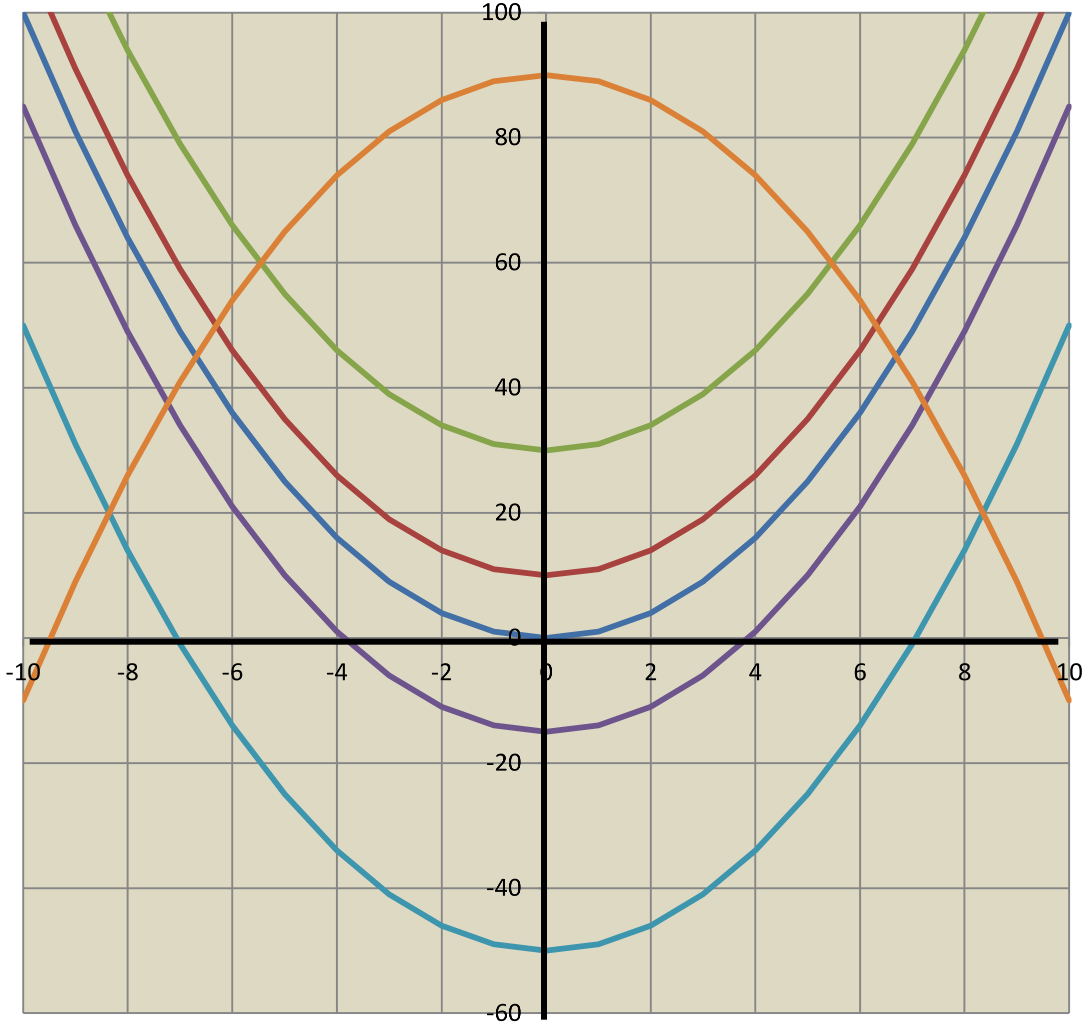
$y = 1.\ x^2 + 10$ (rojo)

$y = 1.\ x^2 + 30$ (verde)

$y = 1.\ x^2 - 15$ (violeta)

$y = 1.\ x^2 - 50$ (celeste)

$y = -1.\ x^2 + 90$ (naranja)

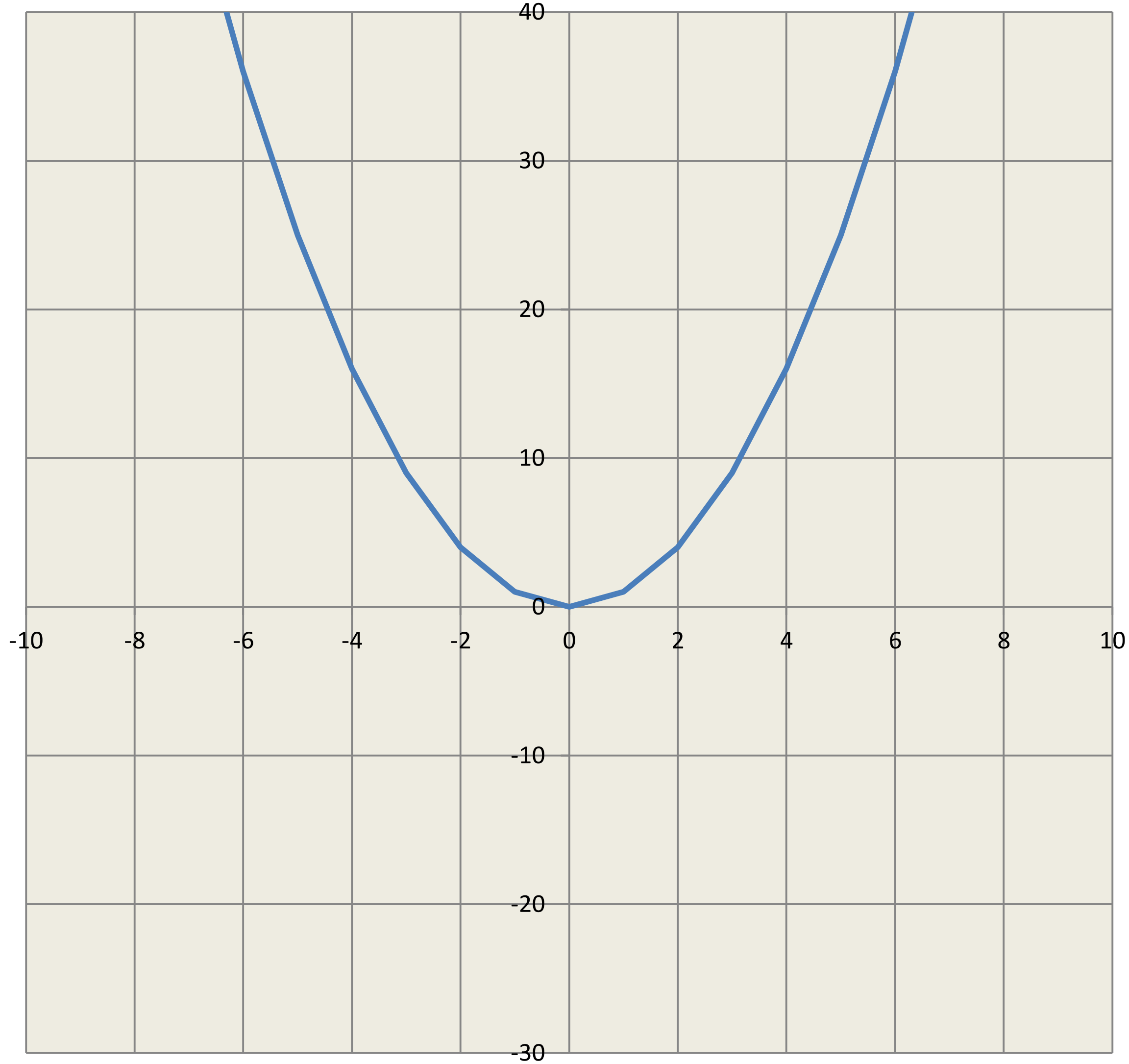


A continuación agregamos el término lineal completo:

$$y = a.x^2 + b.x$$

Para diferentes valores de "b", en valor y signo

$$y = 1.\, x^2 + 0 \text{ (azul)}$$



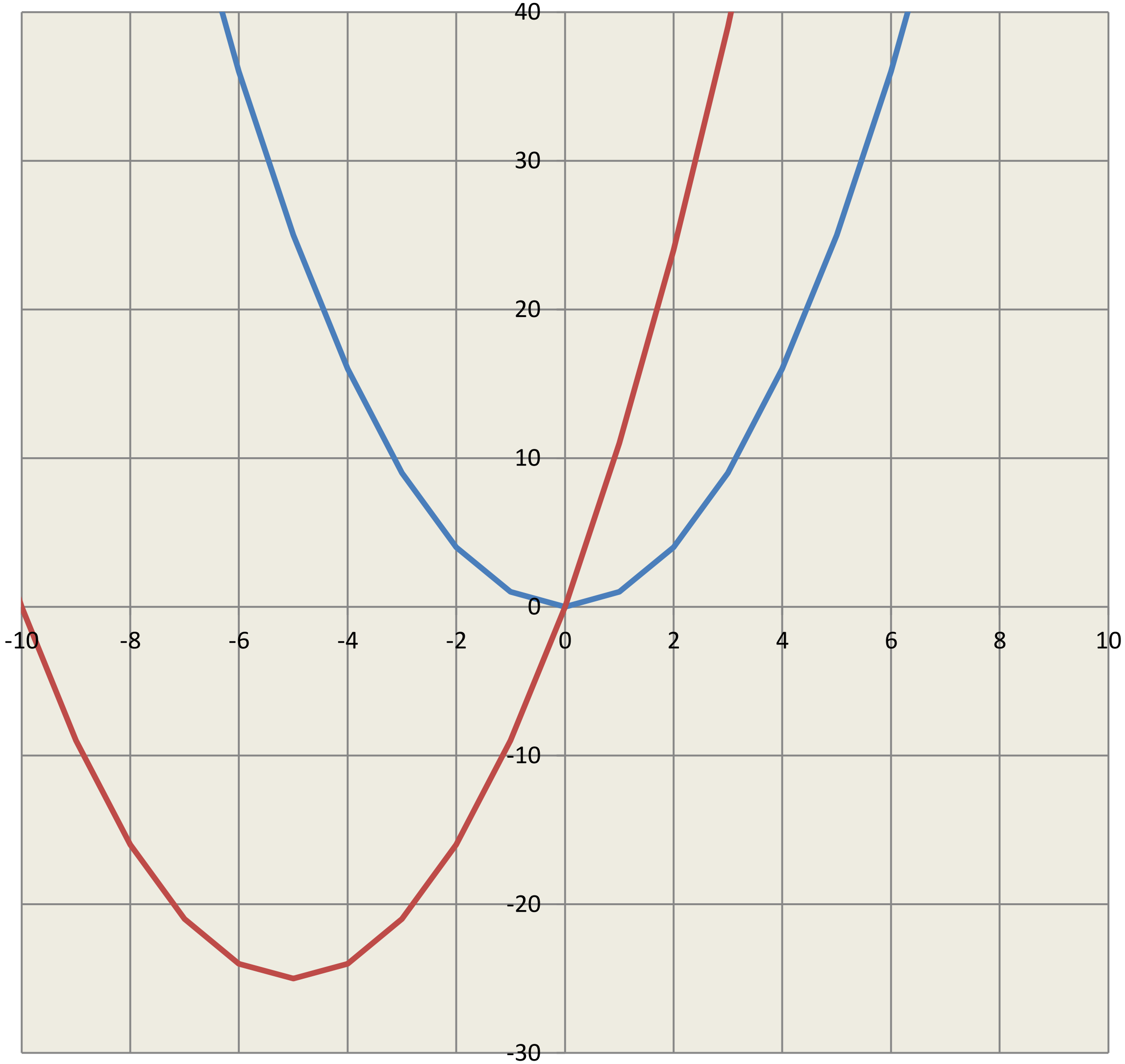
A continuación agregamos el término lineal completo:

$$y = a.x^2 + b.x$$

Para diferentes valores de "b", en valor y signo

$y = 1.\,x^2 + 0$ (azul)

$y = 1.\,x^2 + 10.\,x$ (rojo)



A continuación agregamos el término lineal completo:

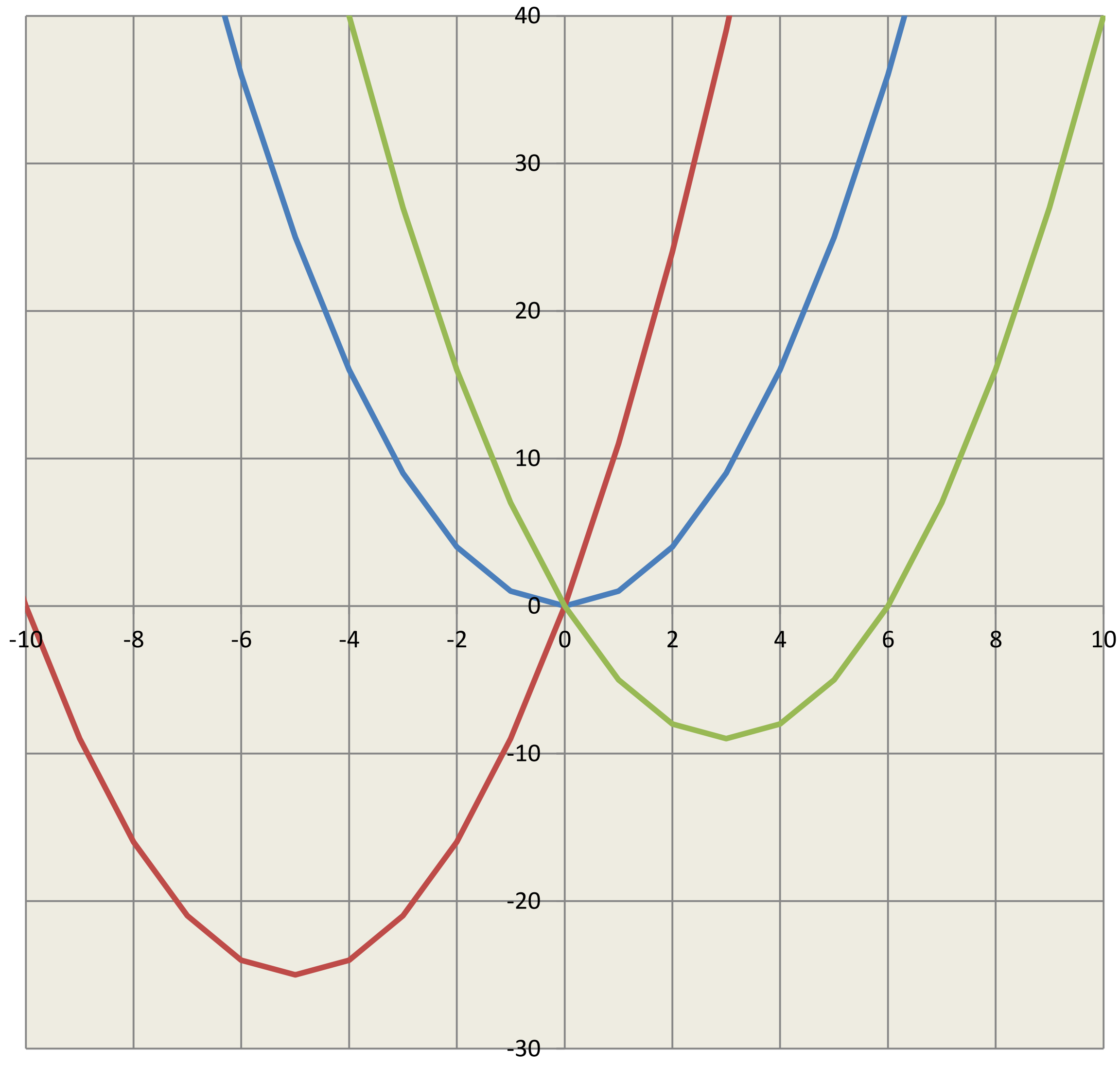
$$y = a.x^2 + b.x$$

Para diferentes valores de "b", en valor y signo

$y = 1.x^2 + 0$ (azul)

$y = 1.x^2 + 10.x$ (rojo)

$y = 1.x^2 - 6.x$ (verde)



A continuación agregamos el término lineal completo:

$$y = a.x^2 + b.x$$

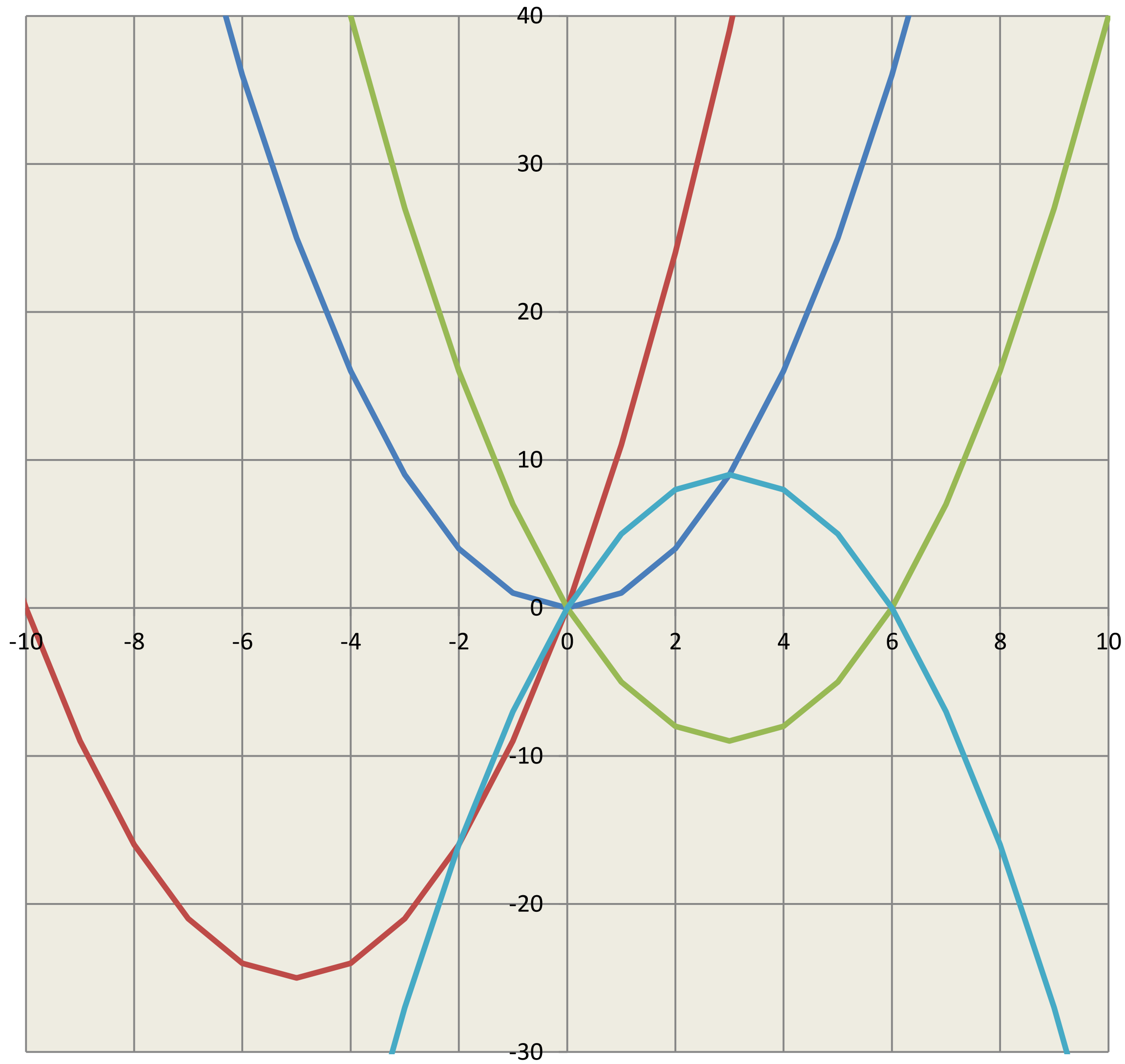
Para diferentes valores de "b", en valor y signo

$y = 1.\,x^2 + 0$ (azul)

$y = 1.\,x^2 + 10.\,x$ (rojo)

$y = 1.\,x^2 - 6.\,x$ (verde)

$y = \text{-}1.\,x^2 + 6.\,x$ (celeste)

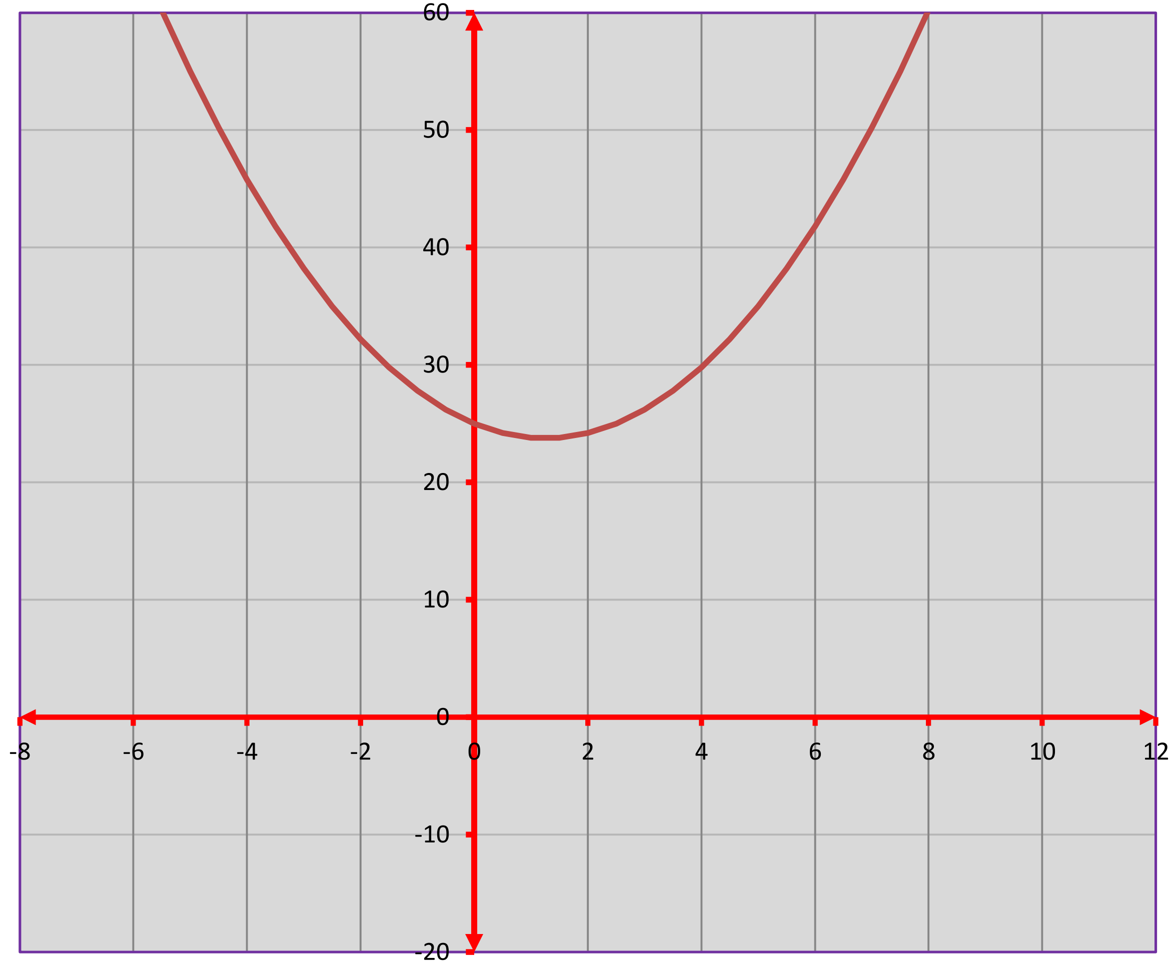


A los coeficientes “a”, “b” y al término independiente “c”, se le pueden asignar valores numéricos reales cualesquiera. Existen infinitas combinaciones posibles y cada terna corresponderá a una de las infinitas parábolas del plano cartesiano.
A título informativo veremos algunas de ellas, con diferentes “a”, “b” y “c”.

A los coeficientes “a”, “b” y al término independiente “c”, se le pueden asignar valores numéricos reales cualesquiera. Existen infinitas combinaciones posibles y cada terna corresponderá a una de las infinitas parábolas del plano cartesiano.

A título informativo veremos algunas de ellas, con diferentes “a”, “b” y “c”.

y= 0,8 x^2 - 2x + 25 (rojo)



A los coeficientes “a”, “b” y al término independiente “c”, se le pueden asignar valores numéricos reales cualesquiera. Existen infinitas combinaciones posibles y cada terna corresponderá a una de las infinitas parábolas del plano cartesiano.

A título informativo veremos algunas de ellas, con diferentes “a”, “b” y “c”.

y= 0,8 x^2 - 2x + 25   (rojo)

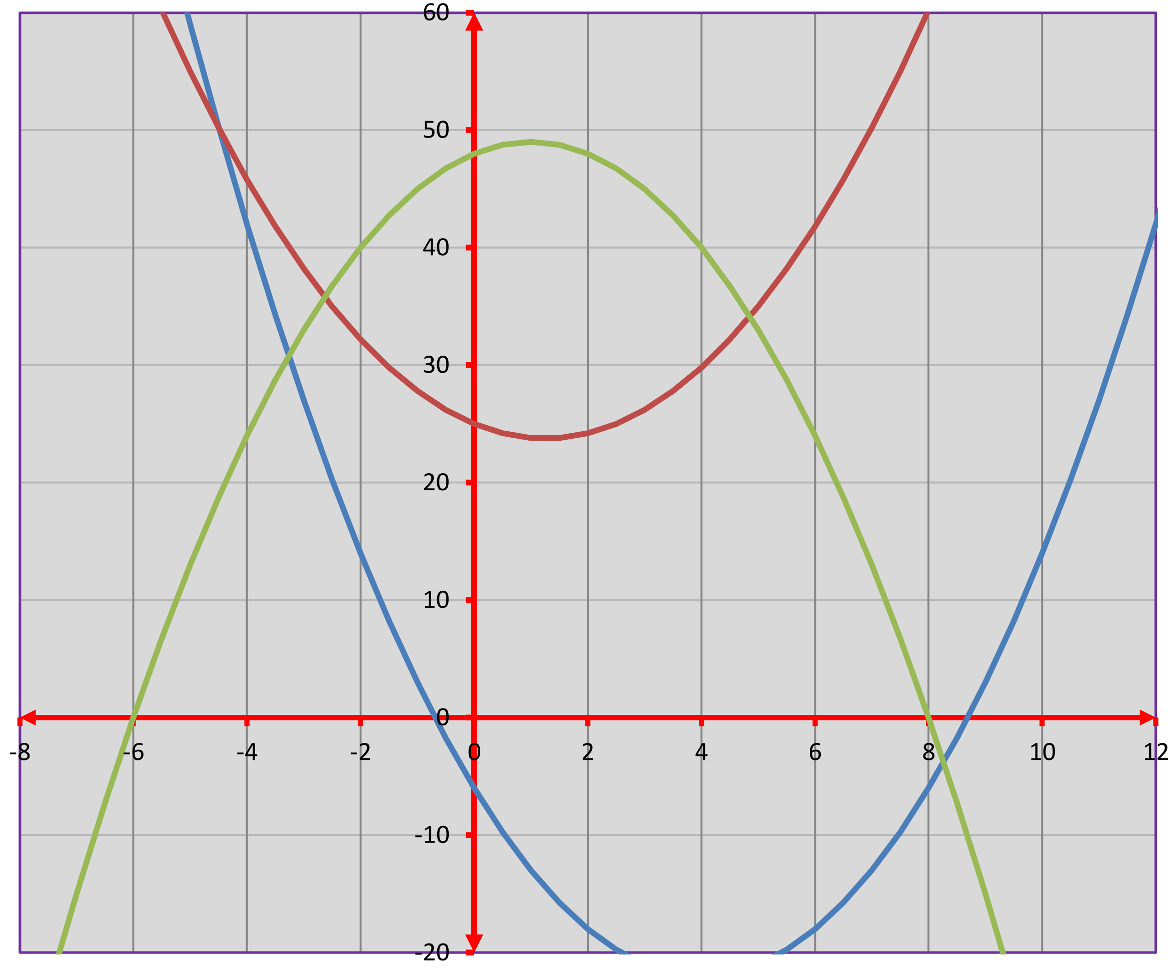
y = 1 x^2 -8 x - 6   (azul)

A los coeficientes “a”, “b” y al término independiente “c”, se le pueden asignar valores numéricos reales cualesquiera. Existen infinitas combinaciones posibles y cada terna corresponderá a una de las infinitas parábolas del plano cartesiano.
A título informativo veremos algunas de ellas, con diferentes “a”, “b” y “c”.

$y= 0,8\,x^2 - 2x + 25$ (rojo)

$y = 1\,x^2 - 8x - 6$ (azul)

$y = -1\,x^2 + 2x + 48$ (verde)



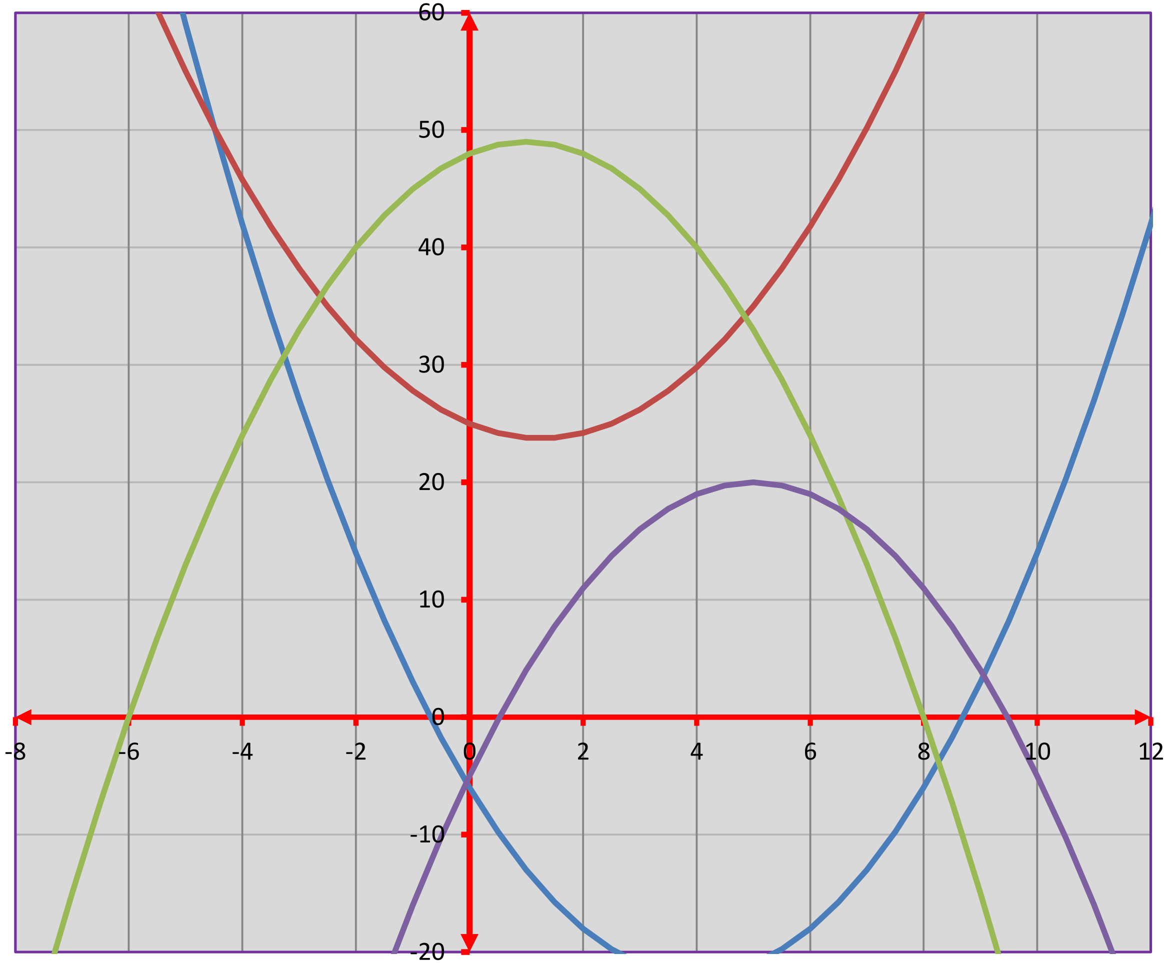
A los coeficientes “a”, “b” y al término independiente “c”, se le pueden asignar valores numéricos reales cualesquiera. Existen infinitas combinaciones posibles y cada terna corresponderá a una de las infinitas parábolas del plano cartesiano.
A título informativo veremos algunas de ellas, con diferentes “a”, “b” y “c”.

y= 0,8 x^2 - 2x + 25 (rojo)

y = 1 x^2 -8 x - 6 (azul)

y = -1 x^2 + 2x + 48 (verde)

y = -1 x^2 + 10x - 5 (violeta)



A los coeficientes “a”, “b” y al término independiente “c”, se le pueden asignar valores numéricos reales cualesquiera. Existen infinitas combinaciones posibles y cada terna corresponderá a una de las infinitas parábolas del plano cartesiano.
A título informativo veremos algunas de ellas, con diferentes “a”, “b” y “c”.

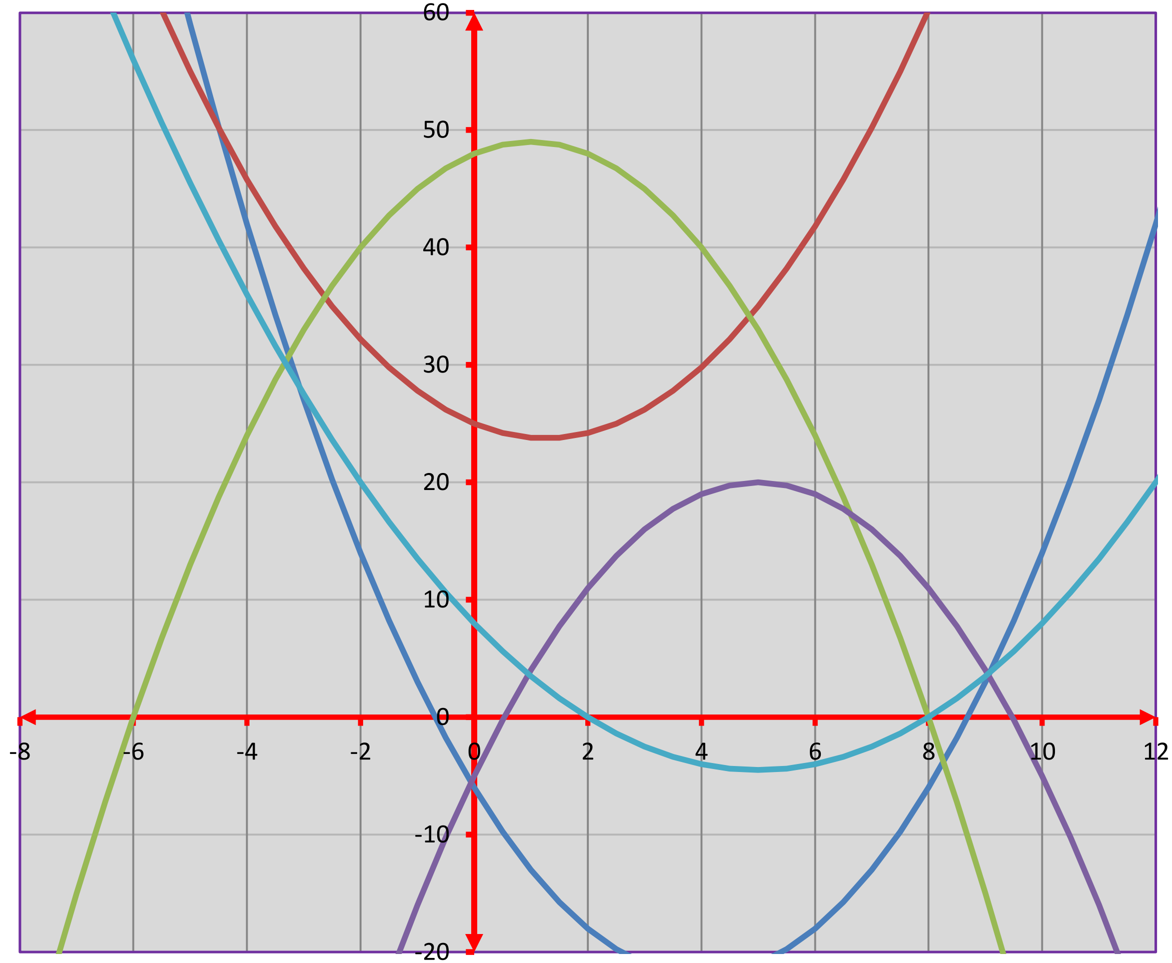
y= 0,8 x^2 - 2x + 25 (rojo)

y = 1 x^2 -8 x - 6 (azul)

y = -1 x^2 + 2x + 48 (verde)

y = -1 x^2 + 10x - 5 (violeta)

y = $0{,}5\ x^2 - 5x + 8\ (celeste)$



A los coeficientes “a”, “b” y al término independiente “c”, se le pueden asignar valores numéricos reales cualesquiera. Existen infinitas combinaciones posibles y cada terna corresponderá a una de las infinitas parábolas del plano cartesiano.

A título informativo veremos algunas de ellas, con diferentes “a”, “b” y “c”.

y= 0,8 x^2 - 2x + 25 (rojo)

y = 1 x^2 -8 x - 6 (azul)

y = -1 x^2 + 2x + 48 (verde)

y = -1 x^2 + 10x - 5 (violeta)

$y = 0{,}5\ x^2 - 5x + 8\ (celeste)$

y= 1 x^2 + 2x + 1 (naranja)

Como es sabido, las raíces de la ecuación de segundo grado, se calculan en función de las constantes, con la expresión: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

siendo los dos valores x_1 y x_2, los que se obtienen con el doble signo de la raíz cuadrada.

Pueden darse tres casos en base al valor del llamado "discriminante": **$\Delta = b^2 - 4ac$**

1). Que Δ > 0 (positivo), o sea que **$b^2 > 4ac$.** Existen en este caso dos raíces reales y distintas. La parábola corta al eje horizontal en x_1 y x_2.

2). Que Δ = 0, o sea que **$b^2 = 4ac$.** Claramente sumar o restar "0" da una raíz única, que se conoce como una raíz doble. La curva es tangente al eje x .

3). Que Δ > 0 (negativo), o sea que **$b^2 < 4ac$.** Las dos raíces serán "números complejos conjugados". La parábola está definida fuera del eje horizontal (no lo corta).

En todos los casos, para que sea sencilla la representación gráfica de la función de segundo grado, es conveniente calcular las coordenadas del "vértice" con la expresión : $x_v = -\frac{b}{2a}$ y seguirla con la determinación de $y_v = f(x_v)$. Luego calcular las raíces reales x_1 y x_2 , si existen.

Representamos una parábola genérica:

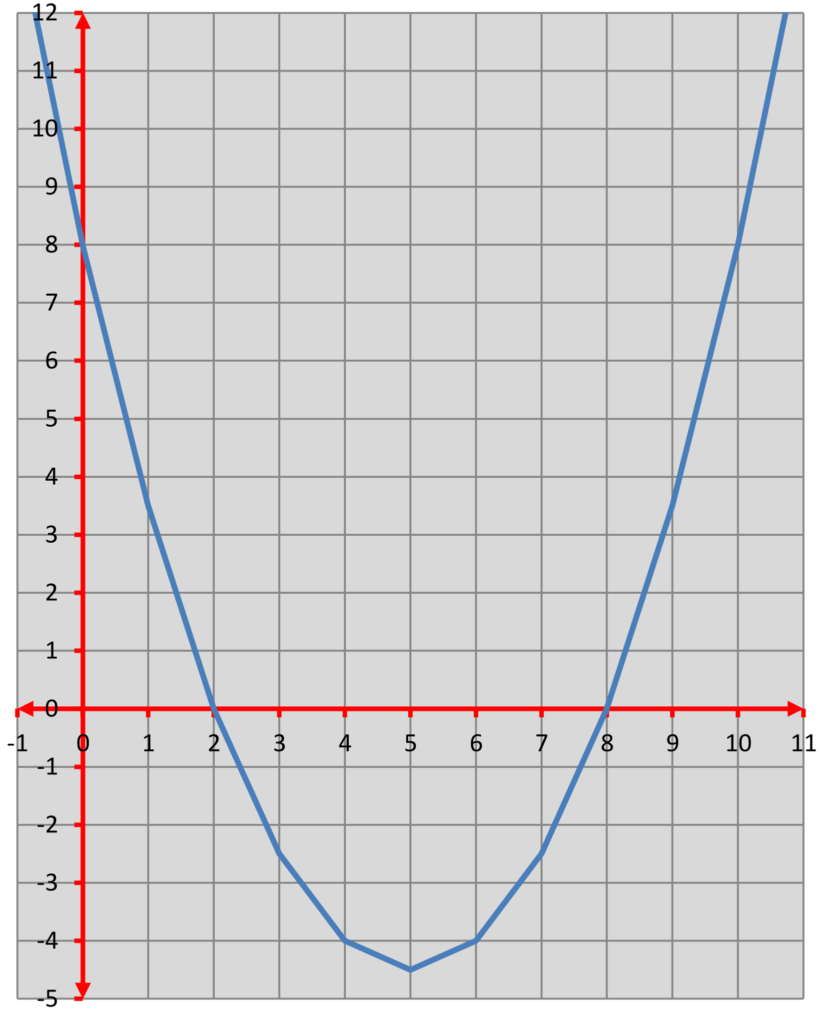
$$y = 0{,}5\,x^2 - 5\,x + 8$$

Las raíces de acuerdo con la expresión dada son: $x_1 = 8$ y $x_2 = 2$

Y el vértice es: V (5;-4,5)

Cuadro de valores

X	Y
-1	13,5
0	8
1	3,5
2	**0**
3	-2,5
4	-4
5	**-4,5**
6	-4
7	-2,5
8	**0**
9	3,5
10	8
11	13,5



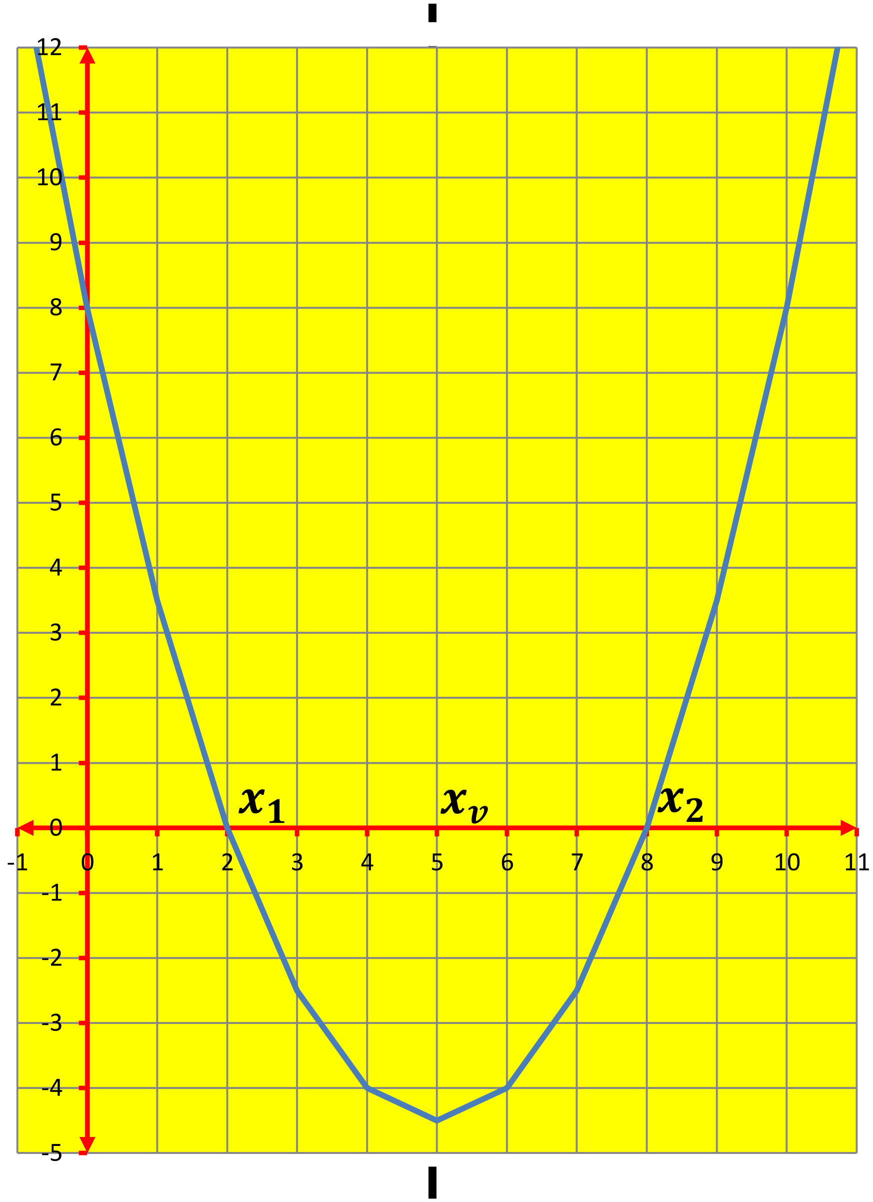
La parábola puede estar definida totalmente en el semiplano superior o en el semiplano inferior, respecto del eje “x”.

Pero cuando ocurre que la curva atraviesa el eje horizontal, lo hace en dos puntos que, se conocen como "x_1" y "x_2".

Ellos son precisamente las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

Se ha visto que los parámetros numéricos determinan la forma y posición de la parábola, pero en todos los casos sin excepción, la figura tiene un eje de simetría vertical que corta al eje horizontal en el punto $x_v = (x_1 + x_2) / 2$



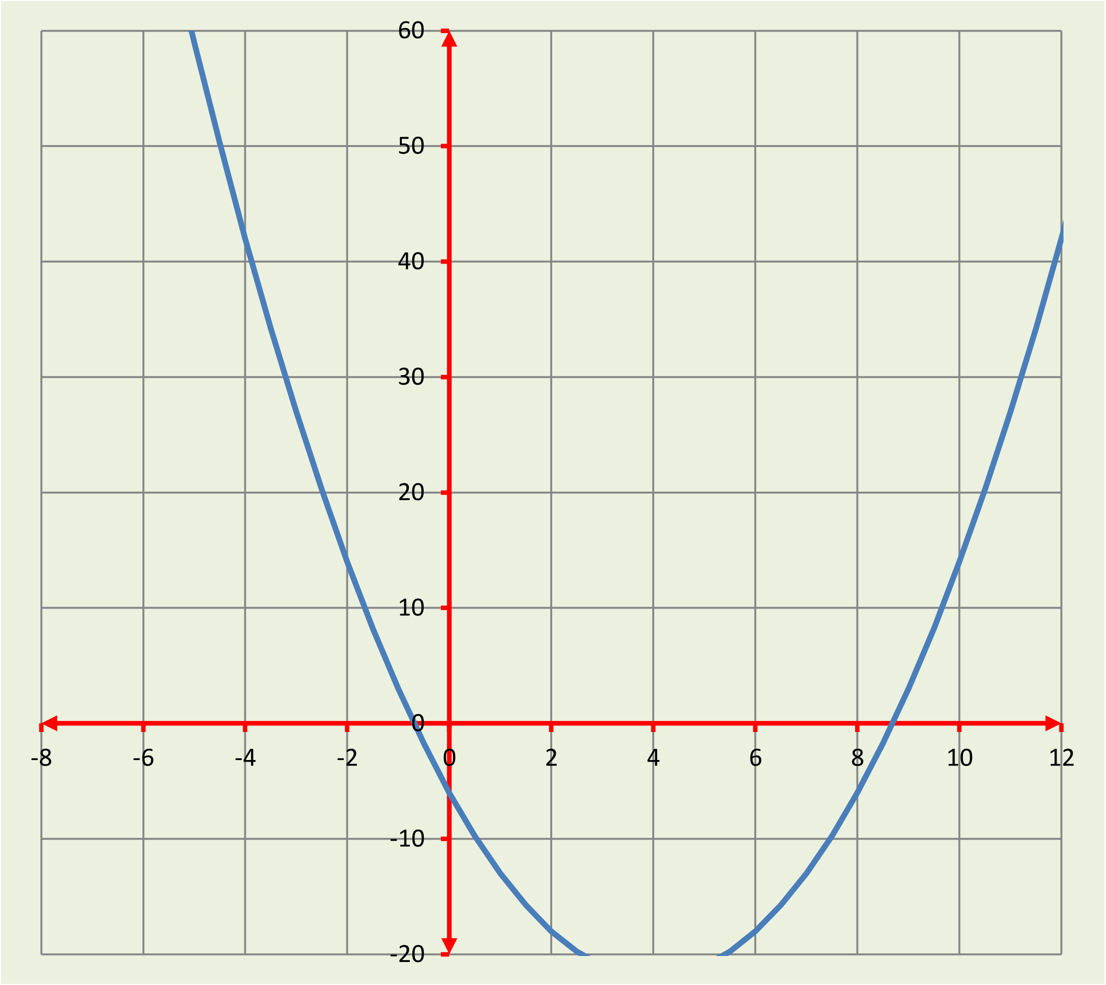
Representación cartesiana de varias funciones de segundo grado o cuadráticas.

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$$

Representación cartesiana de varias funciones de segundo grado o cuadráticas.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$y = x^2 - 8x - 6$ (azul)

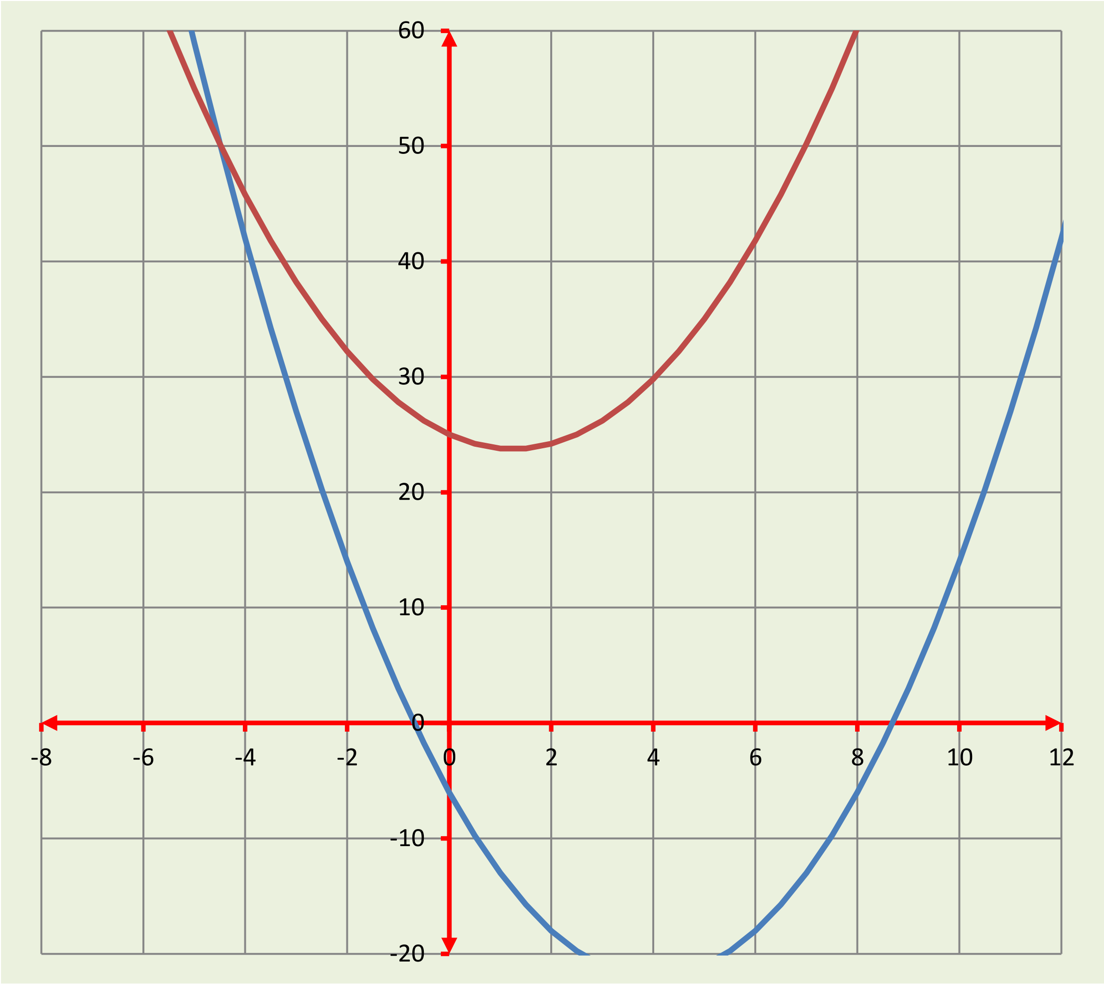


Representación cartesiana de varias funciones de segundo grado o cuadráticas.

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$$

$y = x^2 - 8x - 6$ (azul)

$y = 0{,}8\,x^2 - 2\,x + 25$ (marrón)



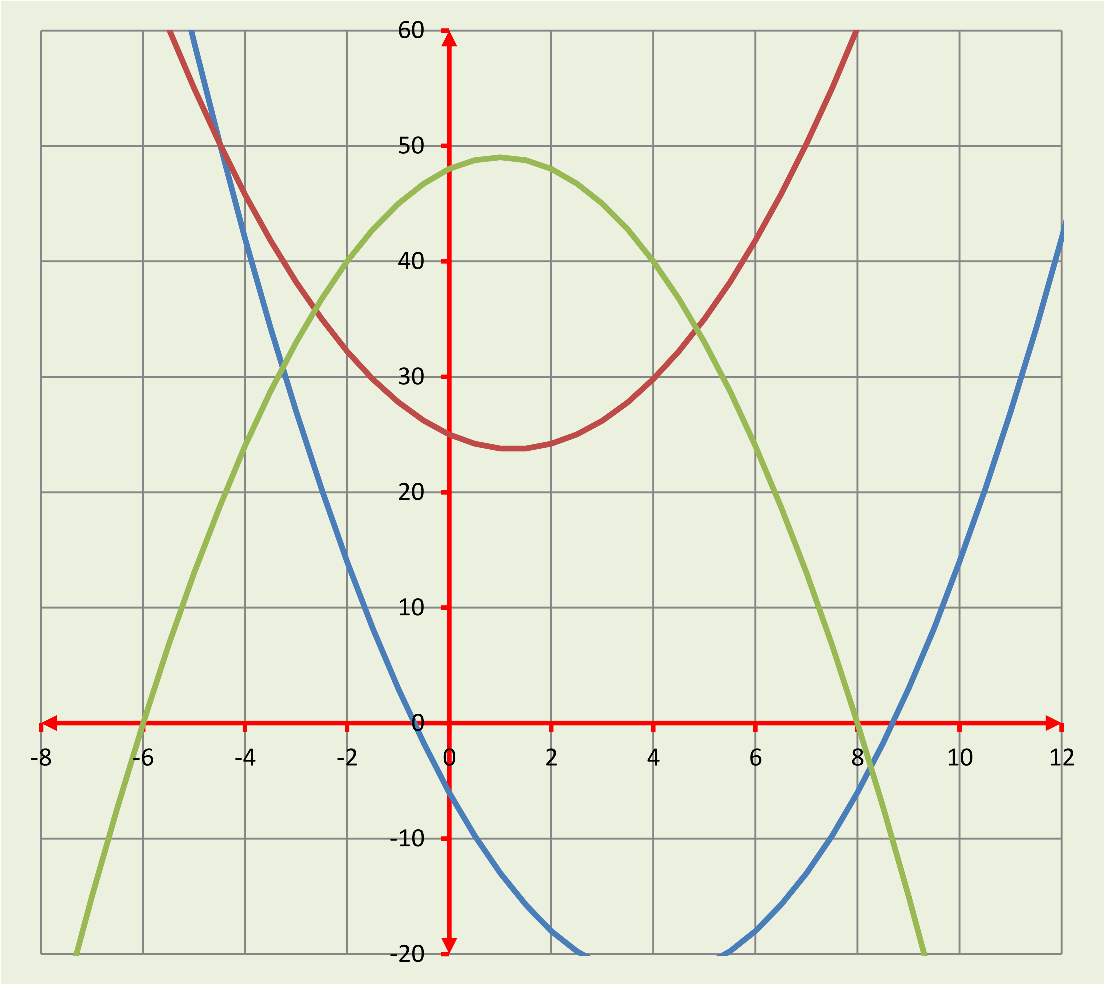
Representación cartesiana de varias funciones de segundo grado o cuadráticas.

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$$

$y = x^2 - 8x - 6$ (azul)

$y = 0{,}8\,x^2 - 2\,x + 25$ (marrón)

$y = -1\,x^2 + 2\,x + 48$ (verde)



Representación cartesiana de varias funciones de segundo grado o cuadráticas.

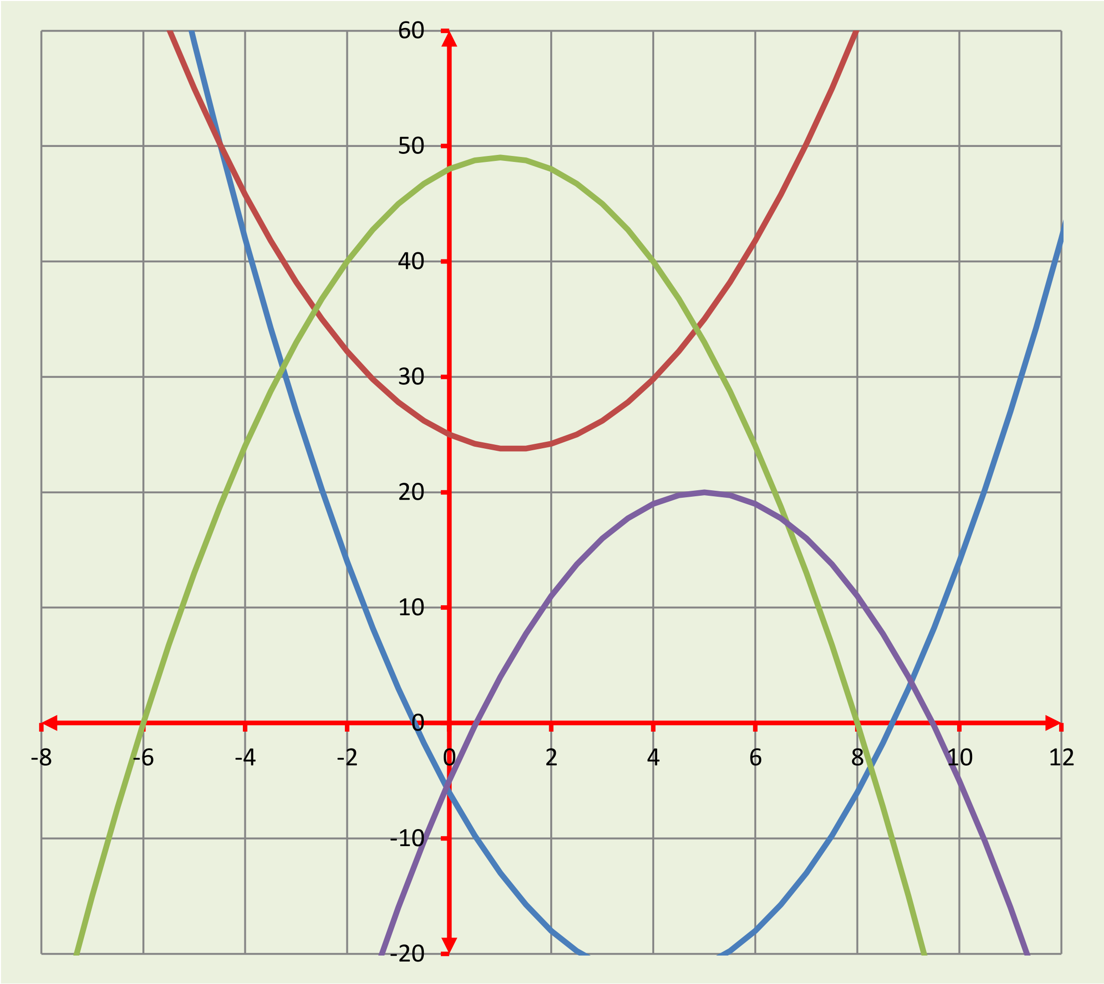
$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$$

$y = x^2 - 8x - 6$ (azul)

$y = 0{,}8\,x^2 - 2\,x + 25$ (marrón)

$y = -1\,x^2 + 2\,x + 48$ (verde)

$y = -1\,x^2 + 10\,x - 5$ (violeta)



Representación cartesiana de varias funciones de segundo grado o cuadráticas.

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$$

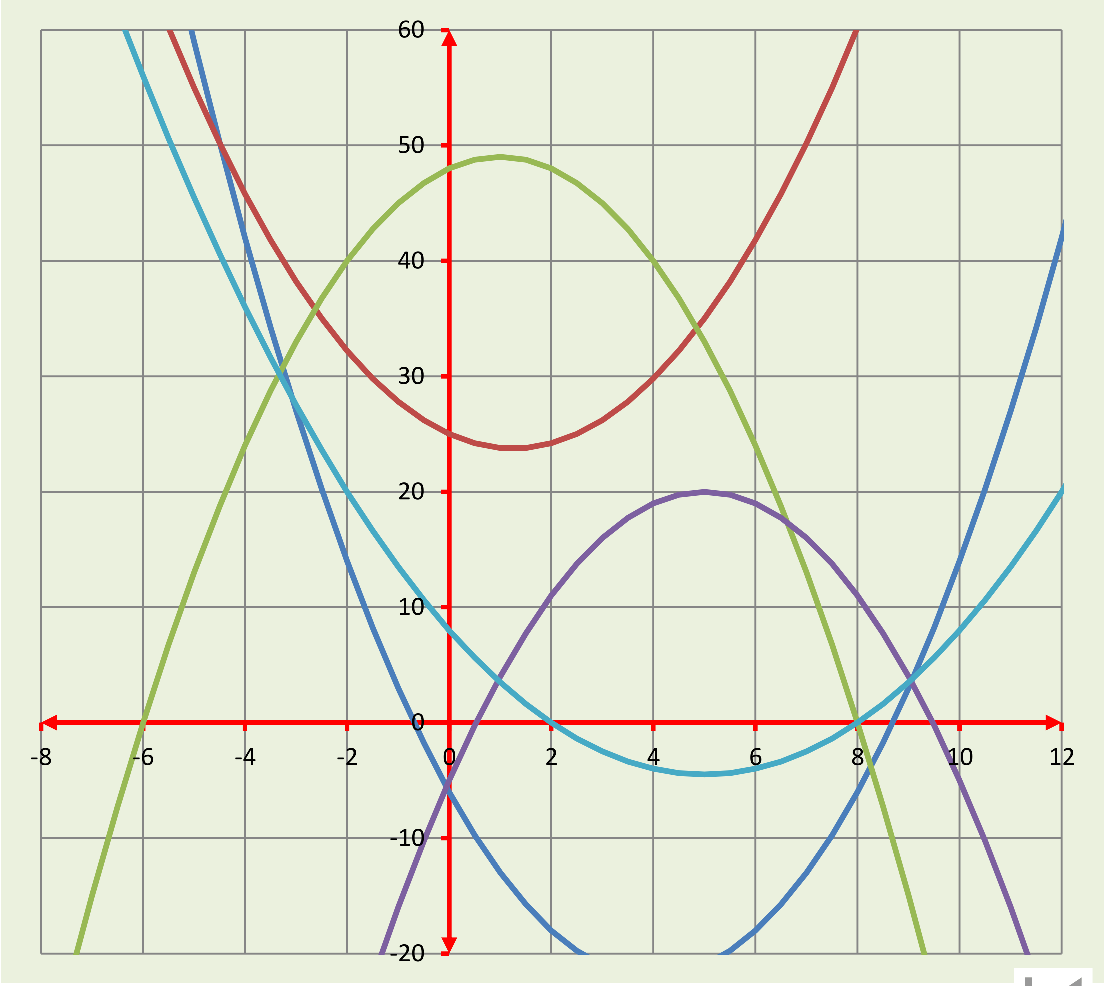
$y = x^2 - 8x - 6$ (azul)

$y = 0{,}8\,x^2 - 2\,x + 25$ (marrón)

$y = -1\,x^2 + 2\,x + 48$ (verde)

$y = -1\,x^2 + 10\,x - 5$ (violeta)

$y = 0{,}5\,x^2 - 5x + 8$ (celeste)



3 – Función de 3° grado o Función Cúbica

$$\mathbf{y} = \boxed{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^{3} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x}^{2} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}}$$

La tercera función que analizamos es la función de tercer grado o función cúbica, cuyo dominio y codominio son los números reales (***R).***

$$y = ax^3 + \quad bx^2 \quad + \quad cx + \; d$$

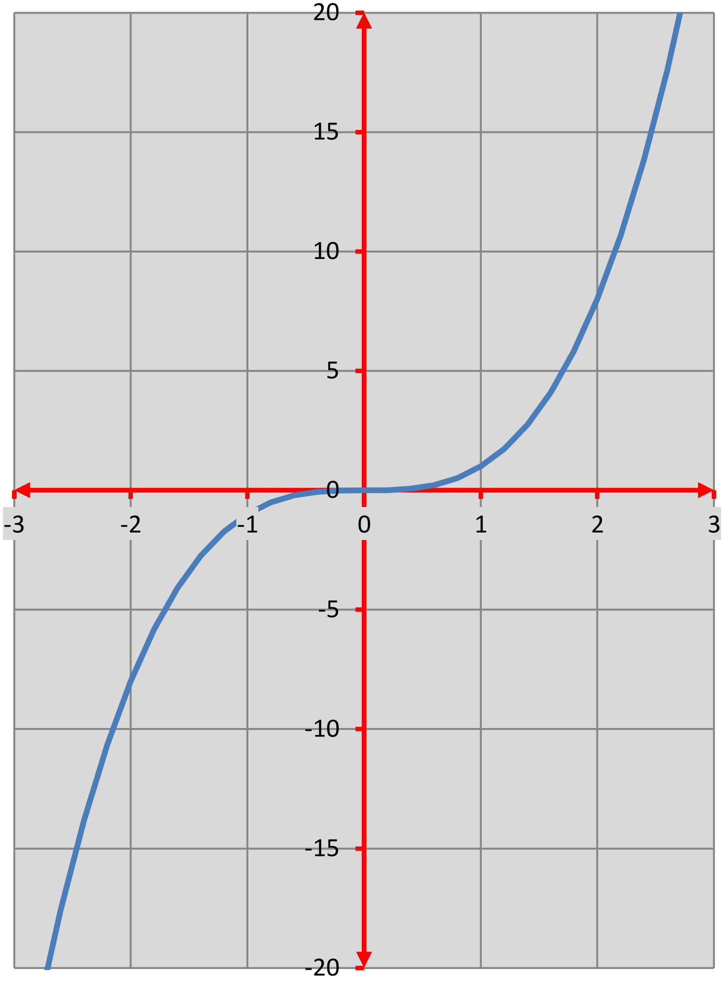
Donde "a" es el coeficiente del término de 3° grado,
"b" es el coeficiente del término de 2° grado,
"c" es el coeficiente del término lineal
y "d" es el término independiente.

Resulta obvio (y en lo sucesivo no lo diremos mas), que estamos frente a otra familia de funciones "infinita" ya que "a, b, c y d" pueden ser números reales cualesquiera y por supuesto admiten infinitas combinaciones.

Salvo para el término de tercer grado, no veremos en detalle las influencias de cada coeficiente por separado:

Comenzaremos con la mas elemental y luego conoceremos la influencia de “a” , en magnitud y signo.

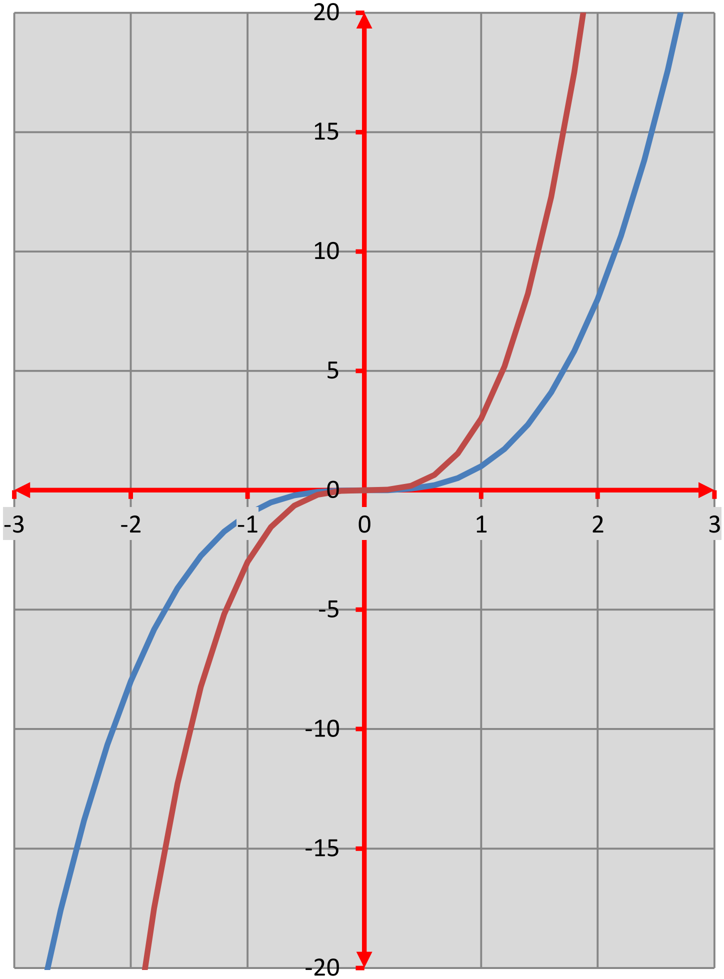
y = x^3 (azul)



Comenzaremos con la mas elemental y luego conoceremos la influencia de “a” , en magnitud y signo.

y = x^3 (azul)

y = $3x^3$ (marrón)

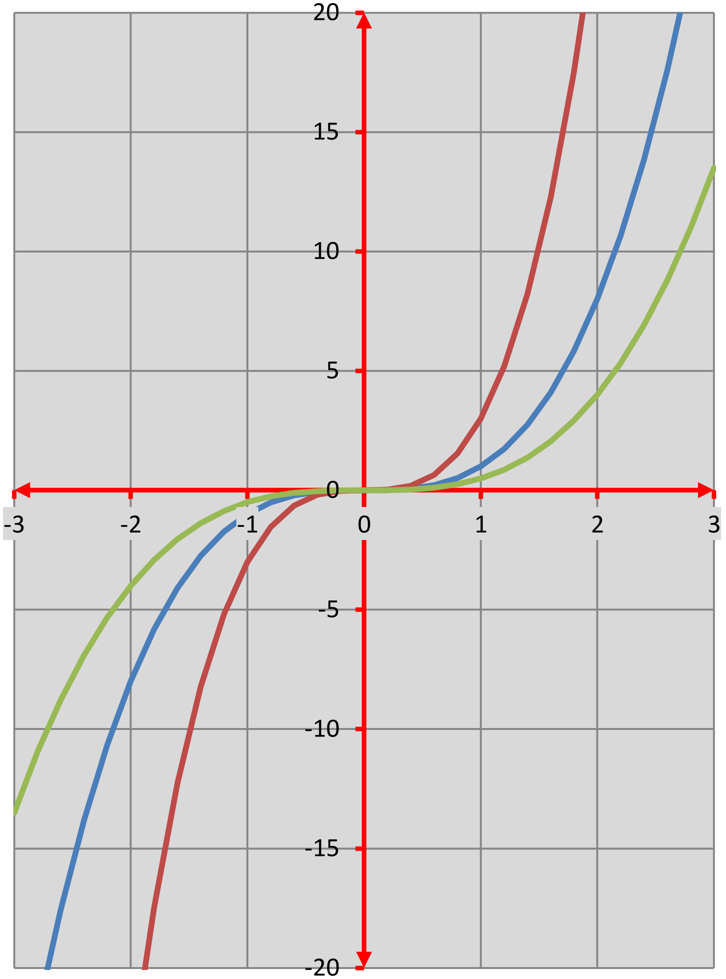


Comenzaremos con la mas elemental y luego conoceremos la influencia de “a” , en magnitud y signo.

y = x^3 (azul)

y = $3x^3$ (marrón)

y = $0,5x^3$ (verde)



Comenzaremos con la mas elemental y luego conoceremos la influencia de “a” , en magnitud y signo.

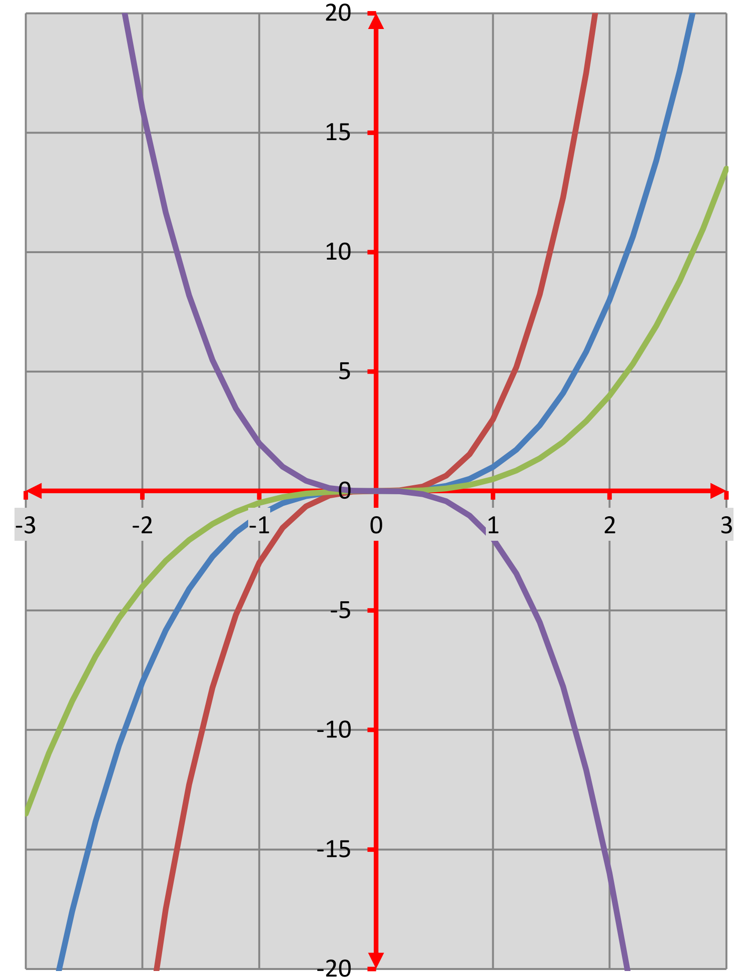
y = x^3 (azul)

y = $3x^3$ (marrón)

y = $0,5x^3$ (verde)

y = $-2x^3$ (violeta)

Las figuras son suficientes para comprender la influencia del coeficiente “a”.
Solo se señala que el signo positivo hace que las ramas infinitas se sitúen en el primero y tercer cuadrante, mientras que el signo negativo las lleva del segundo al cuarto cuadrante.
Este comportamiento se mantiene aún cuando la función cúbica se complique.



Función cúbica

$$\mathbf{y = x^3 - 3x + 2x}$$

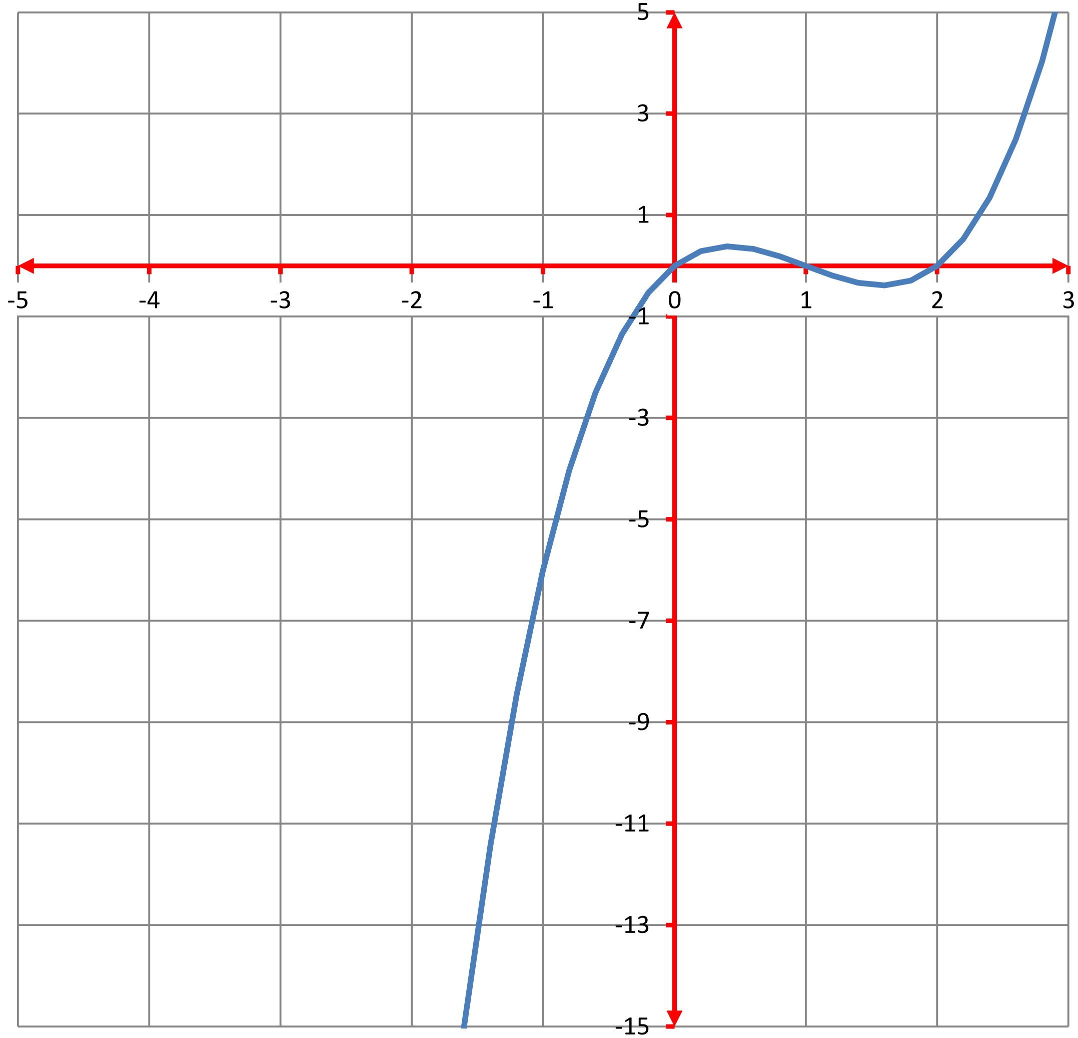
Señalamos las ramas infinitas o ramas monótonas

Las raíces son:

$x_1 = 0$

$x_1 = 1$

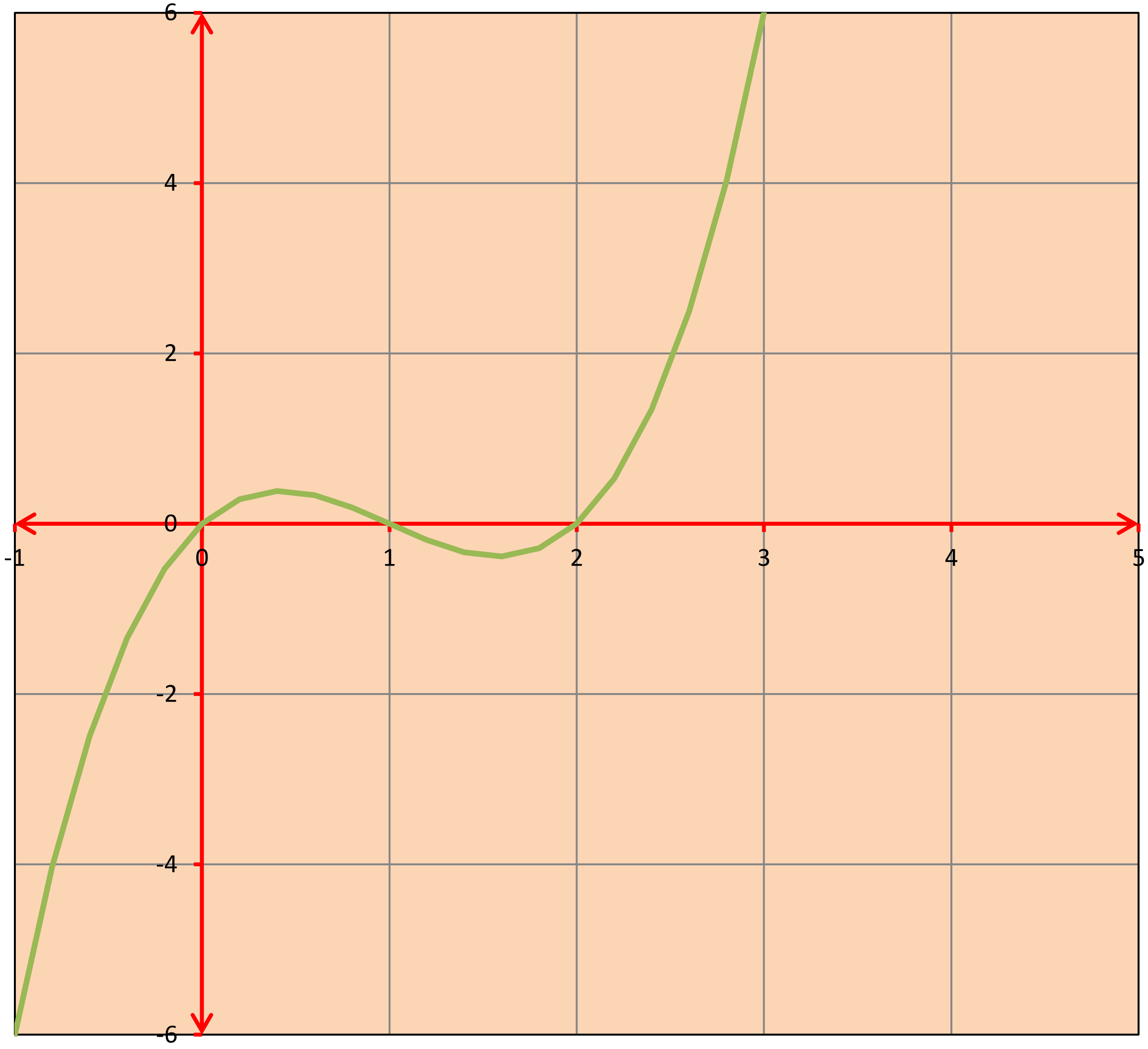
$x_1 = 2$



Varios casos de funciones cúbicas con el coeficiente "a" positivo.

$$y = x^3 - 3x^2 + 2x$$

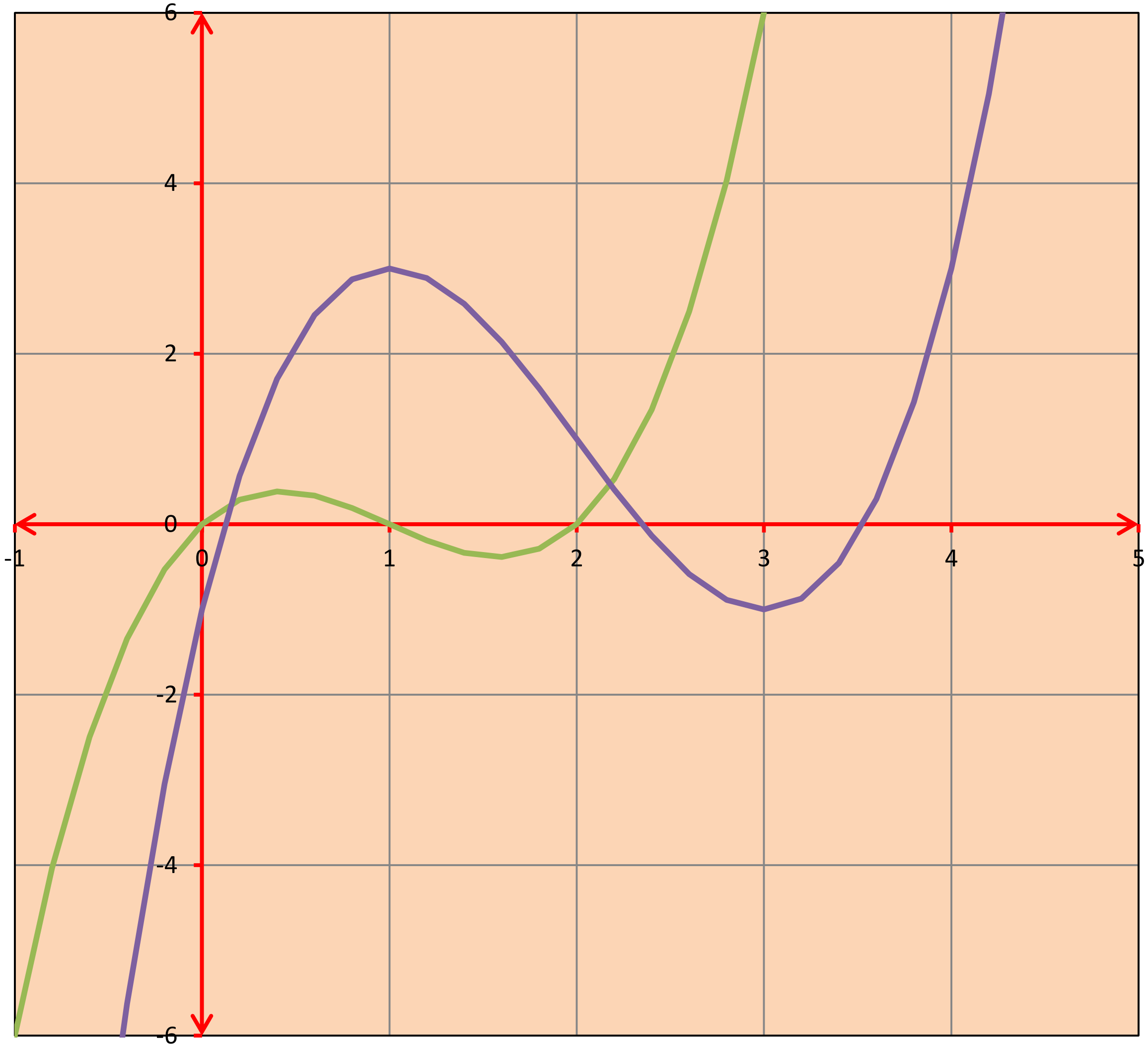
(verde)



Varios casos de funciones cúbicas con el coeficiente “a” positivo.

$$\mathbf{y = x^3 - 3x^2 + 2x}$$
(verde)

$$\mathbf{y = x^3 - 6\,x^2 + 9x} - 1$$
(violeta)

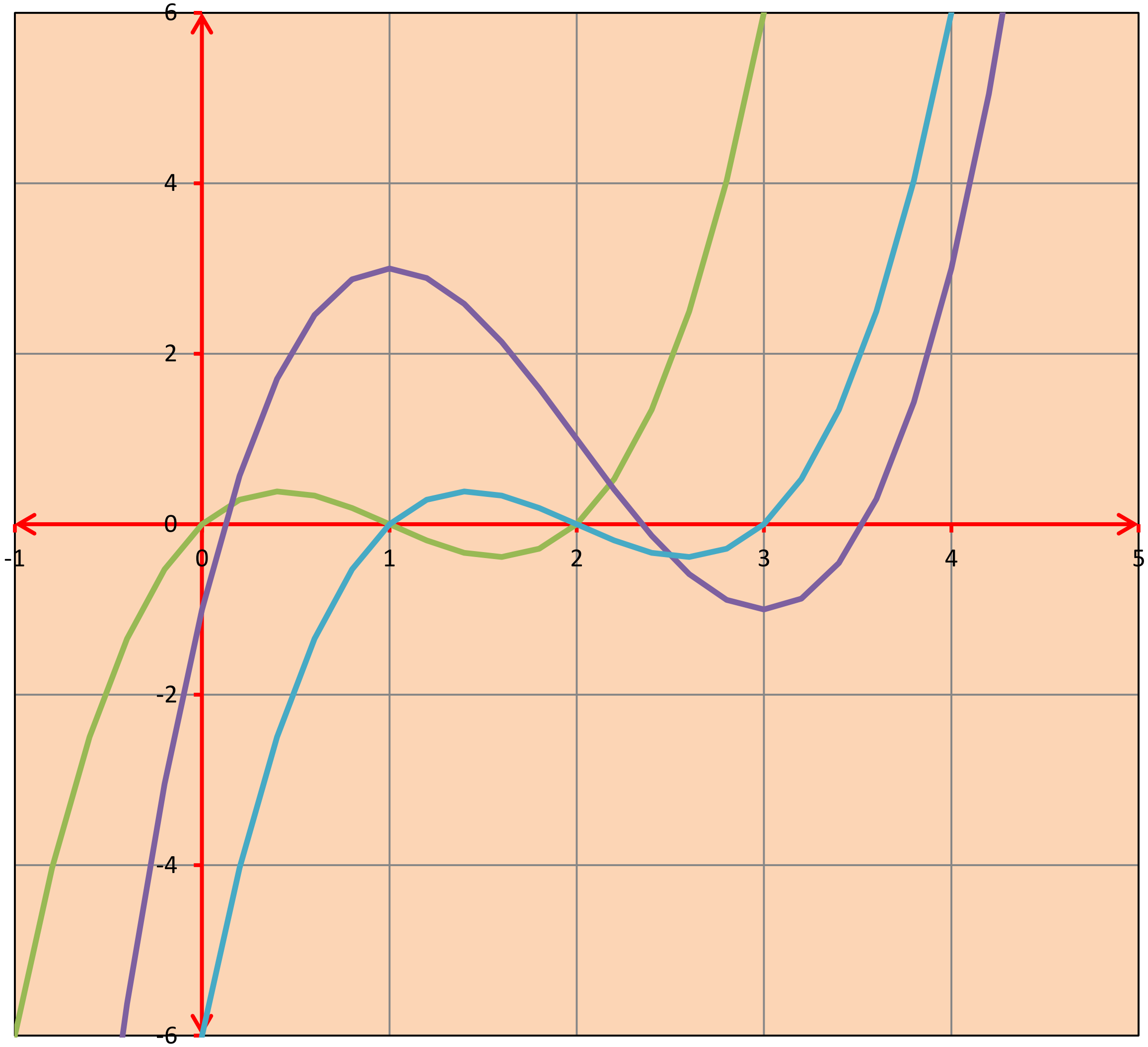


Varios casos de funciones cúbicas con el coeficiente "a" positivo.

$$y = x^3 - 3x^2 + 2x$$
(verde)

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$
(violeta)

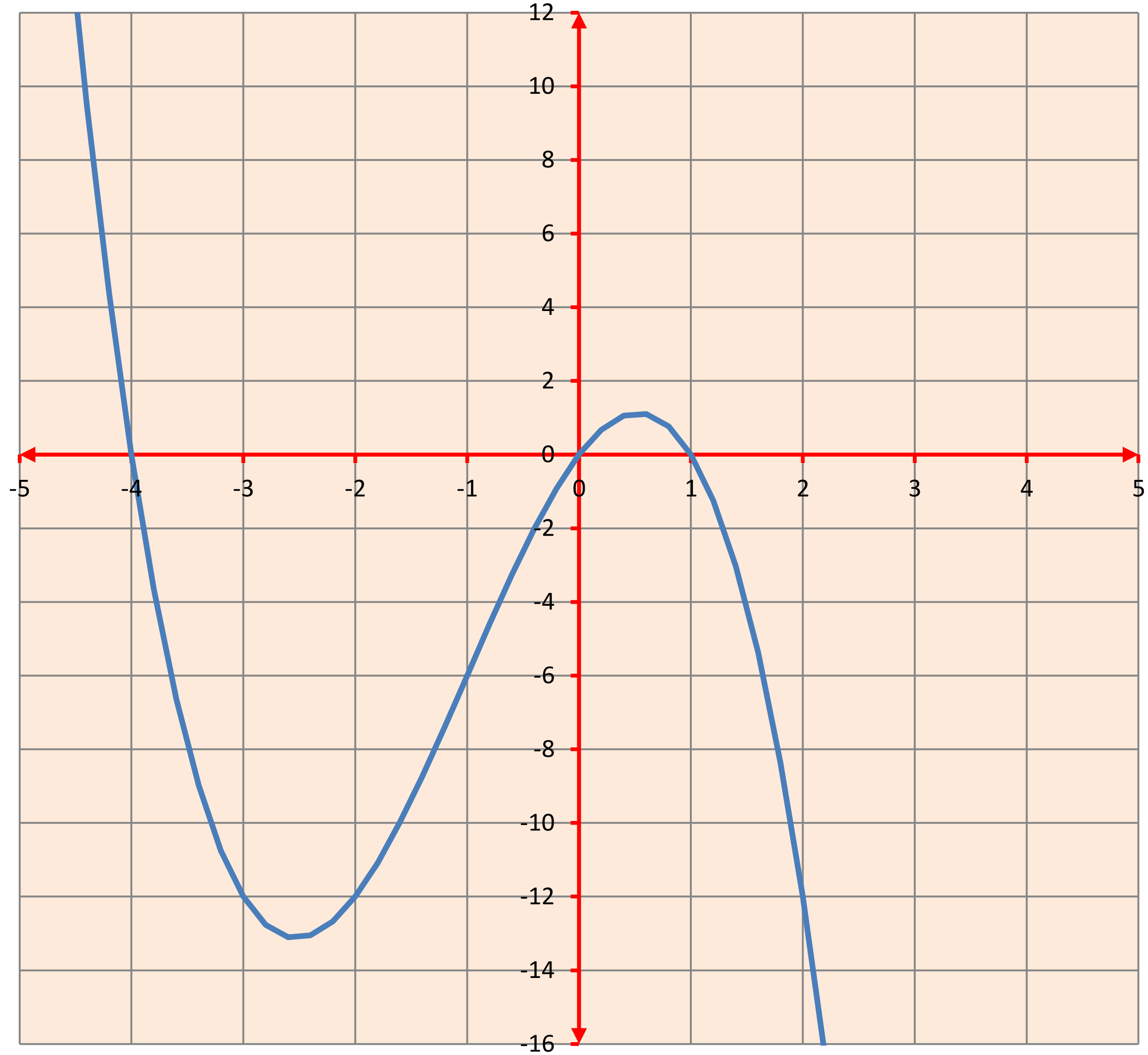
$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$
(azul)



Varios casos de funciones cúbicas con el coeficiente “a” negativo.

$$y = -x^3 - 3x^2 + 4x$$

(azul)



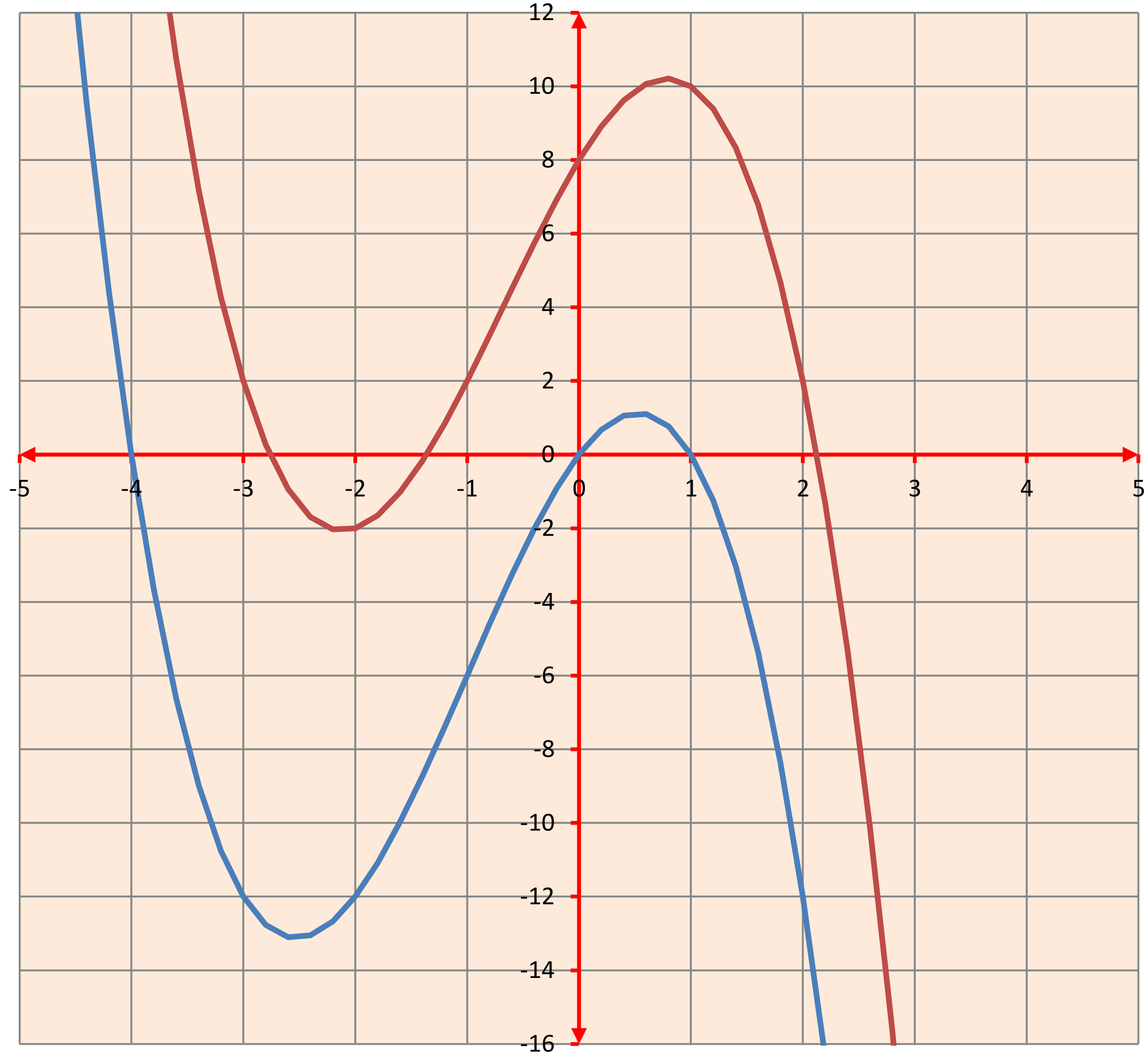
Varios casos de funciones cúbicas con el coeficiente "a" negativo.

$$y = -x^3 - 3x^2 + 4x$$

(azul)

$$y = -x^3 - 2x^2 + 5x + 8$$

(marrón)

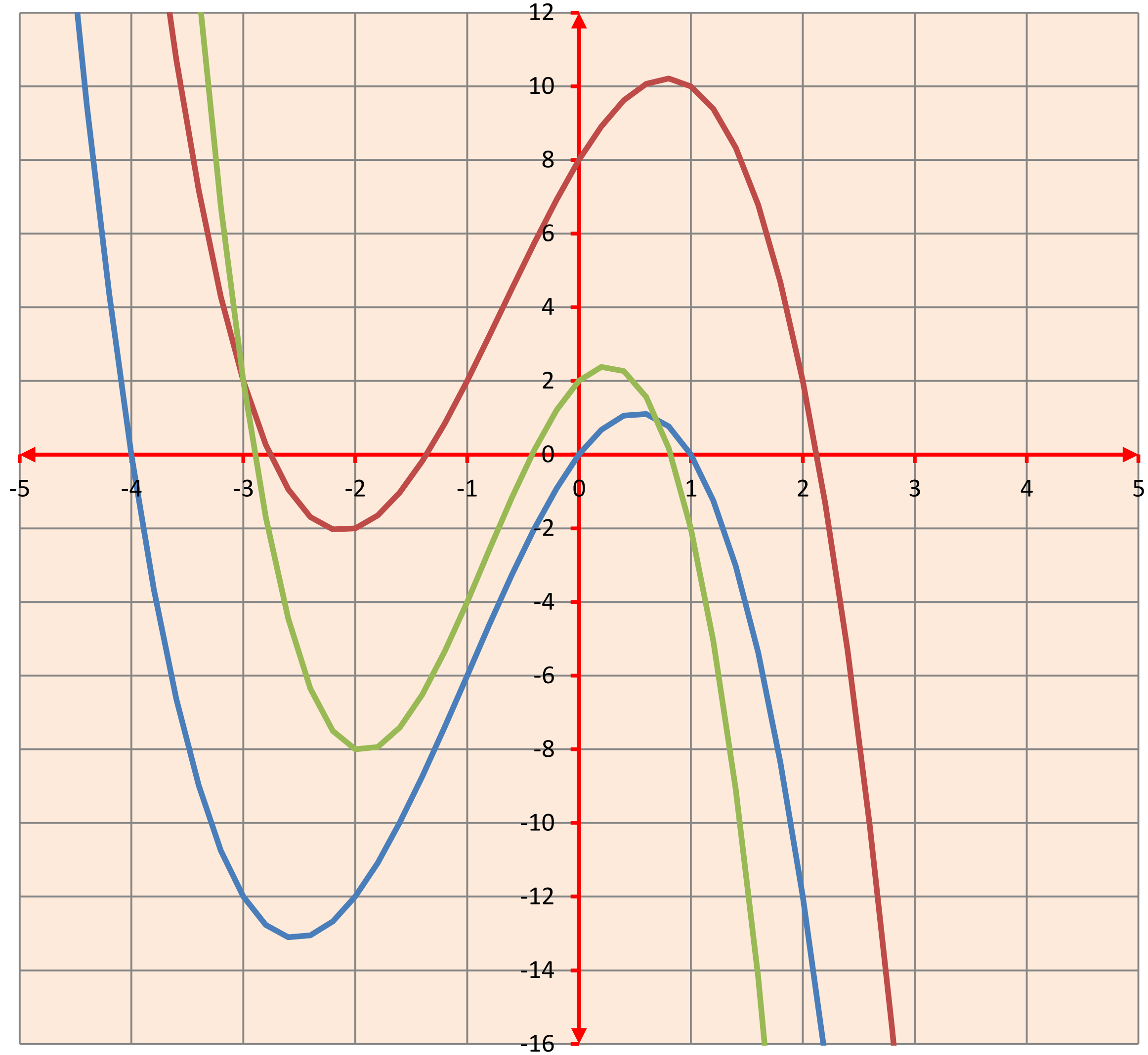


Varios casos de funciones cúbicas con el coeficiente "a" negativo.

$y = -x^3 - 3x^2 + 4x$
(azul)

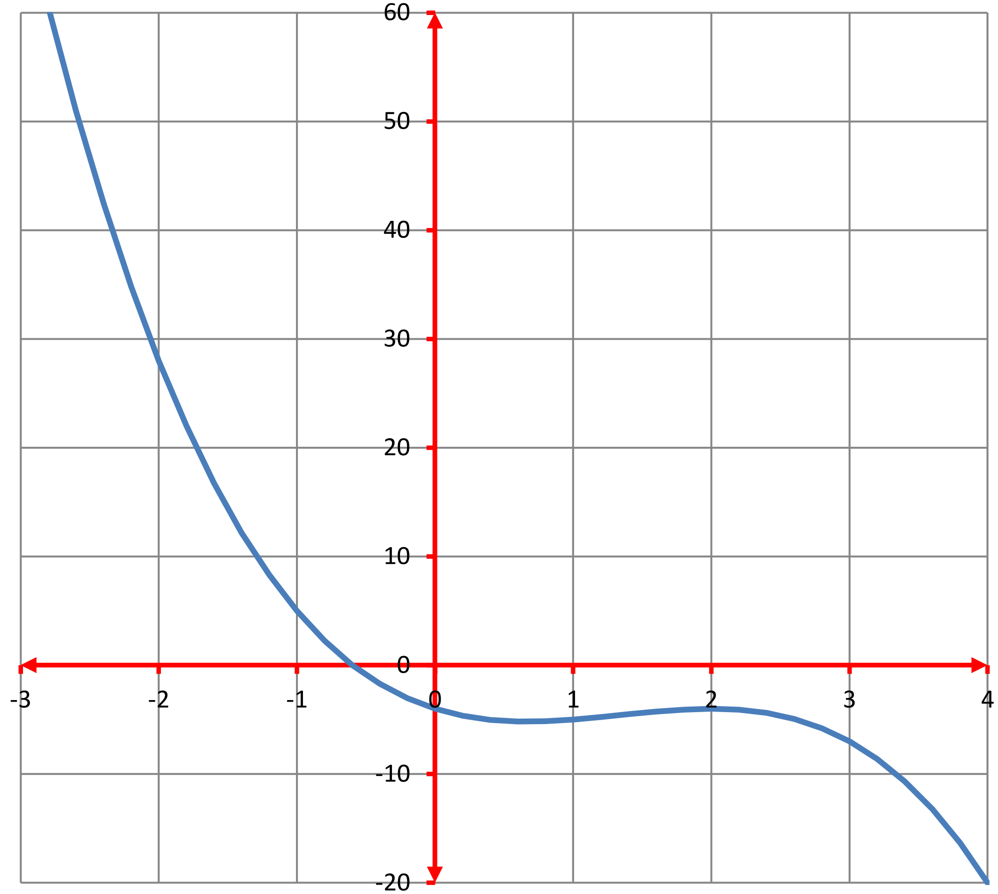
$y = -x^3 - 2x^2 + 5x + 8$
(marrón)

$y = -2x^3 - 5x^2 + 3x + 2$
(verde)



La función de tercer grado puede no tener las tres raíces reales. Pero cortará al eje "x" al menos en un punto: la raíz x_1. Las dos raíces restantes serán complejas.

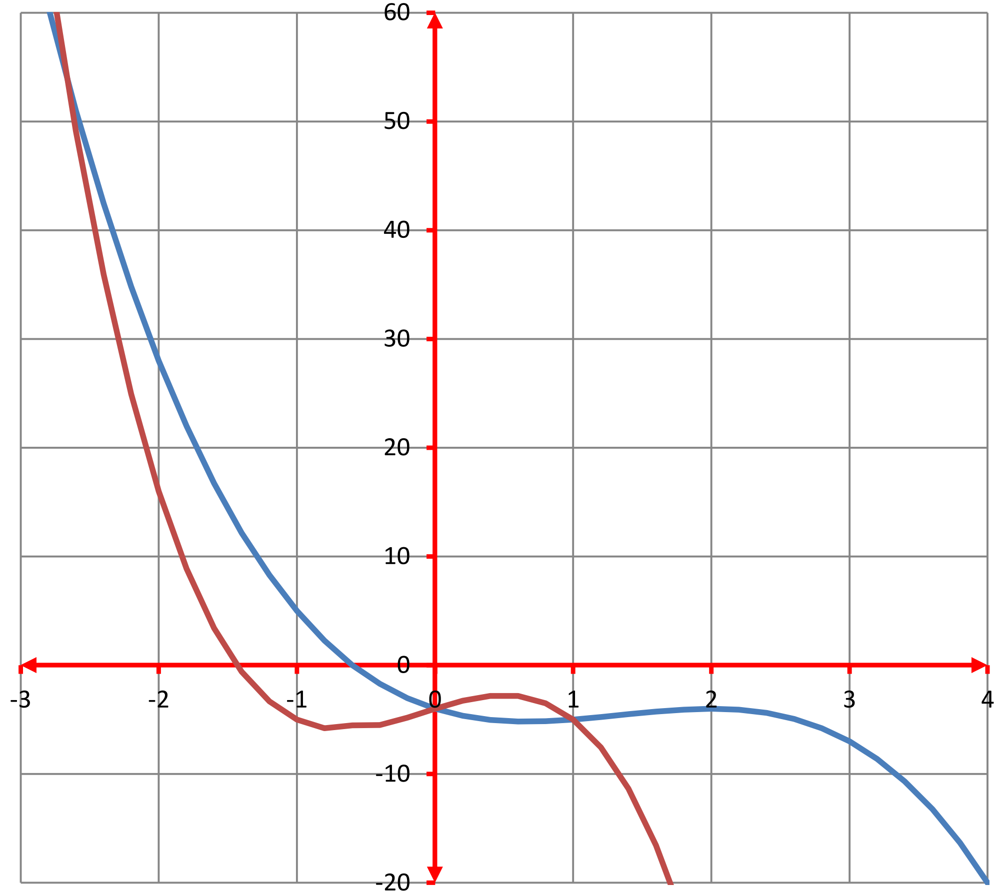
y = $\boldsymbol{-x^3 + 4x^2}$ **-** $\boldsymbol{4x - 4}$



La función de tercer grado puede no tener las tres raíces reales. Pero cortará al eje "x" al menos en un punto, la raíz x_1. Las dos raíces restantes serán complejas.

$$y = -x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$

$$y = -x^3 - 4x^2 + 4x - 4$$



Vale la pena destacar que las raíces (o ceros) de los polinomios completos de 3° grado no son "fácilmente" calculables con una fórmula, como en el caso de la expresión de 2° grado. En realidad existen las expresiones de Cardano – Tartaglia, pero su aplicación es muy complicada, por lo que no se usan habitualmente.

Es conveniente recordar el teorema fundamental del álgebra o *"Teorema de D'alembert"*:
Todo polinomio de grado "n" : $\mathrm{P(x)} = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}\,.x^n + \ldots a_1\,\mathrm{x} + a_0$

puede escribirse como producto de "n" factores de primer grado, de la forma $(\mathrm{x}\text{-}x_i)$, multiplicados por el coeficiente del primer término: $\mathrm{P(x)} = \mathrm{a}\,.\,(\mathrm{x}\text{-}\mathrm{x1})\,(\mathrm{x}\text{-}\mathrm{x2})\,(\mathrm{x}\text{-}\mathrm{x3})$,
donde x1, x2, x3, . . . son las raíces de la ecuación P(x) = 0, sean éstas reales o complejas.

Si se opera sobre el polinomio o función de 3° grado: **y =** $\boldsymbol{ax^3} + \boldsymbol{bx^2} + \boldsymbol{cx} + \boldsymbol{d}$ **,** pueden expresarse los coeficientes a, b, c y d, de manera que las raíces x1, x2 y x3, estén prefijadas.

Con a = 1 se obtiene: b = - (x1 + x2 + x3)
c = (x1.x2 + x2.x3 + x1.x3)
d = - (x1.x2.x3)

Expresiones éstas con las que puede dar una función cúbica, con raíces previamente determinadas.

A título de ejemplo ilustrativo, se calcularán los coeficientes correspondientes para que la función de 3° grado resultante tenga por raíces los siguientes valores reales arbitrarios:

x_1 = **-1,23 ;** x_2 = **1,44** **y** x_3 = **2,67**

Aplicando las expresiones vistas se tiene:

a = 1
b = -(-1,23 + 1,44 + 2,67) = -2,88
c = (-1,23 . 1,44) + (1,44 . 2,67) + (-1,23 . 2,67) = -1,21
d = -(-1.23 . 1,44 . 2,67) = 4,73

Y reemplazando se llega a:

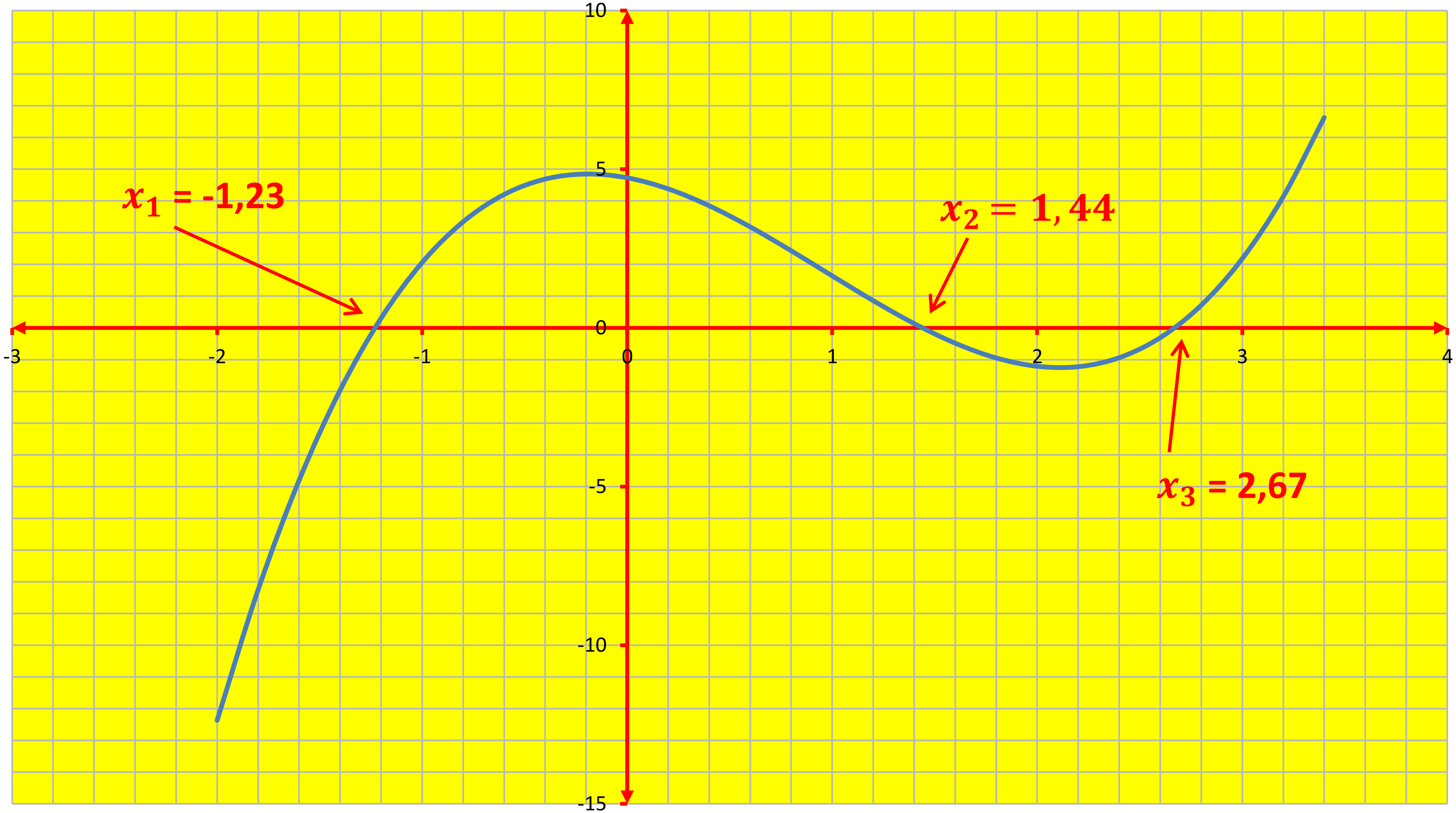
y = x^3 **- 2,88** x^2 **- 1,21** x **+ 4,73**

Se aclara que para obtener la expresión cúbica con el coeficiente **a** $\neq$ **1,** se deben multiplicar tanto **"a"** como **"b", "c"** y **"d"** por el nuevo valor "a_1" elegido.

Obtendríamos lo mismo, aplicando directamente el teorema de D'alembert:

y = a . (x + 1,23) (x – 1,44) (x - 2,67)

Representación gráfica de la función cúbica que se acaba de calcular, para las siguientes raíces: x_1 = -1,23; $x_2 = 1{,}44$ y x_3 = 2,67



4 - Polinomio general de grado “n”.

$$\boxed{\mathbf{y} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})} + \boldsymbol{...} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}}$$

Ahora estamos ante una función polinómica de grado “n”.
Tendremos así “n+1” ceficientes numéricos reales arbitrarios, incluyendo la constante “k” (a,b,c,. . .i,k). Resulta clara la *infinitud* de esta función.

Vale por supuesto el teorema de D’alembert visto.

Destacamos que pudieron haberse estudiado las funciones lineal, cuadrática y cúbica como casos particulares de la función polinómica. En efecto vemos que:

$$\begin{aligned}
&y = ax^n + bx^{(n-1)} + cx^{(n-2)} + \ldots + ix + k \\
&y = ax^3 + bx^2 + cx + d \\
&y = ax^2 + bx + c \\
&y = ax + b
\end{aligned}$$

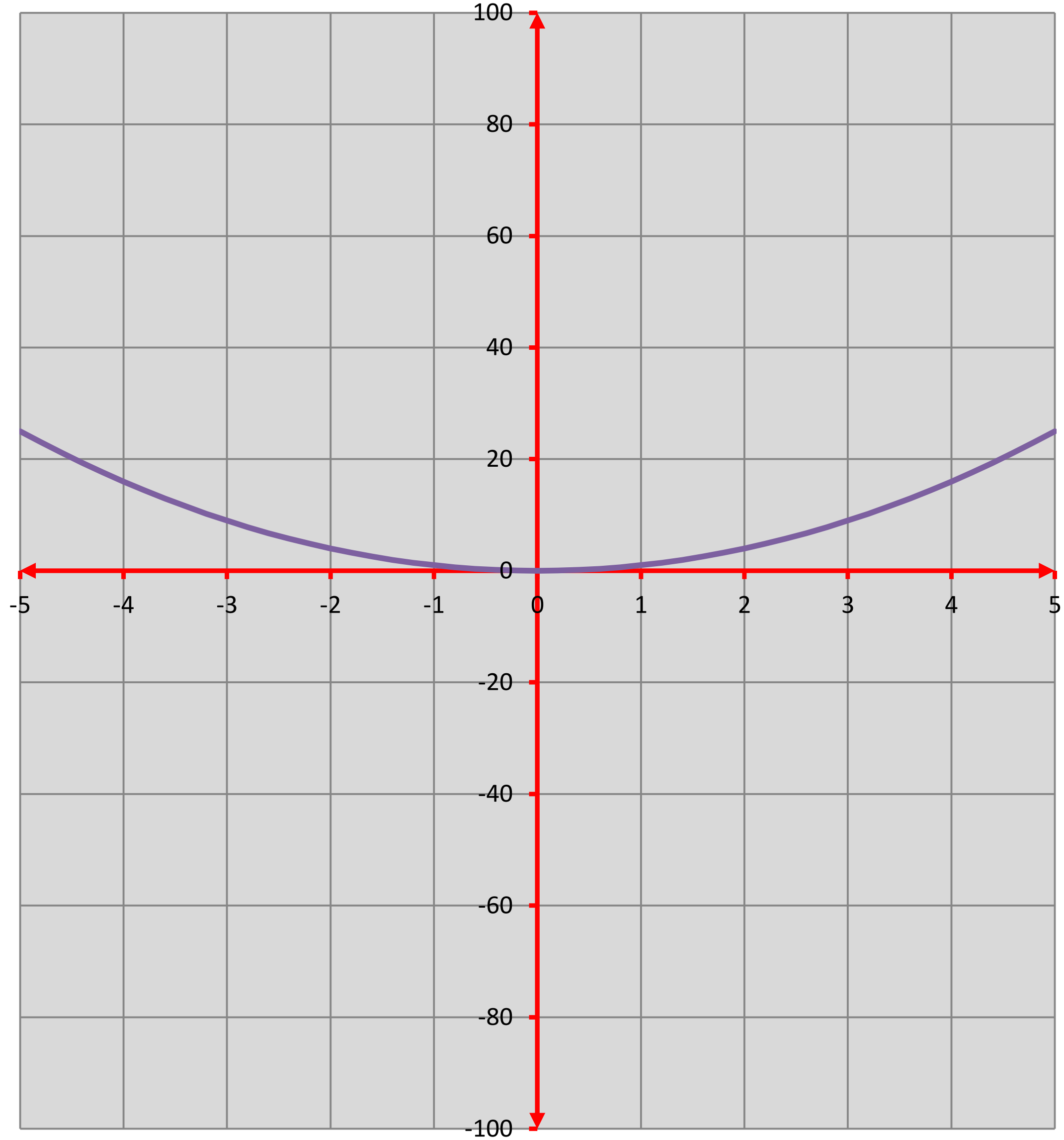
Todas tienen la misma estructura, pero por su importancia se las consideró en forma particular.

Se verá la diferencia entre las funciones polinómicas cuando “n” es par y cuando es impar.
Además comprobaremos el comportamiento destacable de la función $y = x^n$ cuando los valores de la variable “x” son, en valor absoluto, menores que “1”.

Veremos el comportamiento de la función y=x^n para distintos valores del exponente "n":

Veremos el comportamiento de la función $y = x^n$ para distintos valores del exponente “n”:

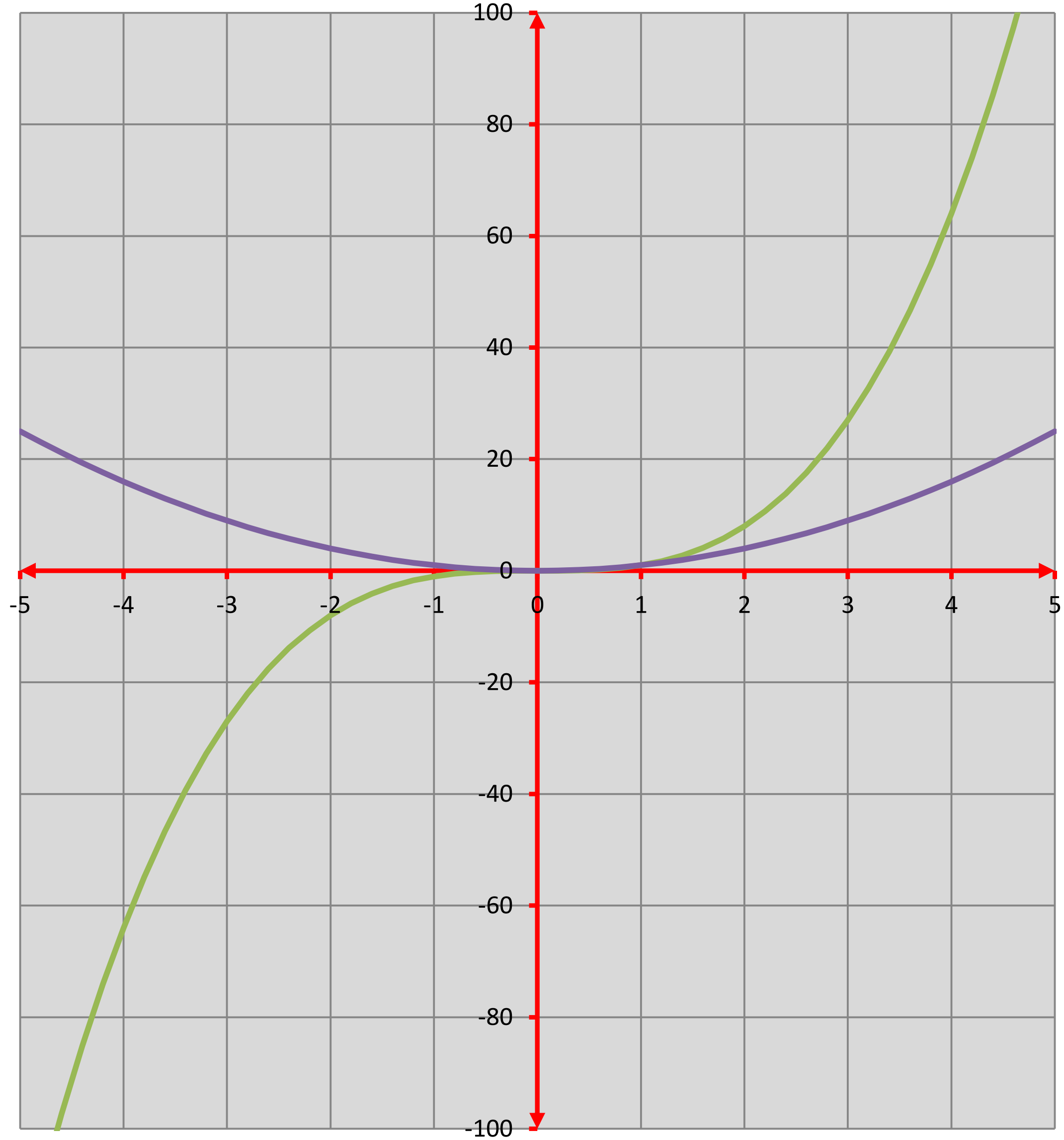
$y = x^2$ (violeta)



Veremos el comportamiento de la función $y=x^n$ para distintos valores del exponente "n":

$y = x^2$ (violeta)

$y = x^3$ (verde)

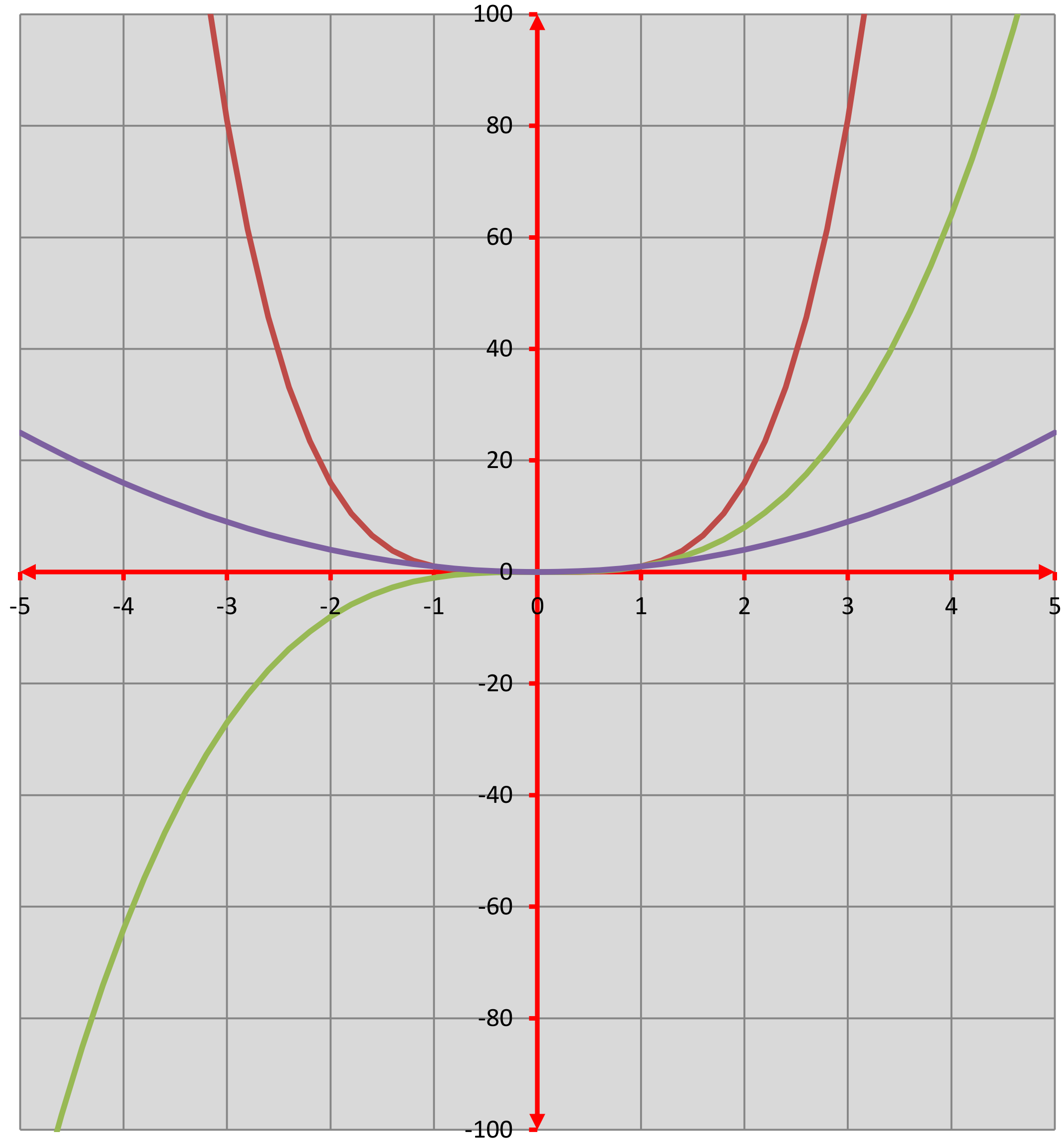


Veremos el comportamiento de la función $y=x^n$ para distintos valores del exponente "n":

$y = x^2$ (violeta)

$y = x^3$ (verde)

$y = x^4$ (marrón)



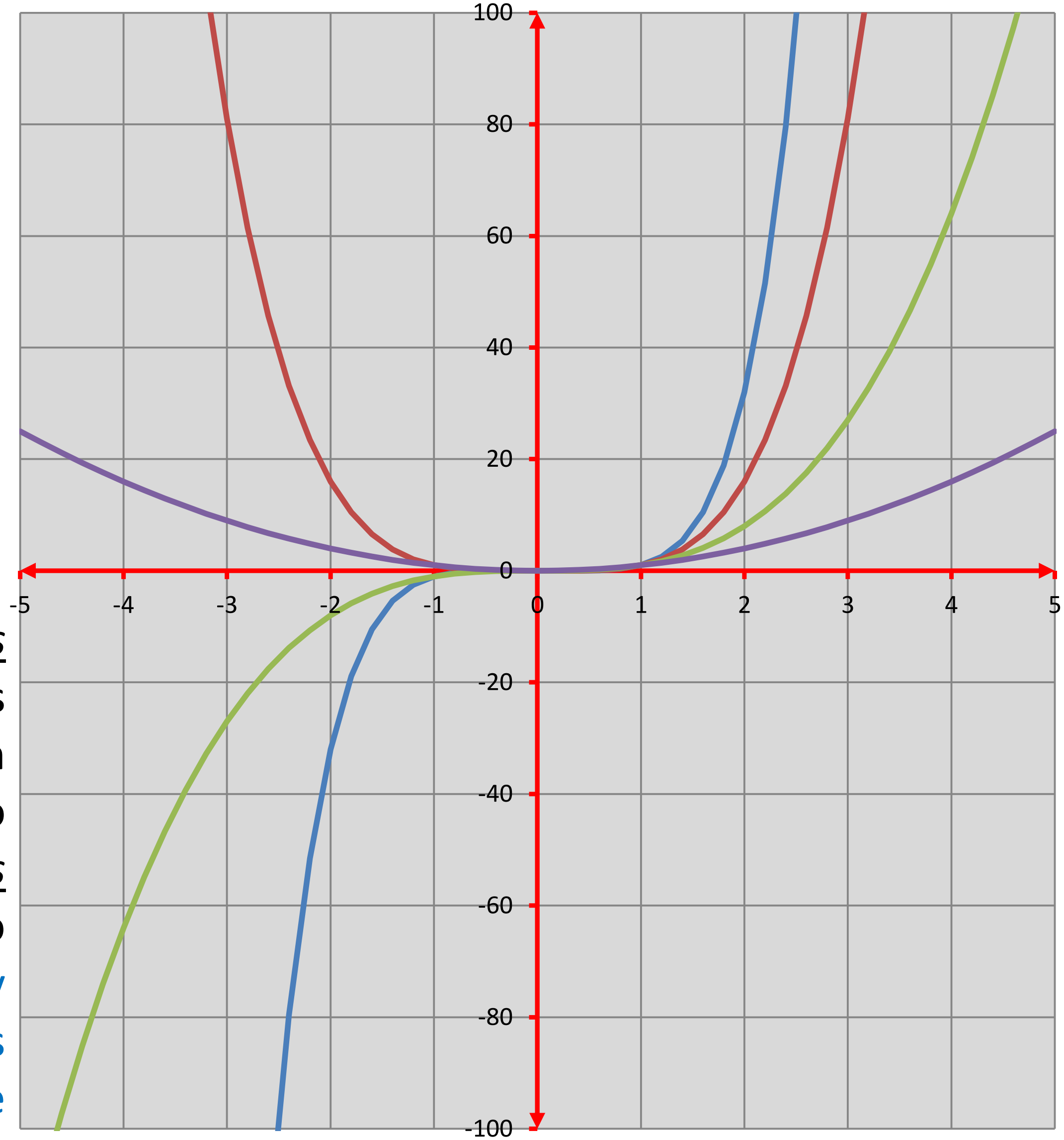
Veremos el comportamiento de la función $y=x^n$ para distintos valores del exponente "n":

$y = x^2$ (violeta)

$y = x^3$ (verde)

$y = x^4$ (marrón)

$y = x^5$ (azul)

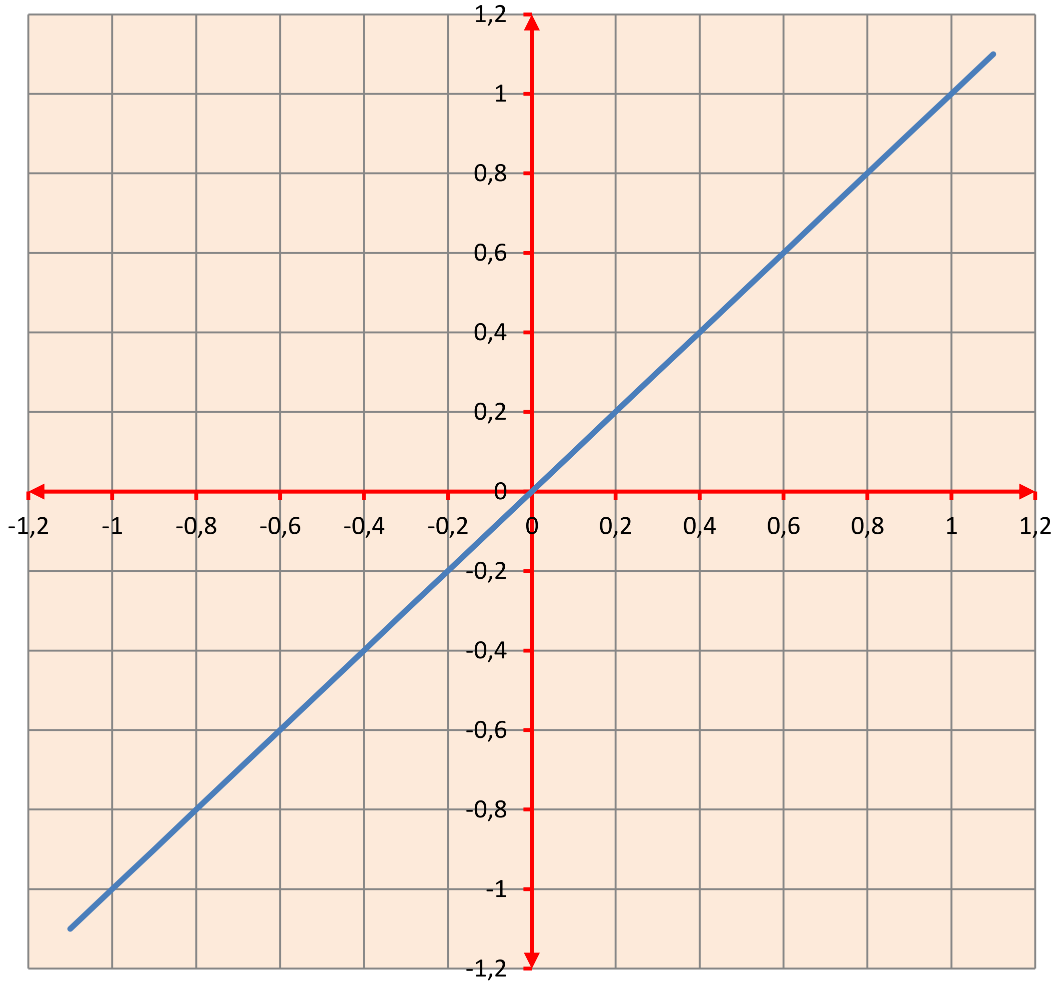


Se ve claramente que para *valores pares de "n"*, las ramas monótonas infinitas de los gráficos se dirigen hacia el mismo lado (en este caso para arriba), mientras que si *"n" es impar*, ambas ramas van en sentido opuesto. Por supuesto el valor y signo del coeficiente afectará los gráficos, invirtiéndose el sentido de las ramas si es negativo.

Las funciones potencia $y = x^n$, para "x" en valor absoluto menores que "1", son también valores absolutos menores que "1"; pero destacamos que son números cada vez *mas pequeños* en la medida que aumenta el valor del exponente "n".

Las funciones potencia $y = x^n$, para "x" en valor absoluto menores que "1", son también valores absolutos menores que "1"; pero destacamos que son números cada vez *mas pequeños* en la medida que aumenta el valor del exponente "n".

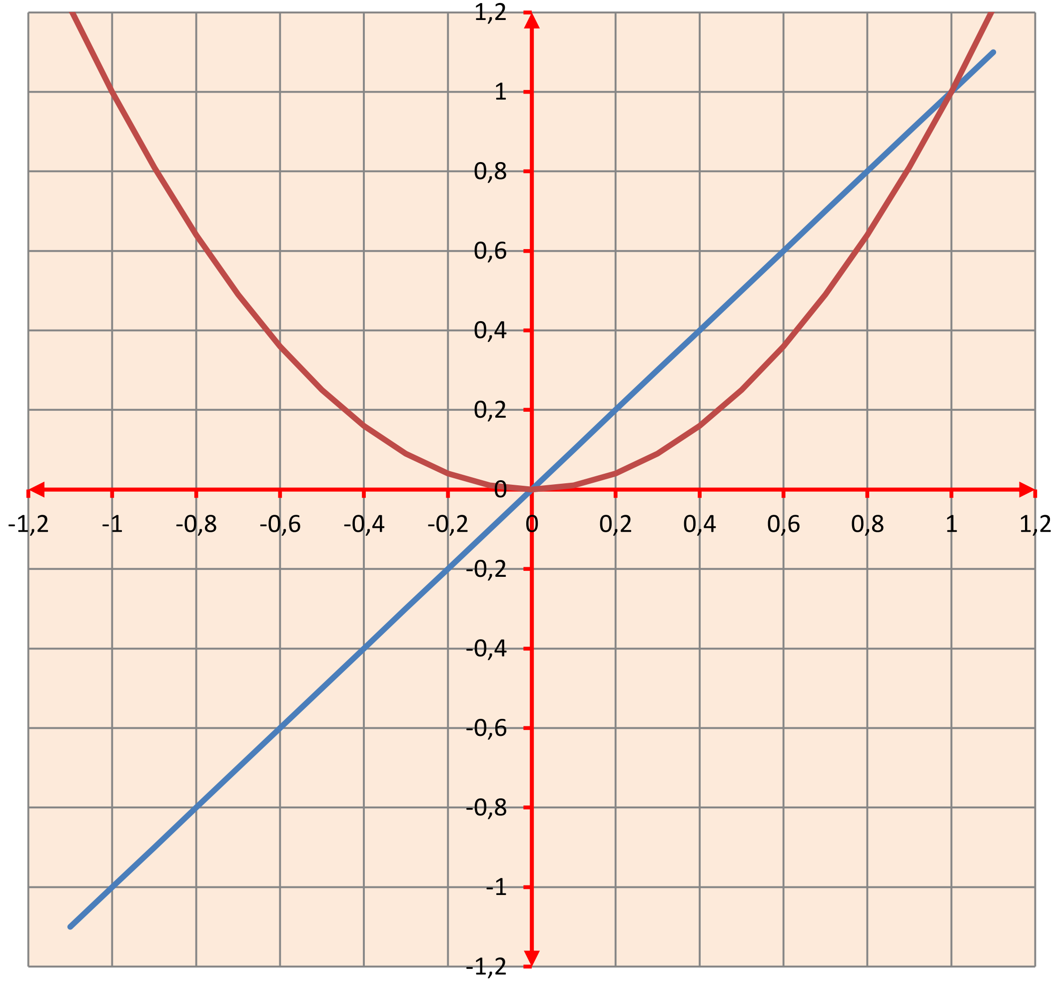
y = x (recta azul)



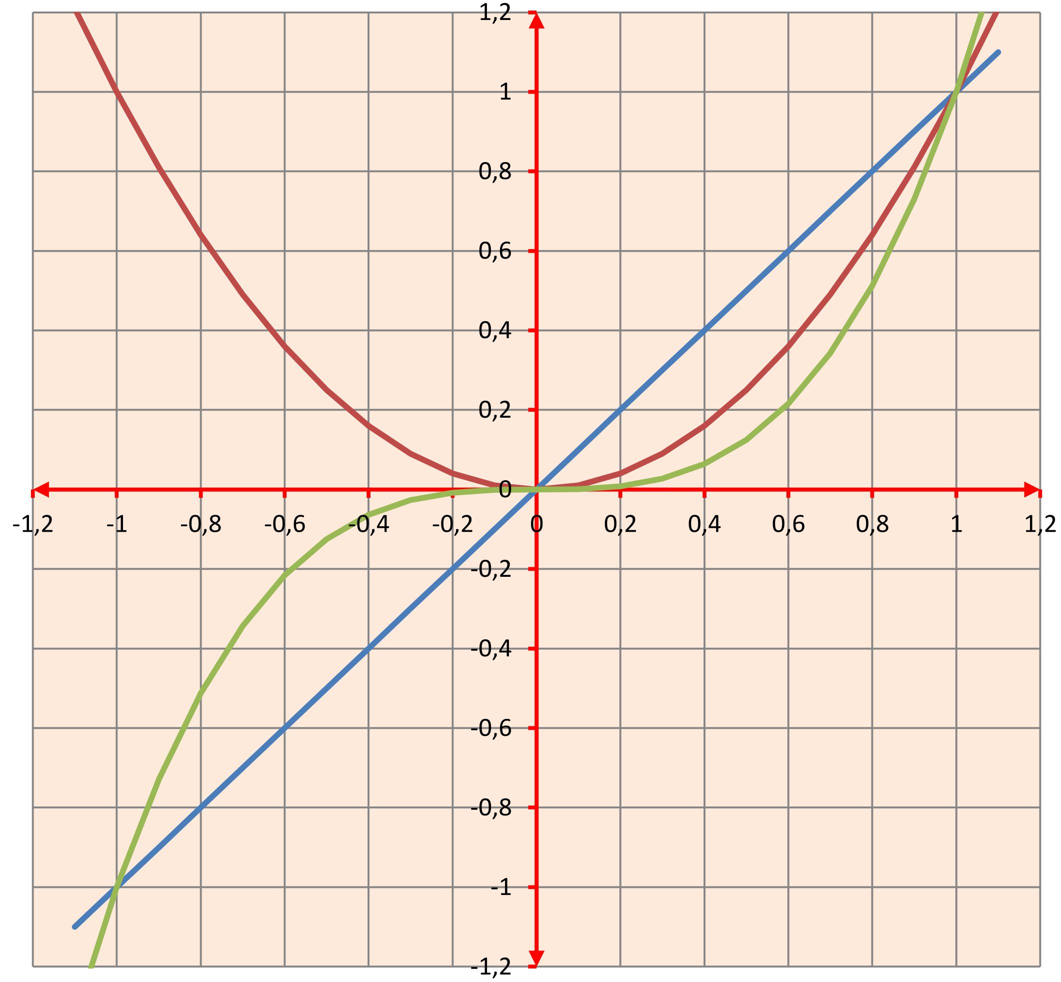
Las funciones potencia $y = x^n$, para "x" en valor absoluto menores que "1", son también valores absolutos menores que "1"; pero destacamos que son números cada vez *mas pequeños* en la medida que aumenta el valor del exponente "n".

$y = x$ (recta azul)

$y = x^2$ (parábola marrón)



Las funciones potencia $y = x^n$, para "x" en valor absoluto menores que "1", son también valores absolutos menores que "1"; pero destacamos que son números cada vez *mas pequeños* en la medida que aumenta el valor del exponente "n".

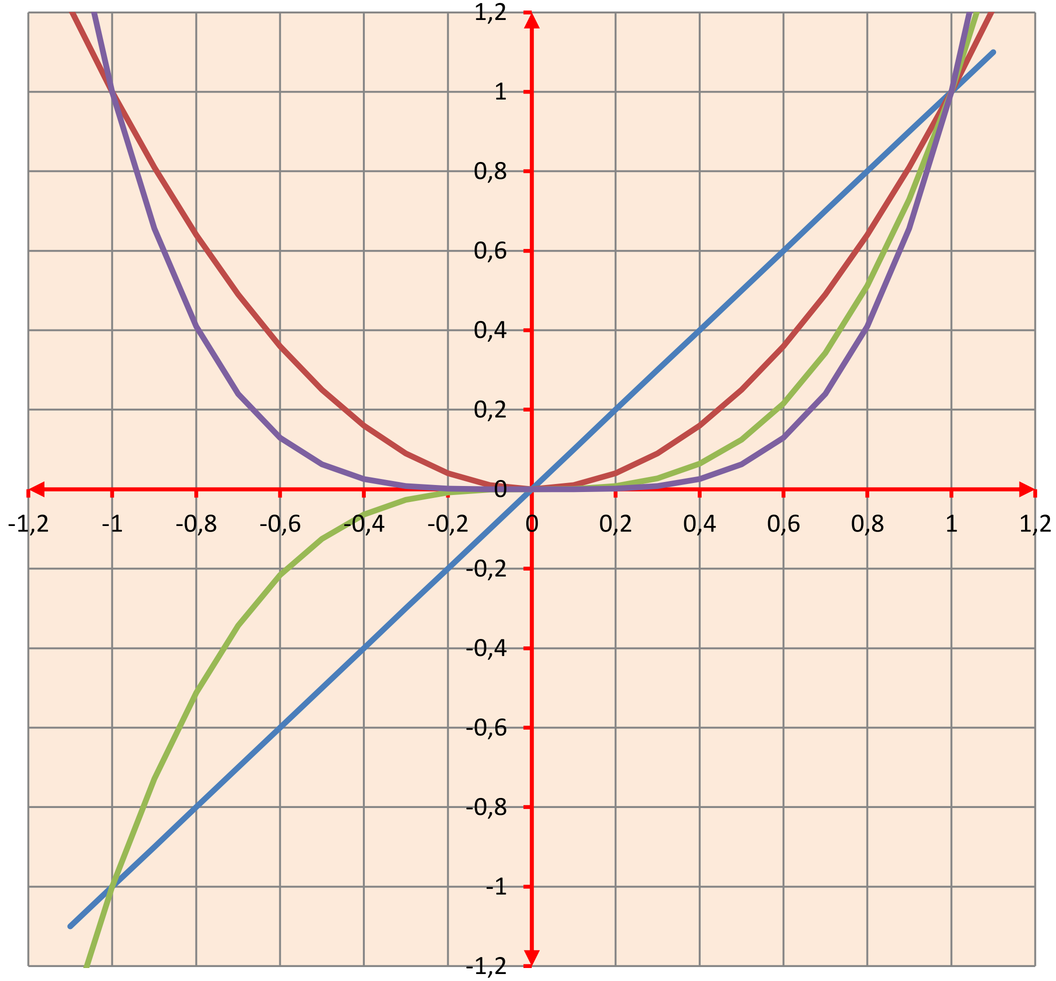


y = x (recta azul)

y = x^2 (parábola marrón)

y = x^3 (parábola cúbica verde)

Las funciones potencia $y = x^n$, para "x" en valor absoluto menores que "1", son también valores absolutos menores que "1"; pero destacamos que son números cada vez *mas pequeños* en la medida que aumenta el valor del exponente "n".



y = x (recta azul)

y = x^2 (parábola marrón)

y = x^3 (parábola cúbica verde)

y = x^4 (violeta)

Las funciones potencia $y = x^n$, para "x" en valor absoluto menores que "1", son también valores absolutos menores que "1"; pero destacamos que son números cada vez *mas pequeños* en la medida que aumenta el valor del exponente "n".

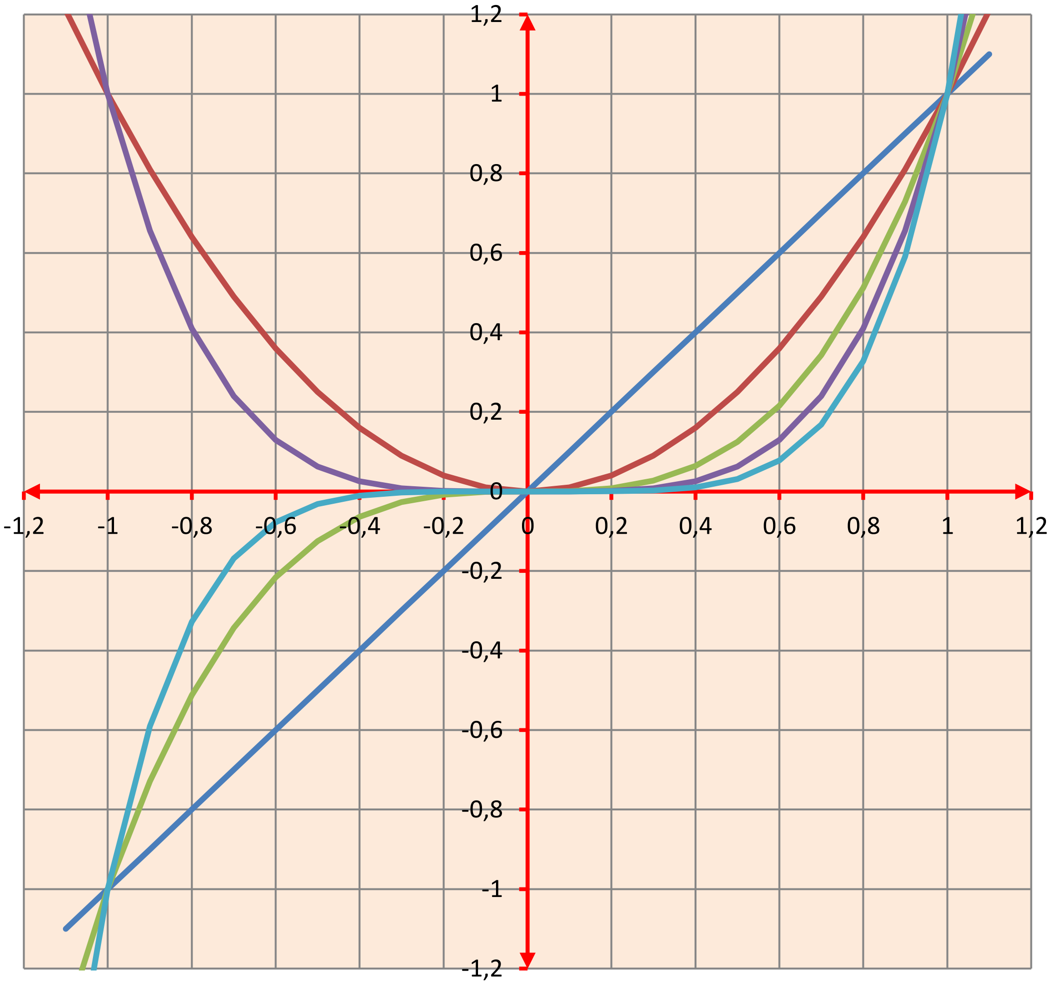
$y = x$ (recta azul)

$y = x^2$ (parábola marrón)

$y = x^3$ (parábola cúbica verde)

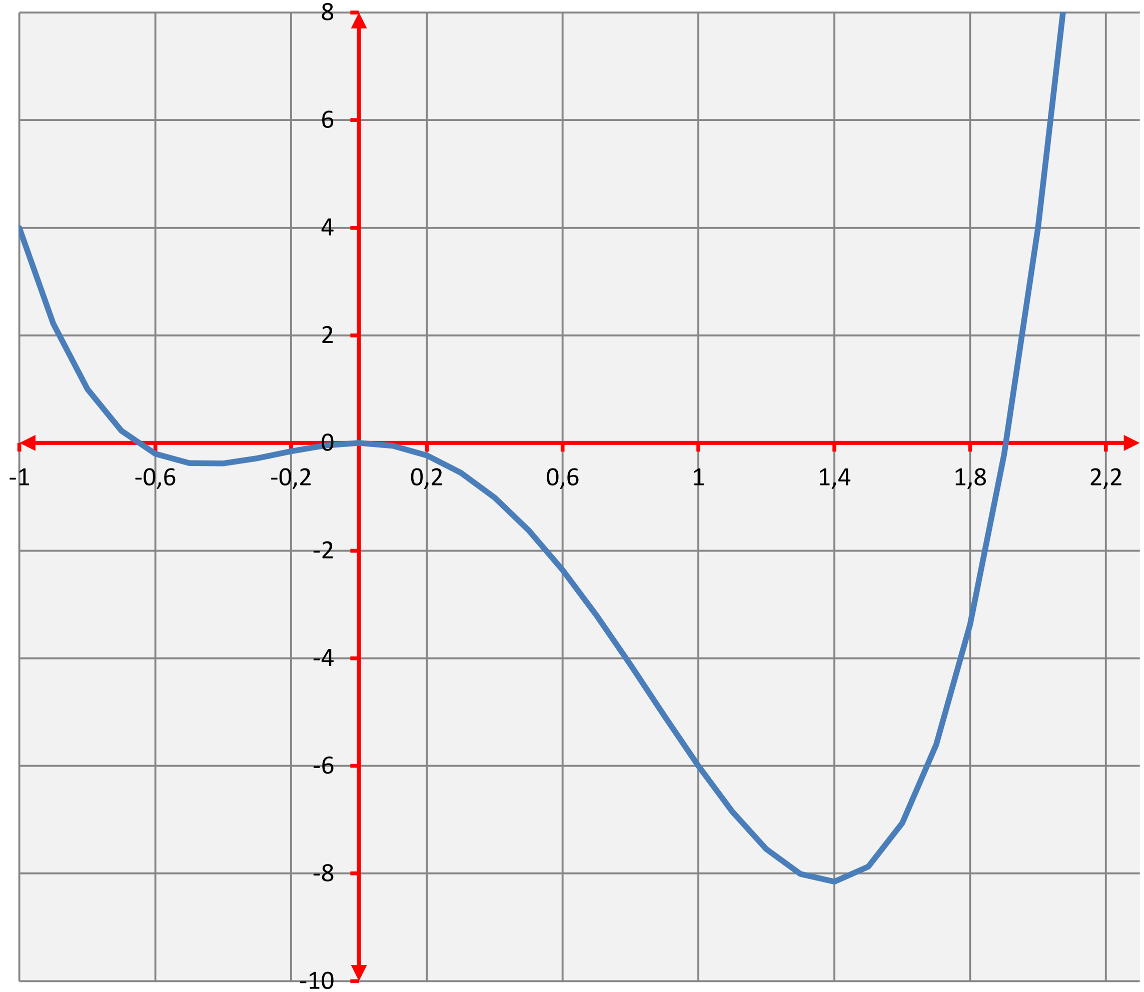
$y = x^4$ (violeta)

$y = x^5$ (celeste)



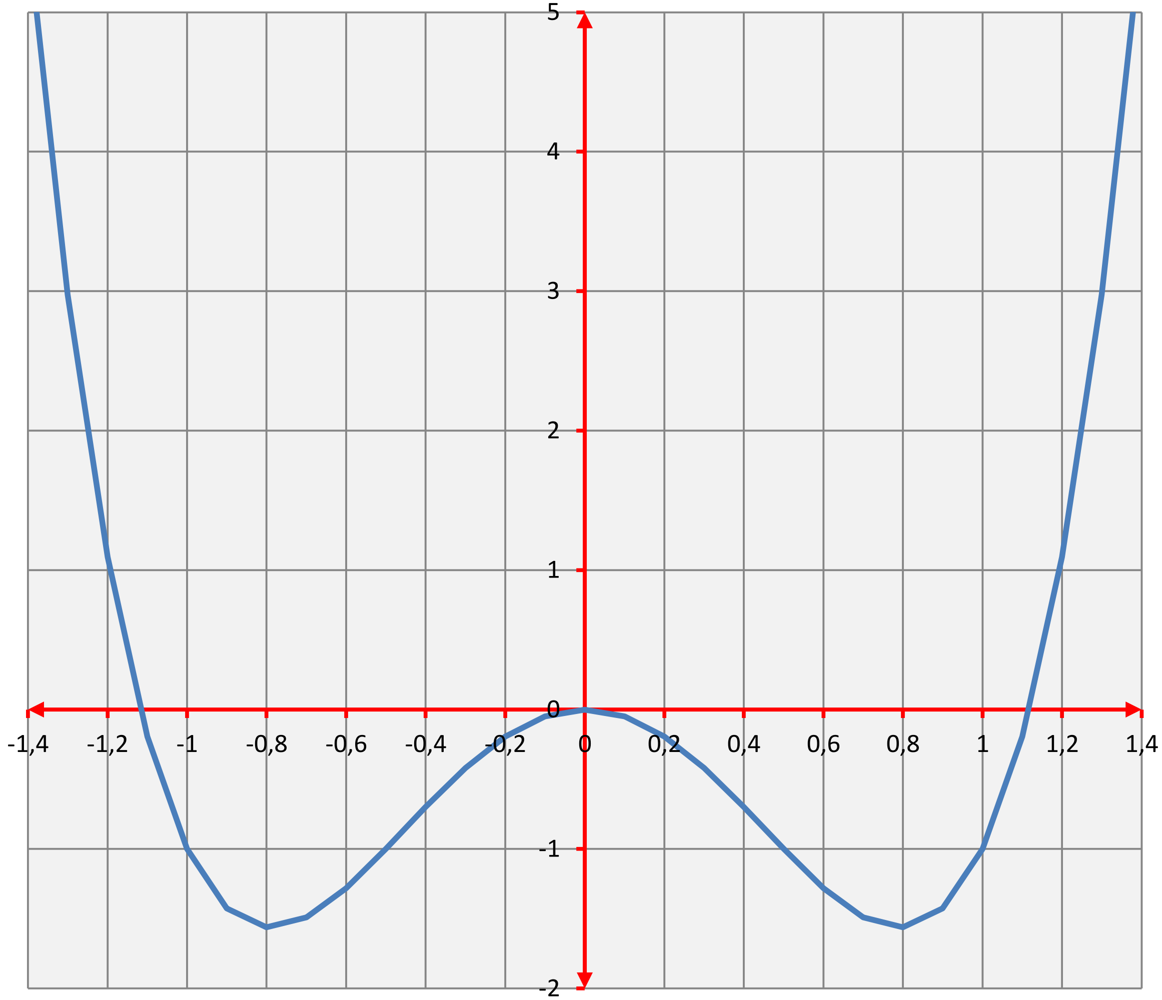
Varias funciones polinómicas:

$$y = 4\,x^4\ - 5\,x^3\ - 5\,x^2$$



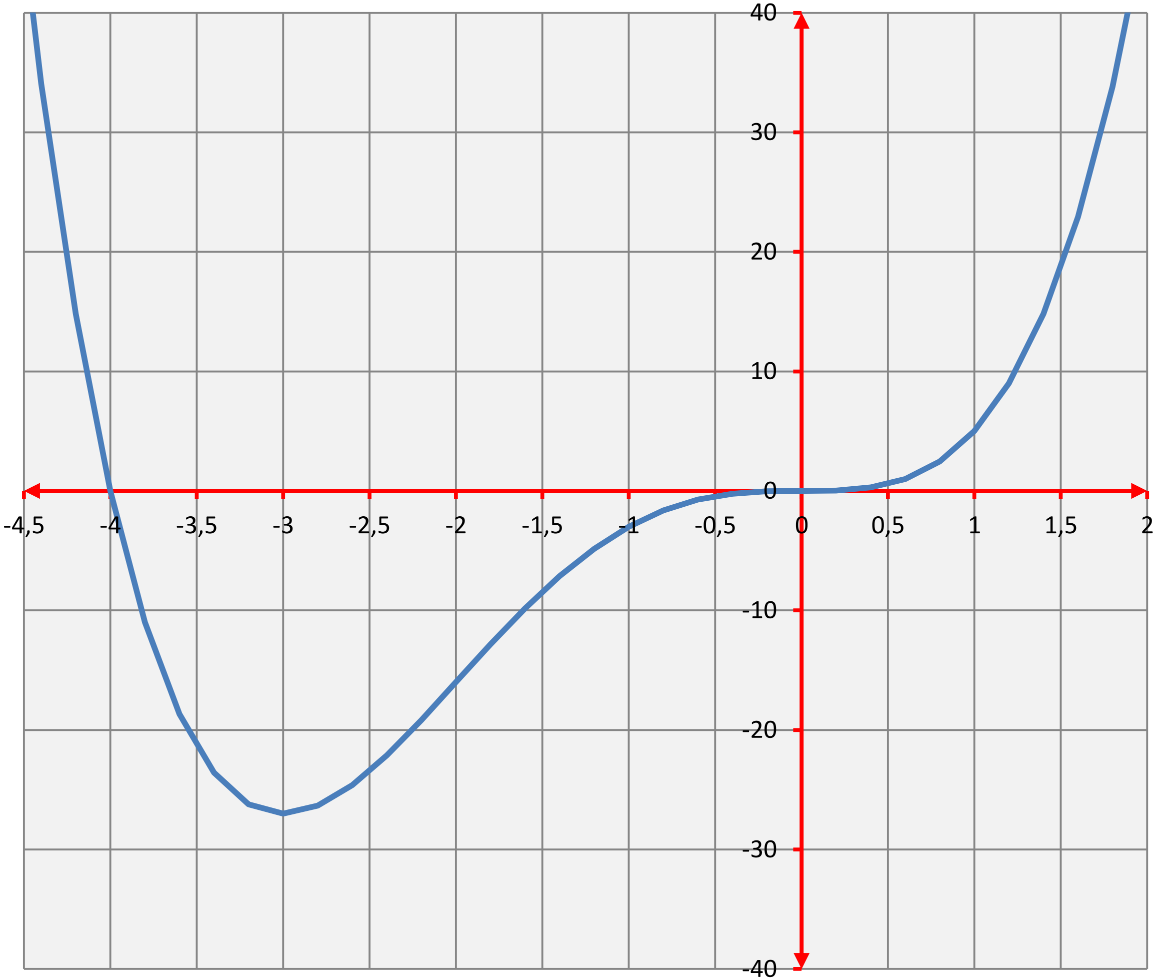
Varias funciones polinómicas:

$$y = 4\,x^4 - 5\,x^2$$



Varias funciones polinómicas:

$$y = x^4 + 4x^3$$



5 – Función Hiperbólica.

$$\boxed{\boldsymbol{y = \frac{a}{x}}}$$

Se recordará que la división por “0” está algebraicamente excluida. Esta división ni siquiera tiene sentido aritmético.

Se demostrará esta afirmación por “*reducción al absurdo*”:

En efecto, supongamos que la división de un número por “0”, tuviera un resultado “k”, es decir que: $\frac{a}{0}$ **= k** . Habría que admitir que: **k . 0 = a ,** lo cual es un absurdo, porque cualquier número multiplicado por **0** , da como resultado también **0**. Luego el resultado *“**k**” es aritméticamente imposible.*

Por otra parte *algebraicamente* podemos suponer que: b = a

Ambos miembros se pueden multiplicar por “a”: a.b = a^2

A ambos miembros se les puede restar “b^2”: a.b - b^2 = a^2 -b^2

Y factoreando se tiene: b (a-b) = (a+b).(a-b)

Se pueden eliminar de los dos miembros (a-b): b = a+b

Pero como se supuso que a = b: b = 2.b ⟶ **1 = 2** **¡¡¡…!!!**

El absurdo algebraico resulta de la encubierta división por “0” en la simplificación, ya que se supuso que a = b y entonces (a-b) = 0

Así que en lo que sigue el *dominio* de la función que nos ocupa será: *“todos los números reales menos el 0 ”.*

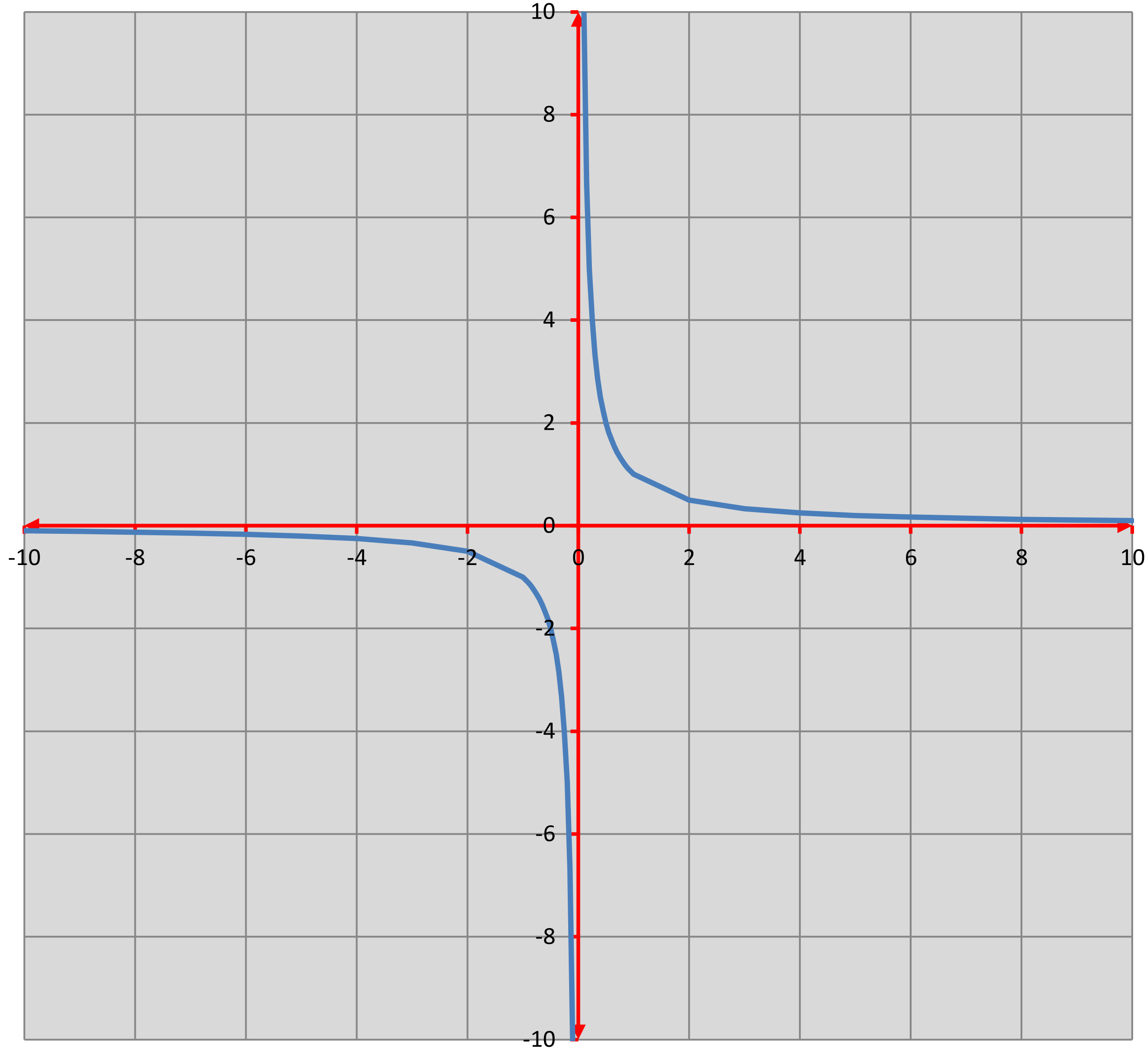
La hipérbola básica con
a = 1

$$y = \frac{1}{x}$$

Es el caso mas sencillo de hipérbola equilátera.

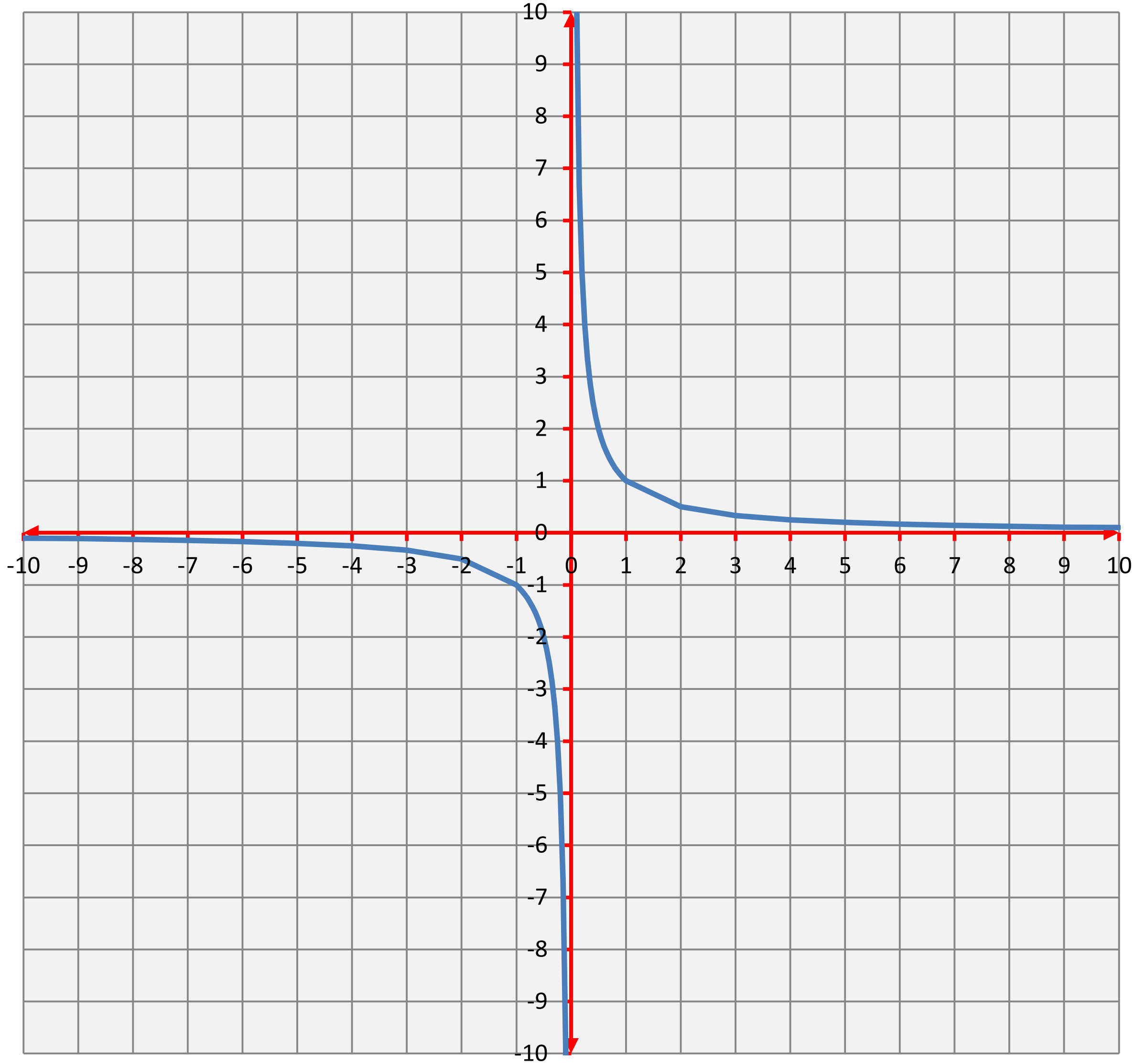
<u>Cuadro de valores</u>

x	y
$\pm$ 10	$\pm$ 0,1
$\pm$ 4	$\pm$ 0,25
$\pm$ 2	$\pm$ 0,5
$\pm$ 1	$\pm$ 1
$\pm$ 0,5	$\pm$ 2
$\pm$ 0,25	$\pm$ 4
$\pm$ 0,1	$\pm$ 10



Hipérbolas equiláteras con diferentes valores de “a”:

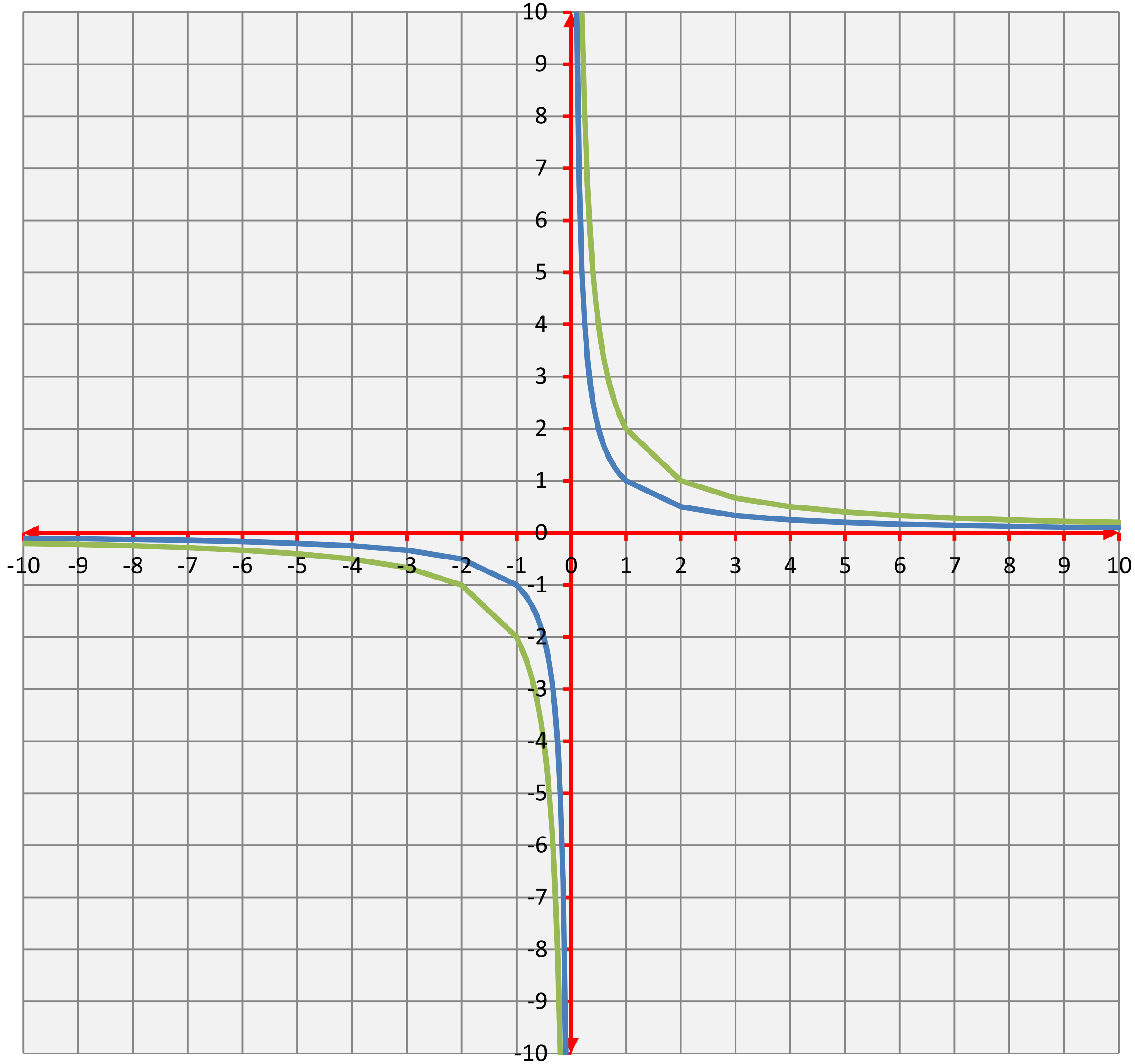
$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{1}}{x} \text{ (azul)}$$



Hipérbolas equiláteras con diferentes valores de “a”:

$\mathbf{y} = \frac{1}{x}$ (azul)

$\mathbf{y} = \frac{2}{x}$ (verde)

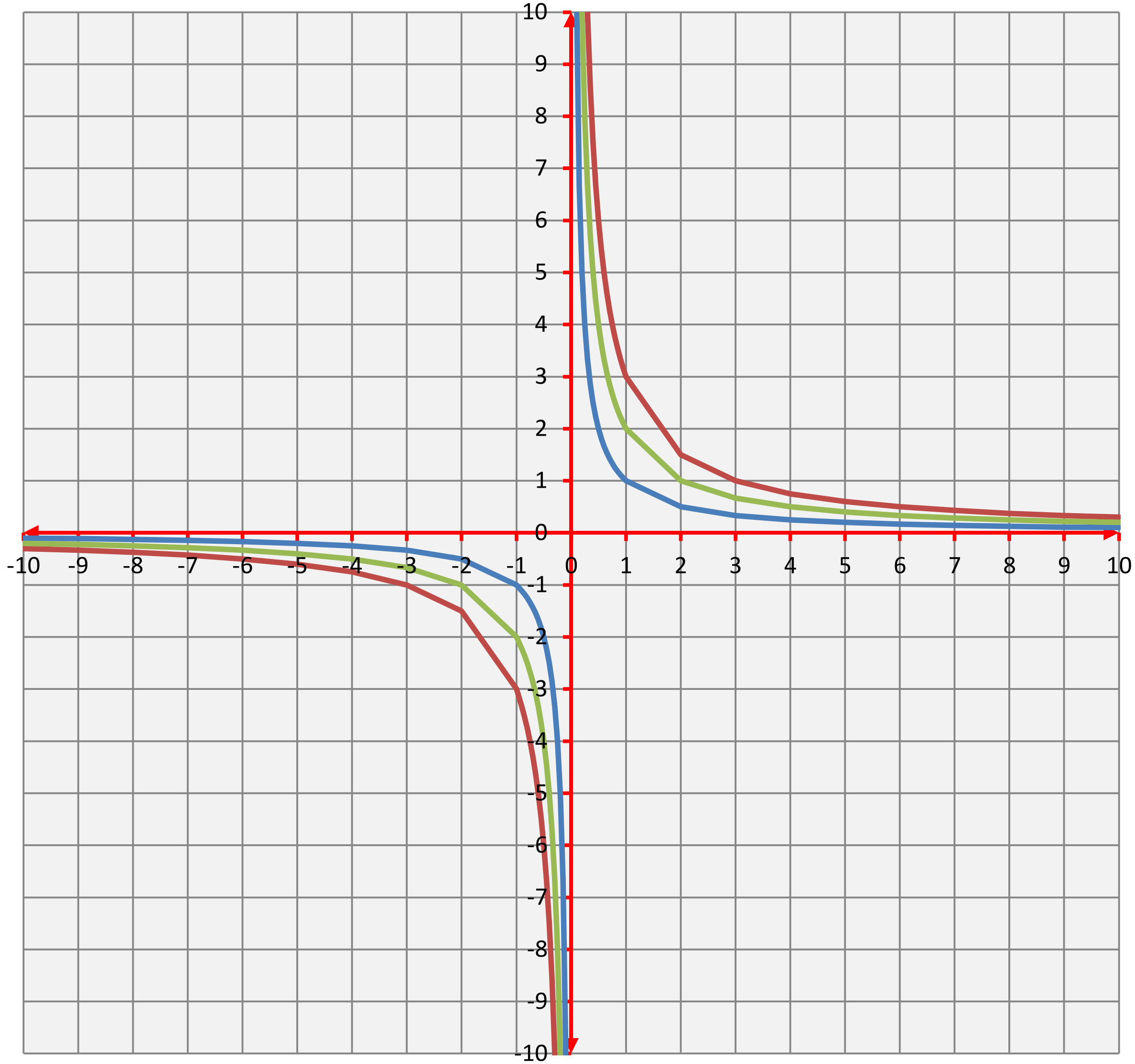


Hipérbolas equiláteras con diferentes valores de “a”:

$y = \frac{1}{x}$ (azul)

$y = \frac{2}{x}$ (verde)

$y = \frac{3}{x}$ (marrón)



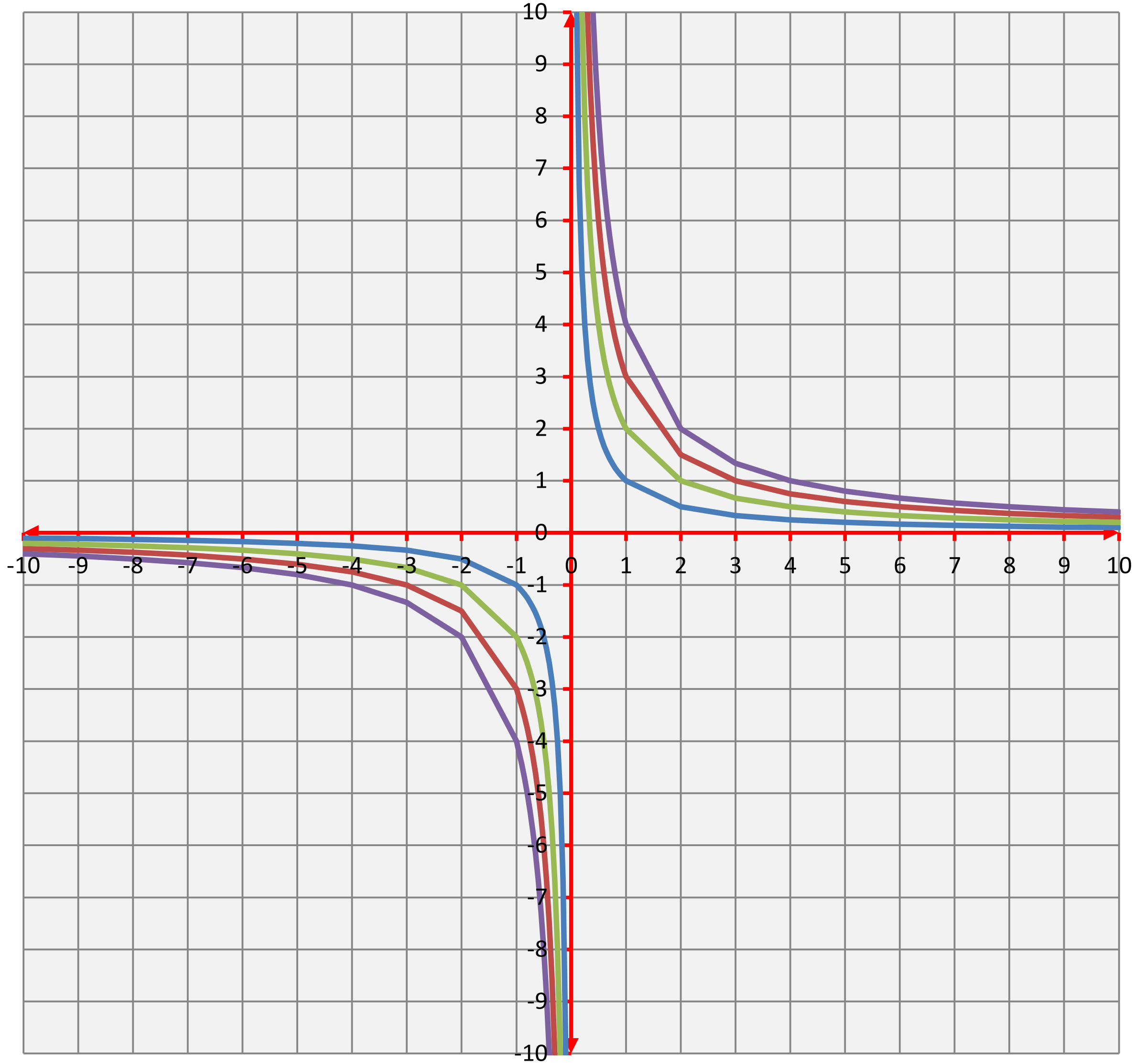
Hipérbolas equiláteras con diferentes valores de “a”:

y = $\frac{1}{x}$ (azul)

y = $\frac{2}{x}$ (verde)

y = $\frac{3}{x}$ (marrón)

y = $\frac{4}{x}$ (violeta)



Hipérbolas equiláteras con diferentes valores de “a”:

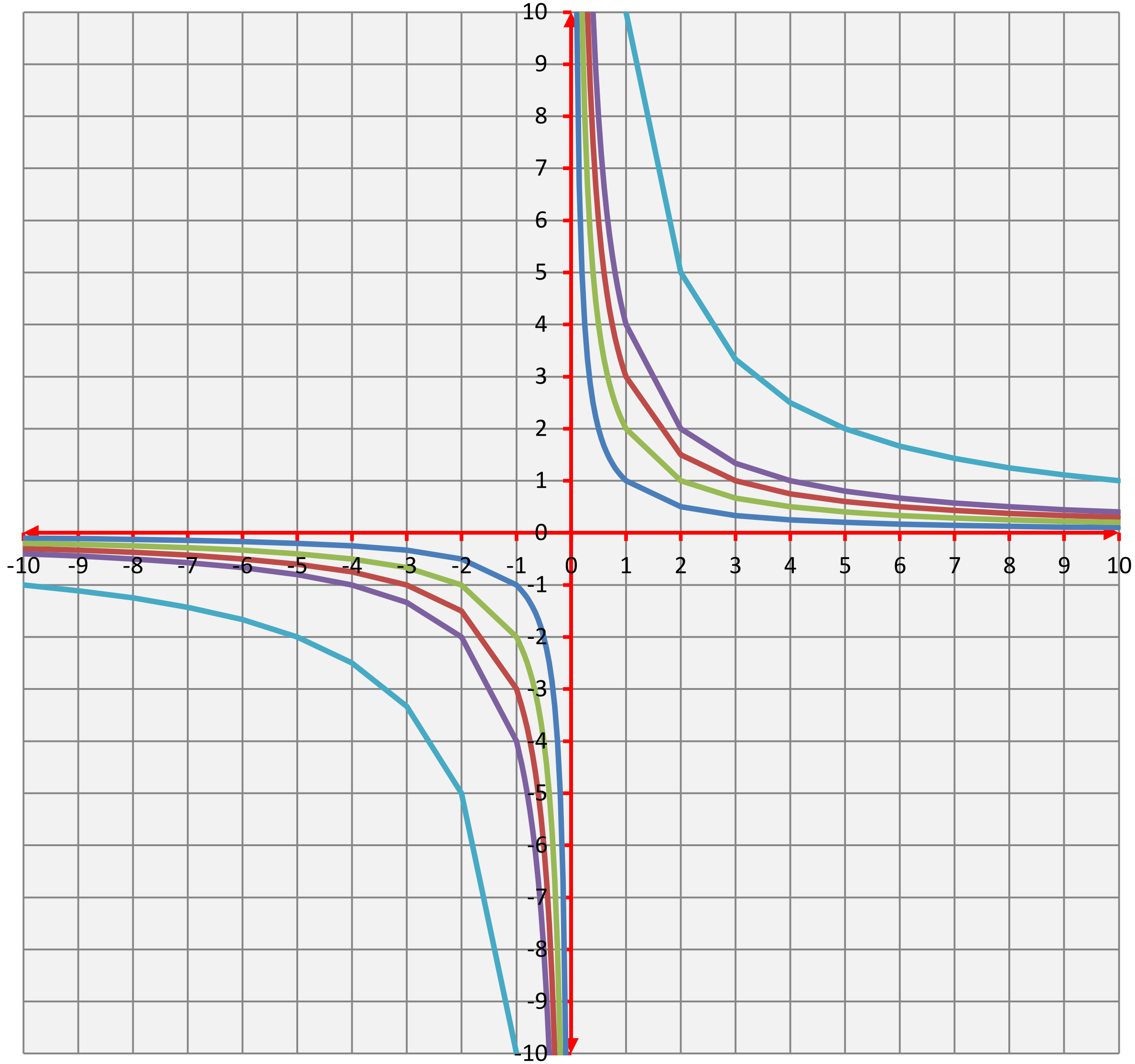
$y = \frac{1}{x}$ (azul)

$y = \frac{2}{x}$ (verde)

$y = \frac{3}{x}$ (marrón)

$y = \frac{4}{x}$ (violeta)

$y = \frac{10}{x}$ (celeste)



Hipérbolas equiláteras con diferentes valores de “a”:

$y = \frac{1}{x}$ (azul)

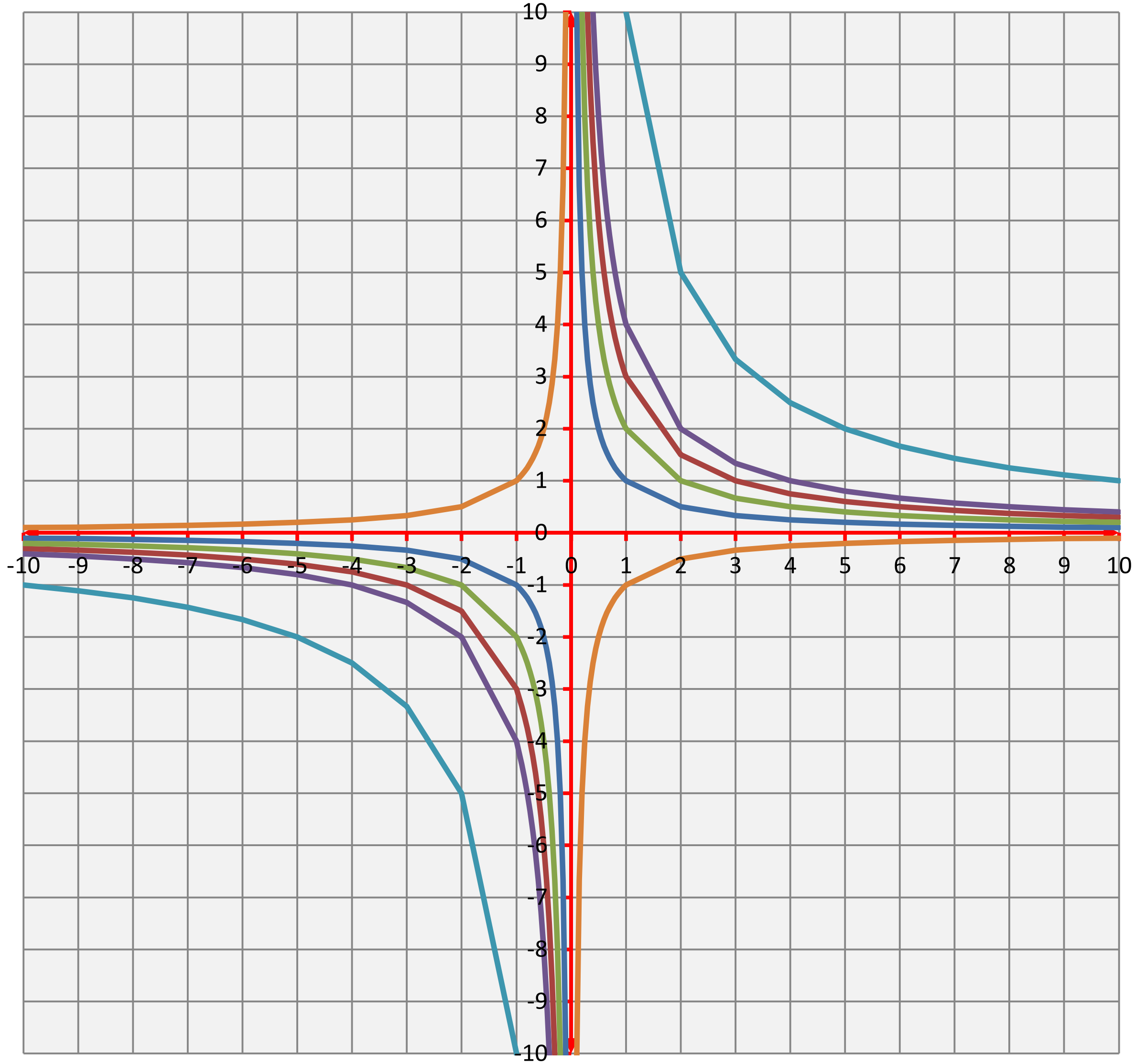
$y = \frac{2}{x}$ (verde)

$y = \frac{3}{x}$ (marrón)

$y = \frac{4}{x}$ (violeta)

$y = \frac{10}{x}$ (celeste)

$y = \frac{-1}{x}$ (naranja)



Como sabemos la función hiperbólica, no está definida para $x = 0$; el comportamiento es tal que tiende a un valor infinito positivo cuando la variable "x" disminuye monótonamente hacia "0". En la representación gráfica la curva se acerca indefinidamente hacia el eje "y", pero sin alcanzarlo.

Este comportamiento de la función se llama "*asintótico*" y la recta hacia la que tiende sin llegar (en nuestro caso el eje "y"), se conoce como "*asíntota*".

También es asintótico el caso de la curva tendiendo a "0", cuando "x" crece indefinidamente (sabemos que por división no se llega a cero).
La asíntota ahora es el eje "x".

Un comportamiento similar pero con signos opuestos corresponde a la parte negativa.

Además se comprobó que cuando la constante "a" es positiva, ambas ramas de la hipérbola están definidas en el 1° y 3° cuadrante, mientras que si "a" es negativa la gráfica estará en el 2° y 4° cuadrante.

Cuando "a" crece en valor absoluto, la curva se aparta algo de los ejes, pero se mantienen los comportamientos asintóticos.

6 – Función Homográfica.

$$\boxed{y = \frac{a.x+b}{c.x+d}}$$

La función $y = \frac{a.x+b}{c.x+d}$ es conveniente verla como el cociente entre dos rectas, para lo cual debe ser "c ≠ 0".

Sabemos que el denominador "c.x + d" no puede valer "0"; en consecuencia planteamos que si: c.x + d = 0 ⟶ el valor de x dado por x_1= - $\frac{d}{c}$ debe ser *excluído* del dominio de la función homográfica. En correspondencia con ese valor, debe existir una asíntota vertical.

Al valor x_1 que hace que en su proximidad la función tienda a infinito, se lo suele llamar "*polo*" de la función.

Por otra parte se puede considerar que cuando "x" crece tendiendo a infinito, pueden despreciarse los valores de "b" y "c" en la expresión original y también simplificar la variable "x", por lo que queda: $\mathbf{y} = \frac{a}{c}$, que define una "asíntota horizontal".

Resumiendo, después de determinar las asíntotas vertical y horizontal se puede proceder a dar valores a "x" a ambos lados de x_1= - $\frac{d}{c}$, y comprobar, al representar la función, que se trata de una hipérbola cuyos ejes se han desplazado.

Sea la función homográfica:

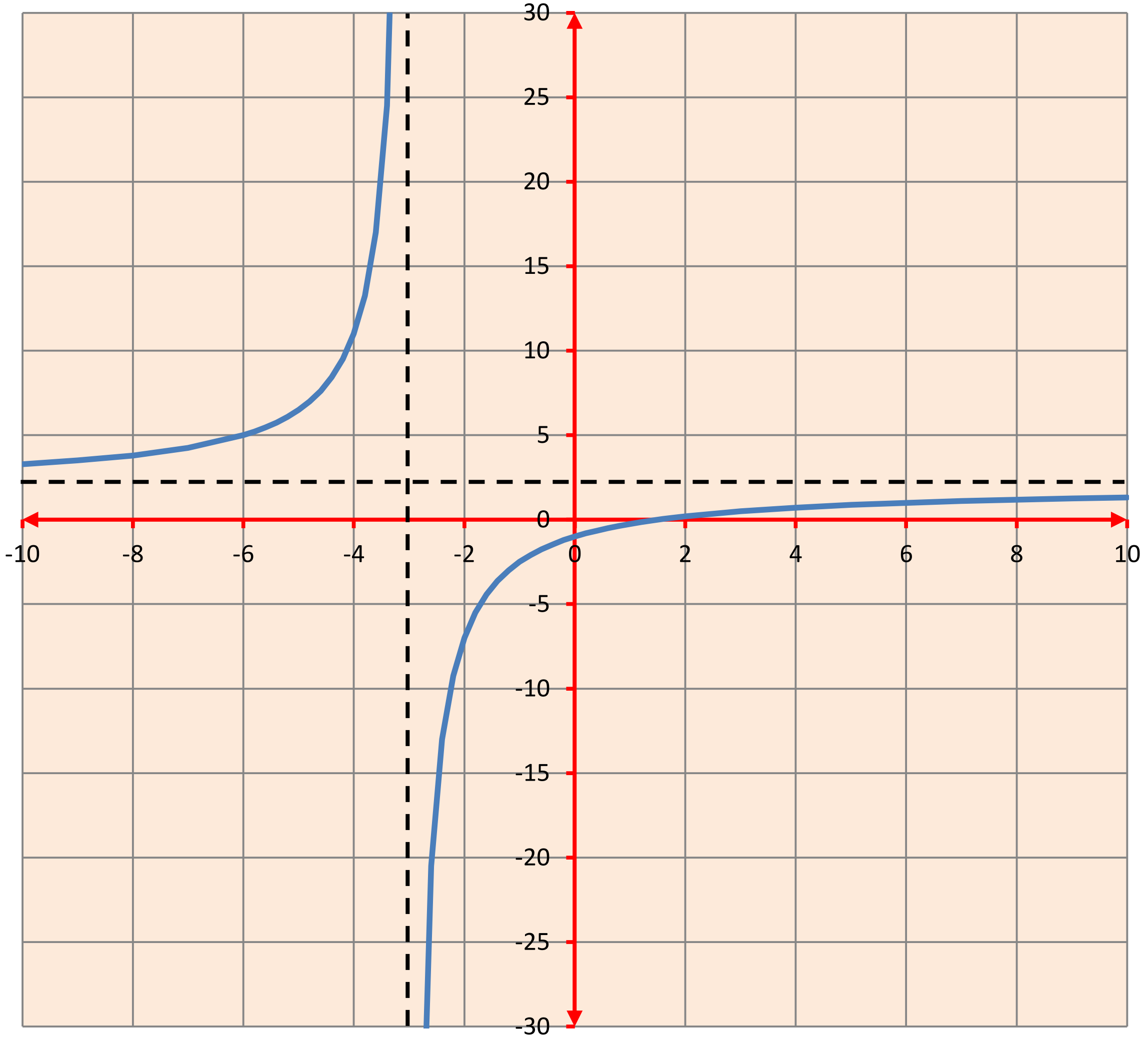
$$y = \frac{2.x - 3}{x + 3}$$

La asíntota vertical es el "cero" del denominador:

x_0 **= -3**

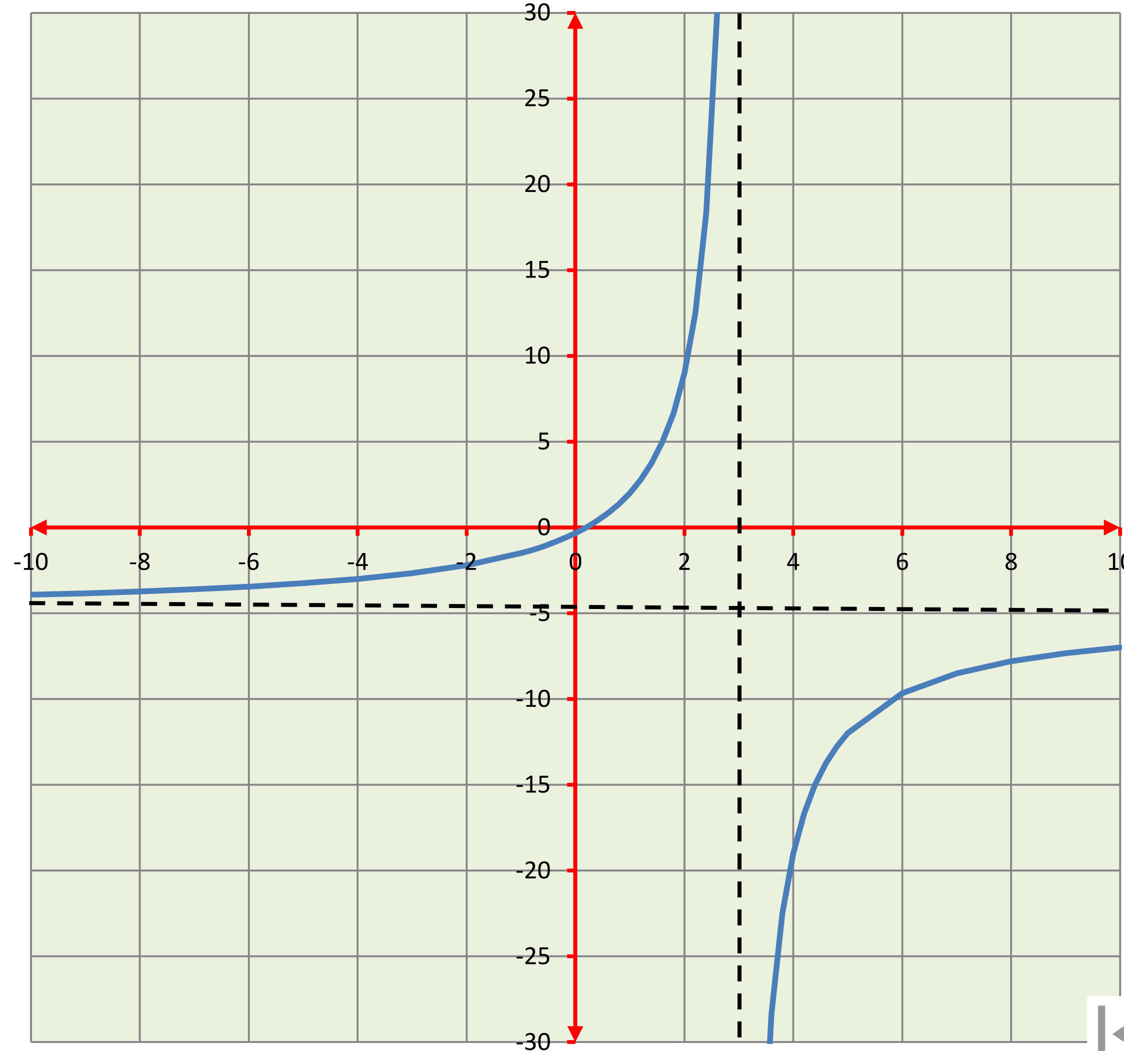
Y la asíntota horizontal es el cociente entre los coeficientes angulares de las dos rectas:

y_0 **= 2/1 = 2**



Y ahora la función es:

$$y = \frac{-10.x+2}{2.x-6}$$



La asíntota vertical está en el "cero" del denominador:

2.x – 6 = 0

X = 6/2 = **3**

Mientras que la asíntota horizontal será:

y = -10 / 2 = **-5**

7 – Función Racional Fraccionaria.

$$\boxed{\mathrm{y} = \frac{P\ (x)}{Q\ (x)}}$$

La función *Racional Fraccionaria es el cociente de dos "polinomios*". Tanto el numerador P(x), como el denominador Q(x), pueden ser lineales, cuadráticos, cúbicos o de cualquier grado "n". Se comprende fácilmente que las combinaciones planteadas pueden ser múltiples.

Resulta claro que las dos funciones recientemente estudiadas, la hiperbólica y la homográfica pudieron considerarse como casos particulares de la función fraccionaria que nos ocupa. Se señala que cualquiera sean los polinomios dados, estos tendrán raíces reales que pueden determinarse algebraicamente. Excluímos los casos de raíces imaginarias.

En tal sentido se puede decir lo siguiente:

Se llaman "*polos", los "ceros" o "raíces" de polinomio denominador*. En esos puntos, como sabemos, la función no está definida y en las adyacencias los valores absolutos crecen. El dominio de la función, por supuesto, serán los números reales menos los polos.

Se conocen como *"ceros", las "raíces" o "ceros" del polinomio numerador*. En esos puntos, la función se anula.

A título demostrativo y sin pretender ahondar el tema, estudiaremos dos casos, relativamente simples.

Sea la función racional fraccionaria:

$$y = \frac{x^2 \; -4x+3}{x^2-2x}$$

Compuesta por polinomios de 2° grado tanto en el numerador como en el denominador.

Calculando las raíces respectivas se tiene:

X1 = 1

X2 = 3

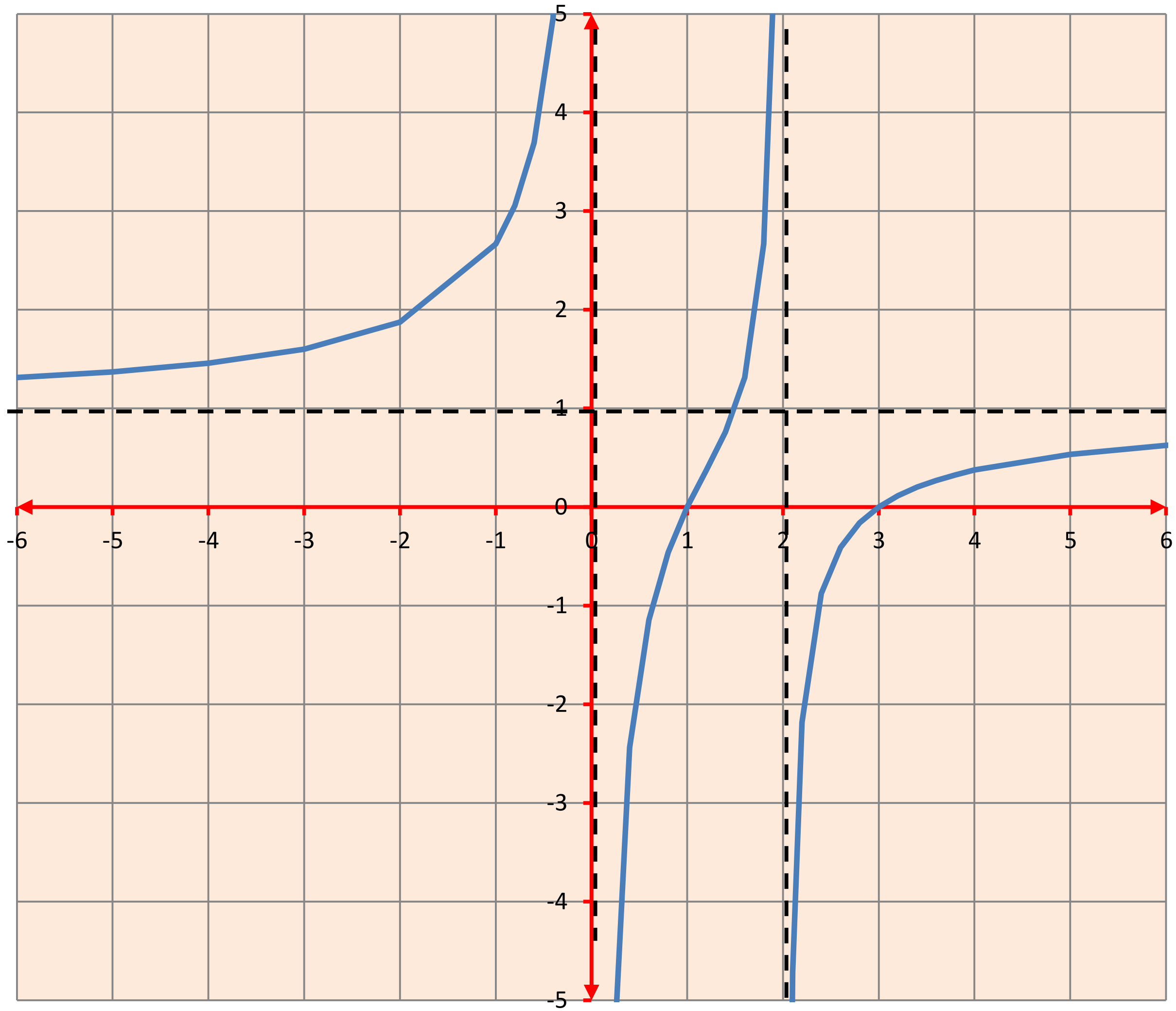
Son los “ceros” y

X3 = 0

X4 = 2

Son los “polos” o “infinitos”

La asíntota horizontal es el cociente de los coeficientes de x^2



La función racional fraccionaria:

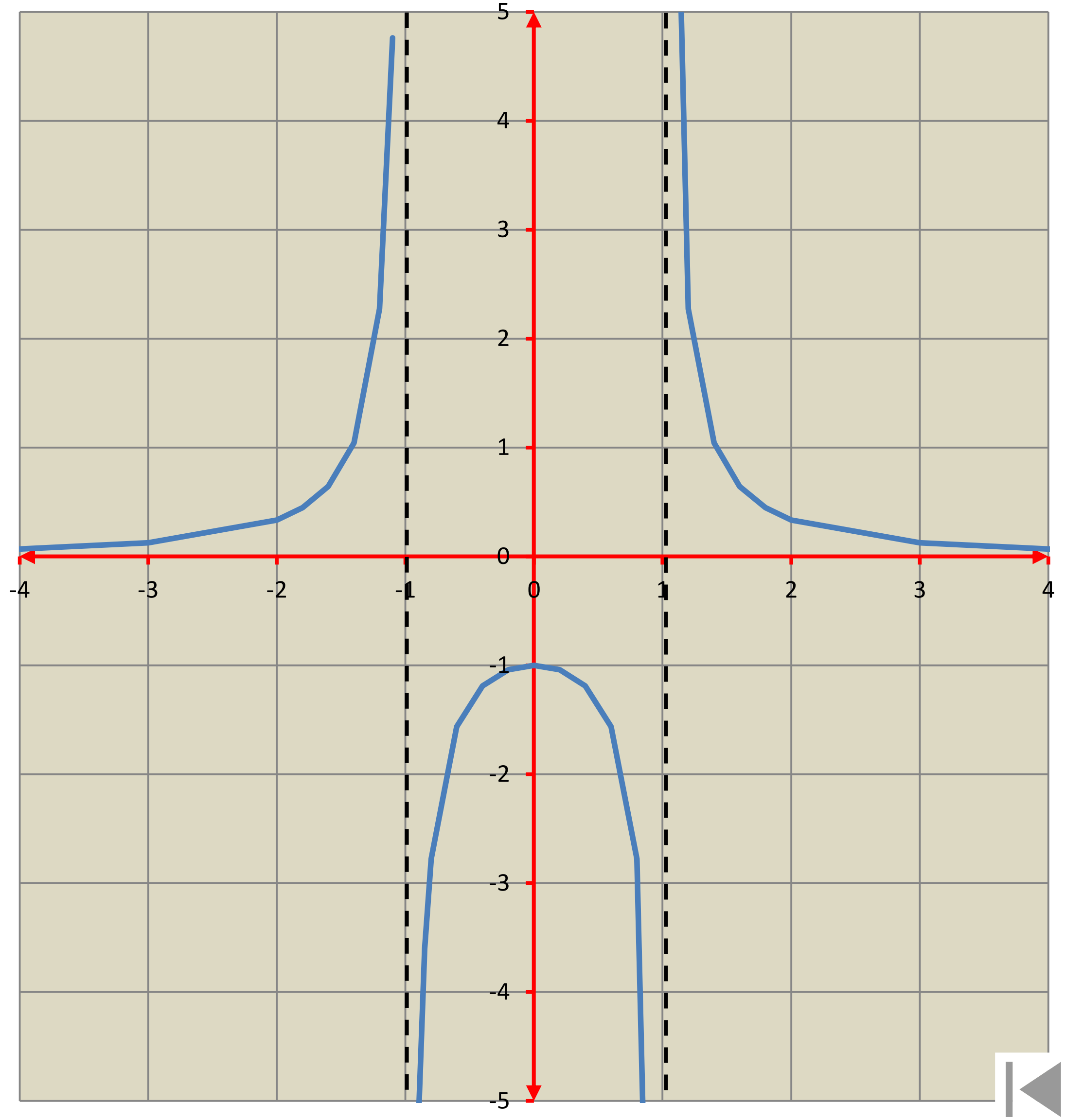
$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

No tiene ceros porque el numerador es una constante.

Tiene en cambio dos polos en correspondencia con las raíces del denominador:

x1 = -1
X2 = 1

La asíntota horizontal coincide con el eje “y”.



8 – Función Irracional.

$$\boxed{y = a.\sqrt[n]{x} + b}$$

Todas las funciones vistas hasta ahora utilizaron solo las operaciones de suma, resta, producto, cociente y potenciación, es decir "*operaciones racionales*".

Por primera vez, con la función irracional, introducimos básicamente la "*radicación*" de índice "n", aplicada a la variable "x".

A esta altura de nuestro estudio, se considera que no hace falta insistir sobre las influencias que tienen en las funciones, la existencia de coeficientes multiplicativos o de constantes aditivas.

La funciones irracionales pueden dividirse en dos clases: las que contienen raíces de *índice "par"* que admiten como *dominio solo los números reales positivos* y las raíces de *índice "impar"* en las que el dominio se extiende también a los *reales negativos.*

*R*ecordemos que las raíces pares de números negativos originan los "números imaginarios", que están totalmente fuera de nuestro estudio actual (solo funciones reales).

Veremos como casos típicos solamente el comportamiento de las raíces cuadradas y cúbicas.

Recordemos que el valor de “x”, solo puede ser “0” o positivo y además:

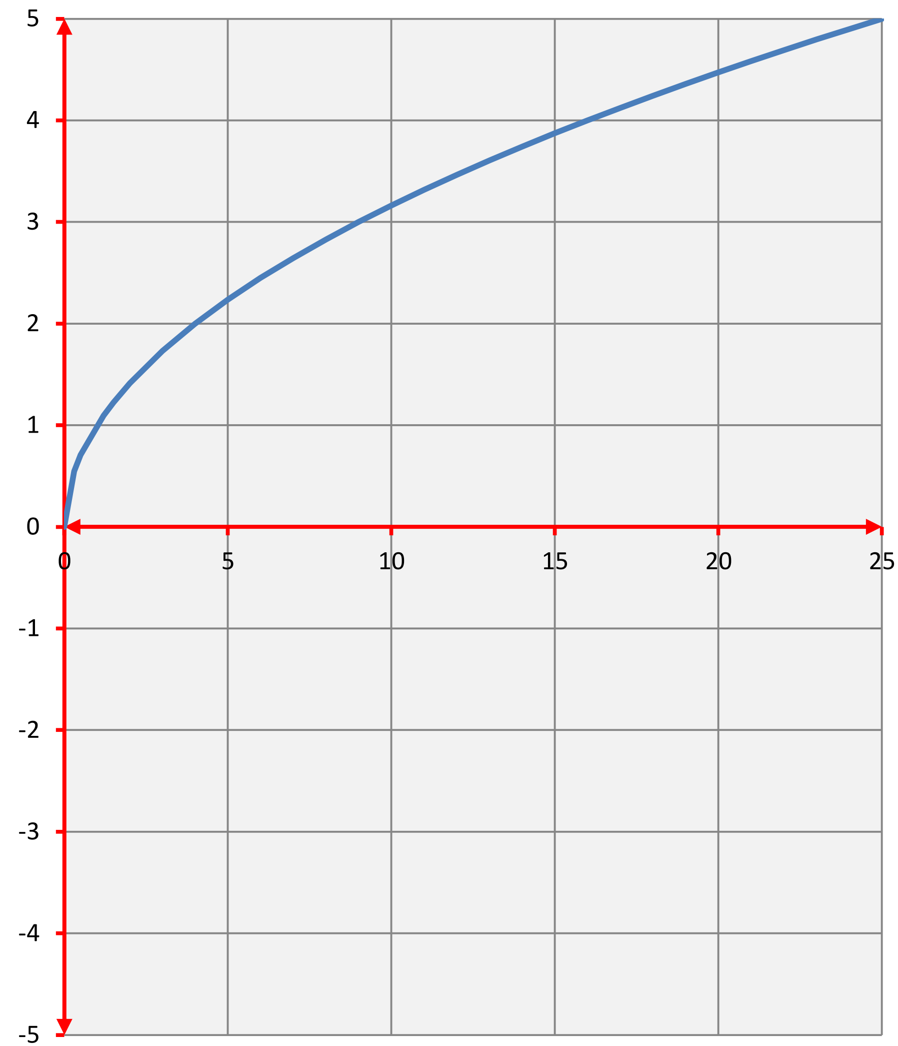
$$\sqrt[2]{25} = +5 \text{ y } -5$$
$$\sqrt[2]{16} = +4 \text{ y } -4$$
$$\sqrt[2]{4} = +2 \text{ y } -2\text{; etc.}$$

Es decir que a cada valor de “x” le corresponden numéricamente dos valores de “y”.

Esto no cumple con la definición de función que exige la correspondencia “uno a uno” entre las variables.

Para evitar esto se conviene que y = $\sqrt[2]{x}$ corresponde solo a los valores positivos de “y”.

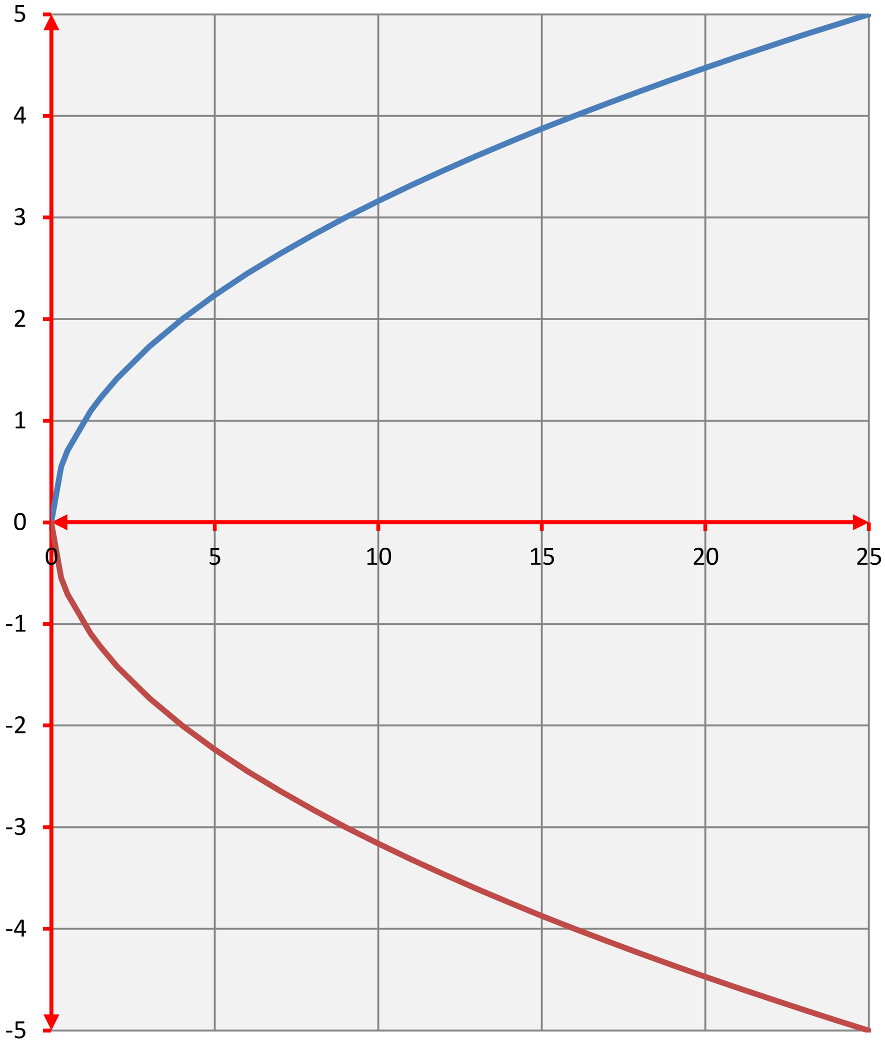
O dicho de otra manera, limitamos tanto el dominio como el codominio solo a los valores reales positivos: R^{+}



La otra rama se identifica con

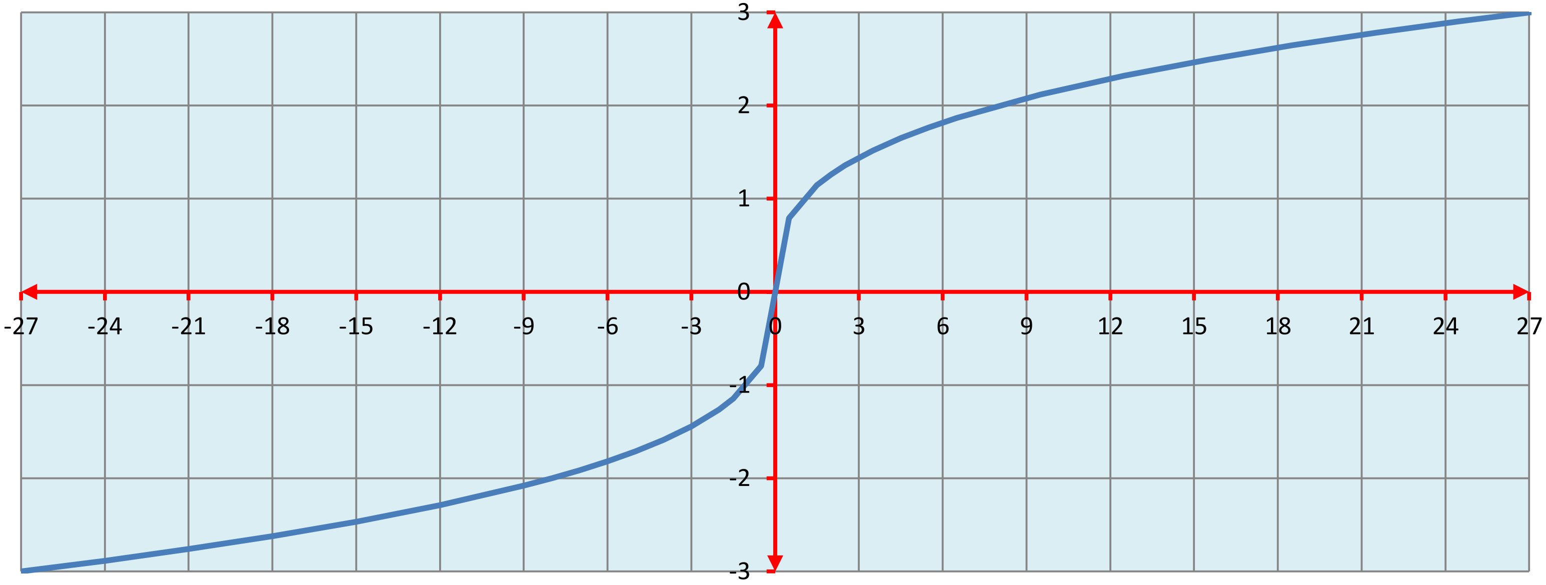
y = - $\sqrt[2]{x}$ (curva marrón)

O lo que sería lo mismo limitar el codominio a los reales negativos: R^{-}



La función $y = \sqrt[3]{x}$ es tomada como representante de las funciones irracionales de índice *impar*; ellas sí pueden tener como dominio y codominio a todos los números reales.

Esta curva no presenta ningún comportamiento extraño.



9 – Función Exponencial.

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}$$

A partir de esta función se verán las llamadas "*funciones trascendentes*" que son funciones que "*trascienden*", o "*van mas allá*" del álgebra, en el sentido de que no pueden ser expresadas en términos de una secuencia finita de polinomios algebraicos convencionales. Es un nombre mas bien histórico.

En el caso particular de las "*funciones exponenciales*" , nos encontramos con que por primera vez, *la variable independiente "x" está en el exponente:* $y = a^x$

Las condiciones que se le imponen a la constante "a" son dos: "**a > 0 y a≠ 1**". Es decir que puede ser cualquier valor positivo, menos "0" o "1".

Hay claramente dos situaciones diferentes: **a > 1**, se tiene la "exponencial creciente".
y con **0 < a < 1**, la "exponencial es decreciente".
También se tiene una "exponencial decreciente" cuando siendo "**a > 1**" , la variable "**x**" está afectada por el coeficiente **-1:** $\mathbf{y = a^{-x}}$

Se aclara que en todos los casos la variable "x" puede ser tanto positiva como negativa. El dominio, en consecuencia, son "todos los números reales".

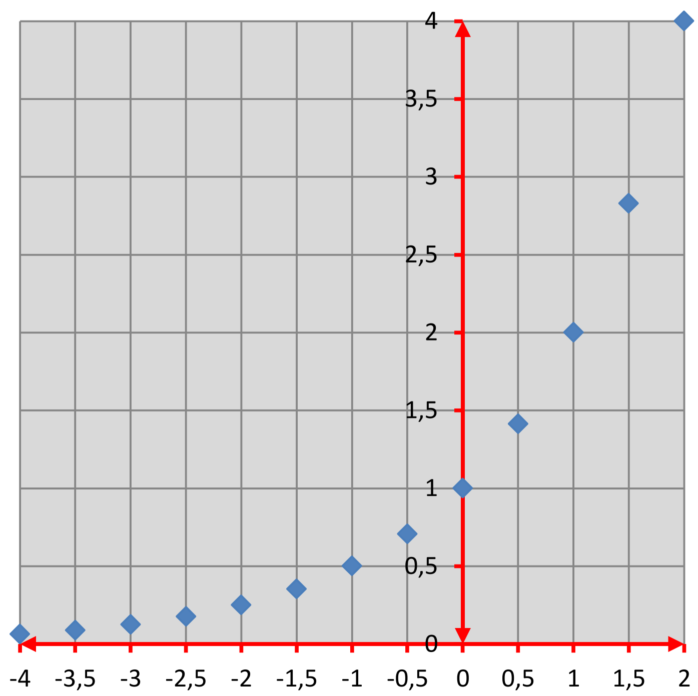
En la función exponencial $\mathbf{y} = \boldsymbol{a^x}$, por facilidad, hacemos el valor de la constante: a = 2 y calculamos con cierto detalle los valores, para algunos números negativos. Para reales positivos se hacen los valores monótonamente crecientes: $\mathbf{y} = \mathbf{2^x}$

x	y
-4	0,0625
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4

En la función exponencial **$y = a^x$**, por facilidad, hacemos el valor de la constante: a = 2 y calculamos con cierto detalle los valores, para algunos números negativos. Para reales positivos se hacen los valores monótonamente crecientes: **$y = 2^x$**

x	y
-4	0,0625
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4

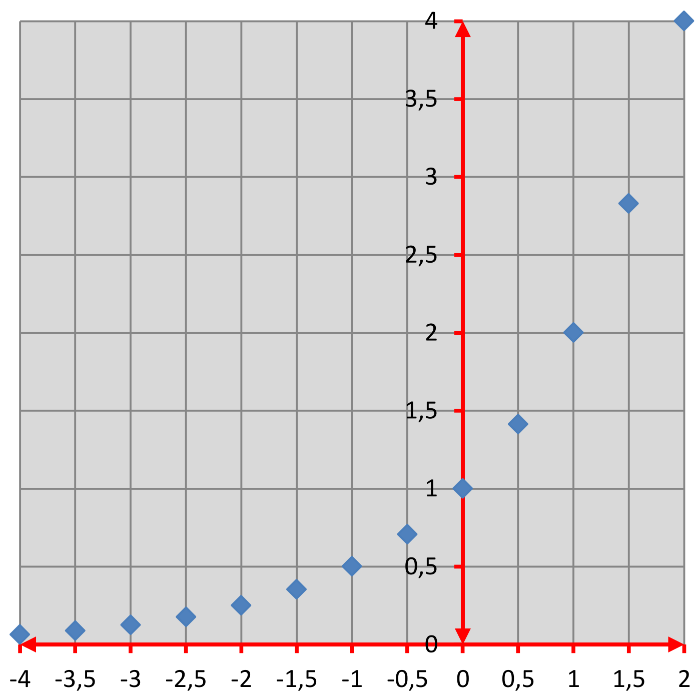
Puntos aislados



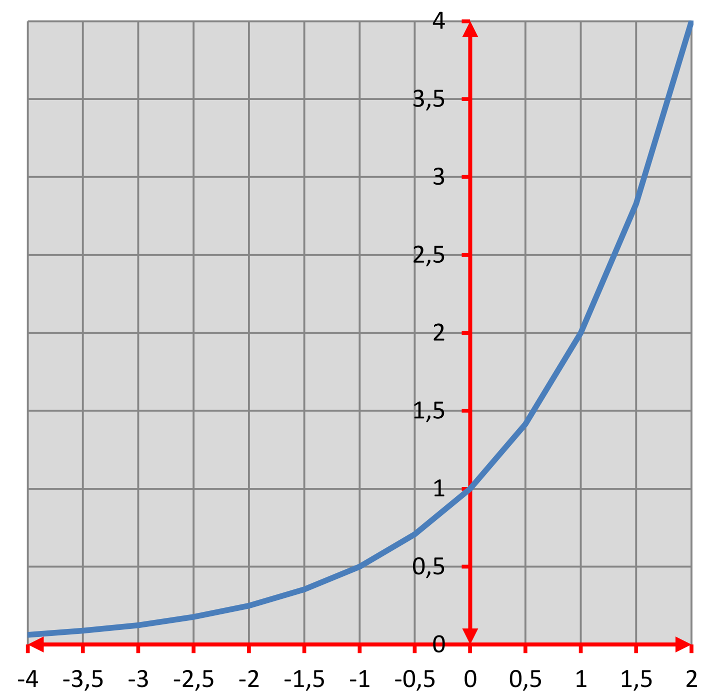
En la función exponencial **$y = a^x$**, por facilidad, hacemos el valor de la constante: a = 2 y calculamos con cierto detalle los valores, para algunos números negativos. Para reales positivos se hacen los valores monótonamente crecientes: **$y = 2^x$**

x	y
-4	0,0625
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4

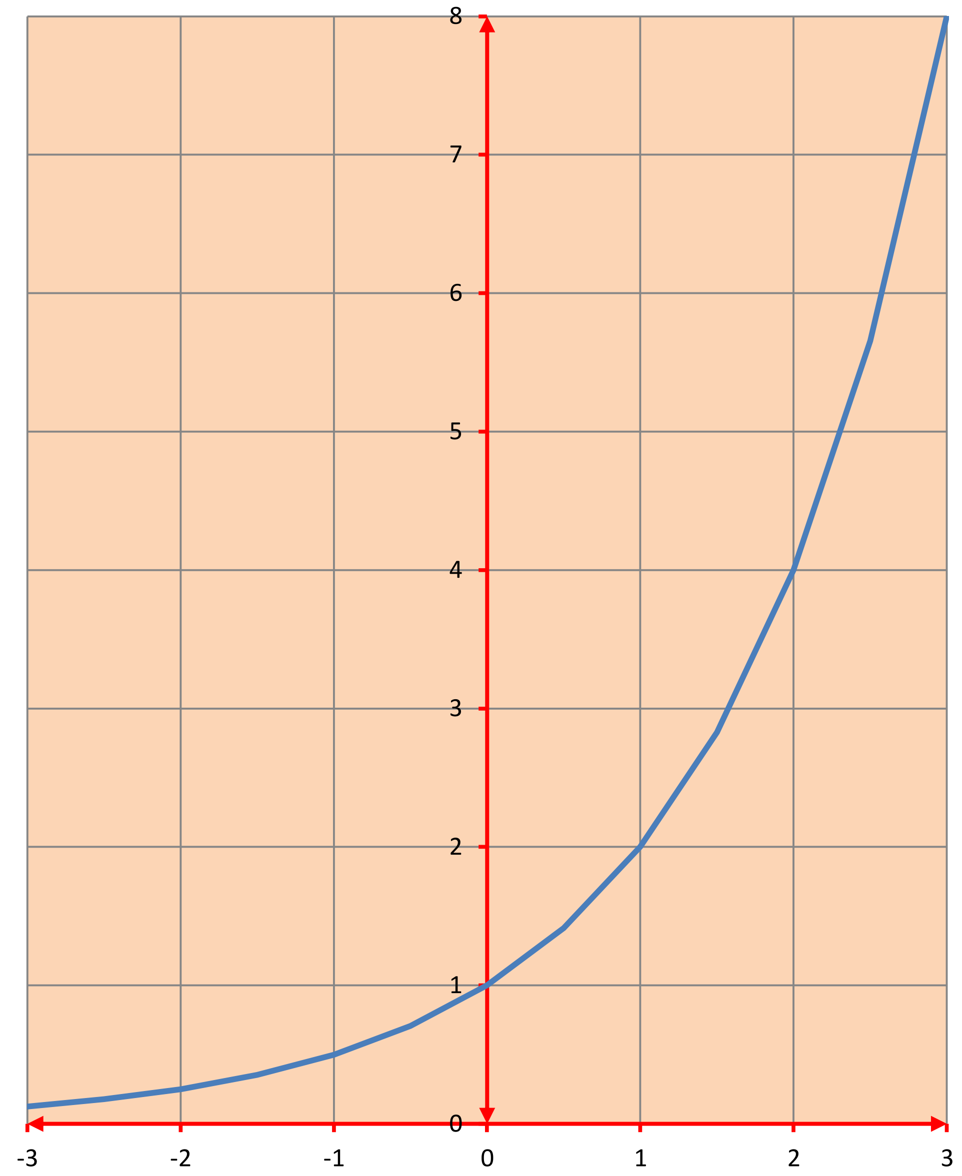
Puntos aislados



Curva contínua

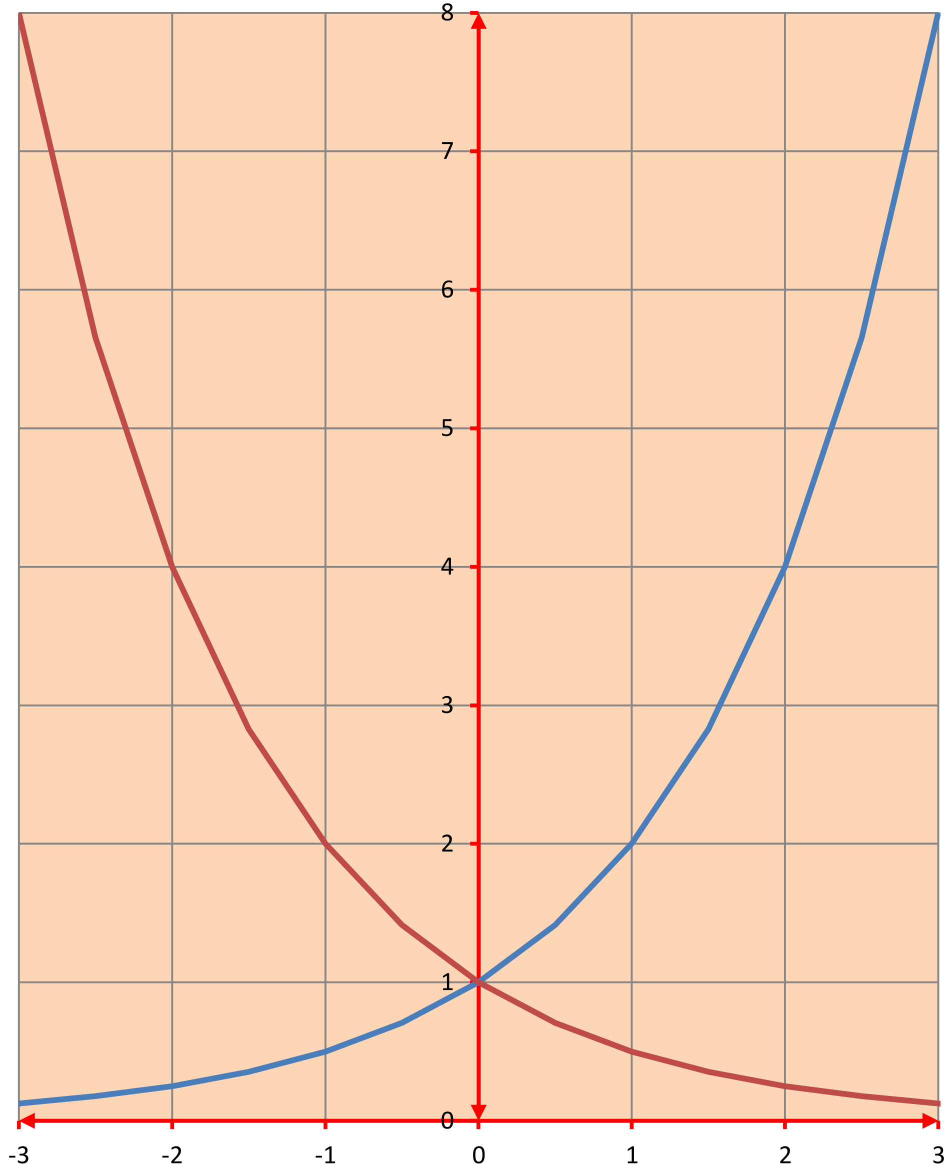


Se representa la exponencial creciente
$y = 2^x$ (azul) anterior.



Se representa la exponencial creciente
$y = 2^x$ **(azul)** anterior.

Ahora representamos en el mismo gráfico la exponencial decreciente
$y = (1/2)^x = 2^{-1x}$ (marrón)

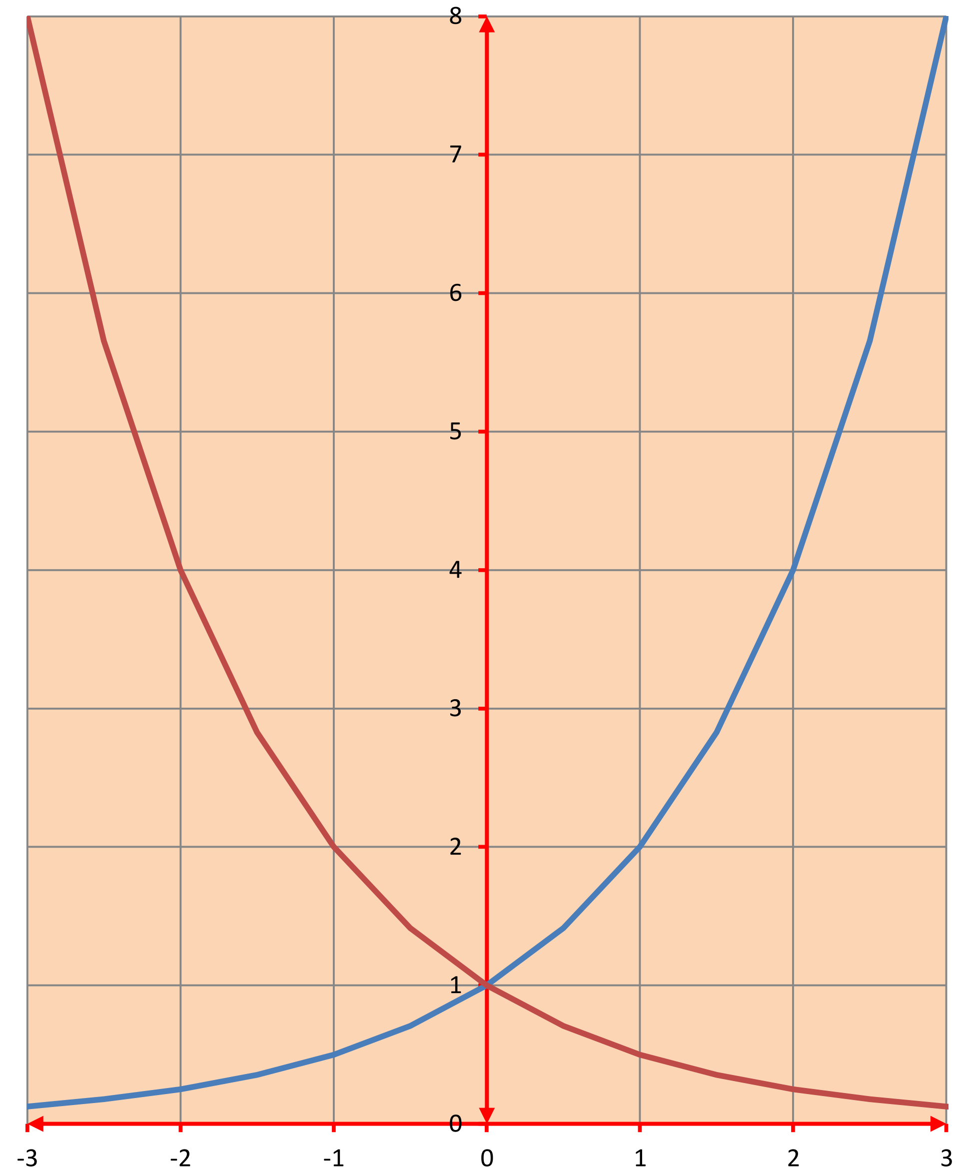


Se representa la exponencial creciente
$y = 2^{x}$ **(azul)** anterior.

Ahora representamos en el mismo gráfico la exponencial decreciente
$y = (1/2)^{x} = 2^{-1x}$ (marrón)

Vemos la total simetría de ambas curvas respecto del eje vertical.

Se destaca que el punto **(0 ; 1)** es común a todas las funciones exponenciales, sean crecientes o decrecientes y para cualquier valor de la base “a”; porque recordemos que todo número elevado a la potencia “0” vale “1” .



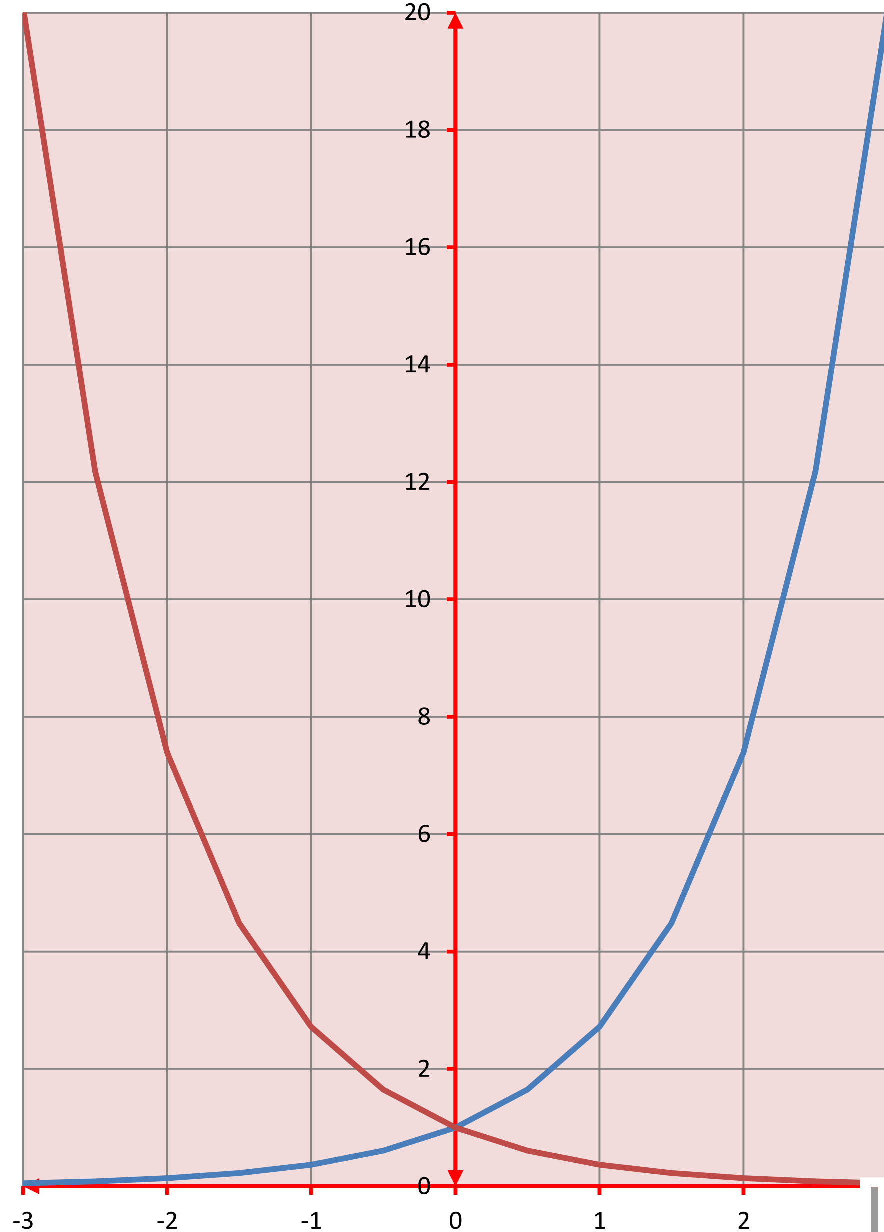
Así como el número π(Pi) = 3,14159265... es un irracional geométrico, en álgebra aparece con cierta frecuencia el número irracional **e = 2,71828182...**

Las funciones exponenciales que tienen por base el número "e", tienen gran importancia en "análisis matemático", a tal punto que constituyen habitualmente las "<u>exponenciales propiamente dichas".</u>

Prácticamente cuando en matemática se cita un resultado exponencial, generalmente se refiere a las exponenciales crecientes y decrecientes:

$$y = e^{x}$$

$$y = e^{-x}$$



10 – Función Logarítmica.

$$\boldsymbol{y = log_a\, x}$$

Es bueno recordar que el logaritmo, junto con la raíz, es una de las dos operaciones inversas de la potencia. Se lo define como: *"el exponente al que hay que elevar la base para obtener el número dado".* Por ejemplo si: $9^3 = 729 \longrightarrow$ implica que $log_9 729 = 3$

O sea que la función: $$y = log_a\ x$$

muestra el valor de "y" tal que : $$a^y = x.$$

El dominio de la función logarítmica es "solo los valores reales positivos (sin el "0")".

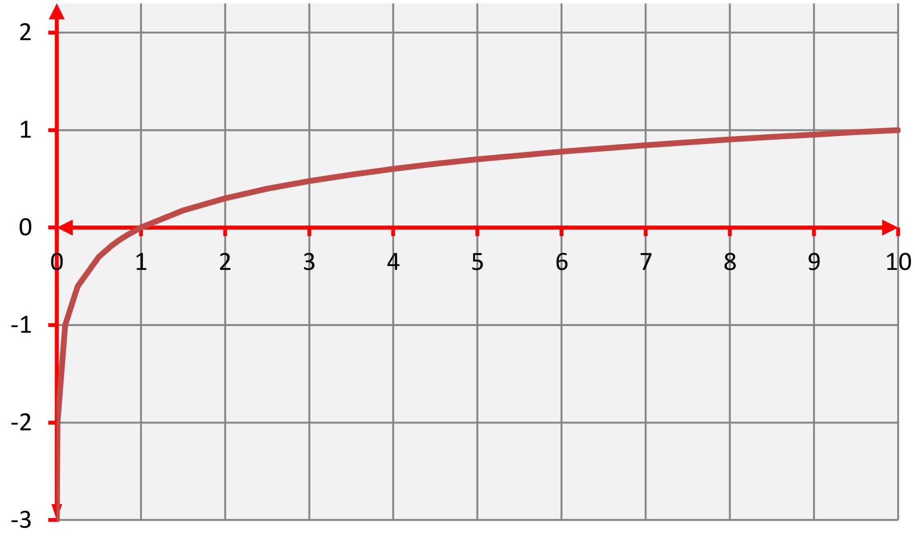
La invención de los logaritmos se debe a J. Neper, quien alrededor de los años 1614, hizo una tabla con base en el número "e". Por ese motivo fueron llamados logaritmos neperianos o naturales. La función correspondiente es: $y = log_e\ x = ln\ x$

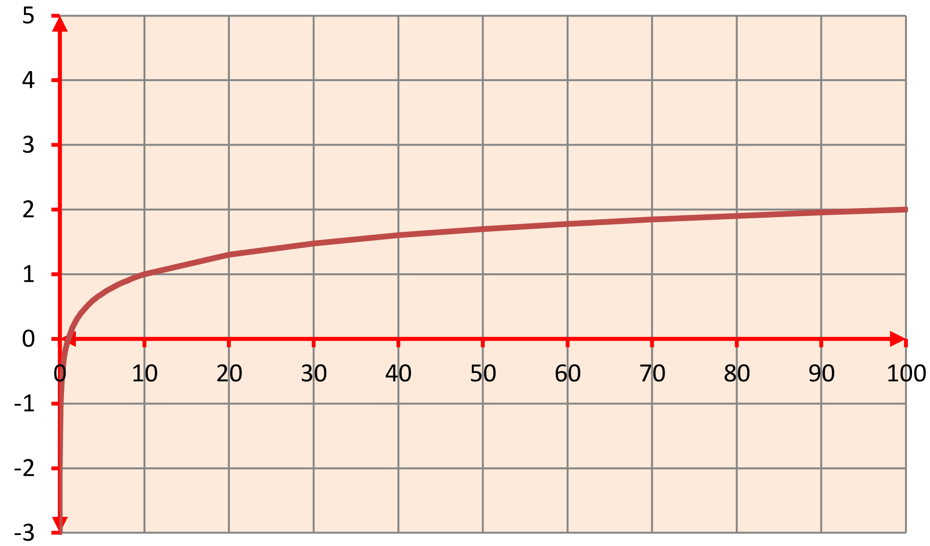
Por razones de facilidad operativa se desarrollaron los logaritmos en base 10, llamados logaritmos decimales o de Brigss: $y = log_{10}\ x = log\ x$

Una relación cómoda entre ellos es: ln x = 2,302 . log x

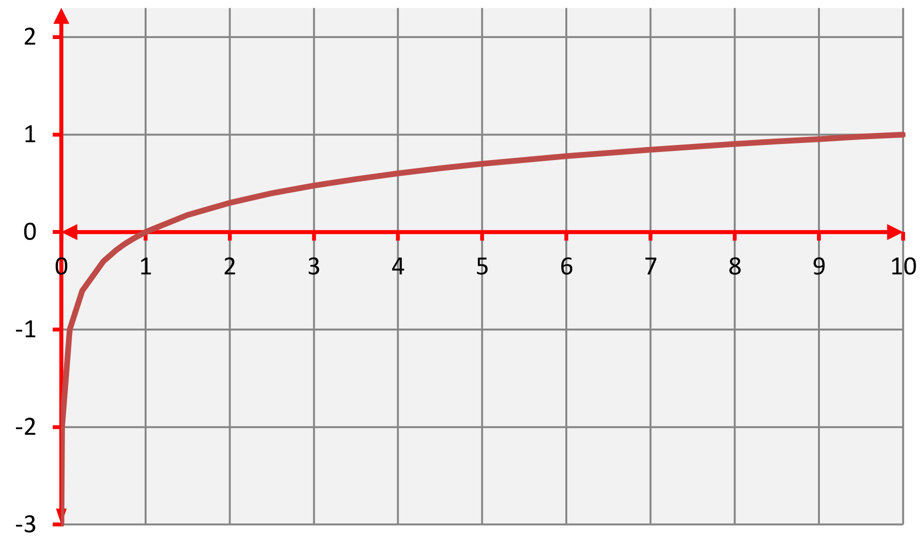
Se muestra primero la función ***y = log x*** (marrón) en dos gráficos, que difieren entre sí en la escala horizontal.

El objeto de esto es mostrar lo que ocurre para valores de “x” menores que 1, en comparación con el lento crecimiento de la función para grandes números.



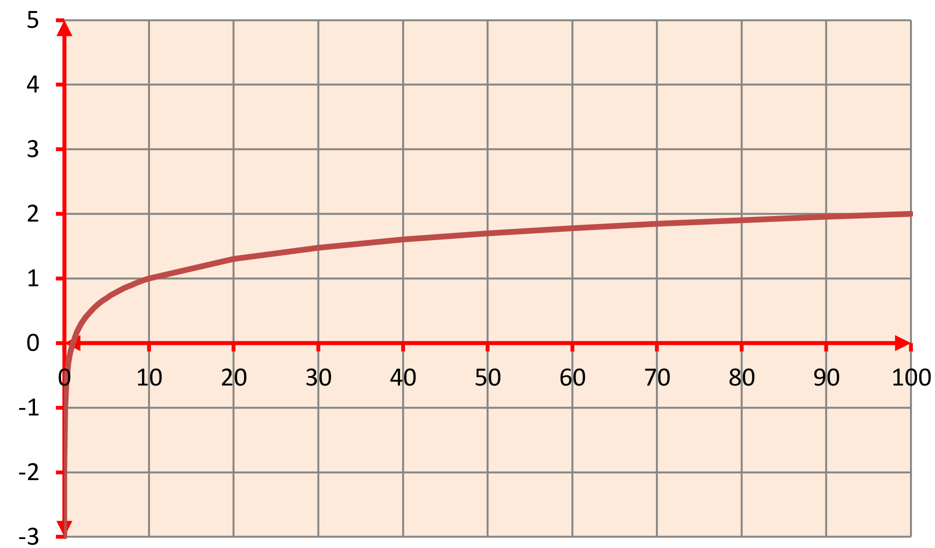


Se muestra primero la función $y = \log x$ (marrón) en dos gráficos, que difieren entre sí en la escala horizontal.



El objeto de esto es mostrar lo que ocurre para valores de “x” menores que 1, en comparación con el lento crecimiento de la función para grandes números.

En efecto, para que la función aumente en una unidad, x debe variar desde 1 hasta 10 al principio, pero luego debe hacerlo desde 10 hasta 100 y después desde 100 a 1000, etc.



Se muestra primero la función ***y = log x*** (marrón) en dos gráficos, que difieren entre sí en la escala horizontal.

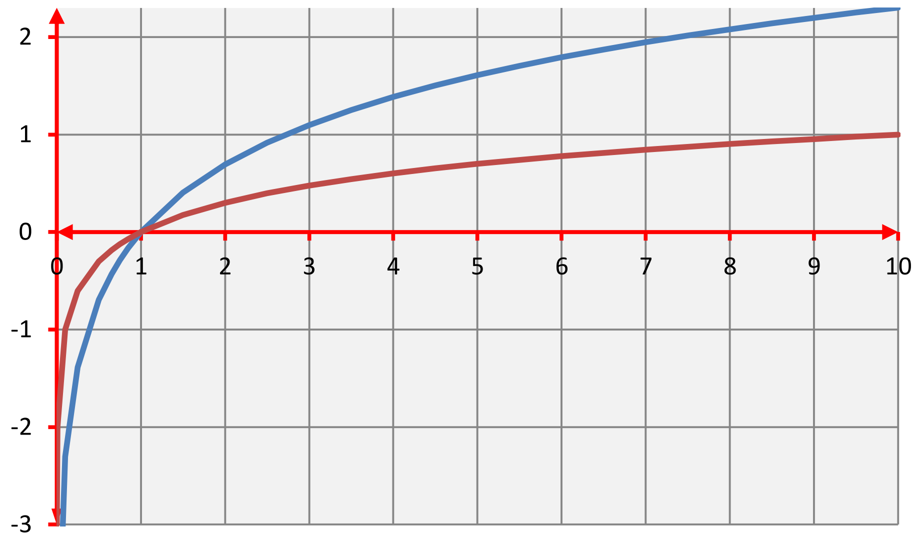
El objeto de esto es mostrar lo que ocurre para valores de "x" menores que 1, en comparación con el *lento crecimiento* de la función para grandes números.

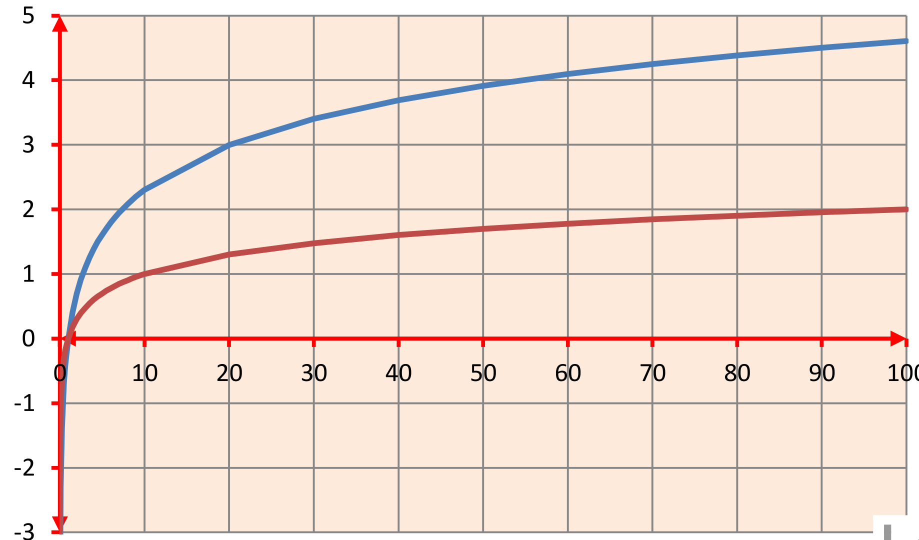
En efecto, para que la función aumente en una unidad, x debe variar desde 1 hasta 10 al principio, pero luego debe hacerlo desde 10 hasta 100 y después desde 100 a 1000, etc.

Ahora se superpone en ambos gráficos, la función

$$y = \ln x \ \ (\text{azul})$$

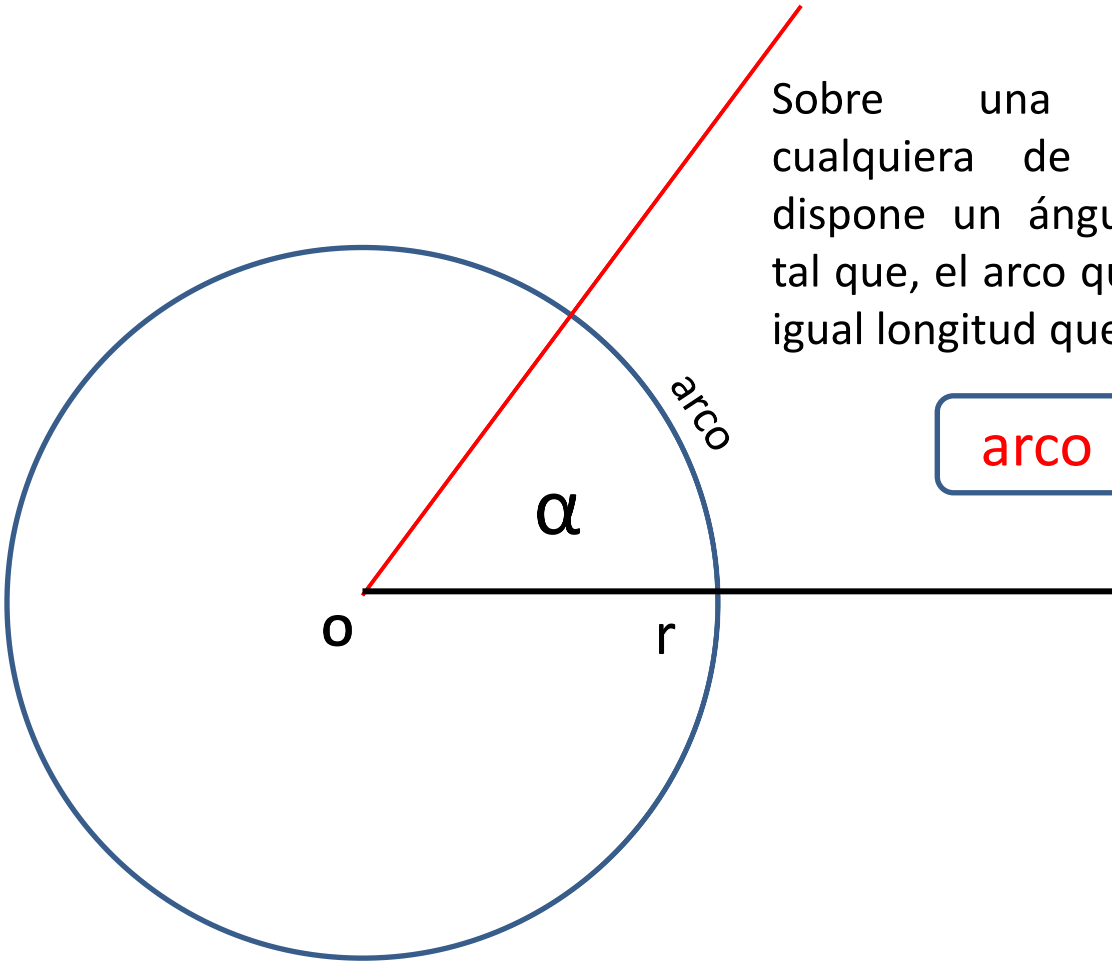
con el fin de comparar las curvas respectivas.





Elementos de Trigonometría

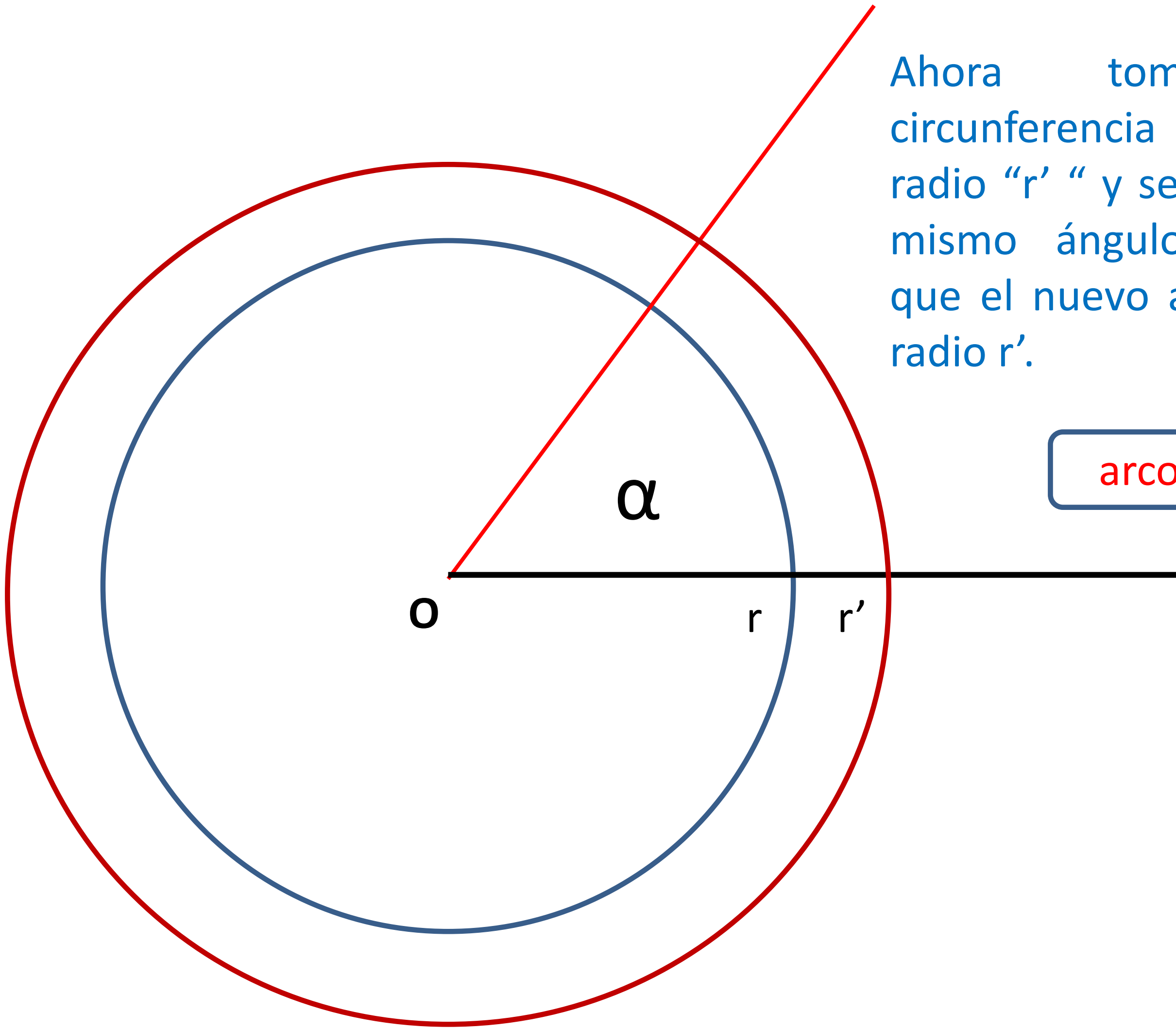
Medición de ángulos y algunas definiciones, expresiones y dibujos útiles.



Sobre una circunferencia cualquiera de radio “r”, se dispone un ángulo central “α”, tal que, el arco que abarca tenga igual longitud que el radio.

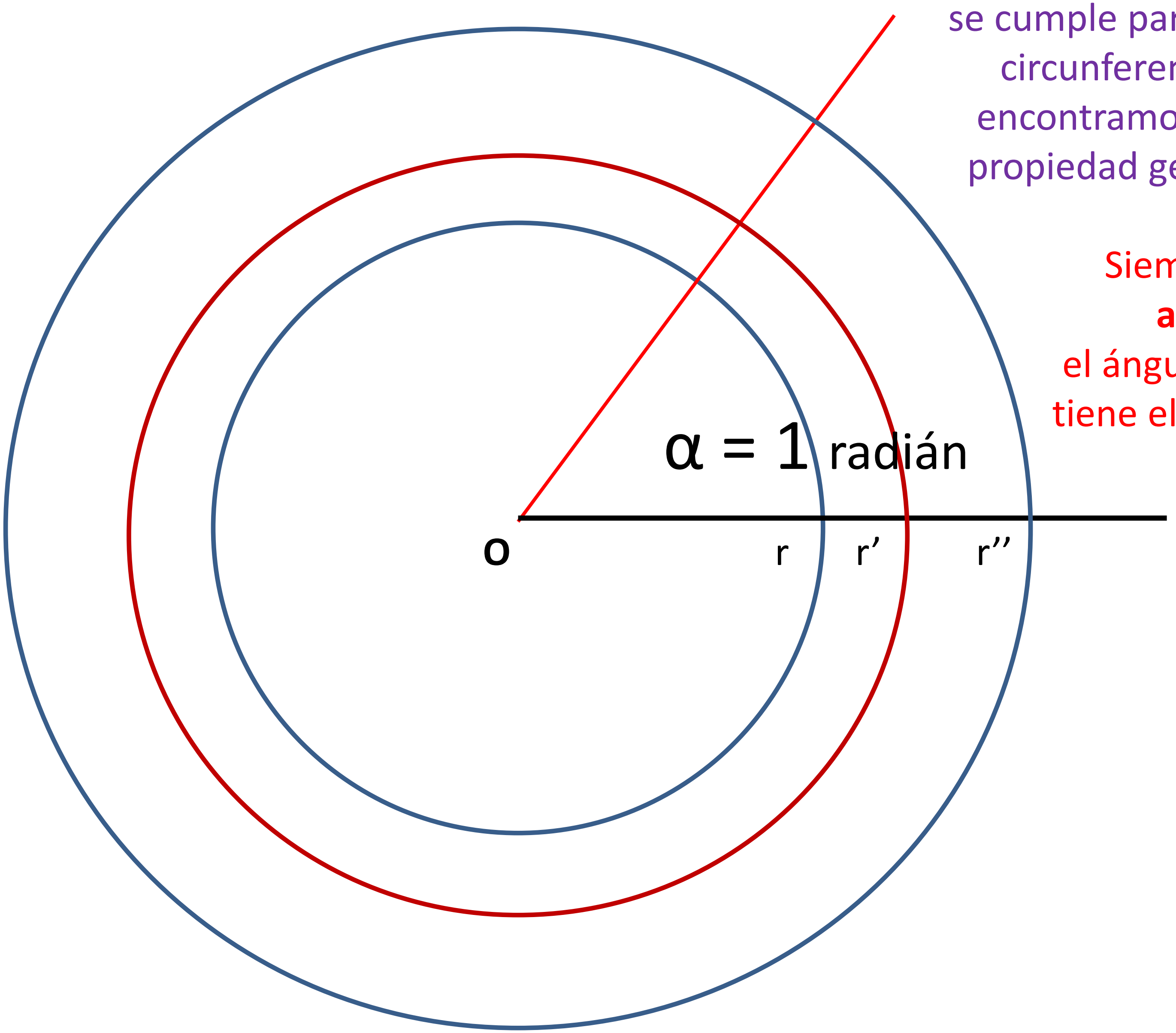
$$\boxed{\text{arco} = r}$$

Ahora tomamos otra circunferencia concéntrica de radio “r’ “ y se verifica que el mismo ángulo cumple con que el nuevo arco es igual al radio r’.



arco’ = r’

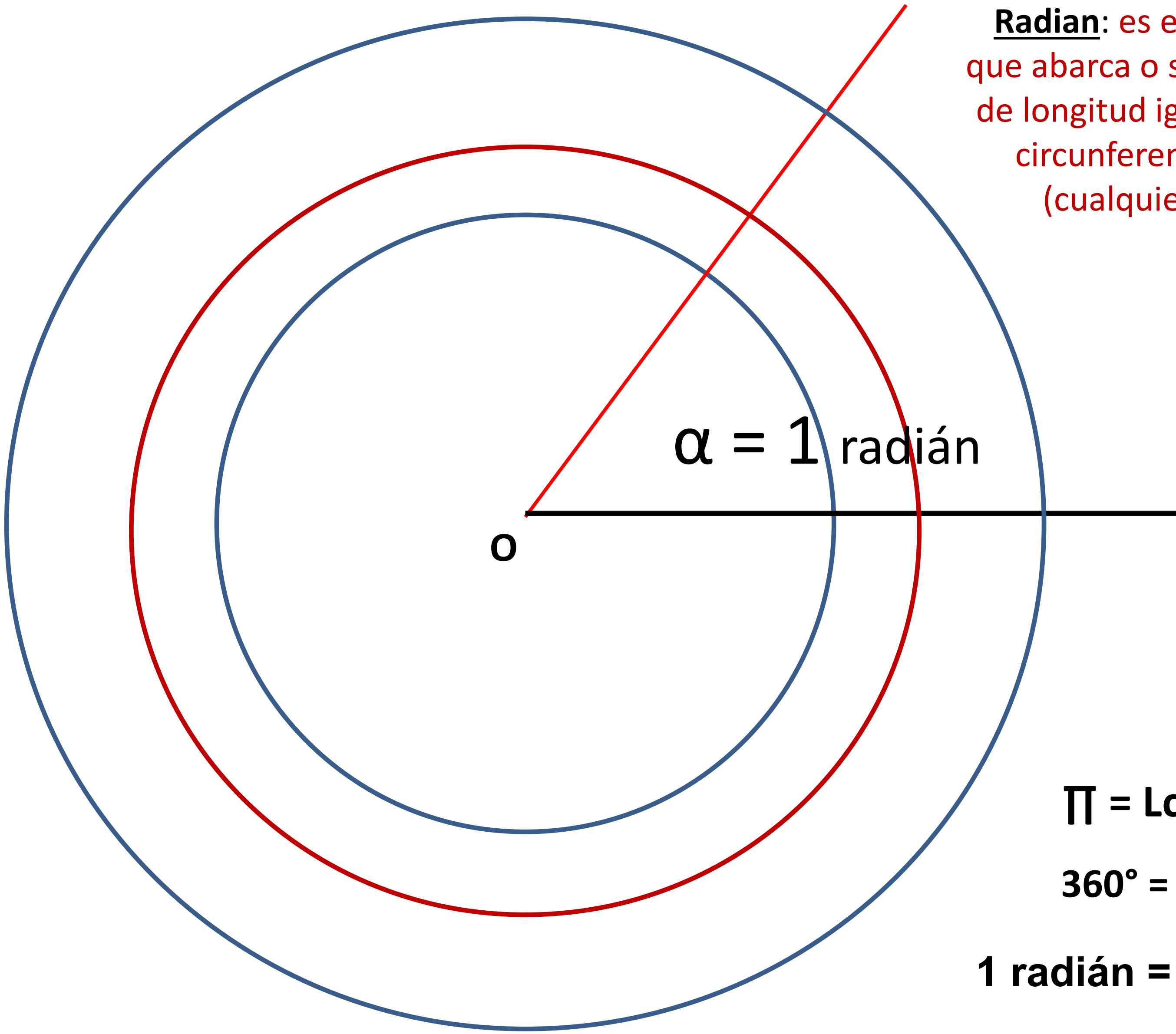
Como la igualdad señalada, se cumple para cualquier circunferencia, nos encontramos con una propiedad geométrica:



Siempre que el **arco = r ,** el ángulo central ∝ tiene el mismo valor.

Definimos entonces:

Radian: es el ángulo central que abarca o subtiende un arco de longitud igual al radio de la circunferencia respectiva (cualquiera sea esta).



∏ = Lc / diámetro

360° = 2 ∏ radianes

1 radián = 57° 17´ 44,8´´

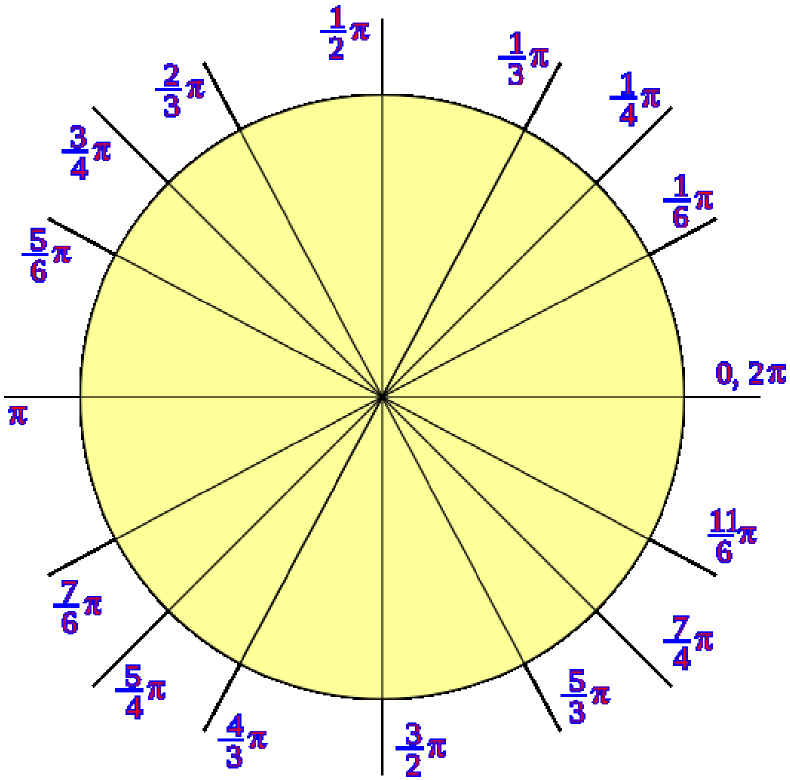
Respecto de la medición de ángulos se puede decir que, el uso de los clásicos “grados sexagesimales”, impuestos por la costumbre, si bien son arbitrarios como los “grados centesimales”, pueden ser utilizados en expresiones y planteos trigonométricos puros.

Pero cuando, como se verá mas adelante, en una misma expresión o en una función, el valor de la variable “x” puede significar a la vez un número real cualquiera y también un ángulo, éstos se deberán expresar exclusivamente en “radianes”.

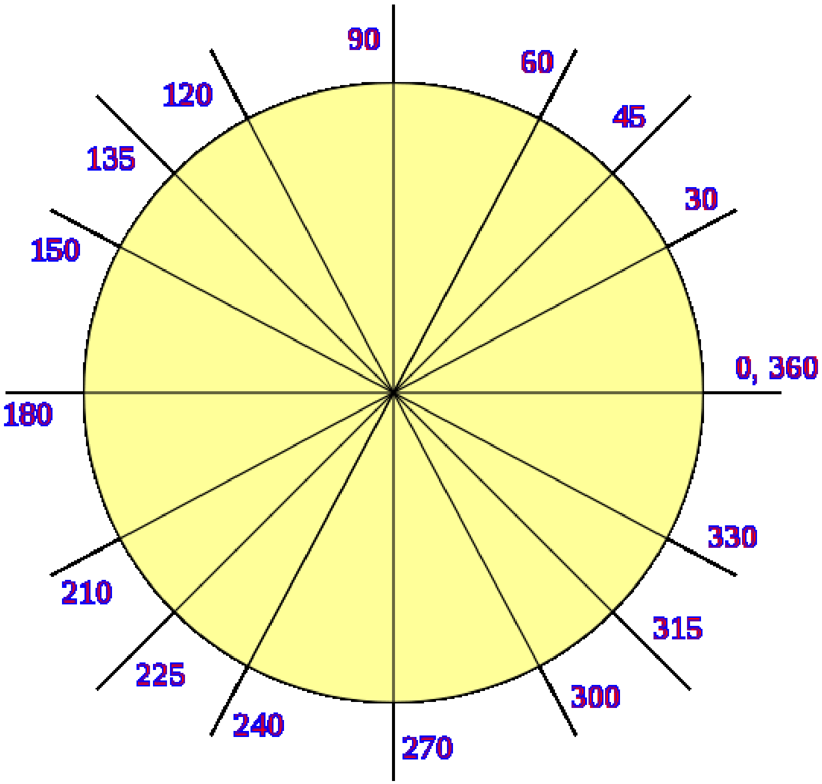
Debemos señalar que es común dar el valor de ángulos en radianes, como fracciones del número “π”.

Si tenemos en cuenta que los 360° de la circunferencia completa se corresponden con el valor “2π”, entonces:

$$360° = 2\pi \text{ radianes}$$
$$180° = \pi \text{ radianes,}$$
$$90° = \pi/2$$
$$45° = \pi/4, \text{ etc.}$$

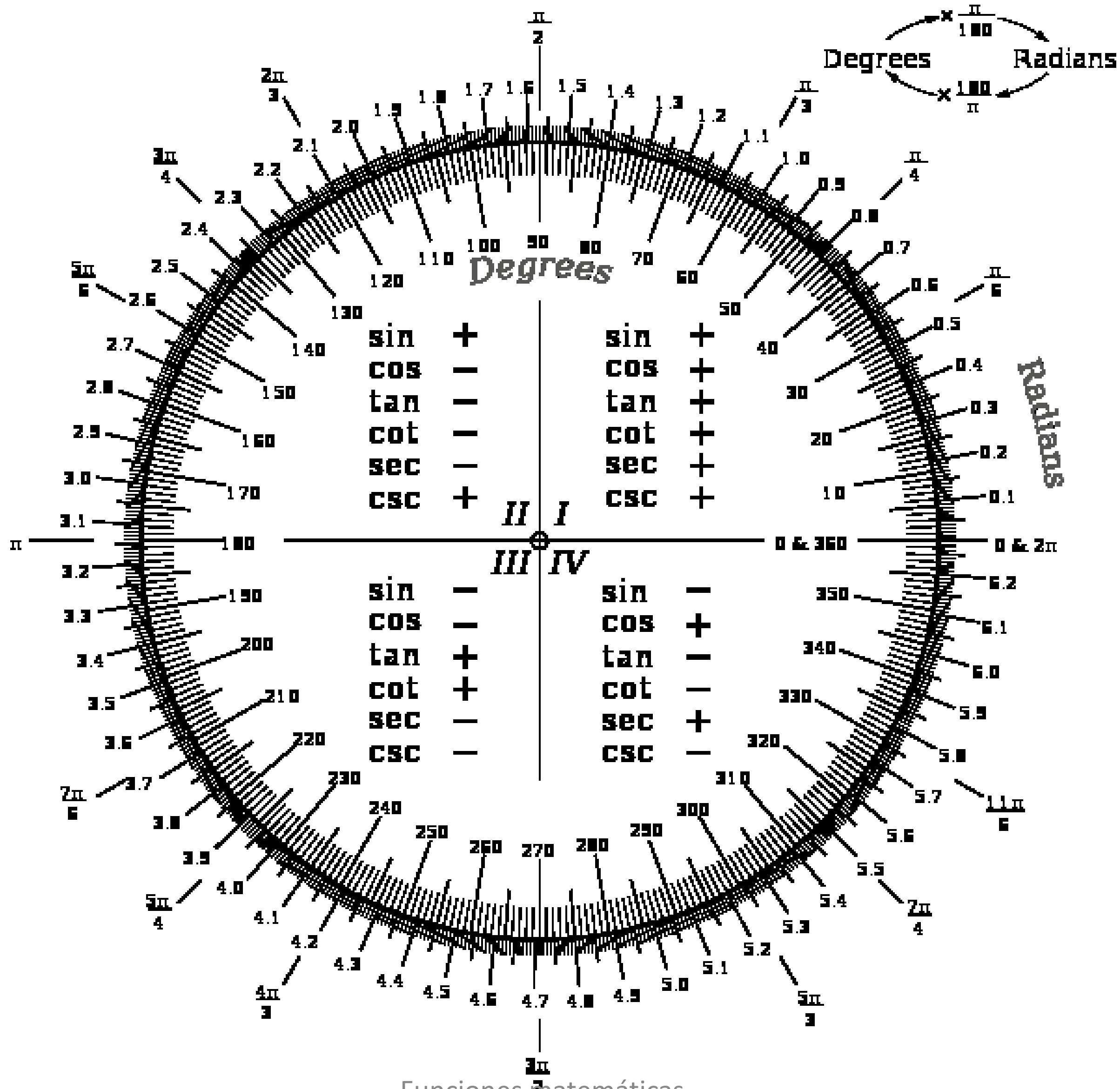


Circunferencia dividida en ángulos notables, indicados en radianes como fracciones de π.



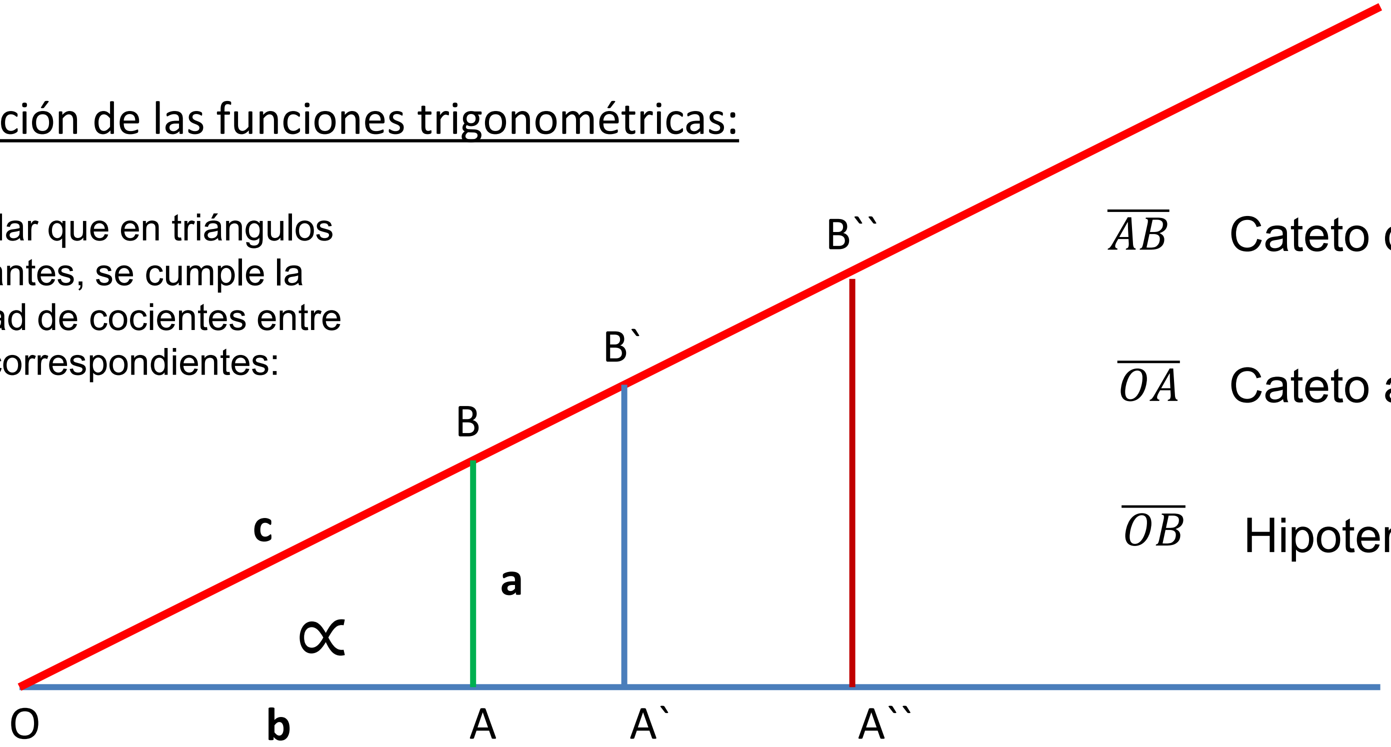
Ahora los mismos ángulos notables están indicados en grados sexagesimales.

Correspondencia entre grados y radianes. Signos de las funciones trigonométricas.



Definición de las funciones trigonométricas:

Recordar que en triángulos semejantes, se cumple la Igualdad de cocientes entre lados correspondientes:



$\overline{AB}$ Cateto opuesto

$\overline{OA}$ Cateto adyacente

$\overline{OB}$ Hipotenusa

Seno $\propto = \dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$

Coseno $\propto = \dfrac{cateto\ adyacente}{hipótenusa}$

Tangente $\propto = \dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$

Cotangente $\propto = \dfrac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$

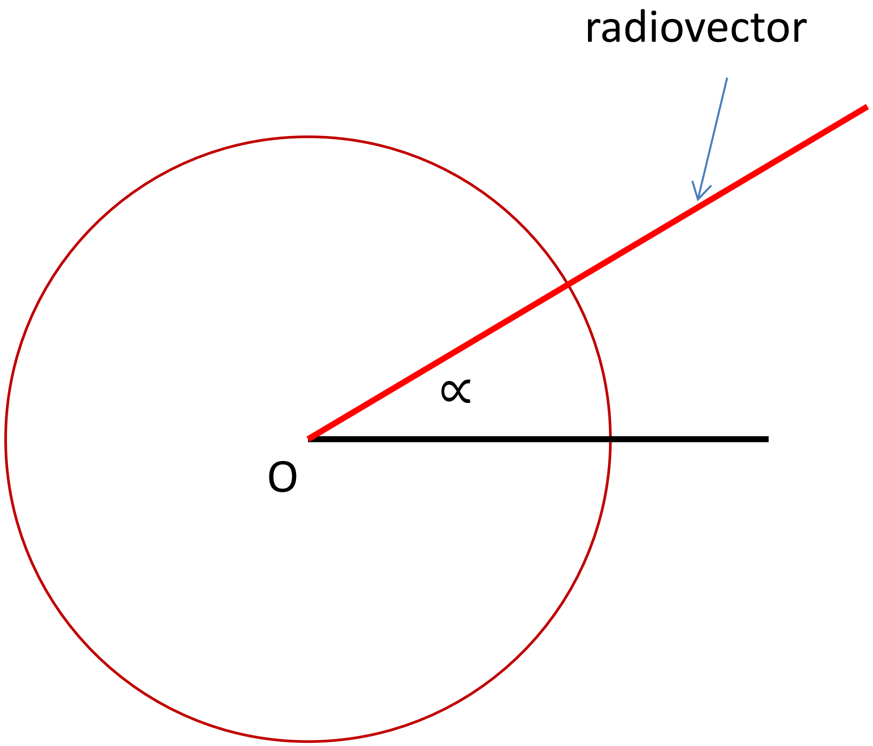
Secante $\propto = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$

Cosecante $\propto = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$

Circunferencia trigonométrica.

En una circunferencia de centro “O” y radio arbitrariamente igual a “1” , se toma como referencia una semirrecta horizontal con origen en “O”. En sentido antihorario (positivo) se hace girar el “radiovector” que determina un ángulo central cualquiera “$\propto$ “.

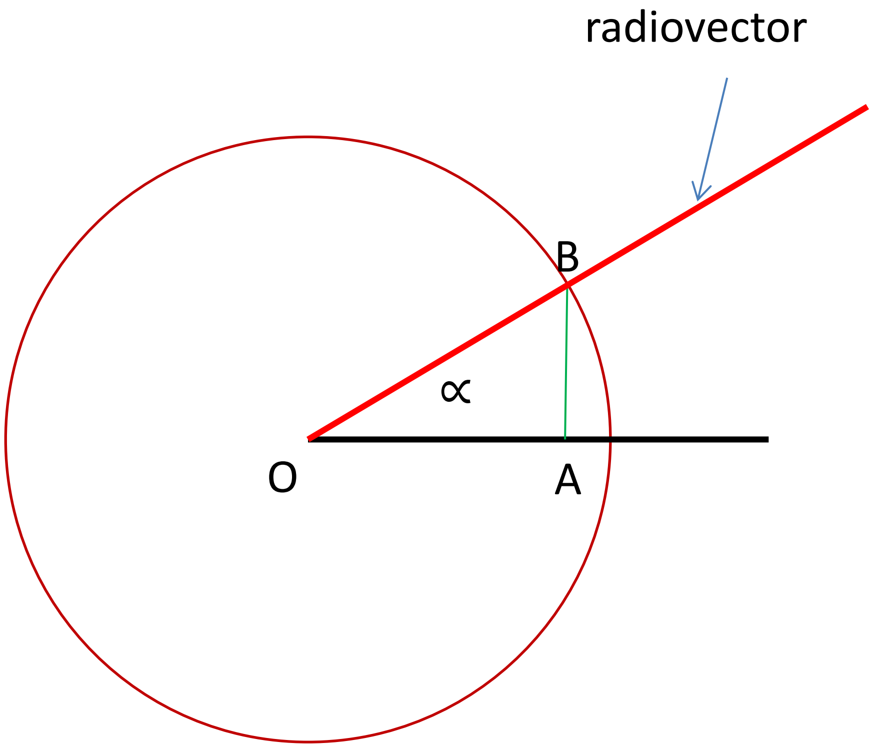
Aplicaremos las definiciones anteriores teniendo en cuenta, en todos los casos, que el denominador respectivo sea precisamente el radio de valor “1”



Circunferencia trigonométrica.

En una circunferencia de centro “O” y radio arbitrariamente igual a “1” , se toma como referencia una semirrecta horizontal con origen en “O”. En sentido antihorario (positivo) se hace girar el “radiovector” que determina un ángulo central cualquiera “$\propto$ “.

Aplicaremos las definiciones anteriores teniendo en cuenta, en todos los casos, que el denominador respectivo sea precisamente el radio de valor “1”



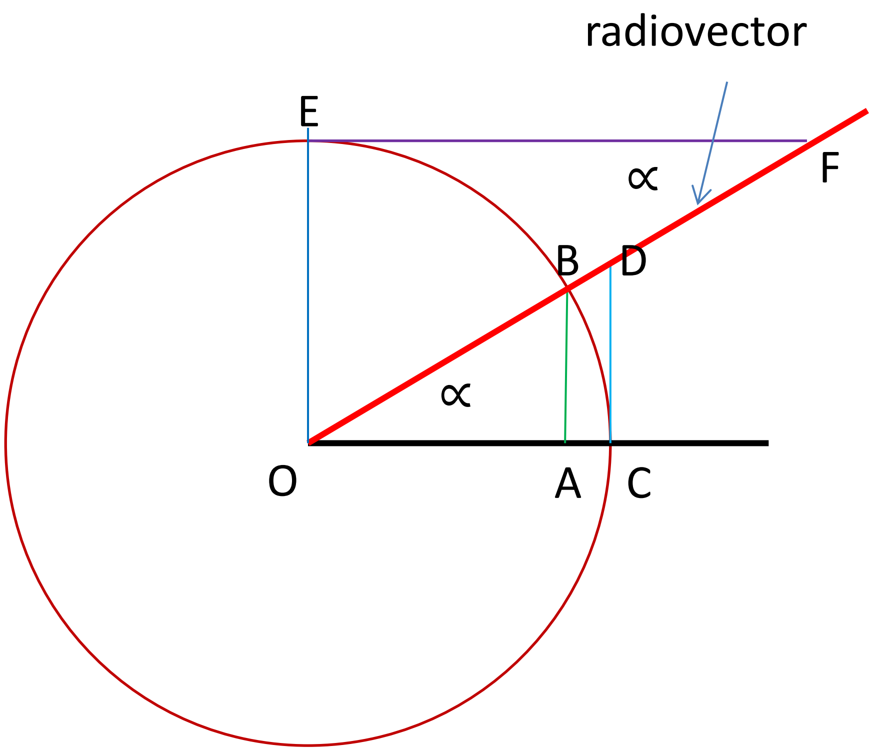
Seno $\propto$ = medida de $\overline{AB}$

Coseno $\propto$ = medida de $\overline{OA}$

<u>Circunferencia trigonométrica</u>.

En una circunferencia de centro "O" y radio arbitrariamente igual a "1" , se toma como referencia una semirrecta horizontal con origen en "O". En sentido antihorario (positivo) se hace girar el "radiovector" que determina un ángulo central cualquiera "$\propto$ ".

Aplicaremos las definiciones anteriores teniendo en cuenta, en todos los casos, que el denominador respectivo sea precisamente el radio de valor "1"



Seno $\propto$ = medida de $\overline{AB}$

Coseno $\propto$ = medida de $\overline{OA}$

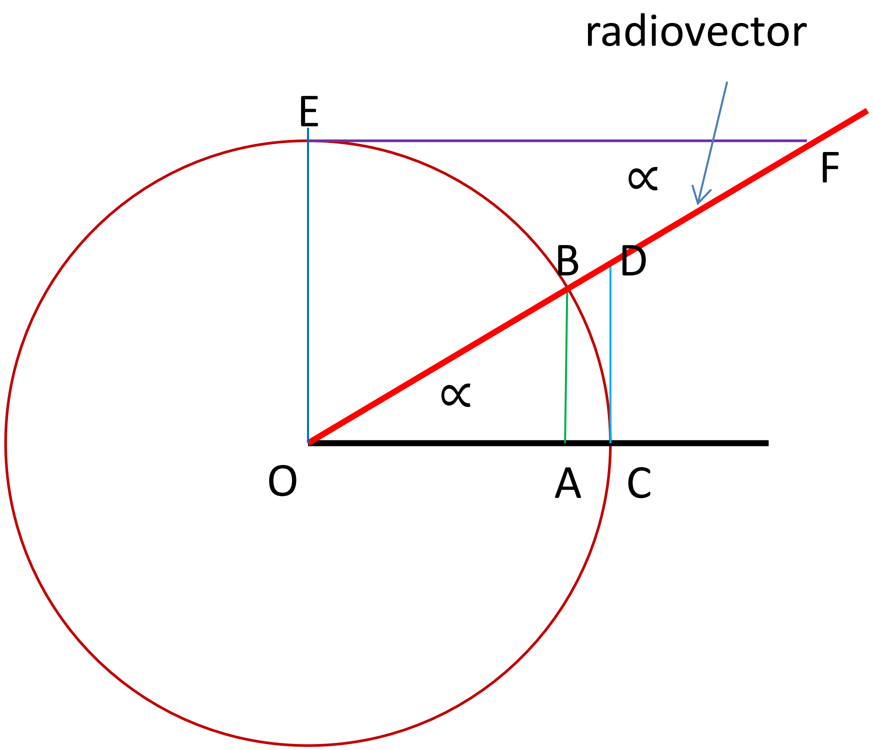
Tangente $\propto$ = medida de $\overline{CD}$

Cotangente $\propto$ = medida de $\overline{EF}$

Circunferencia trigonométrica.

En una circunferencia de centro "O" y radio arbitrariamente igual a "1" , se toma como referencia una semirrecta horizontal con origen en "O". En sentido antihorario (positivo) se hace girar el "radiovector" que determina un ángulo central cualquiera "$\propto$ ".

Aplicaremos las definiciones anteriores teniendo en cuenta, en todos los casos, que el denominador respectivo sea precisamente el radio de valor "1"



Seno $\propto$ = medida de $\overline{AB}$

Coseno $\propto$ = medida de $\overline{OA}$

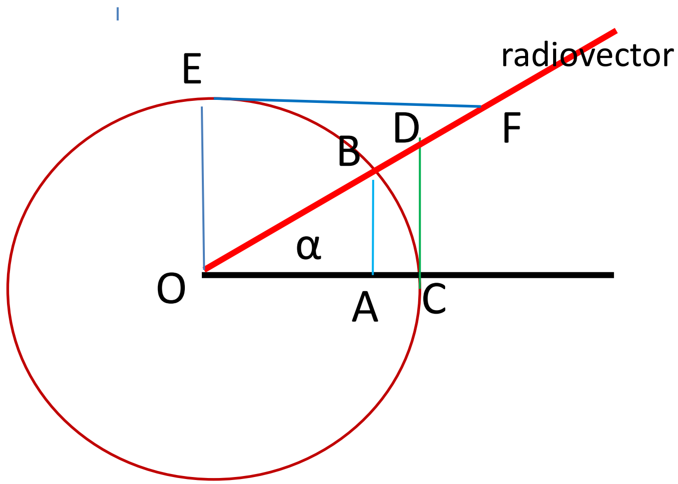
Tangente $\propto$ = medida de $\overline{CD}$

Cotangente $\propto$ = medida de $\overline{EF}$

Secante $\propto$ = medida de $\overline{OD}$

Cosecante $\propto$ = medida de $\overline{OF}$

En la circunferencia trigonométrica se han definido tres triángulos rectángulos, a cada uno de los cuales se le puede aplicar el “teorema de Pitágoras”:



1 . Triángulo OAB : $sen^2 x + cos^2 x = 1$

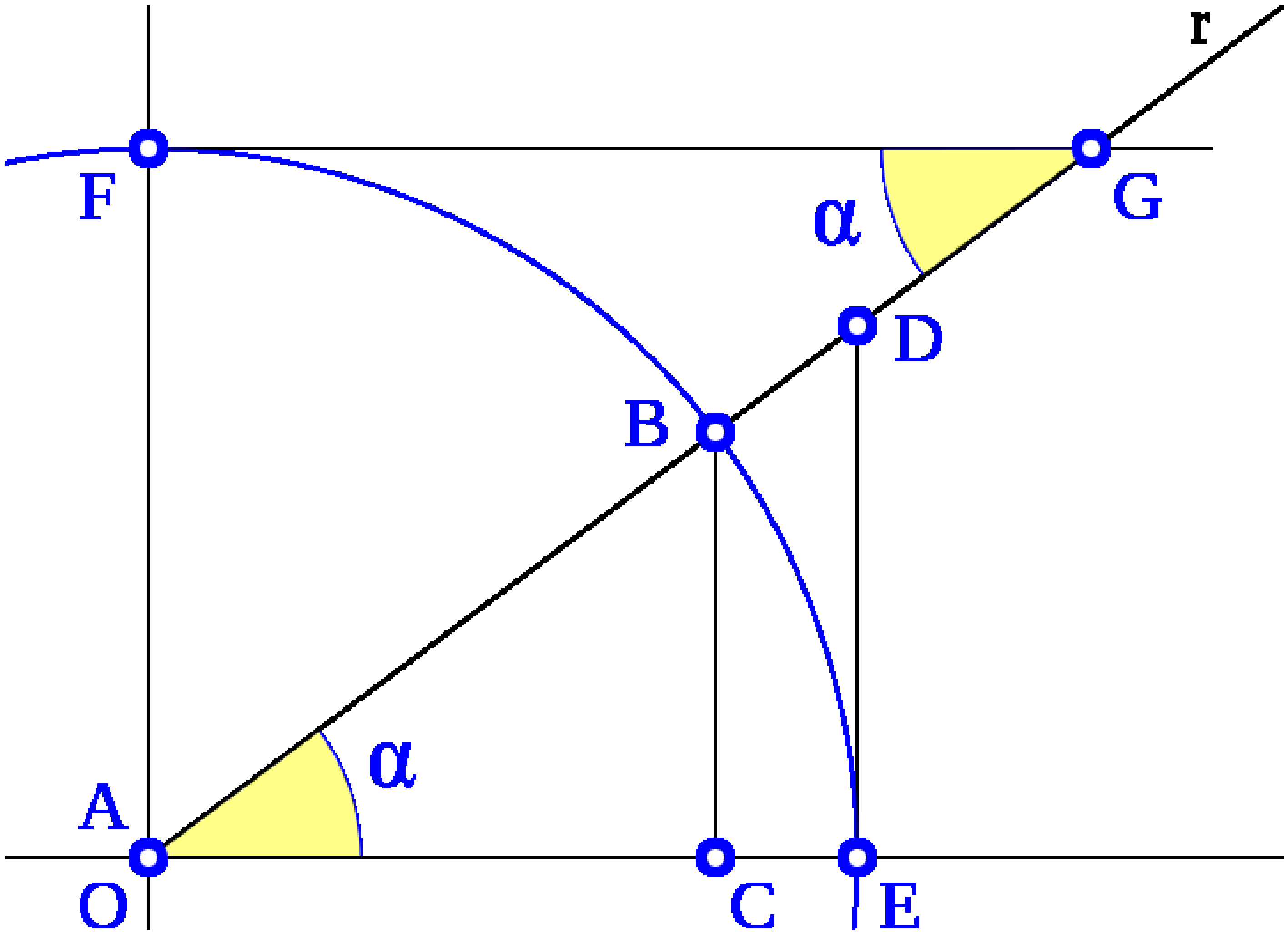
2 . Triángulo OCD : $1 + tg^2 x = sec^2 x$

3. Triángulo OEF : $1 + ctg^2 x = cosec^2 x$

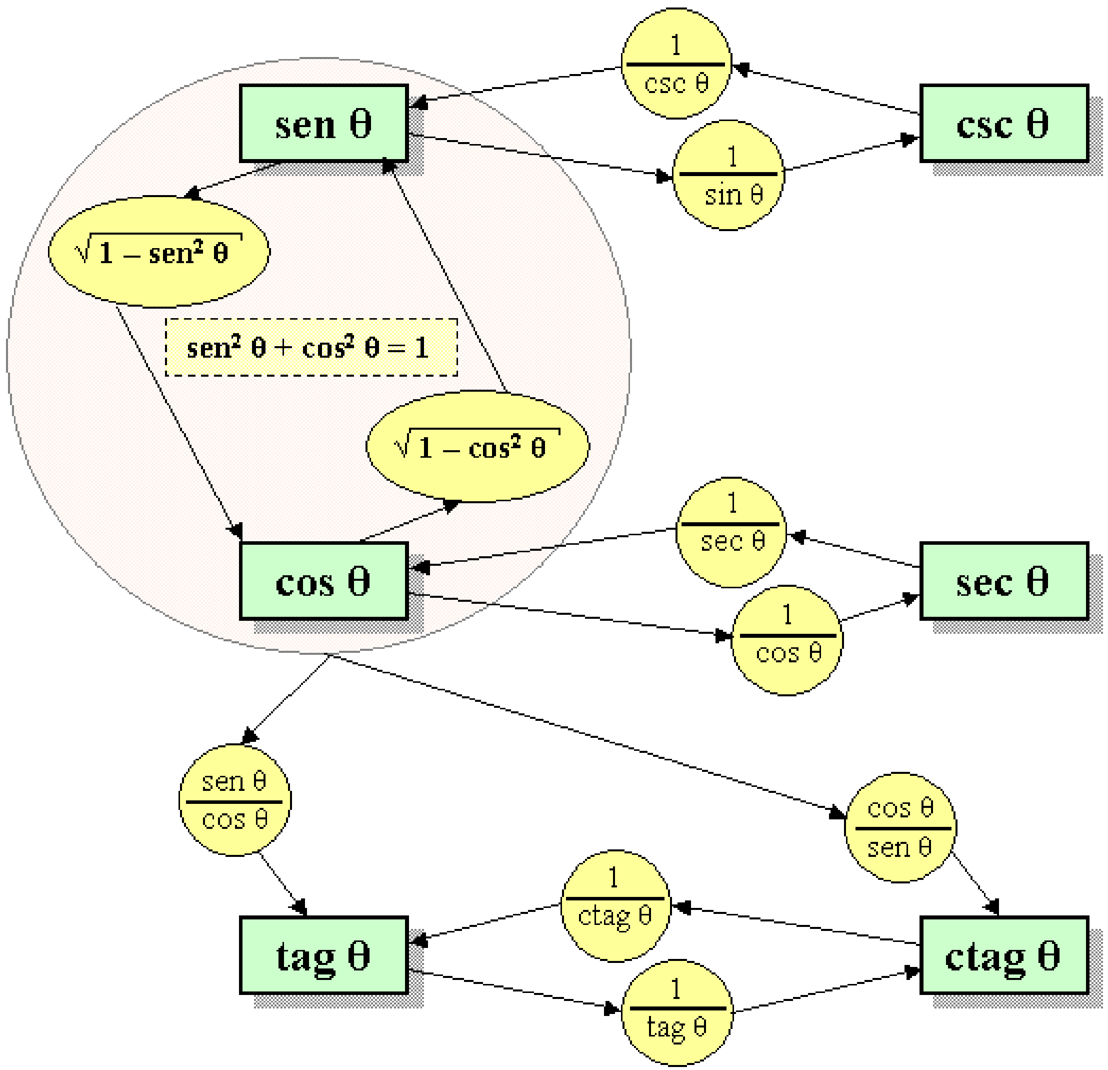
Además se puede ver fácilmente que: $$\frac{sen\ x}{\cos x} = \frac{AB/OB}{OA/OB} = \frac{AB}{OA} = \mathrm{tg\ x}$$

Resulta destacable el hecho de que teniendo en cuenta las tres expresiones Pitagóricas, junto con las definiciones fundamentales vistas y esta última relación, por simple trasposición algebraica y reemplazos, puede expresarse cualquiera de las funciones trigonométricas en función de otra dada.

Circunferencia trigonométrica para discutir el tema:



Resúmen de algunas relaciones trigonométricas



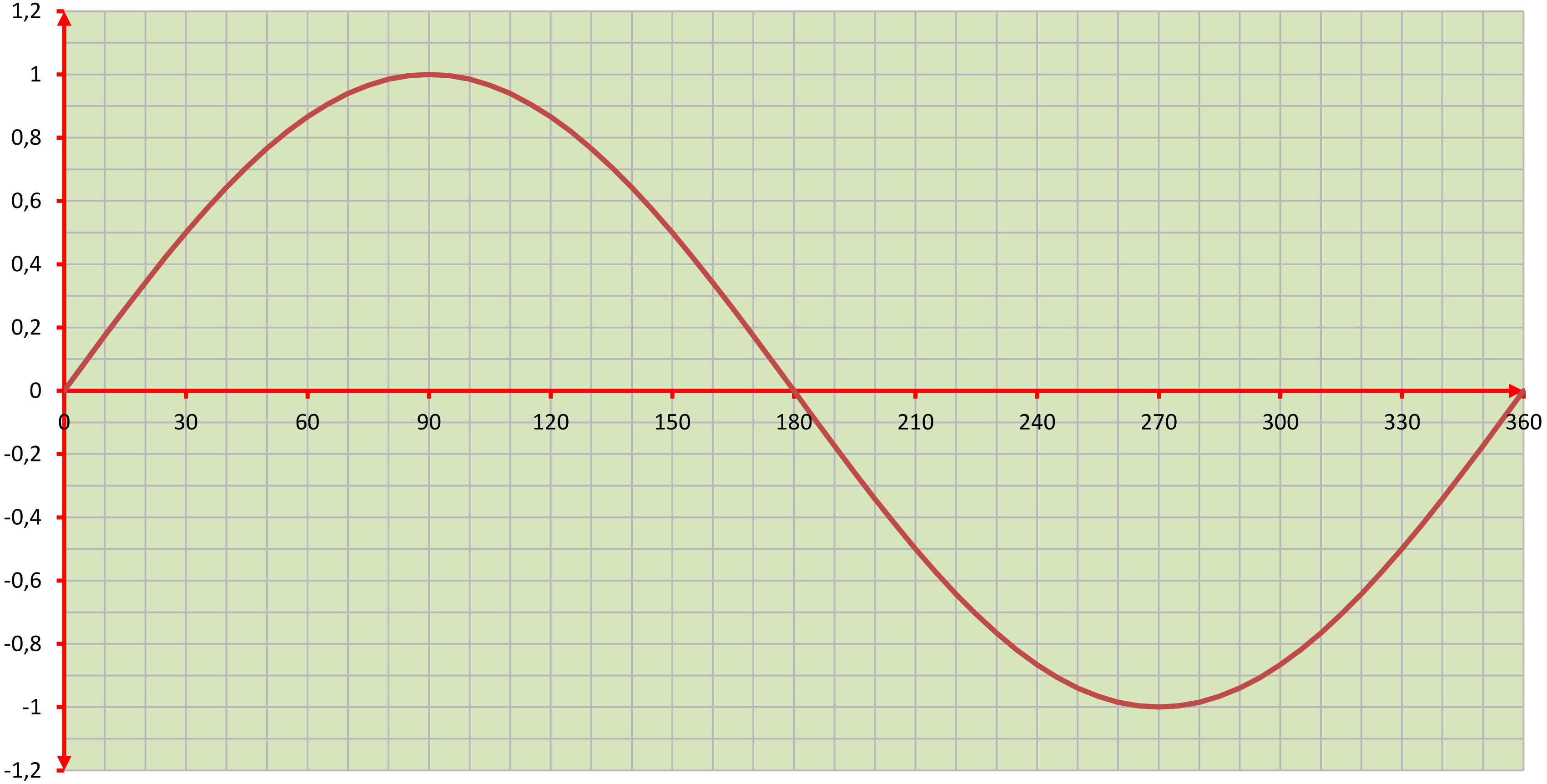
11 – Funciones Trigonométricas o circulares.

y = sen x ; y = cos x ; y = tg x ;

y = ctg x ; y = sec x ; y = cosec x

Se representarán las funciones seno y coseno en un mismo gráfico. La variable independiente se toma en este caso en grados sexagesimales. Aunque el dominio de estas funciones es “todos los reales”, tomamos solo un período (0° - 360°).

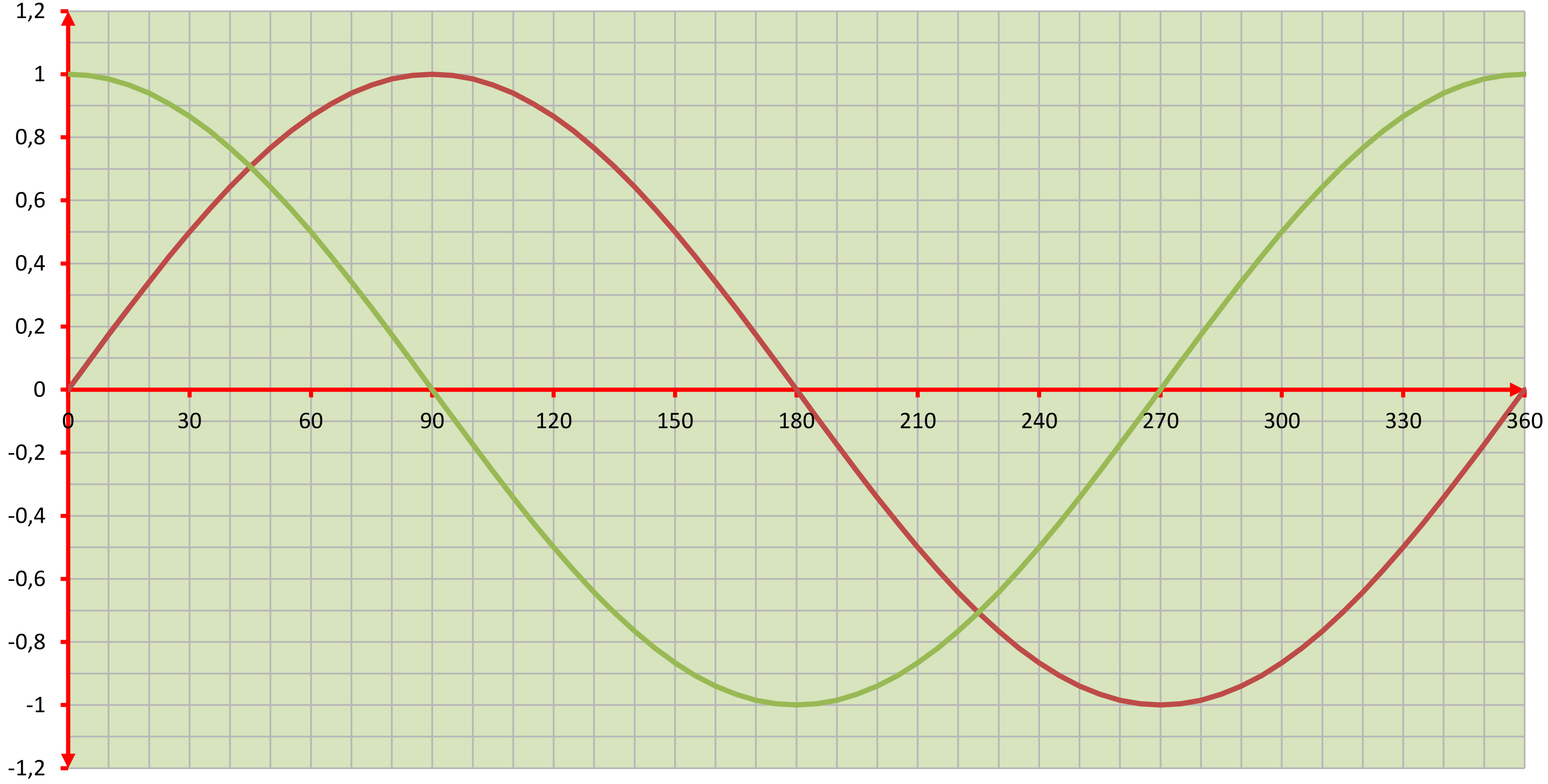
Función $y = \text{sen } x$ (marrón)



Se representarán las funciones seno y coseno en un mismo gráfico. La variable independiente se toma en este caso en grados sexagesimales. Aunque el dominio de estas funciones es “todos los reales”, tomamos solo un período (0° - 360°).

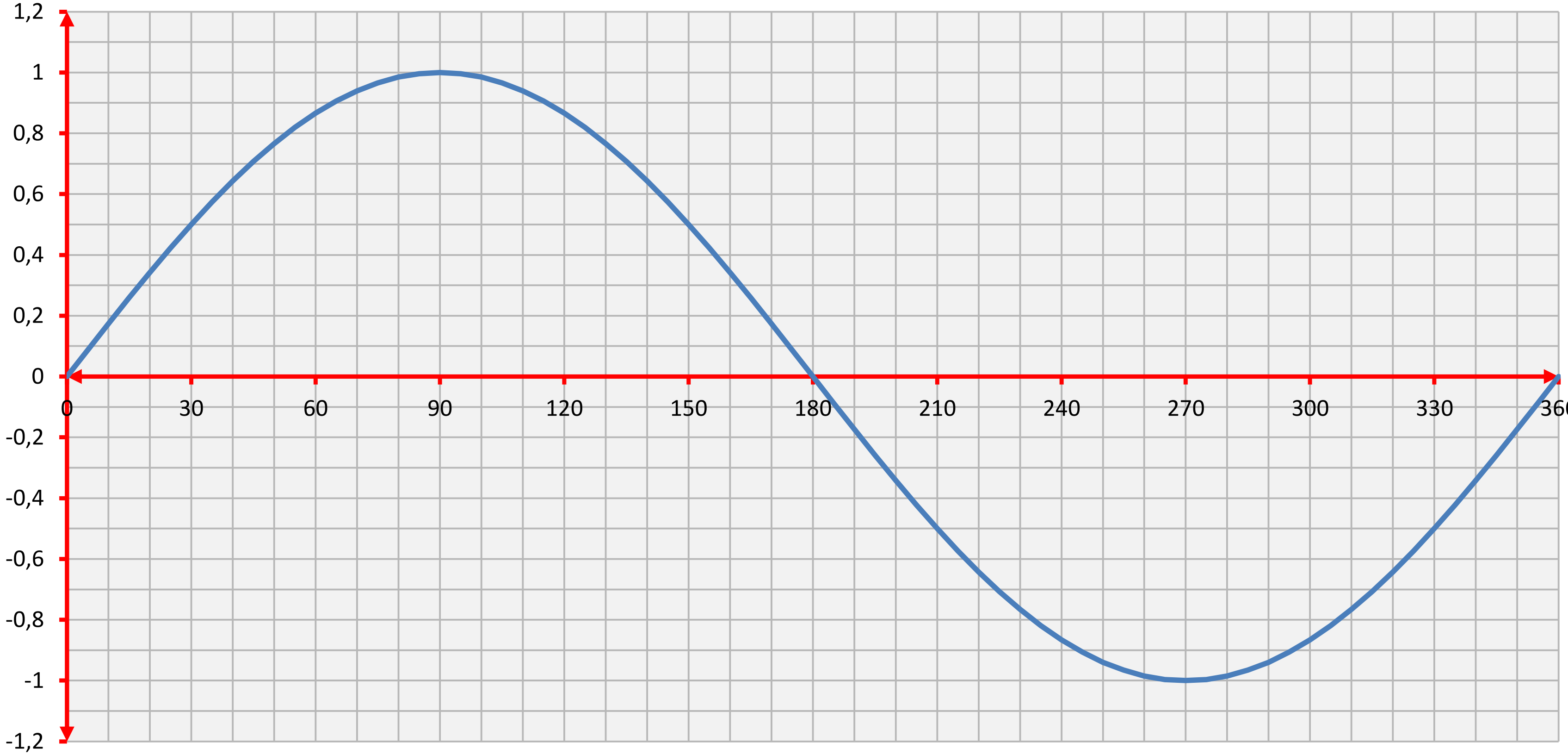
Función y = sen x (marrón)

Función y = cos x (verde)



Influencia del coeficiente “b”, en la función y = sen (b.x):

y = sen x (azul)



Influencia del coeficiente “b”, en la función y = sen (b.x):

y = sen x (azul)

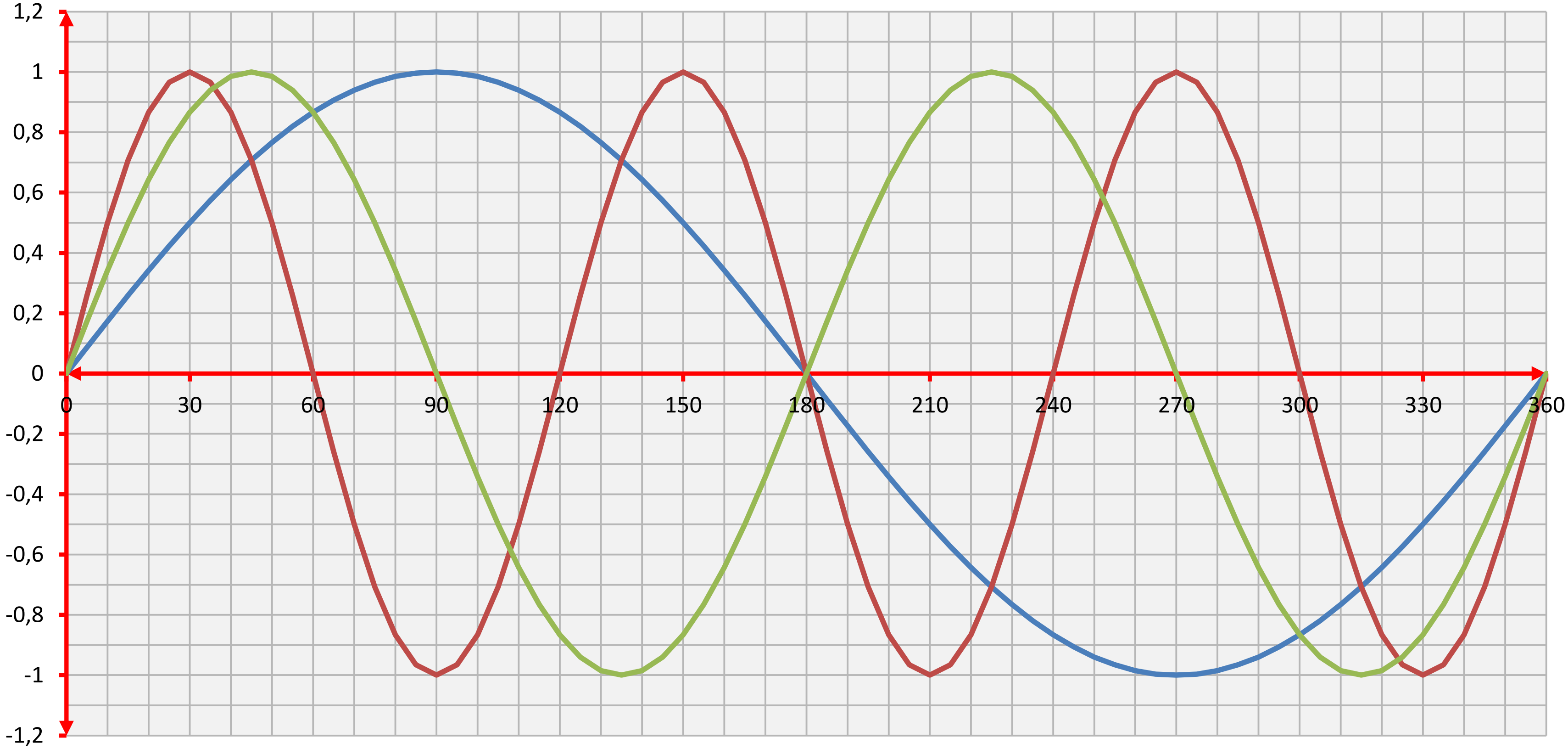
y = sen (2.x) (verde)

Influencia del coeficiente “b”, en la función y = sen (b.x):

y = sen x (azul)

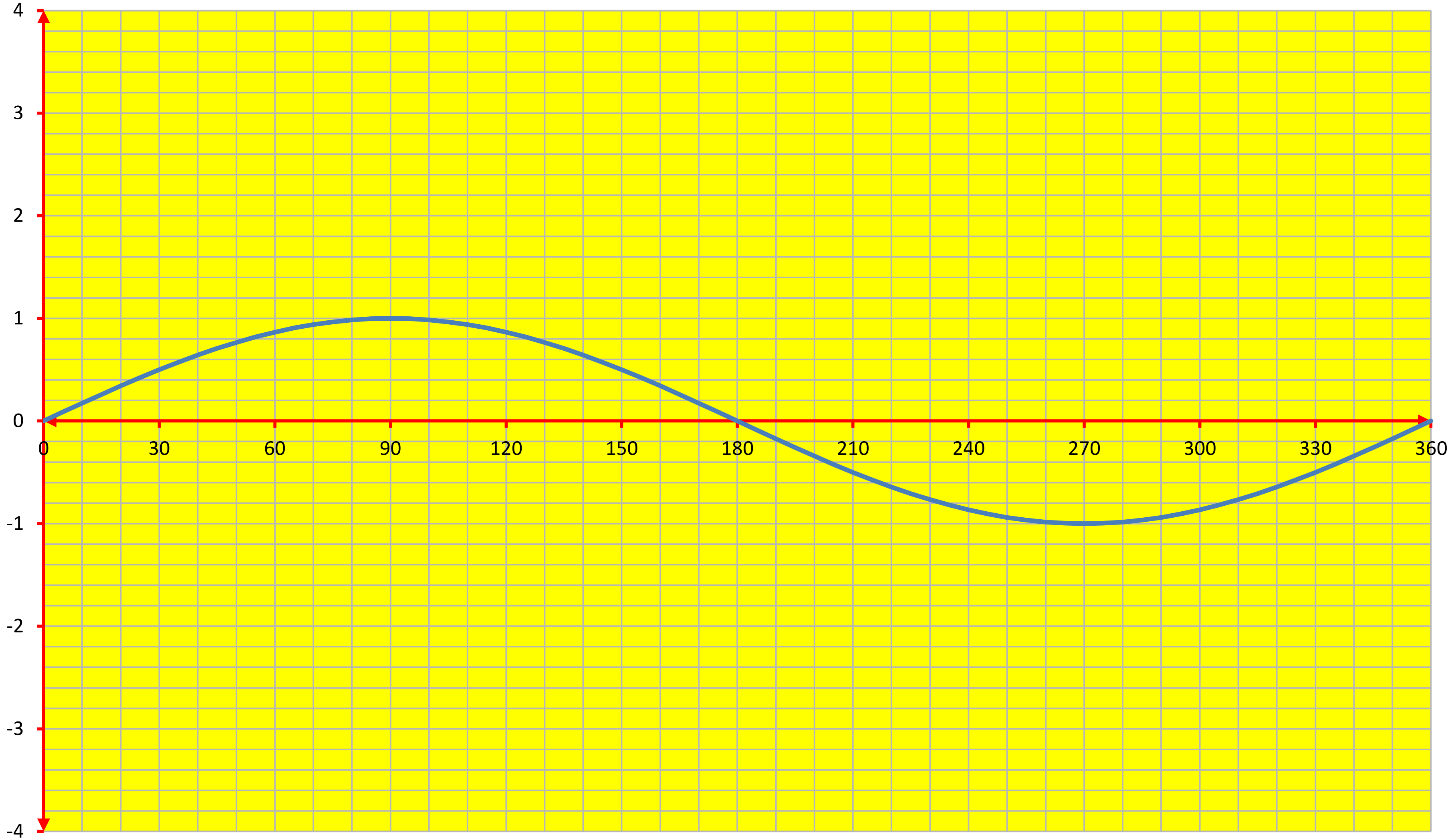
y = sen (2.x) (verde)

y = sen (3.x) (marrón)



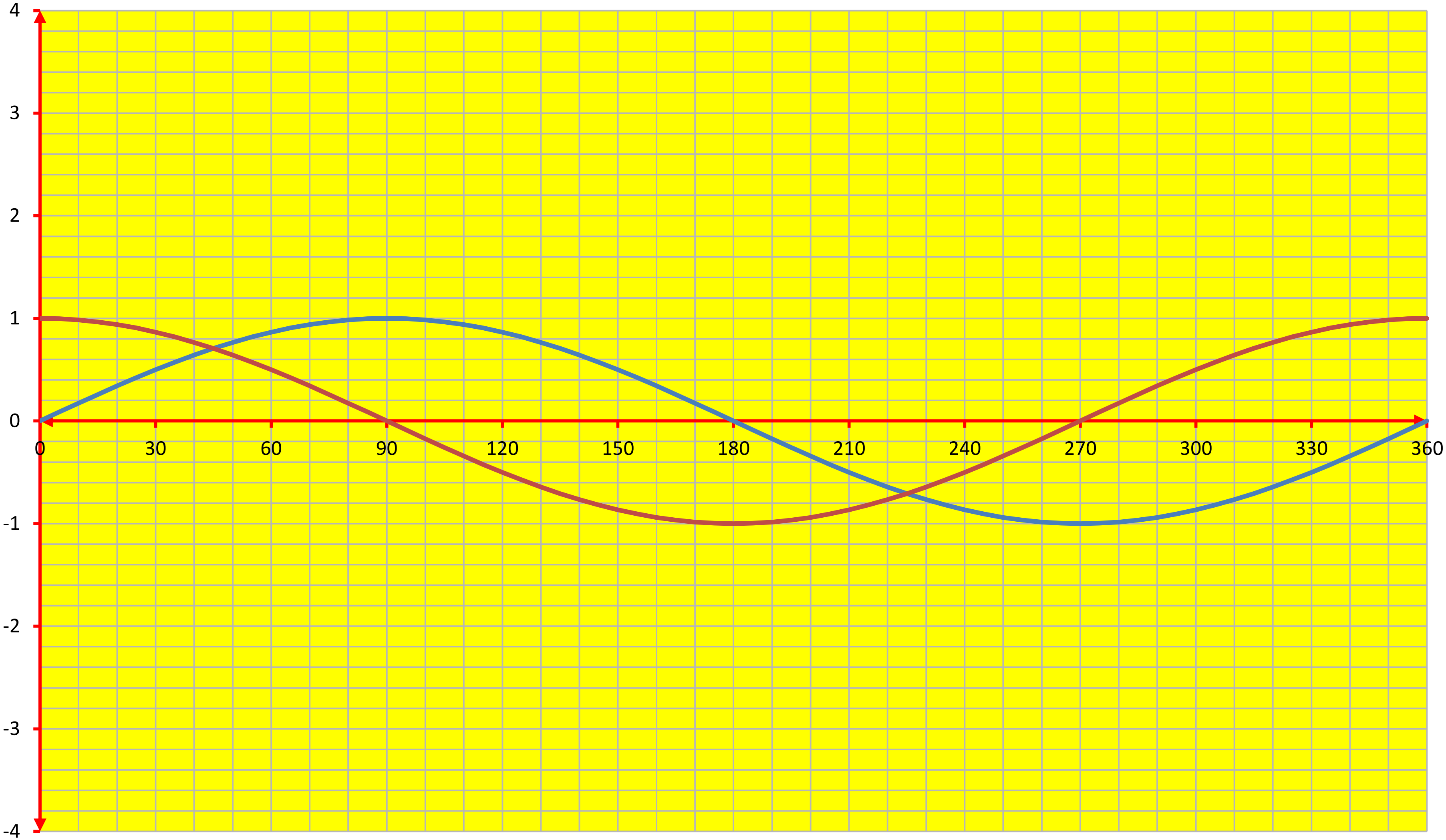
Todas las funciones trigonométricas – ángulos en grados

y = sen x (azul)



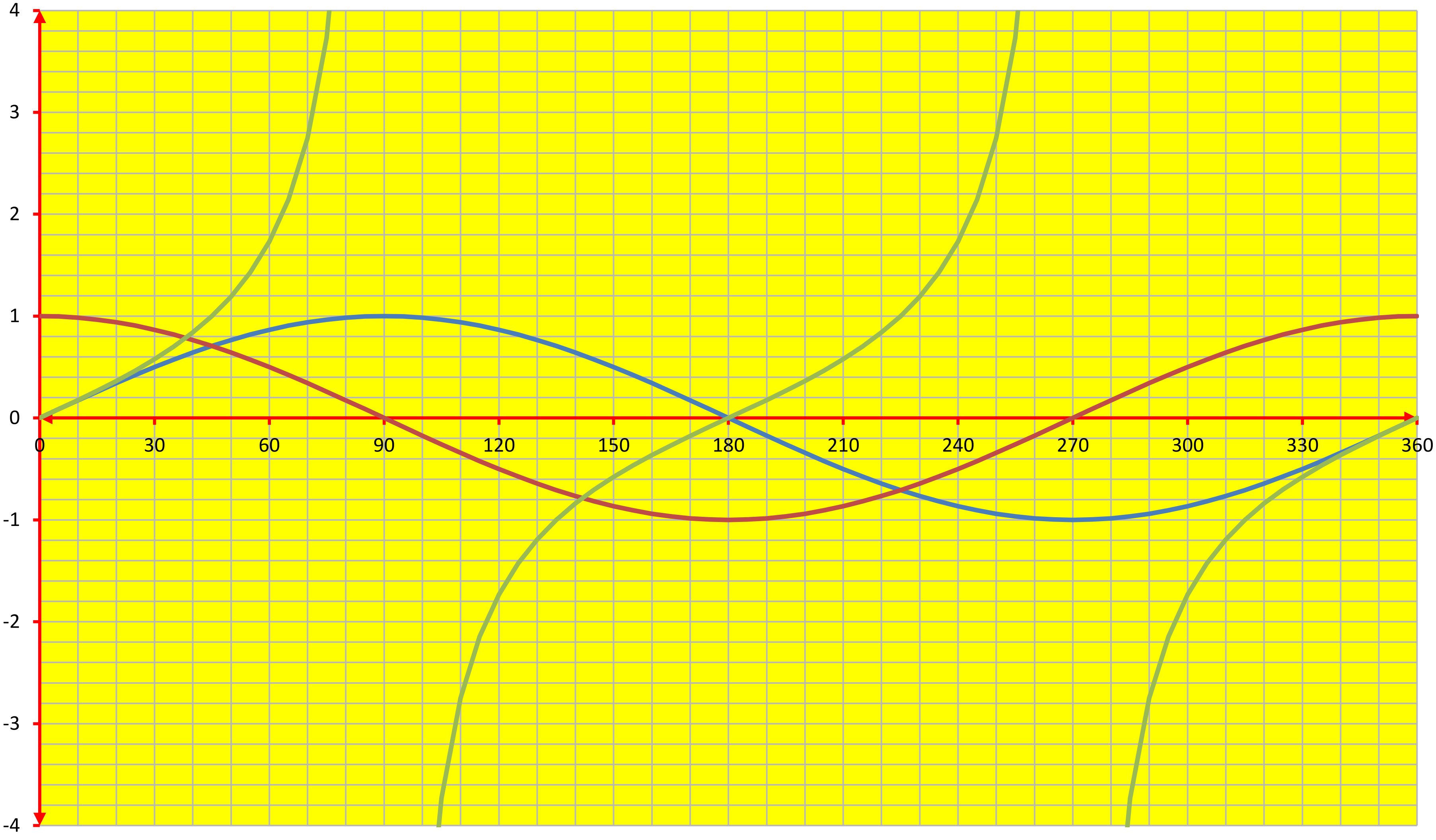
Todas las funciones trigonométricas – ángulos en grados

y = sen x (azul) ; y = cos x (marrón)



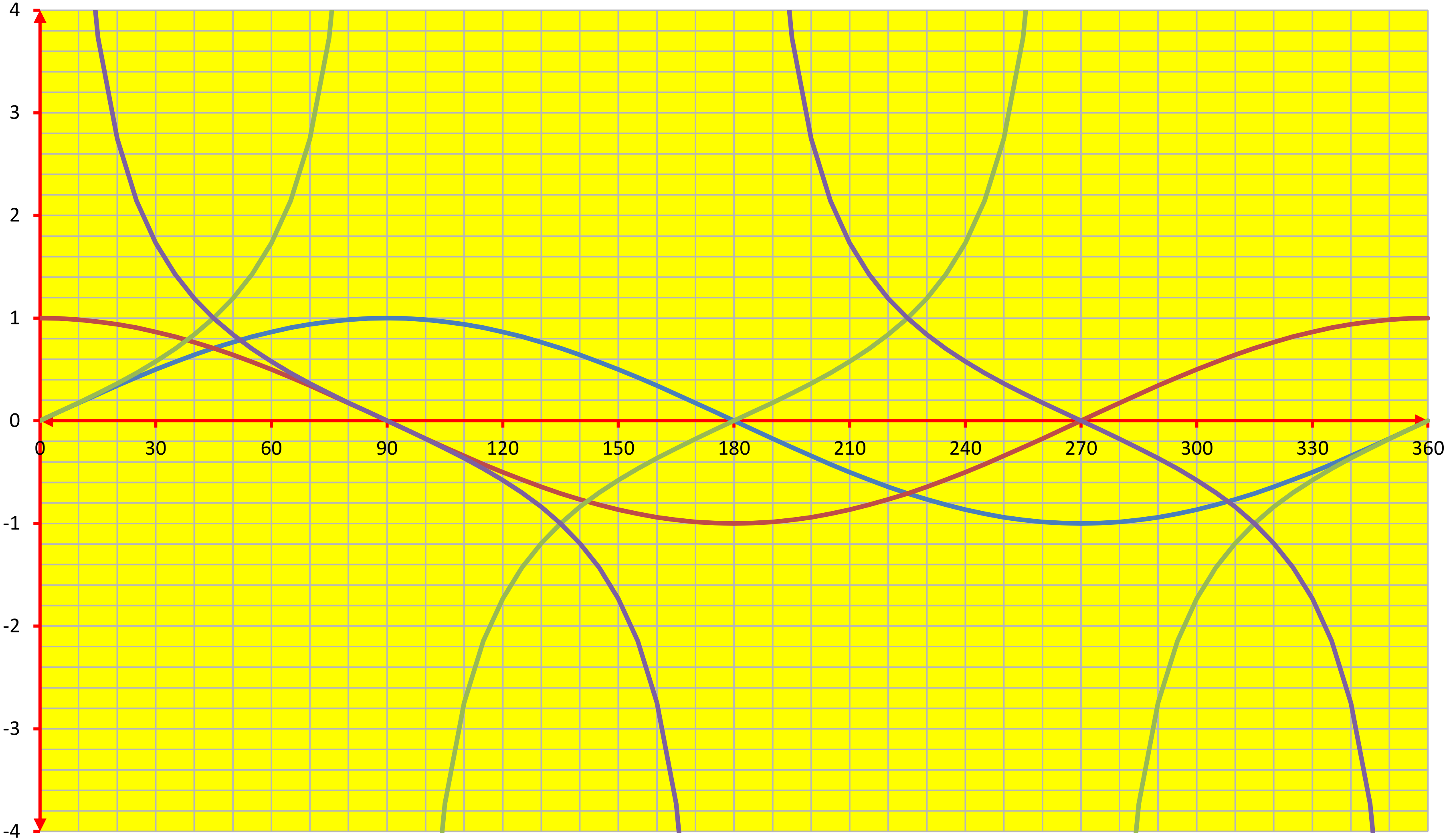
Todas las funciones trigonométricas – ángulos en grados

y = sen x (azul) ; y = cos x (marrón) ; y = tg x (verde)



Todas las funciones trigonométricas – ángulos en grados

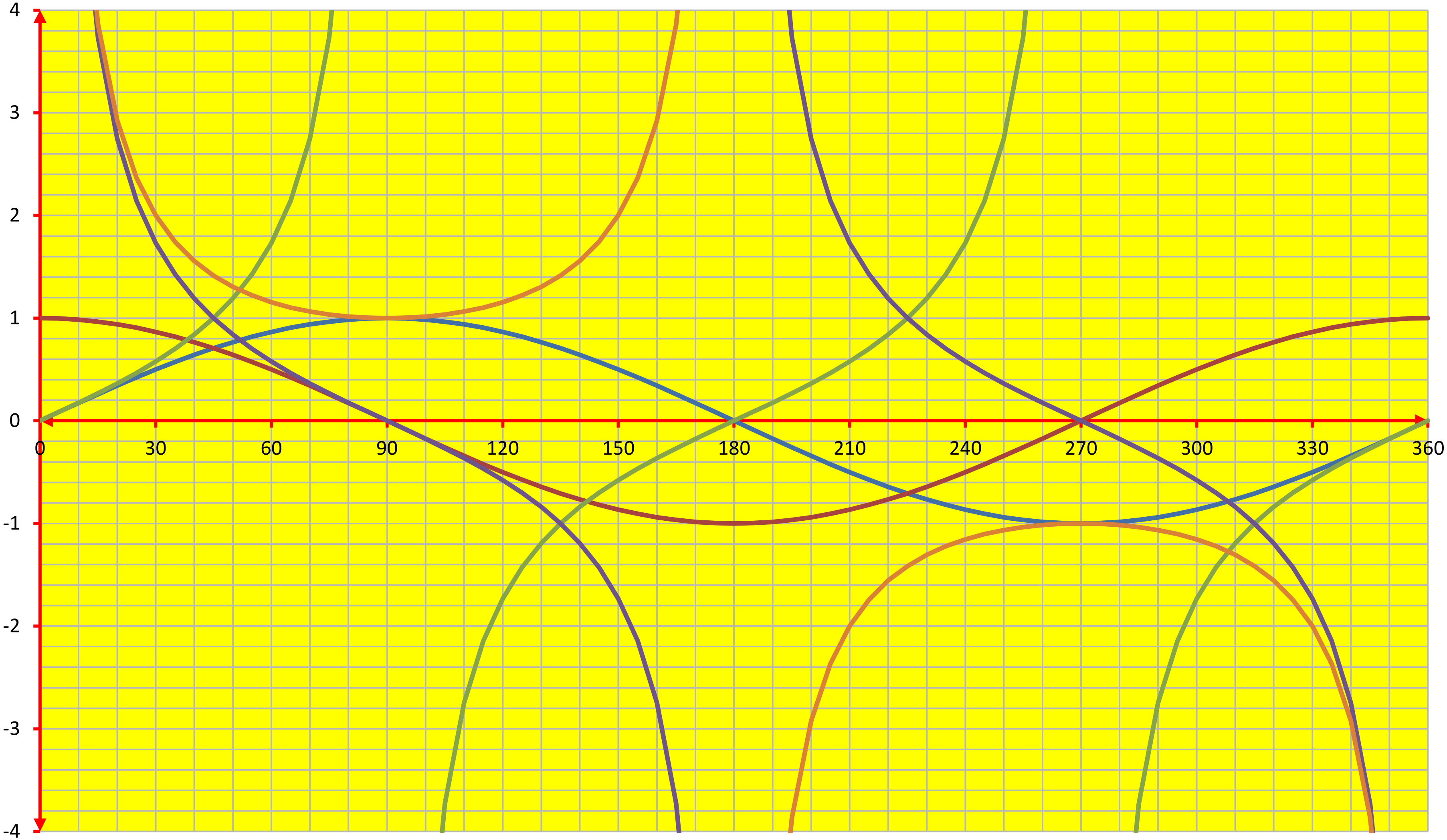
y = sen x (azul) ; y = cos x (marrón) ; y = tg x (verde)
y = ctg x (violeta)



Todas las funciones trigonométricas – ángulos en grados

y = sen x (azul) ; y = cos x (marrón) ; y = tg x (verde)

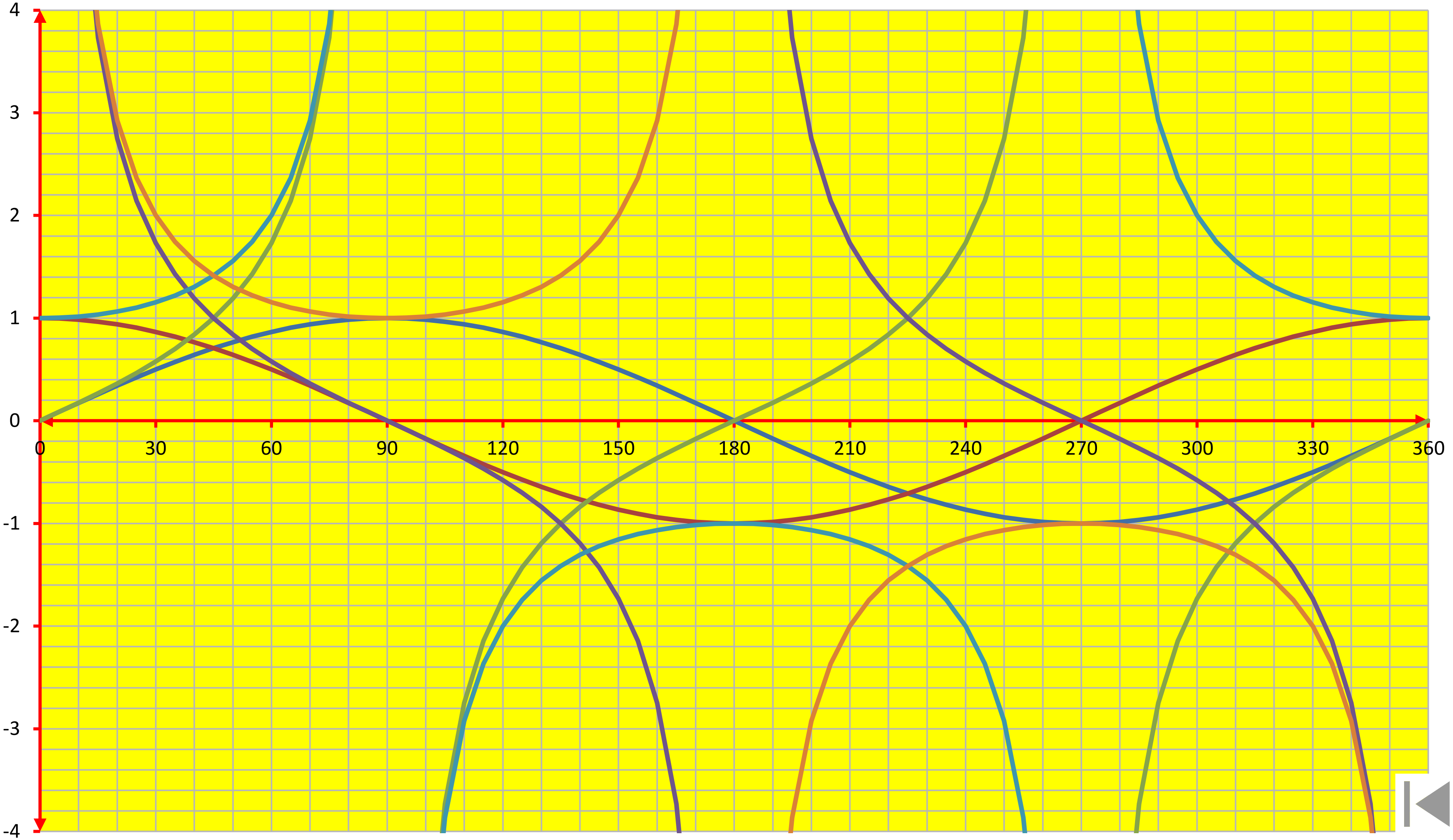
y = ctg x (violeta) ; y = cosec x (naranja)



Todas las funciones trigonométricas – ángulos en grados

y = sen x (azul) ; y = cos x (marrón) ; y = tg x (verde)

y = ctg x (violeta) ; y = cosec x (naranja) ; y = sec x (celeste)



12 – Funciones Trigonométricas Inversas o Cicloidales

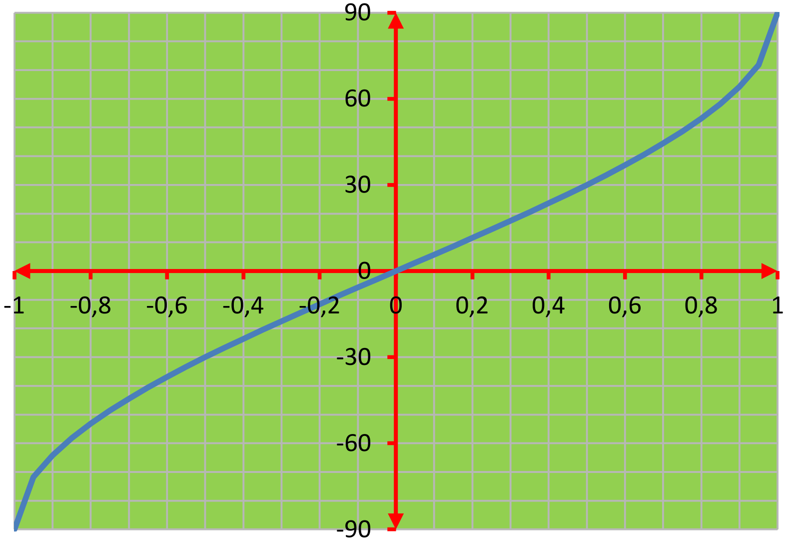
y = arc sen x ; ***y = arc cos x ;***

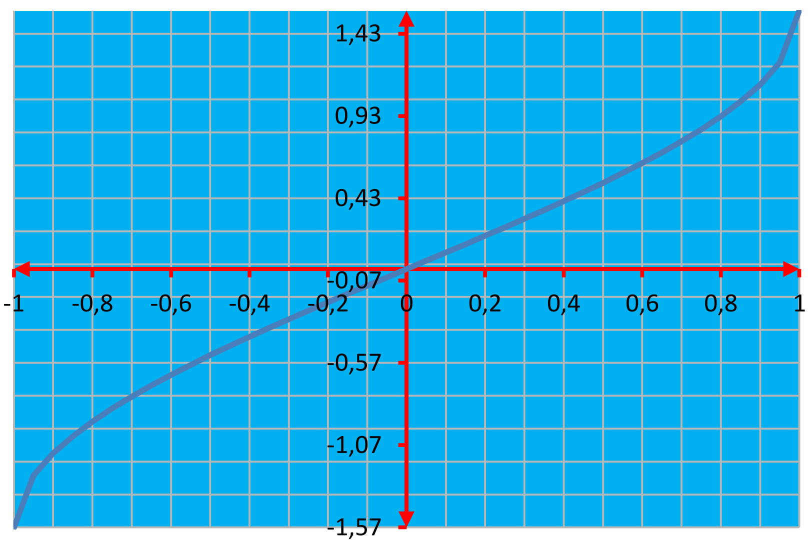
y = arc tg x

Para que la inversa de la función y = sen x, pueda ser considerada una función, se restringirá el valor de la variable independiente a: $-1 \leq x \leq 1$

La función es y = arc sen x , con dominio : [-1 ; 1]

Las dos versiones gráficas, solo difieren en que la variable dependiente está expresada en grados o radianes respectivamente:

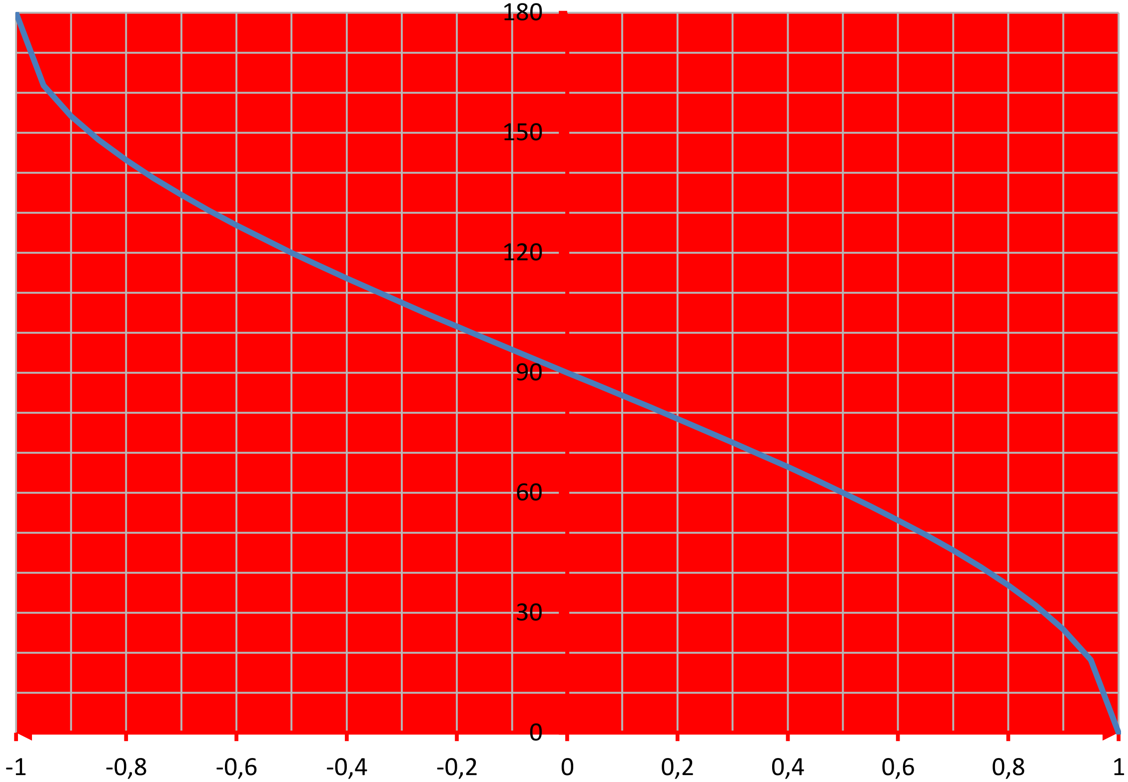




Por iguales razones, la función inversa del coseno, y = arc cos x tendrá un dominio [-1; 1]; por lo que también: $-1 \leq x \leq 1$.

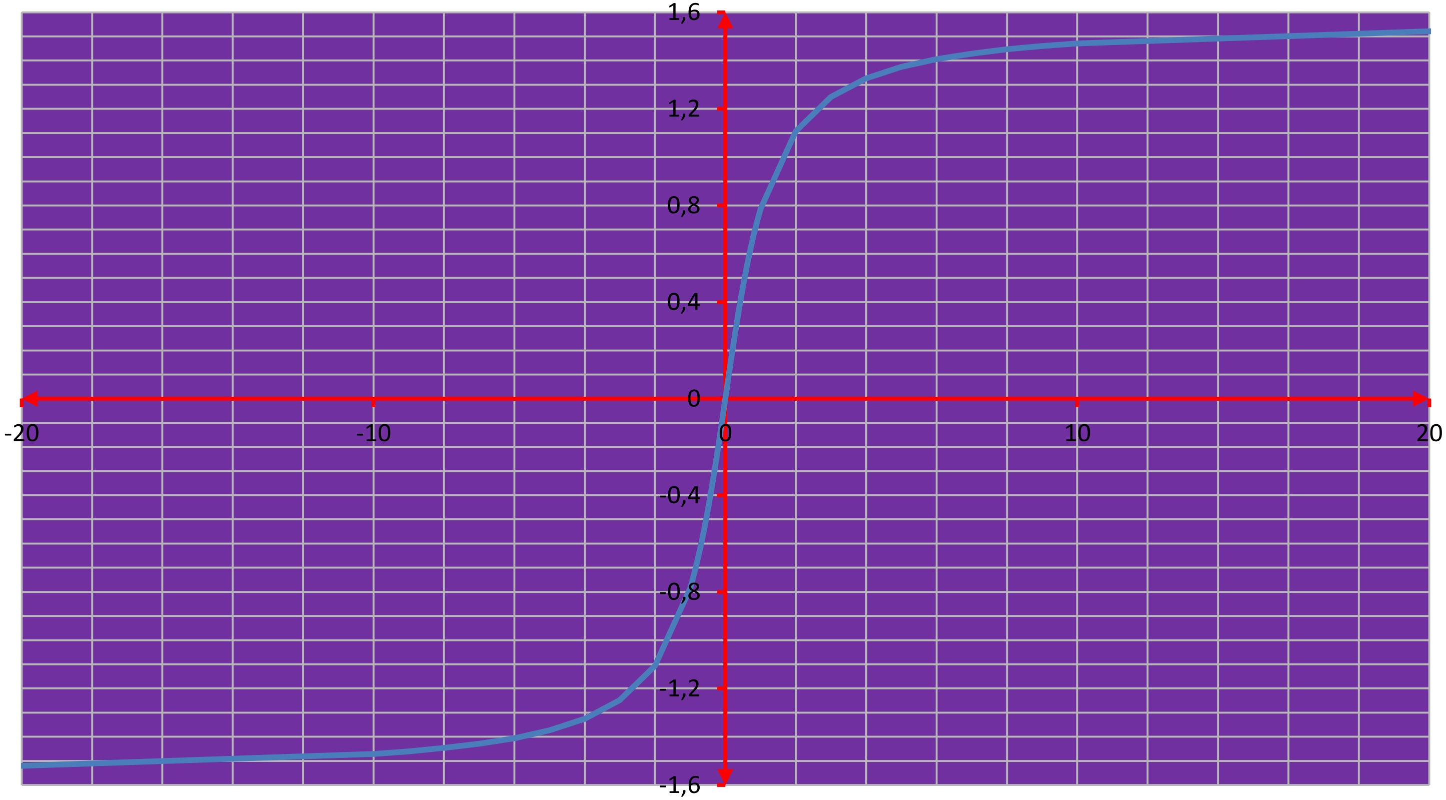
El codominio será en consecuencia : [0 ; 3,14]

Se muestra la gráfica solo en grados



Para la inversa de la tangente, el dominio serán todos los números reales, pero el codominio debe restringirse a: (-π/2 ; π/2):

Veamos el comportamiento de y = arc tg x , asignándole valores a "x" pero acotando el codominio al intervalo : $-90 \le y \le 90$ (en grados) o $-1{,}57 \le y \le 1{,}57$(en radianes).



13 – Funciones Hiperbólicas

y = sh x ; ***y = ch x ;*** ***y = th x ;***

y = cth x; ***y = sech x ;*** ***y = cosech x***

Por definición las funciones hiperbólicas se definen en base a las exponenciales e^x y e^{-x}:

y = (e^x- e^{-x}) / 2 = seno hiperbólico de x = sh x
y = (e^x+ e^{-x}) / 2 = coseno hiperbólico de x = ch x
Y = (e^x- e^{-x}) / (e^x+ e^{-x}) = sh x / ch x) = tangente hiperbólica de x = th x

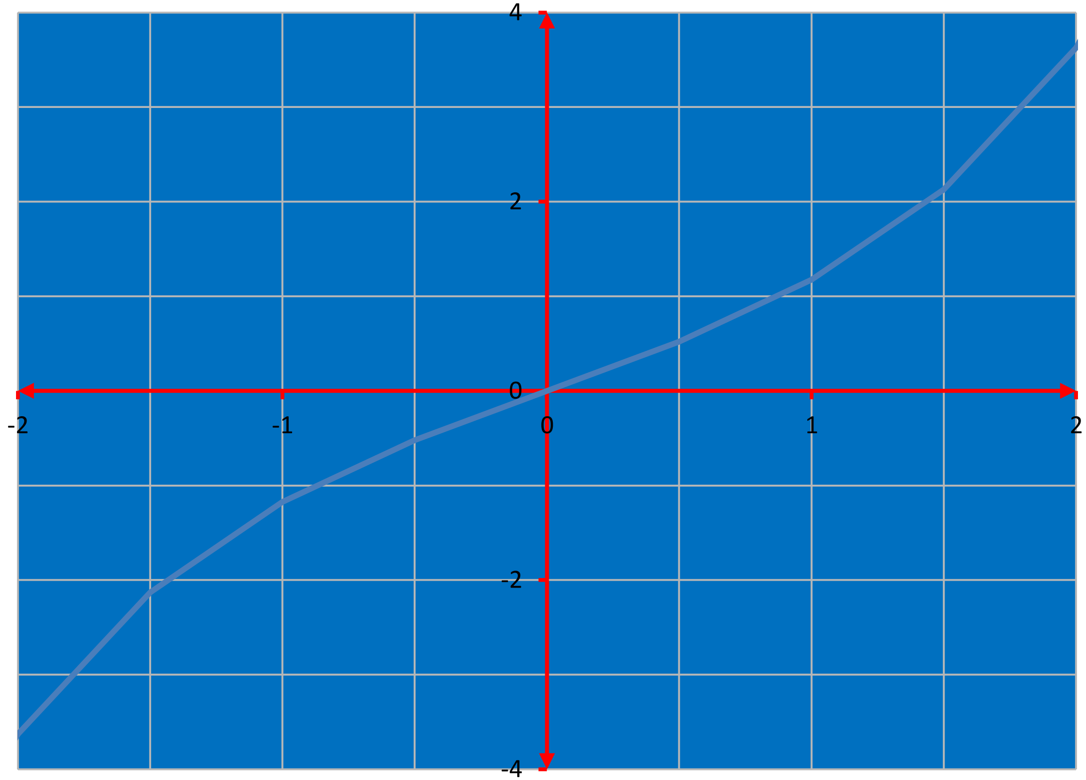
El dominio de todas, son los números reales.

Por definición las funciones hiperbólicas se definen en base a las exponenciales e^x y e^{-x}:

y = $(e^x - e^{-x})$ / 2 = seno hiperbólico de x = sh x
y = $(e^x + e^{-x})$ / 2 = coseno hiperbólico de x = ch x
Y = $(e^x - e^{-x})$ / $(e^x + e^{-x})$ = sh x / ch x) = tangente hiperbólica de x = th x

El dominio de todas, son los números reales.

y = sh x (azul)



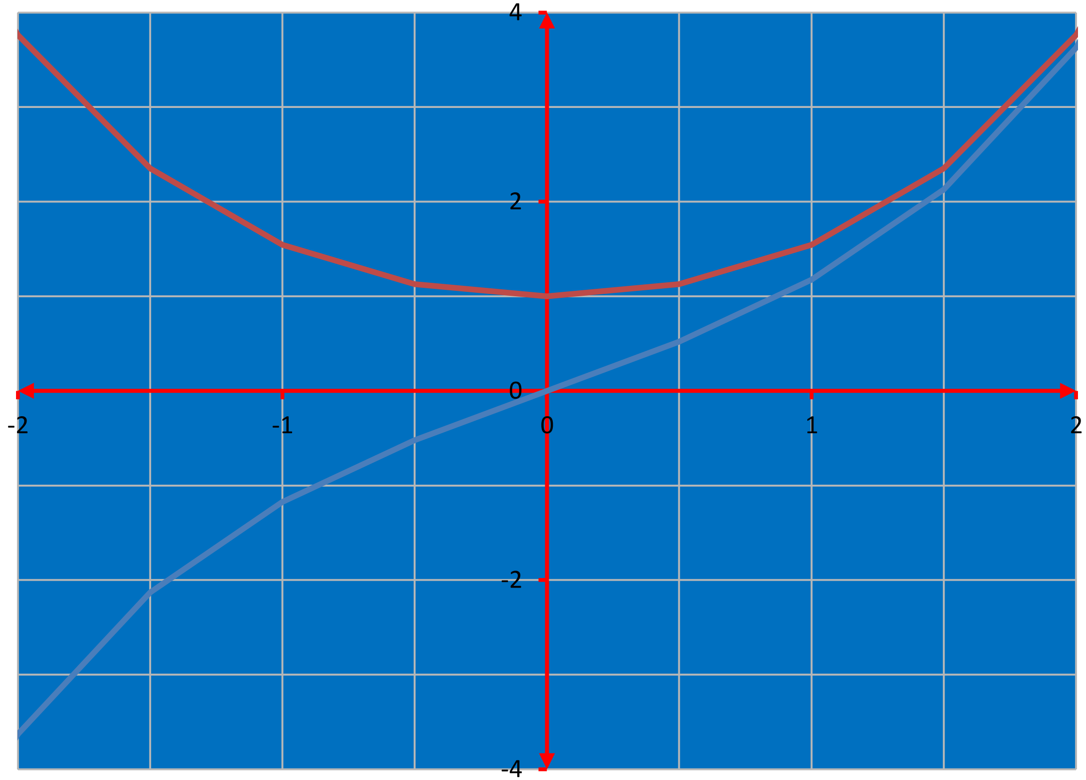
Por definición las funciones hiperbólicas se definen en base a las exponenciales e^x y e^{-x}:

y = (e^x- e^{-x}) / 2 = seno hiperbólico de x = sh x
y = (e^x+ e^{-x}) / 2 = coseno hiperbólico de x = ch x
Y = (e^x- e^{-x}) / (e^x+ e^{-x}) = sh x / ch x) = tangente hiperbólica de x = th x

El dominio de todas, son los números reales.

y = sh x (azul)

y = ch x (marrón)



Por definición las funciones hiperbólicas se definen en base a las exponenciales e^{x} y e^{-x}:

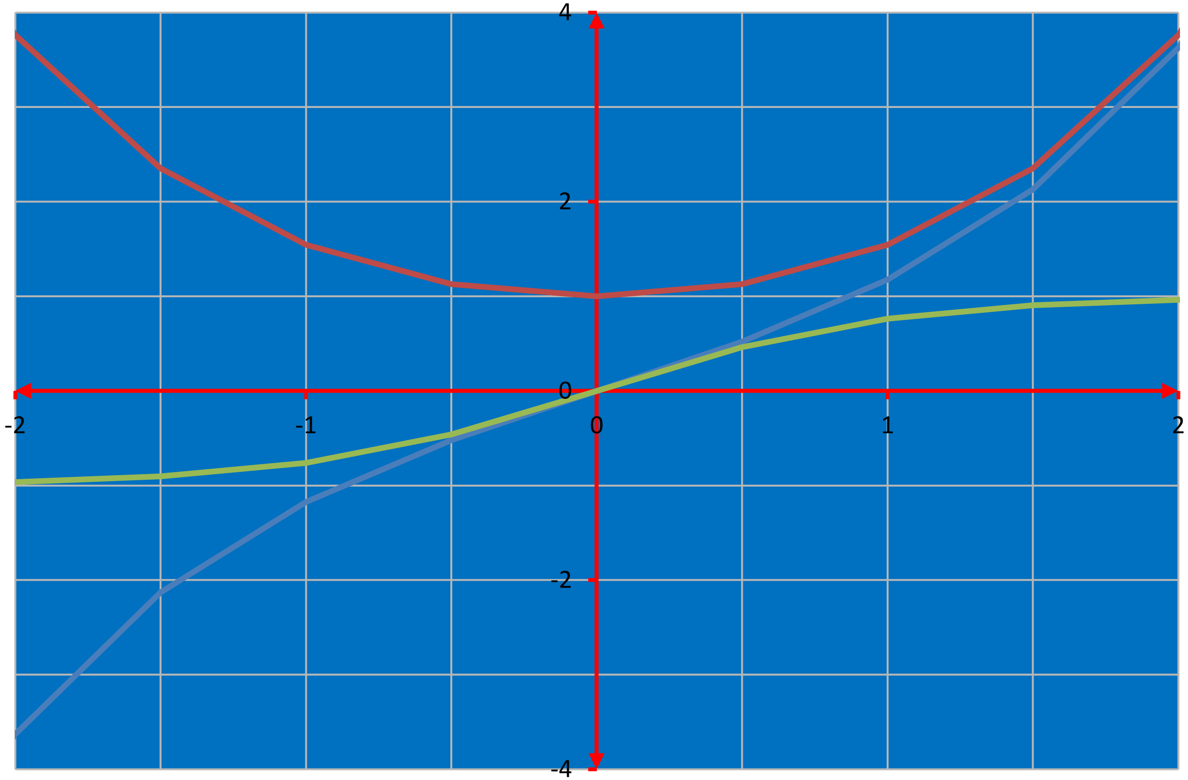
y = (e^{x}- e^{-x}) / 2 = seno hiperbólico de x = sh x
y = (e^{x}+ e^{-x}) / 2 = coseno hiperbólico de x = ch x
Y = (e^{x}- e^{-x}) / (e^{x}+ e^{-x}) = sh x / ch x) = tangente hiperbólica de x = th x

El dominio de todas, son los números reales.

y = sh x (azul)

y = ch x (marrón)

y = th x (verde)



Las restantes funciones hiperbólicas se definen a continuación:

y = cth x = cotangente hiperbólica de x

= ch x / sh x = 1 / th x = $(e^{x} + e^{-x}) / (e^{x} - e^{-x})$

Para esta función debe tenerse en cuenta que sh x pasa por cero, con lo que alrededor de este valor, existirá un comportamiento asintótico. El dominio será: R – {0}.

y = sech x = secante hiperbólica de x

= 1/ ch x = 2 / $(e^{x} + e^{-x})$ D = R

y = cosech x = cosecante hiperbólica de x

= 1 / sh x = 2/ $(e^{x} - e^{-x})$ D = R – {0}

Estas no se representarán gráficamente porque su uso es muy poco común.

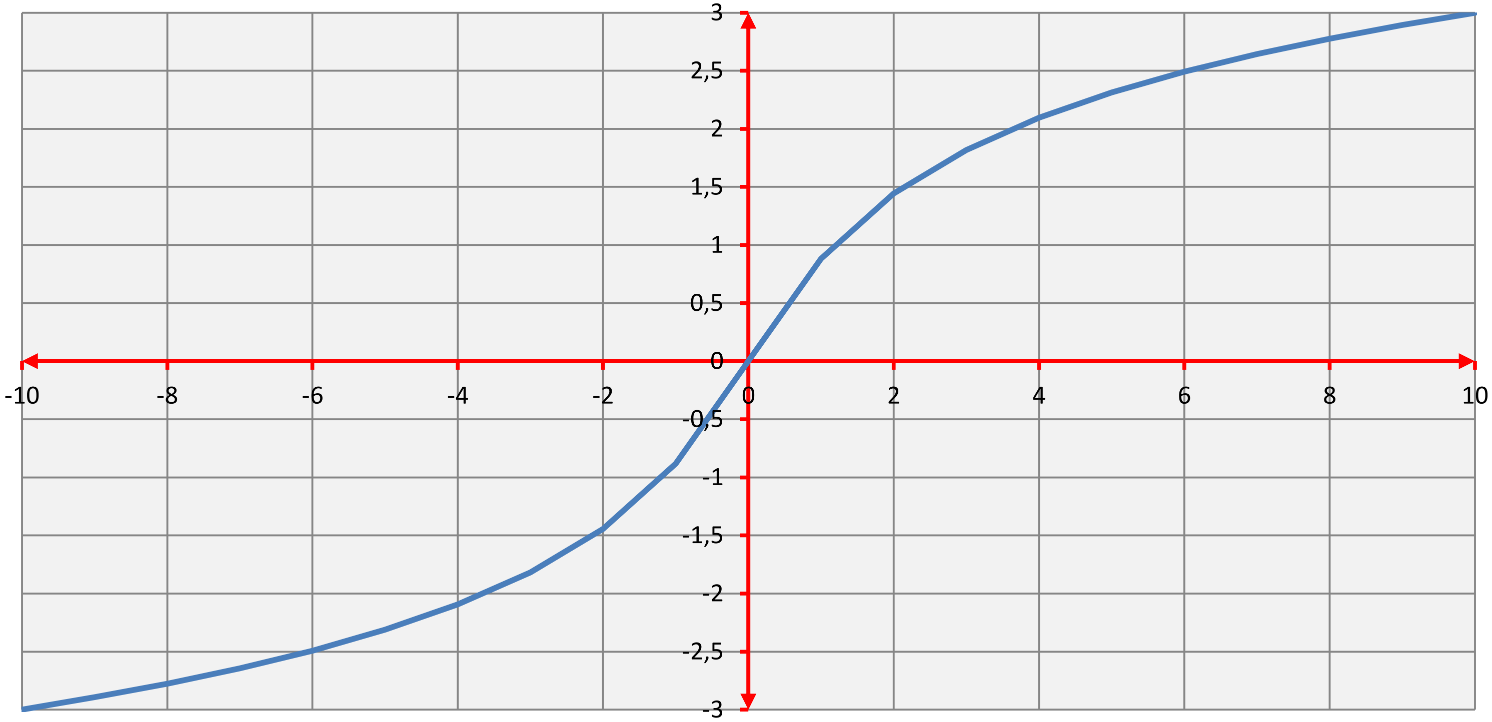
14 – Funciones hiperbólicas inversas.

$$y = \arg \operatorname{sh} x \,; \quad y = \arg \operatorname{ch} x \,;$$

$$y = \arg \operatorname{th} x$$

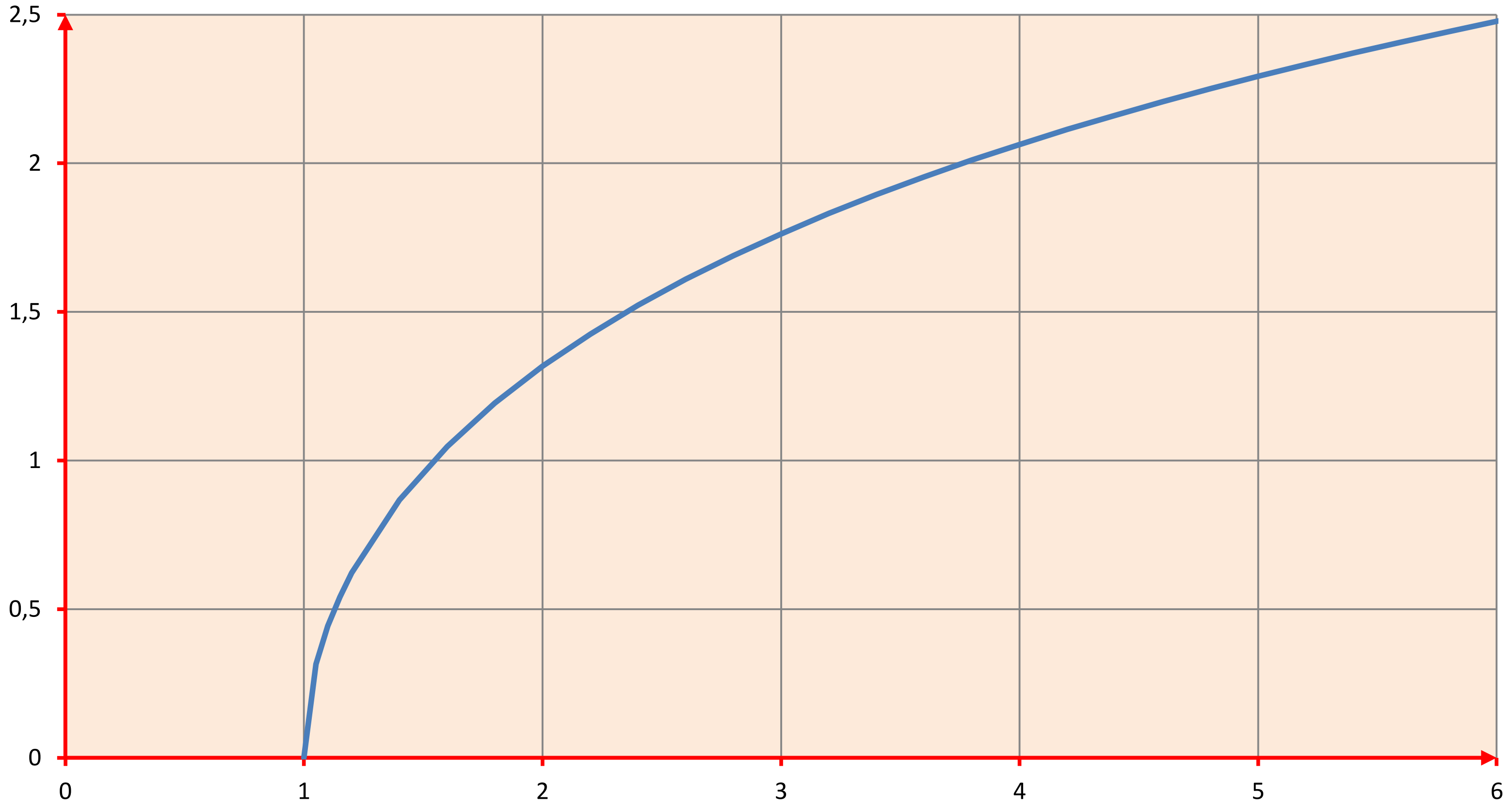
La función: arg sh x , tiene por dominio: R y por codominio: R.

Se demuestra que: arg sh x = ln $(x + \sqrt{x^2 + 1})$, expresión muy utilizada en "Análisis Matemático".



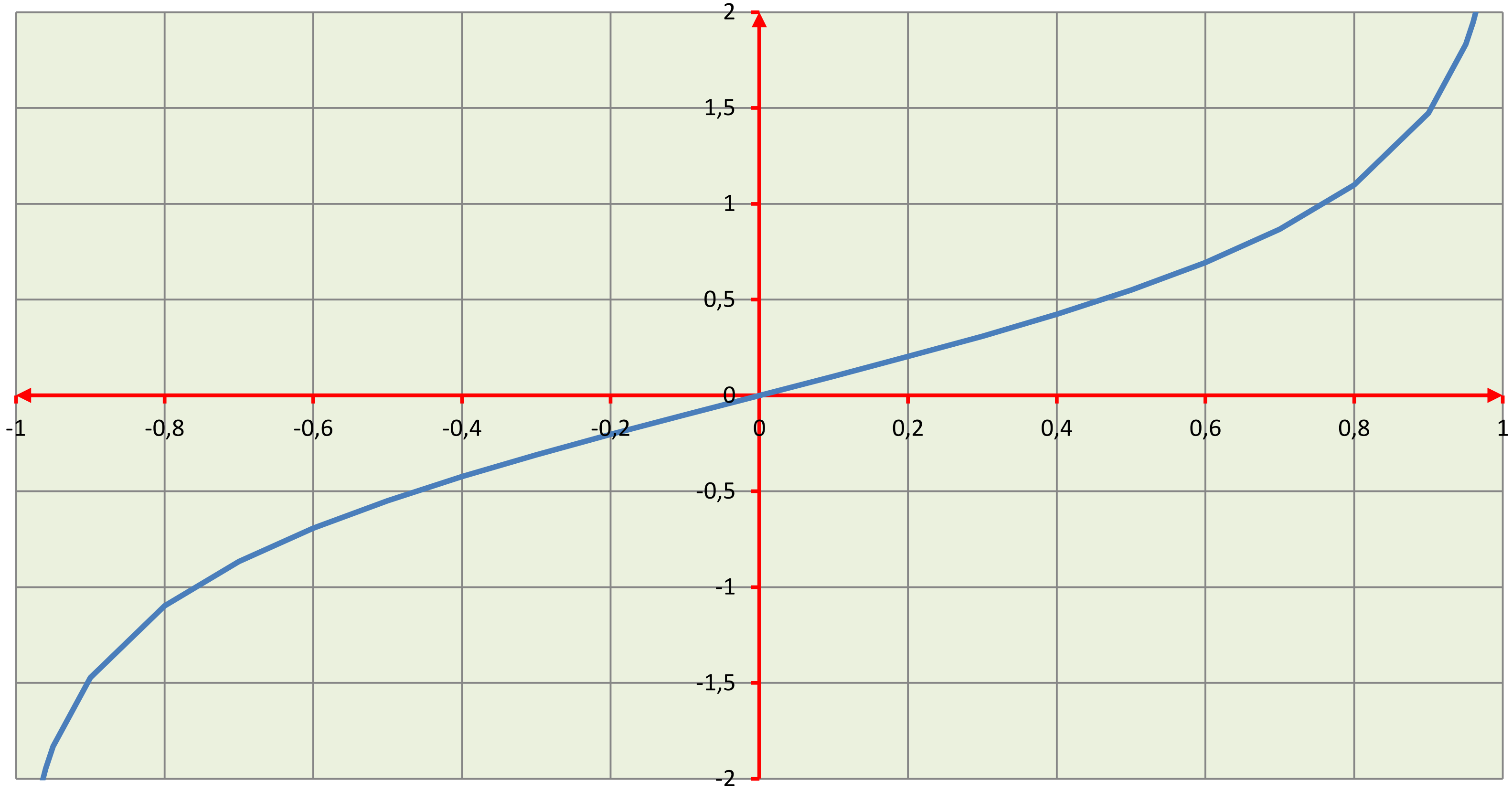
En cambio a la función: $y = \arg ch\ x$, hay que restringirle el dominio al intervalo: $[1\ ;\ +\infty\ )$.

También se demuestra que: $\arg ch\ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$. Es tan importante como la anterior.



Finalmente la función y = arg th x , tiene por dominio el intervalo abierto: (-1 : 1).

Para esos extremos la función no está definida (polos).



15 – Funciones especiales lineales.

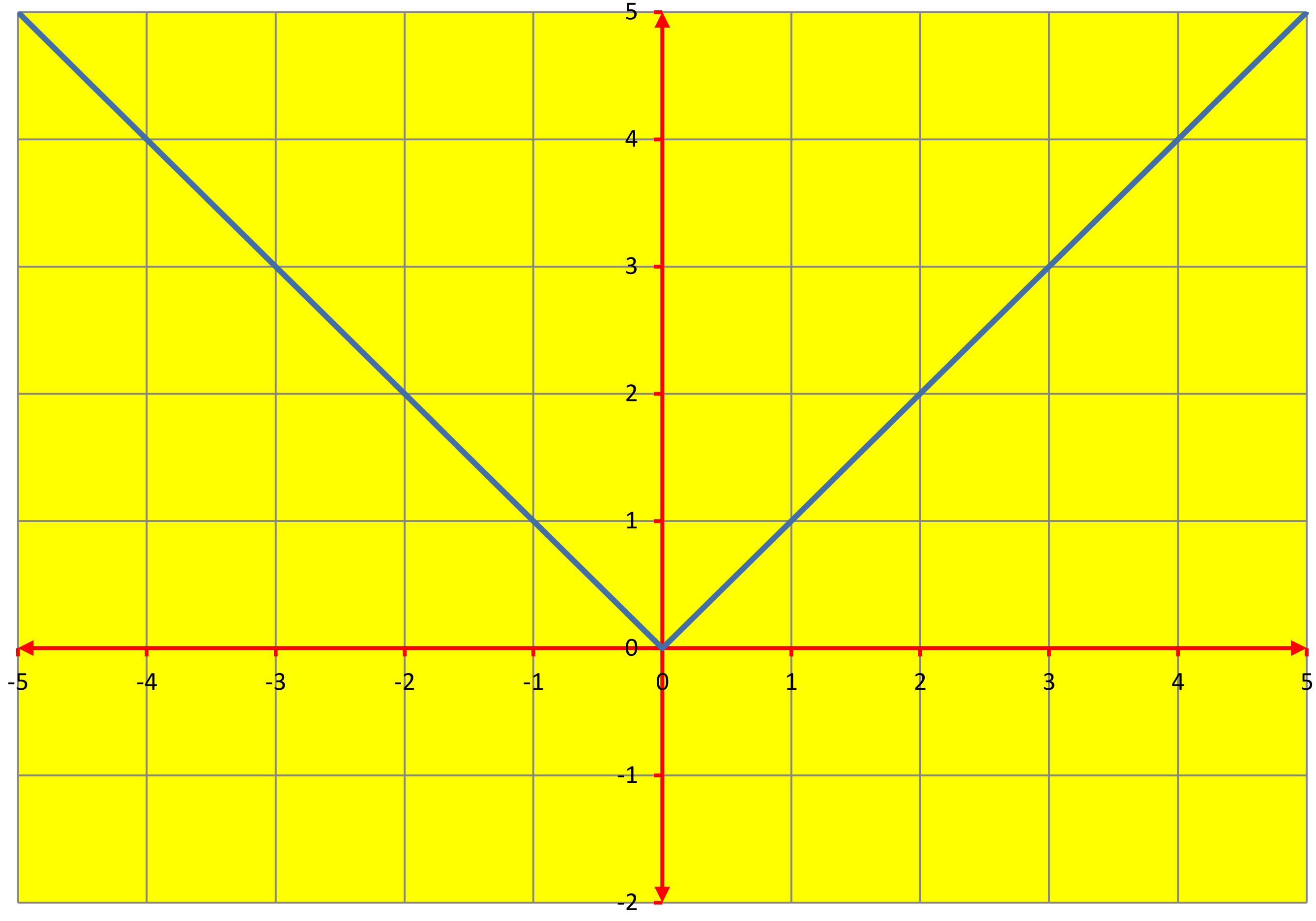
Valor absoluto o Módulo ;

Signo ; Parte entera y Mantisa.

La función “módulo o valor absoluto” se puede definir como:

$y = x$, si $x >= 0$; $y = -x$, si $x < 0$; el dominio es R.

Se anota como : $y = |x|$ y el gráfico Cartesiano muestra que está representada por las bisectrices del 1° y2° cuadrante (azul).



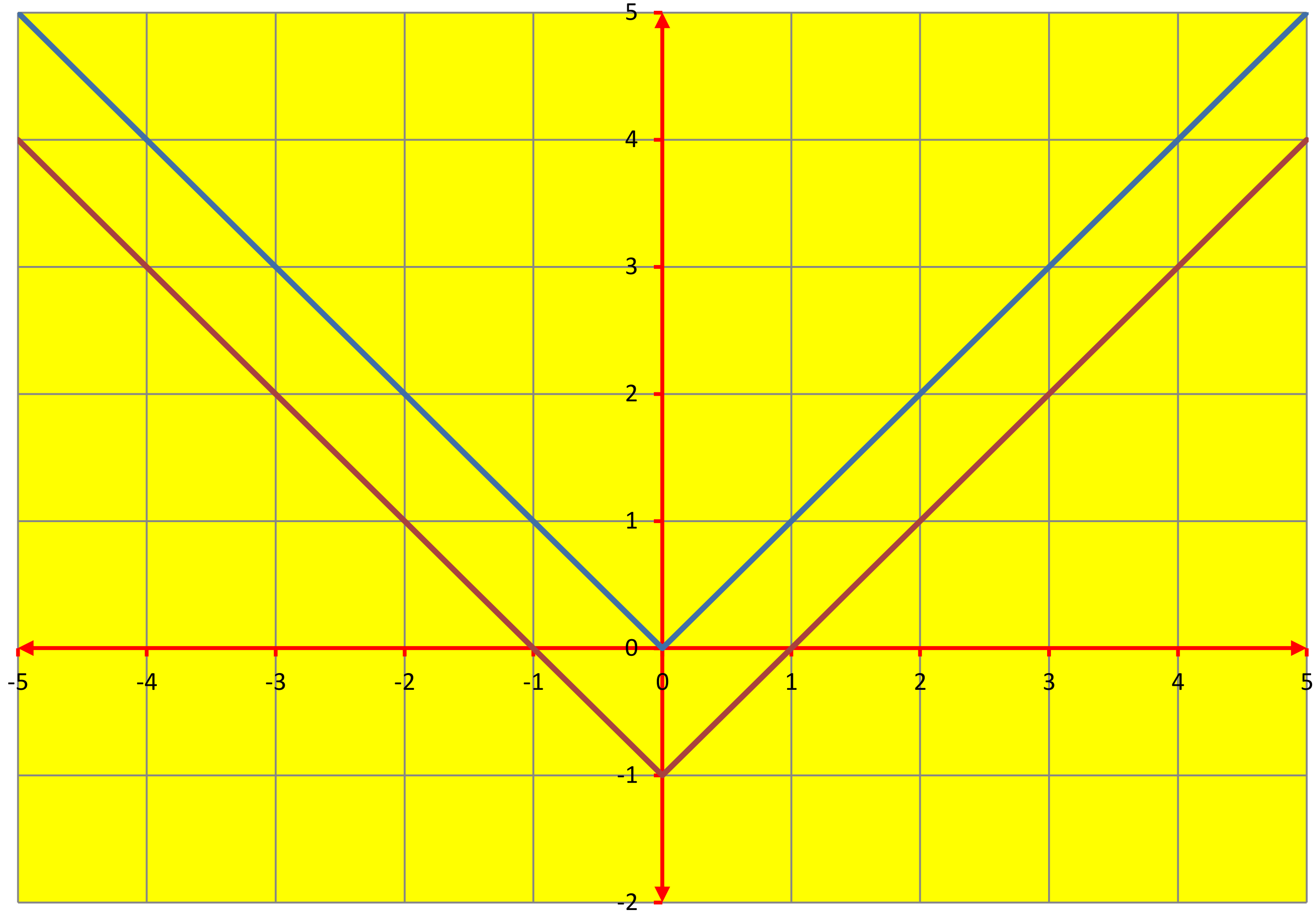
La función “módulo o valor absoluto” se puede definir como:

$y = x$, si $x >= 0$; $y = -x$, si $x < 0$; el dominio es R.

Se anota como : $y = |x|$ y el gráfico Cartesiano muestra que está representada por las bisectrices del 1° y2° cuadrante (azul).

Se muestran algunas variantes de la función básica:

$y = |x| - 1$ (marrón)



La función "módulo o valor absoluto" se puede definir como:

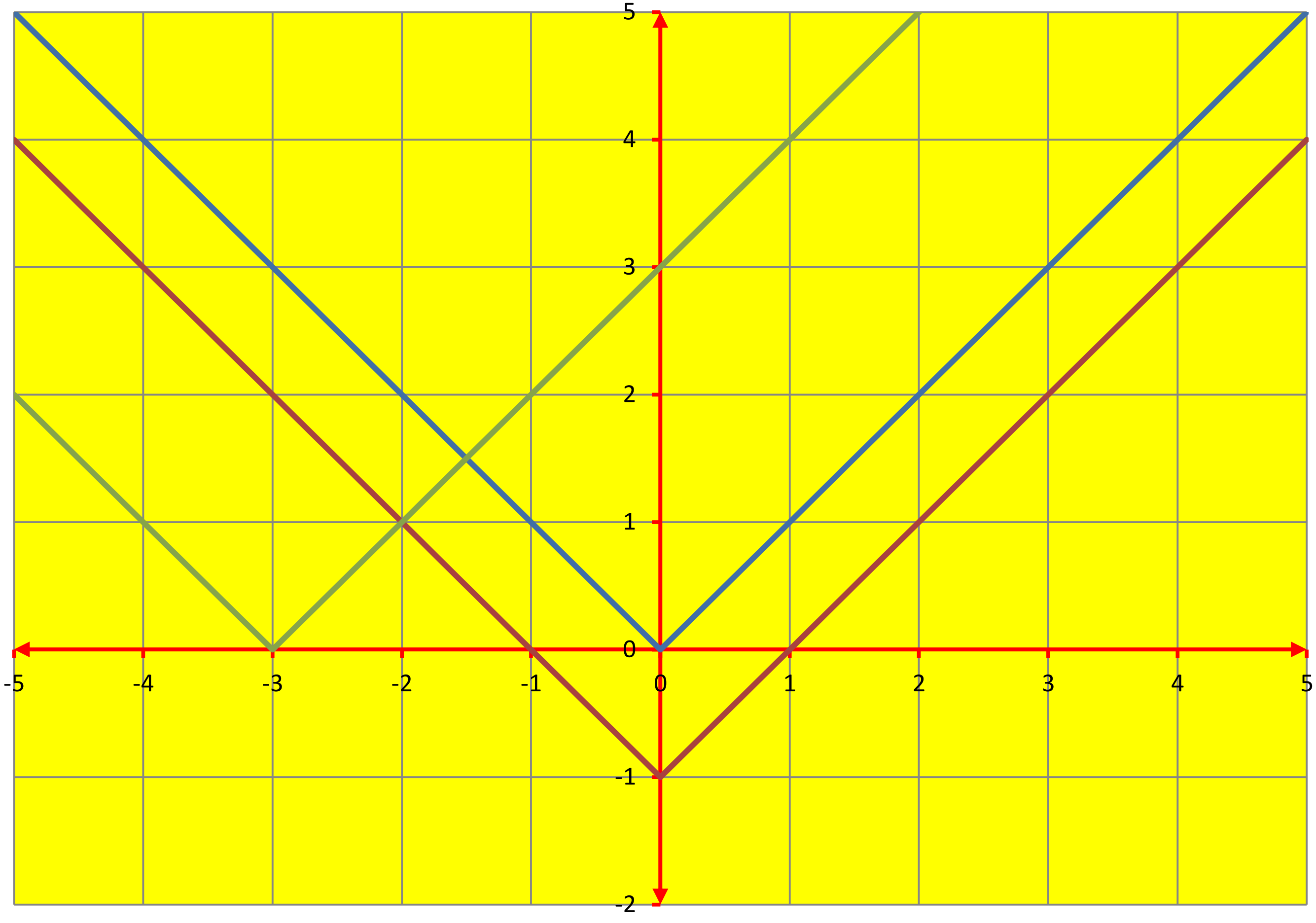
$y = x$, si $x >= 0$; $y = -x$, si $x < 0$; el dominio es R.

Se anota como : $y = |x|$ y el gráfico Cartesiano muestra que está representada ´por las bisectrices del 1° y2° cuadrante (azul).

Se muestran algunas variantes de la función básica:

$y = |x| - 1$ (marrón)

$y = |x + 3|$ (verde)



La función “módulo o valor absoluto” se puede definir como:

y = x , si x >= 0; y = -x, si x < 0; el dominio es R.

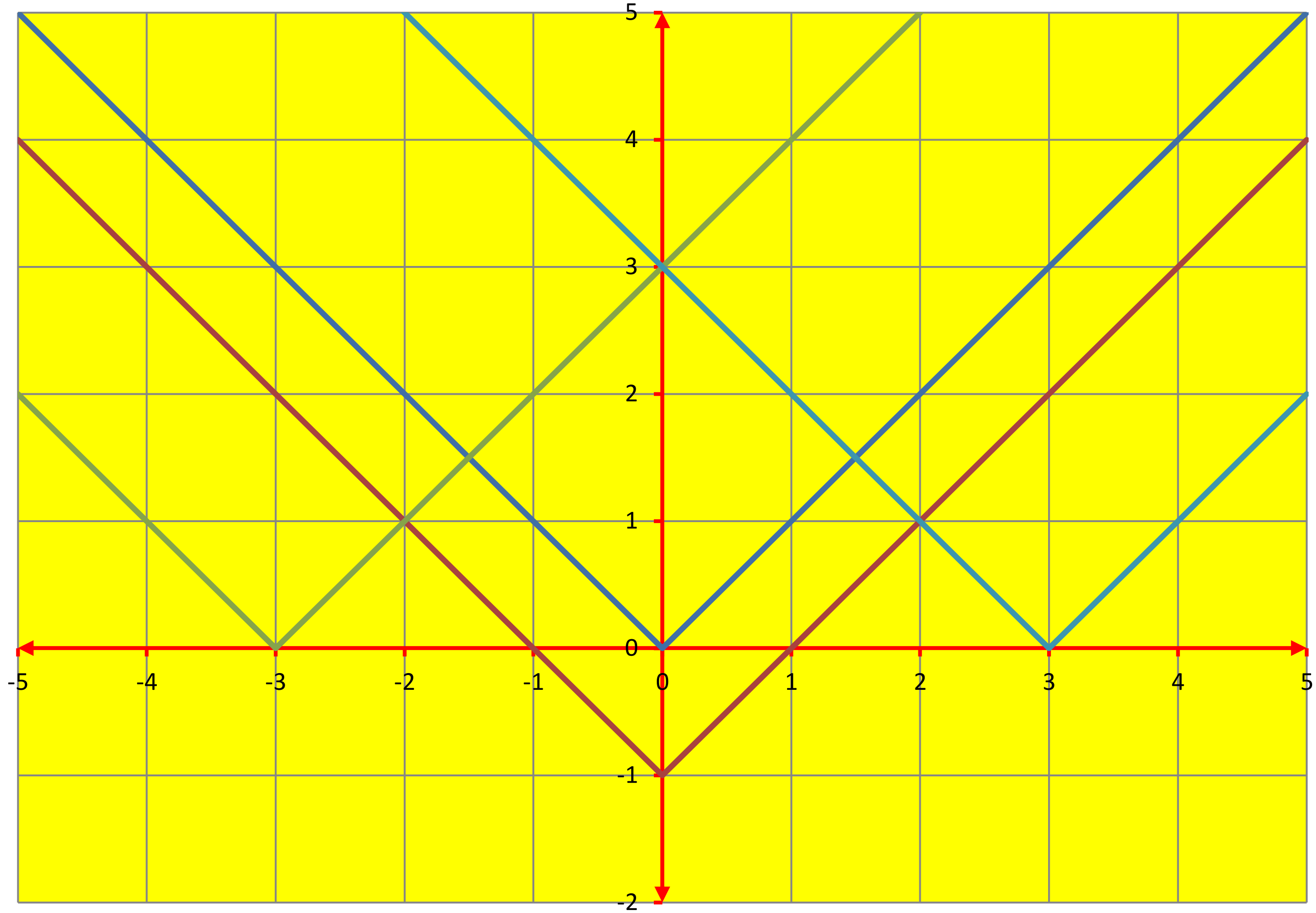
Se anota como : y = |x| y el gráfico Cartesiano muestra que está representada por las bisectrices del 1° y2° cuadrante (azul).

Se muestran algunas variantes de la función básica:

y = |x| - 1 (marrón)

y = |x + 3| (verde)

y = |x – 3| (celeste)



La función “módulo o valor absoluto” se puede definir como:

y = x , si x >= 0; y = -x, si x < 0; el dominio es R.

Se anota como : y = |x| y el gráfico Cartesiano muestra que está representada por las bisectrices del 1° y2° cuadrante (azul).

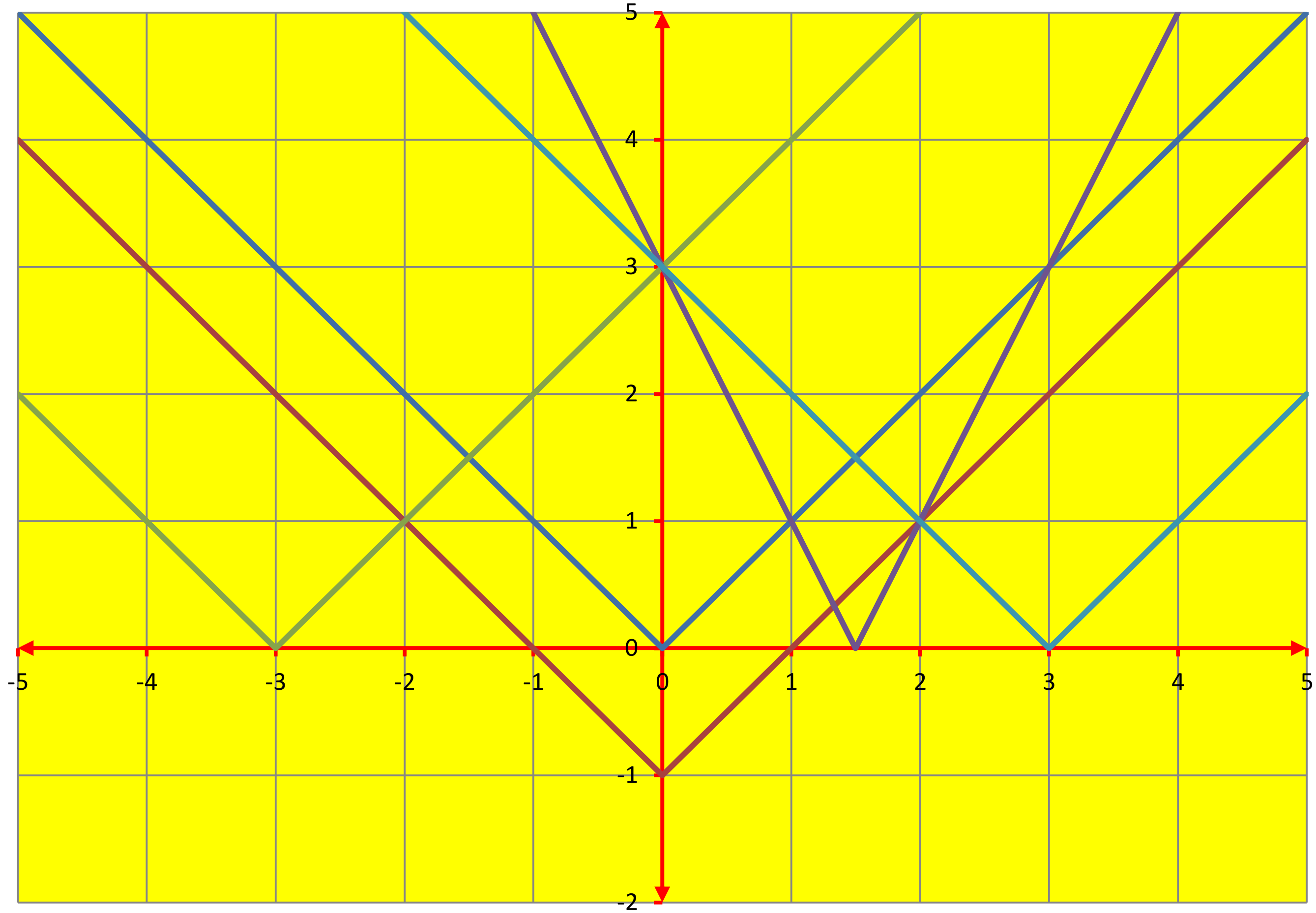
Se muestran algunas variantes de la función básica:

y = |x| - 1 (marrón)

y = |x + 3| (verde)

y = |x – 3| (celeste)

y = |2x – 3| (violeta)



La función "módulo o valor absoluto" se puede definir como:

$y = x$, si $x >= 0$; $y = -x$, si $x < 0$; el dominio es R.

Se anota como : $y = |x|$ y el gráfico Cartesiano muestra que está representada por las bisectrices del 1° y2° cuadrante (azul).

Se muestran algunas variantes de la función básica:

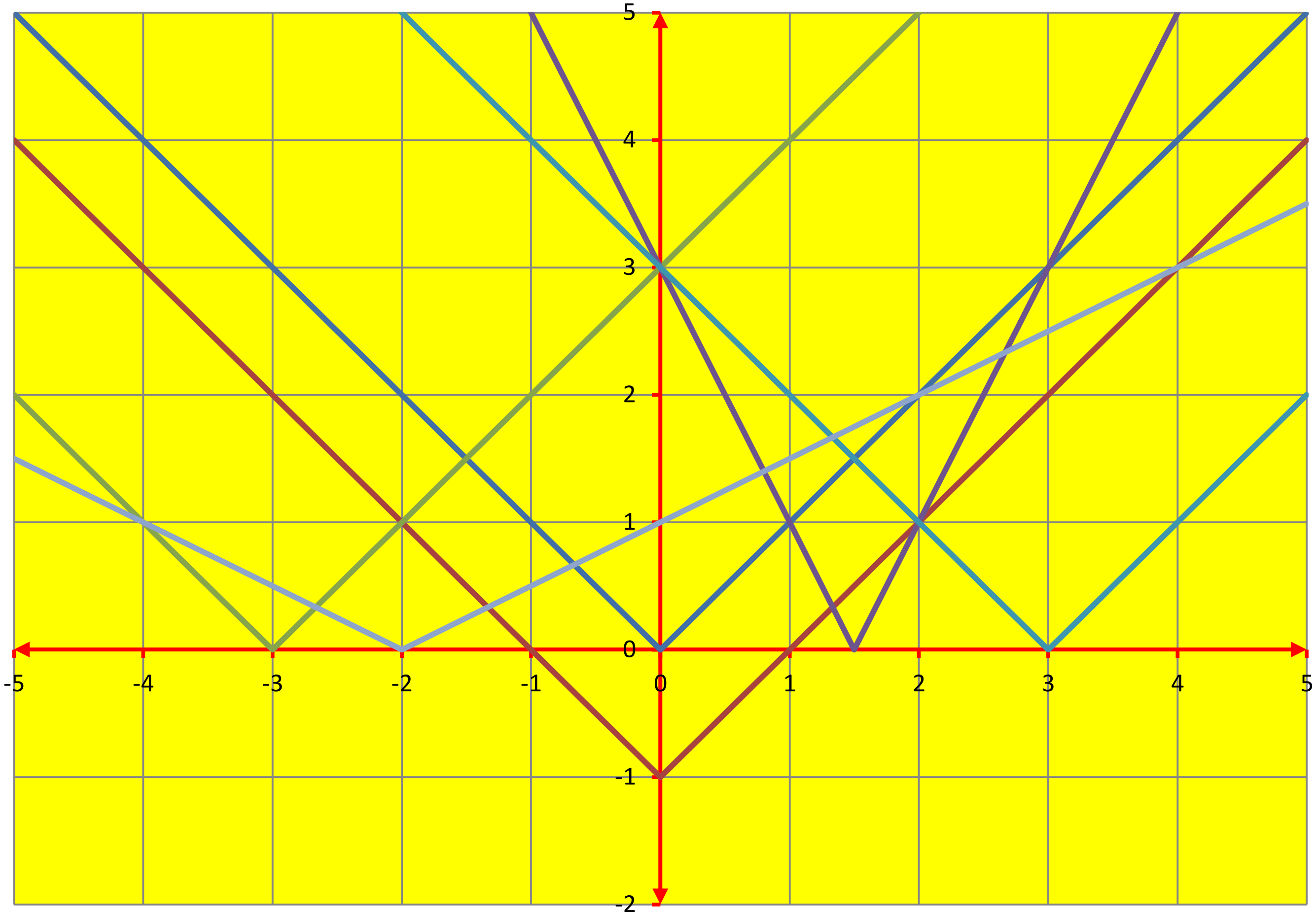
$y = |x| - 1$ (marrón)

$y = |x + 3|$ (verde)

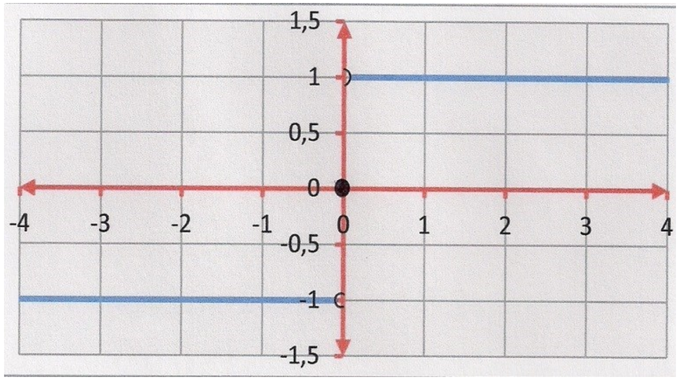
$y = |x – 3|$ (celeste)

$y = |2x – 3|$ (violeta)

$y = |0,5x + 1|$ (gris)

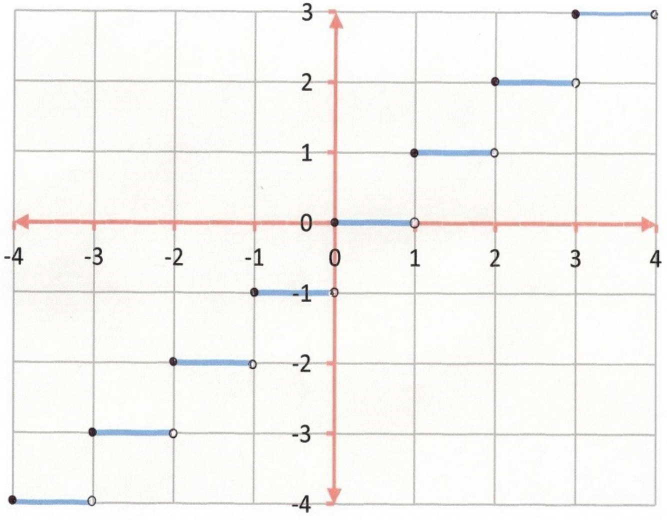


La "función Signo", se puede definir como un cociente:
y = sgn x = |x| / x ; salvo para **x = 0**, en que se conviene que el valor de la función es "**0**".
También se puede decir que: para x > 0 $\longrightarrow$ y = 1
para x = 0 $\longrightarrow$ y = 0
para x < 0 $\longrightarrow$ y = -1

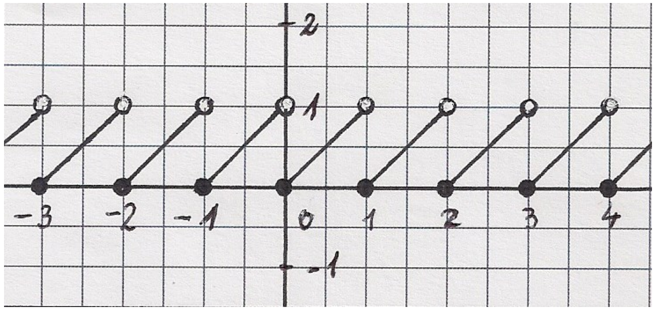


La "función Parte Entera": **y = Ent x = Int x ,** tiene como dominio: R (reales) y codominio: Z (enteros).
Se define como el menor de los dos números enteros entre los que está comprendido el valor de "x" .

Se señala que para valores negativos: -2 < -1, etc.



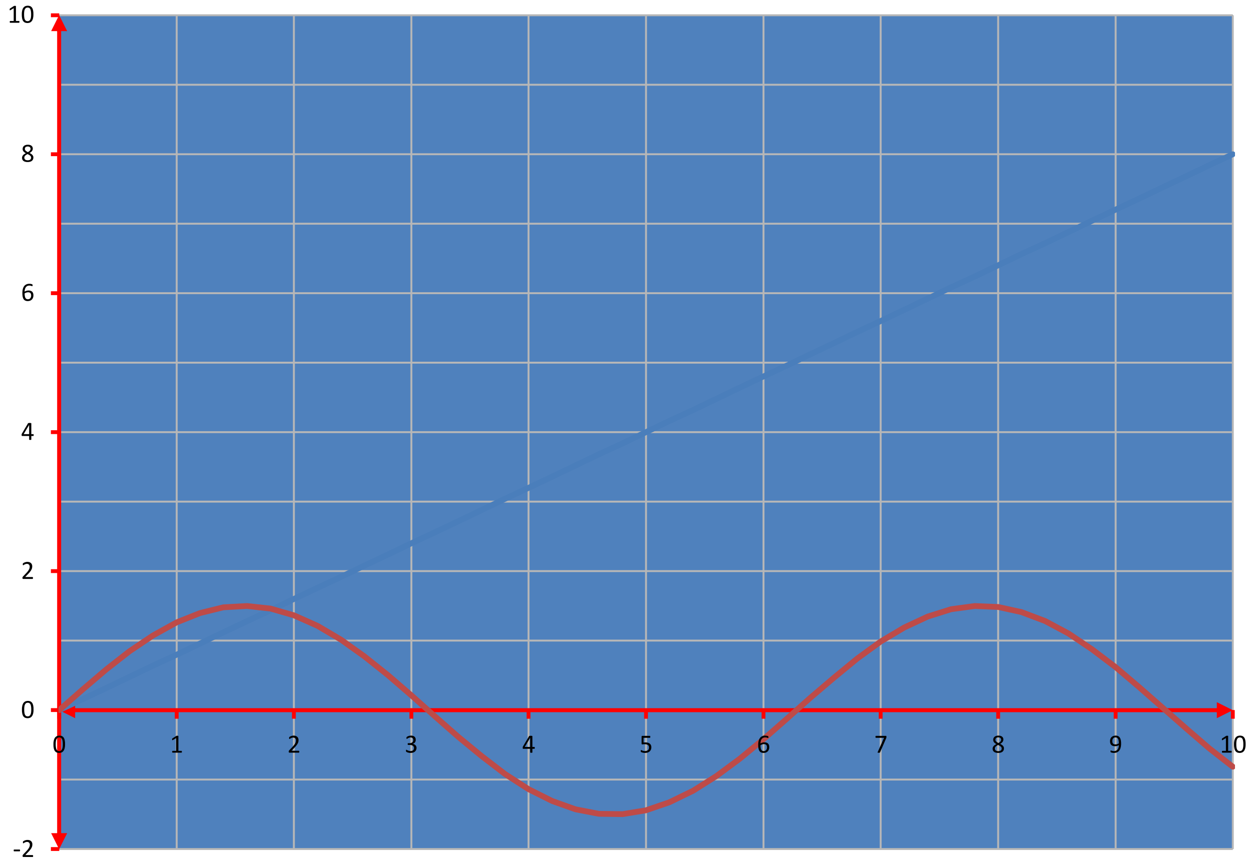
En cuanto a la "función Mantisa": **y = mant x = x – Ent x** se puede decir que es la parte decimal de un número real positivo. Para un negativo se aplica la definición:
Por ej.: mant (-0,2) = - 0,2 – Ent (-0,2) = -0,2 - (-1) = 0,8
El codominio es: [0; 1)



16 – Operaciones entre funciones.

Suma; Resta; Producto y Cociente.

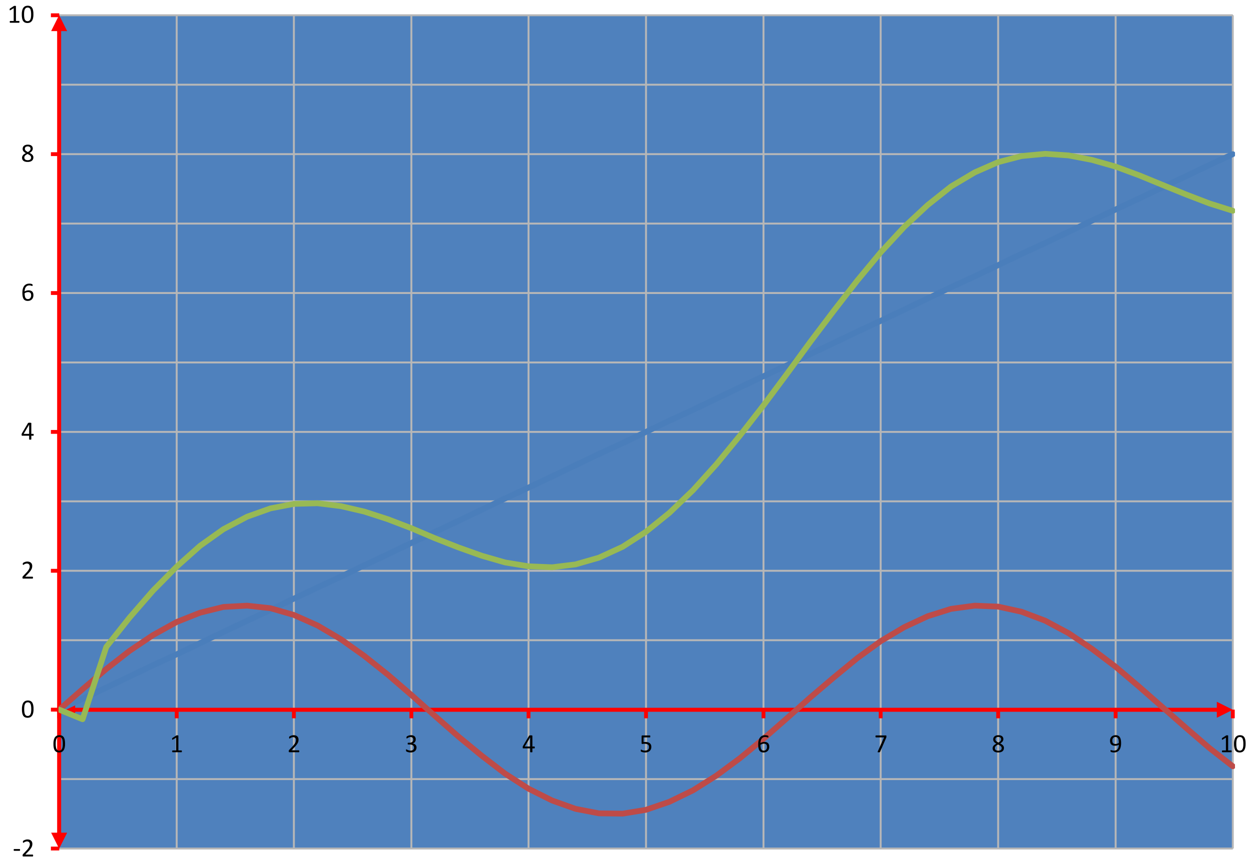
Sean las funciones básicas: $y = 0{,}8\ x$ e $y = 1{,}5\ \text{sen}\ x$



Sean las funciones básicas: $y = 0{,}8\,x$ e $y = 1{,}5 \text{ sen } x$

No hay ningún inconveniente en considerar la suma de ellas, que será por supuesto, una nueva función:

$$y = 0{,}8\,x + 1{,}5 \text{ sen } x$$



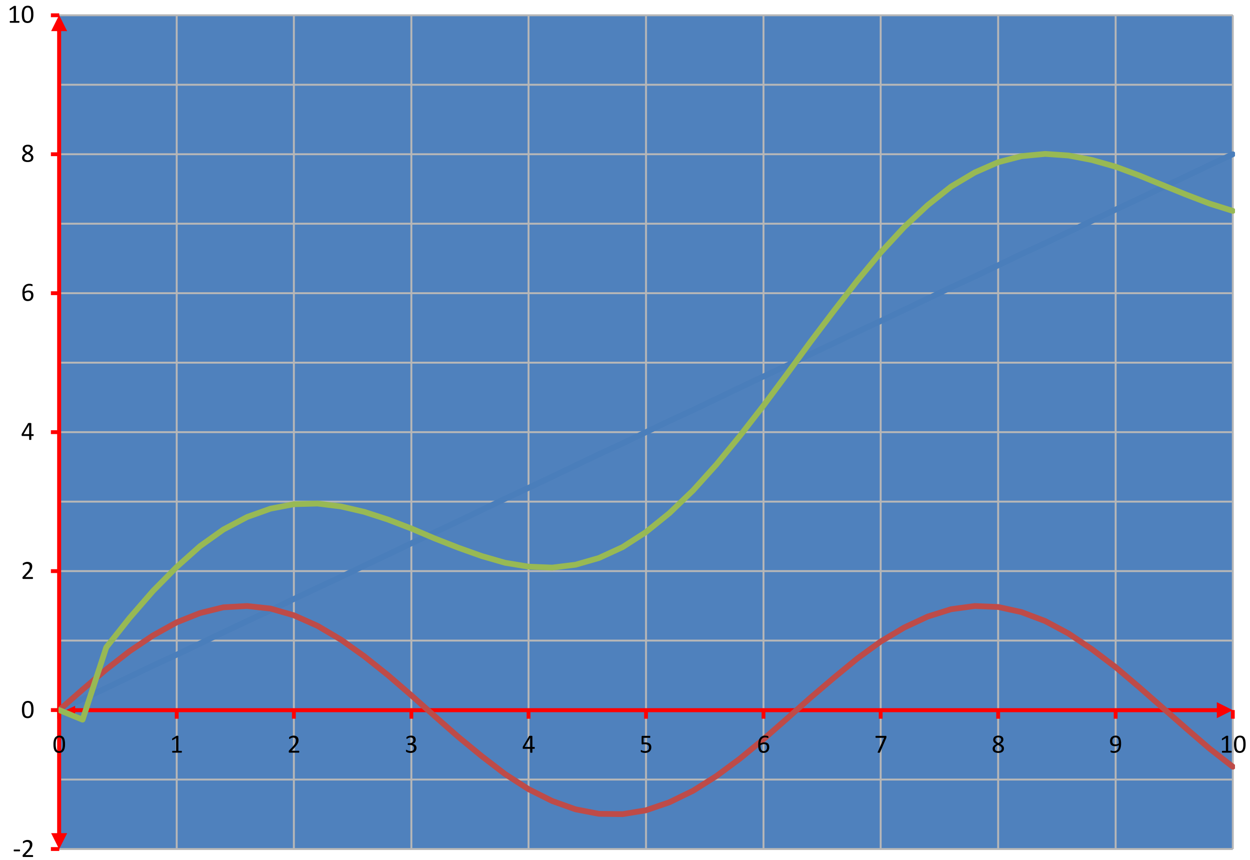
Sean las funciones básicas: $y = 0,8\,x$ e $y = 1,5$ sen x

No hay ningún inconveniente en considerar la suma de ellas, que será por supuesto, una nueva función:

$y = 0,8\,x + 1,5$ sen x

Resulta claro que podrán *sumarse* entre sí cualesquiera de las infinitas funciones básicas conocidas, dando lugar así a otra familia infinita.

En este caso, podemos llamarlas "*funciones suma*"



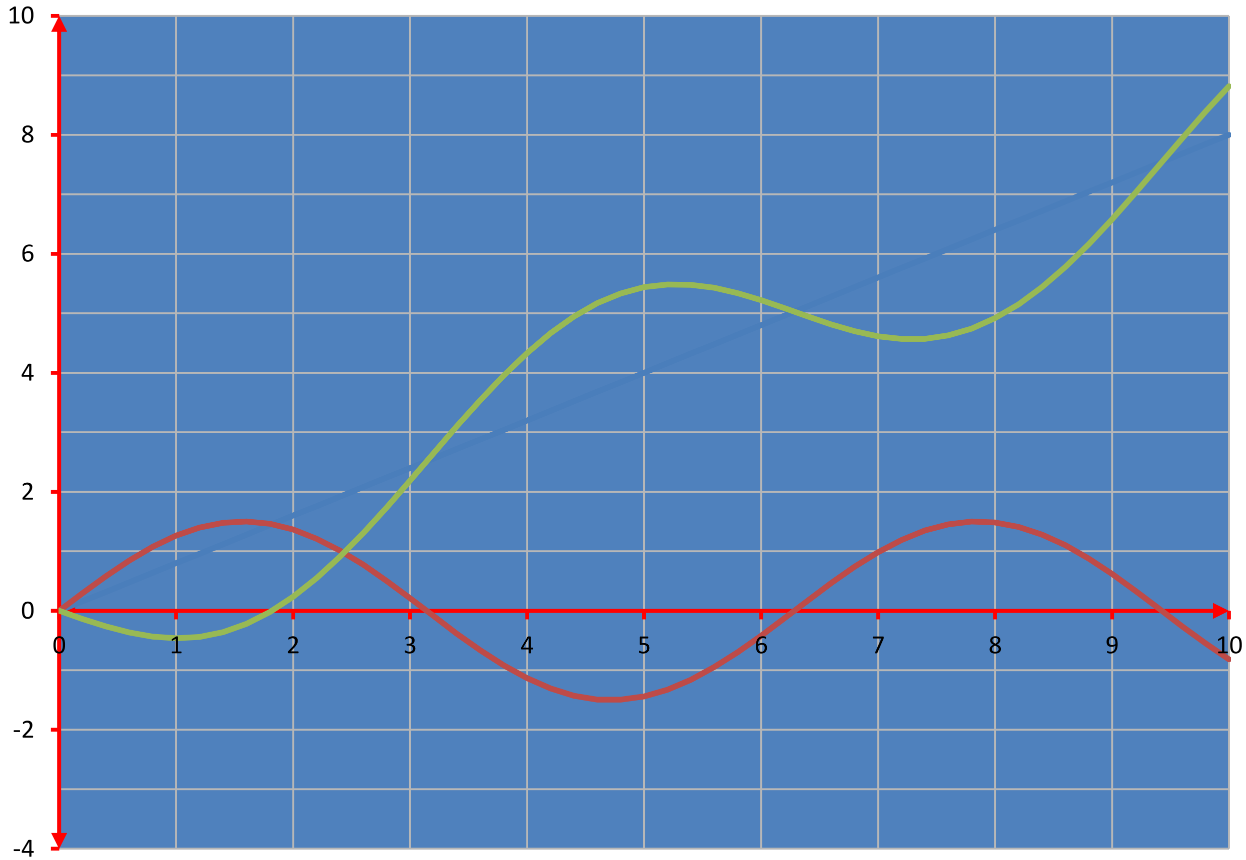
Consideramos, por sencillez, las mismas funciones básicas anteriores.

Nada nos impide restarlas entre sí, dando origen a una nueva función diferente de las básicas:

$y = 0{,}8\ x\ -\ 1{,}5\ \text{sen}\ x$

Por supuesto que también podrán ***restarse*** entre sí dos cualesquiera de las infinitas funciones básicas conocidas. Se tiene así a una nueva familia infinita.

Ahora, podemos llamarlas *"funciones diferencia o funciones resta"*

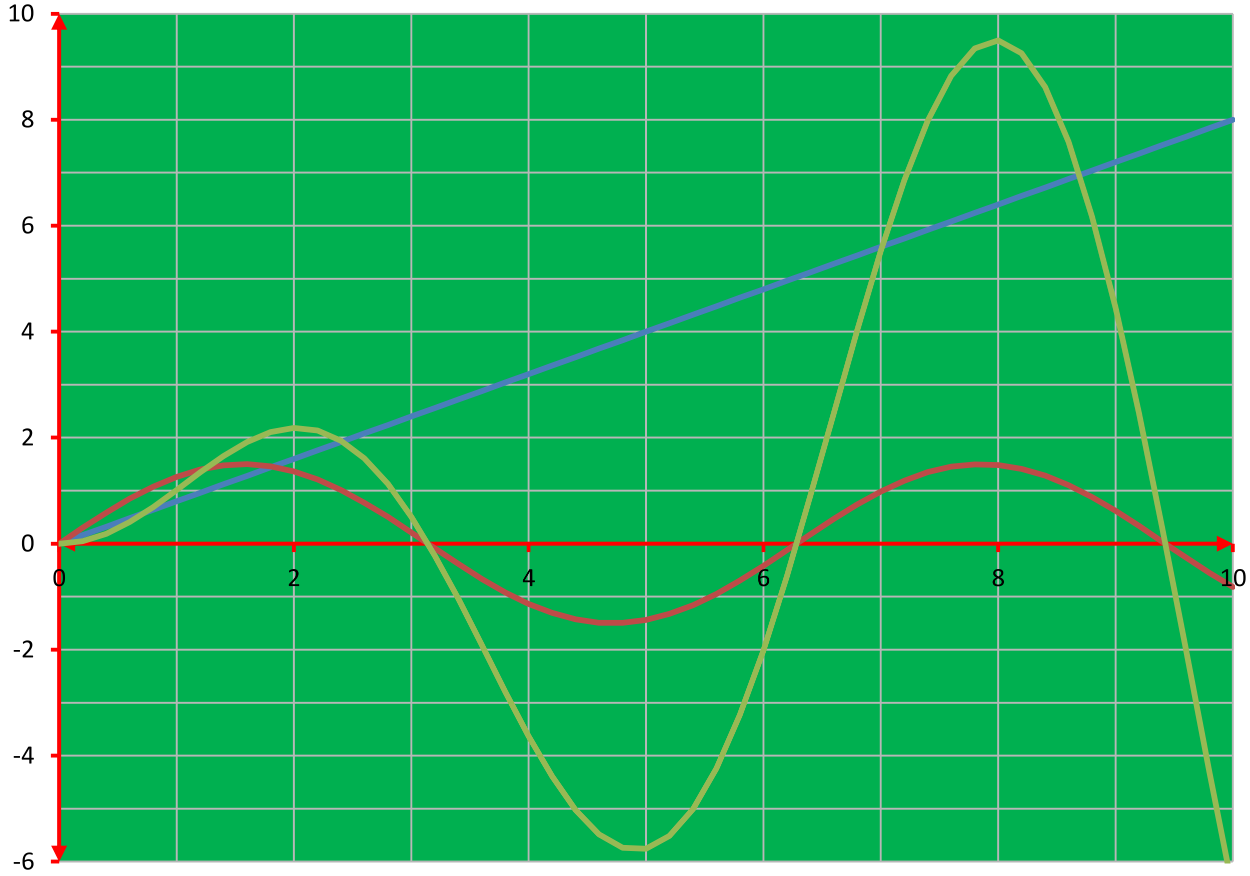


Si las mismas funciones anteriores, ahora son multiplicadas entre sí:

Se obtiene la “función producto” **$y = (0,8\ x)\ .\ (1,5 \text{ sen } x) = 1,2\ x \text{ sen } x$** (verde), que por supuesto, es una función diferente de las originales.

Nuevamente nos encontramos aquí con otra familia infinita de funciones a las que podemos llamarlas:

“función producto”



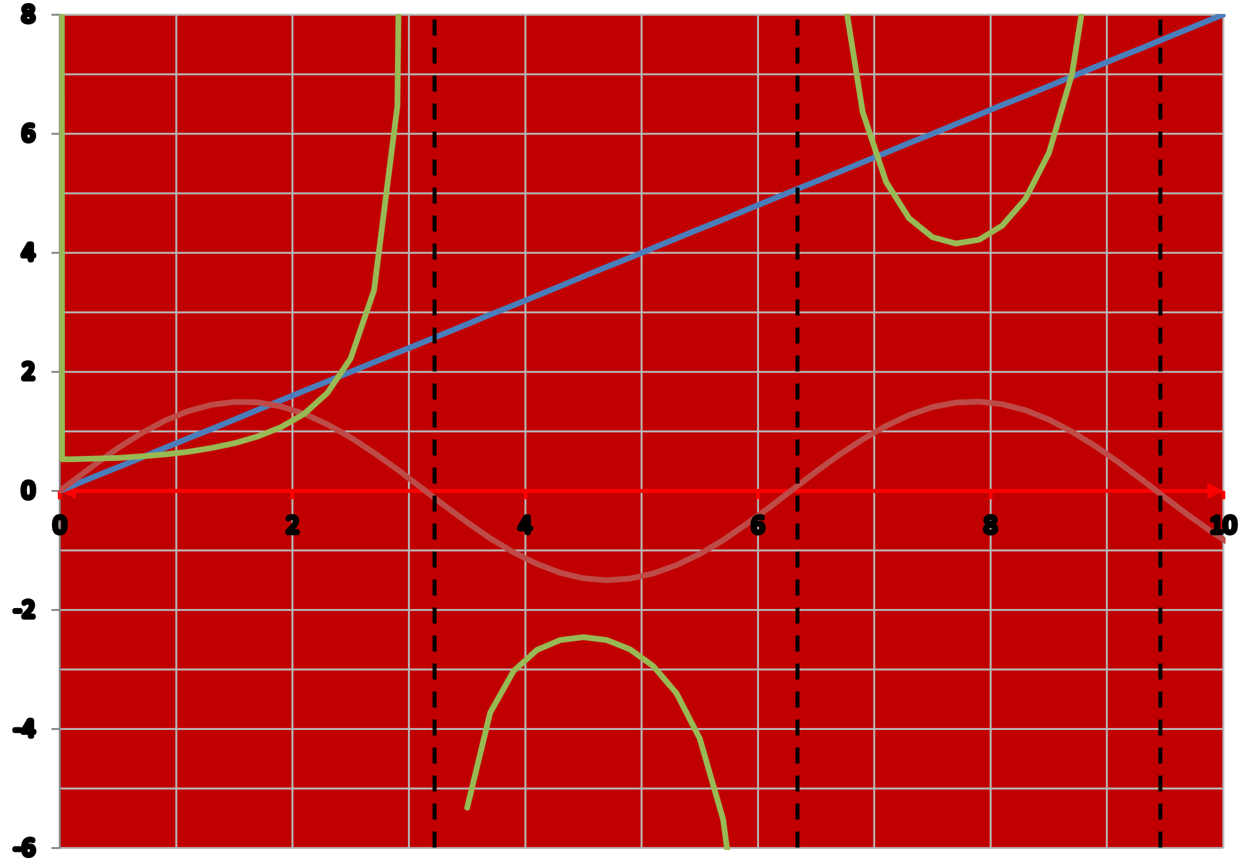
Supongamos ahora que efectuamos el cociente: (0,8 x) / (1,5 sen x), punto por punto.

Resulta claro que estamos frente a una nueva función: **y = 0,533 x / sen x.** En este caso se debe considerar que la misma, presentará "polos" (o "infinitos") en correspondencia con los valores de "x" en los que sen x = 0.

Es interesante señalar que la

"función cociente"

obtenida, muestra la aparición de una nueva familia infinita de funciones, que como en los casos anteriores, diferirán "mucho" de las funciones básicas componentes.



Una particularidad interesante es el hecho de que el cociente pudo haberse tomado invirtiendo el numerador y el denominador, dando por resultado otra función totalmente diferente de la anterior:

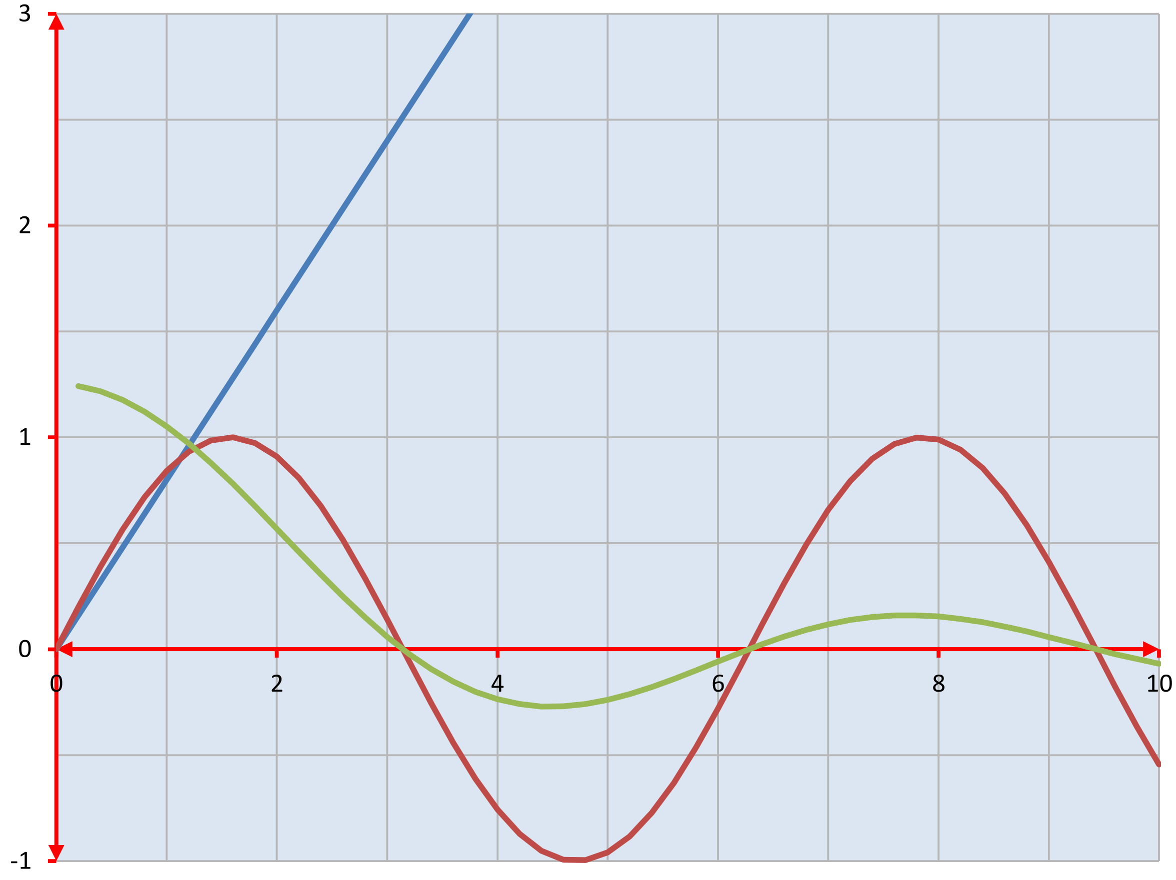
y = (1,5 sen x) / (0,8 x) = 1,875 sen x / x

Se destaca entonces que la

"función cociente"

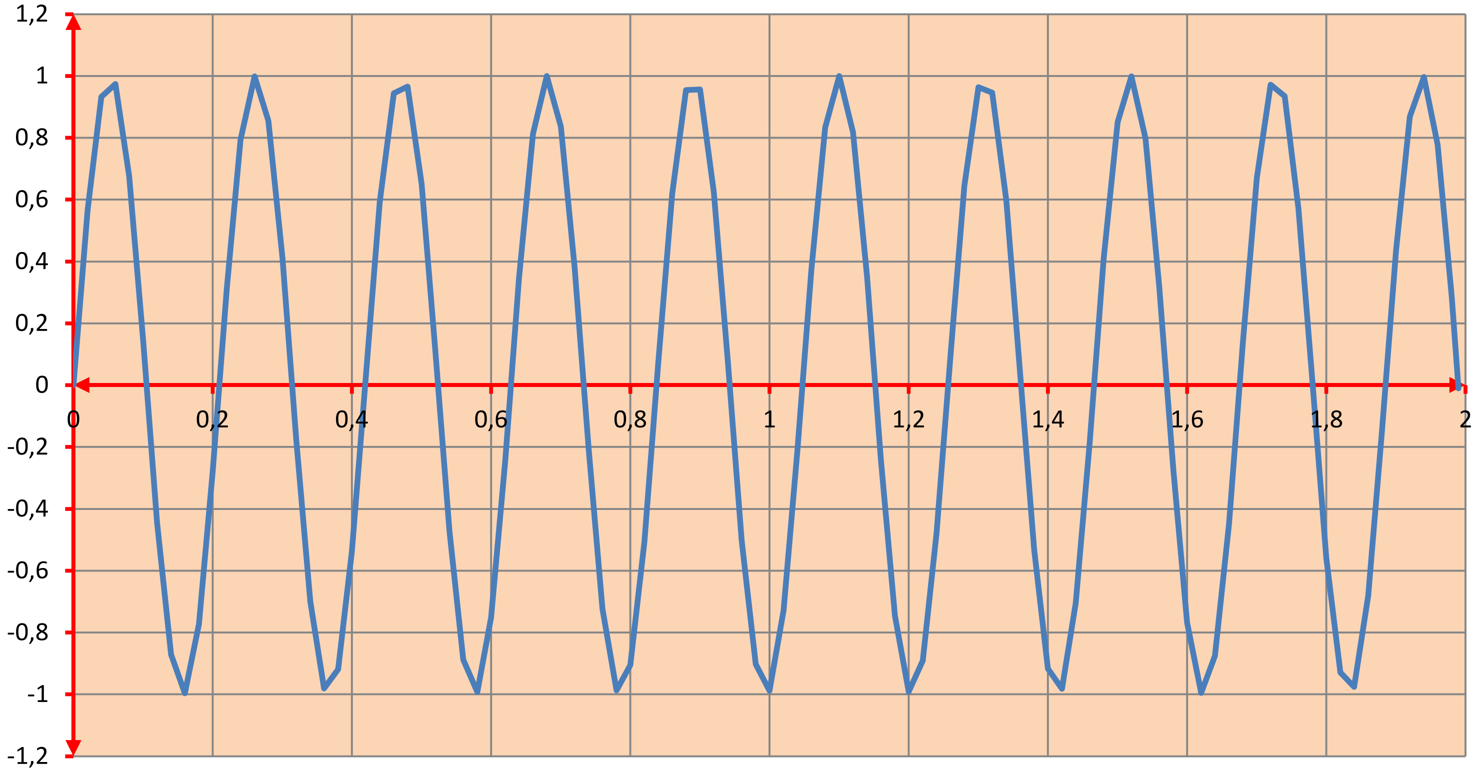
puede tener dos formas diferentes,
según el orden
en que se tomen las básicas.

La "infinitud" de esta nueva familia resulta evidente.



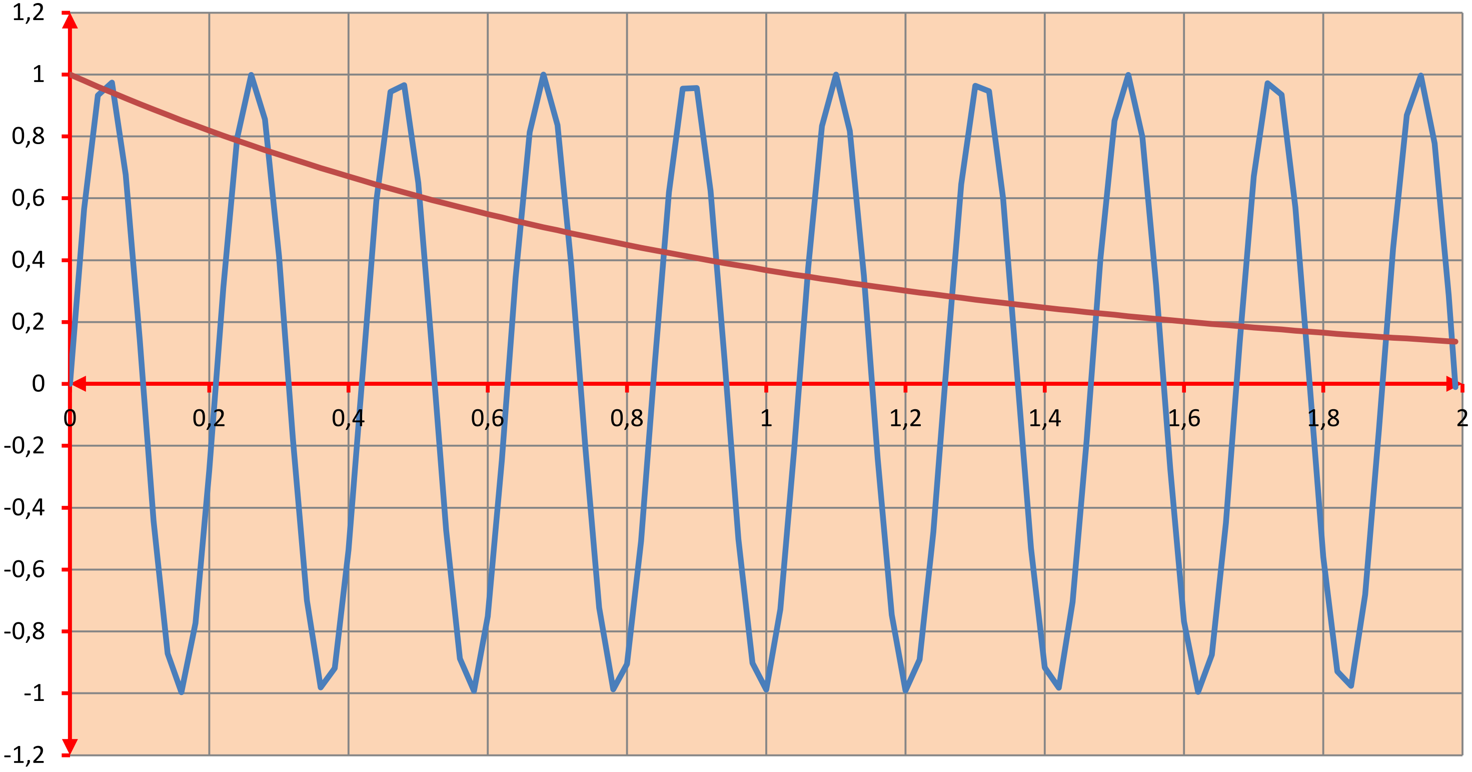
Ejemplo de “función producto”:

Sea la función: $y = \text{sen}\,(30.x)$



Ejemplo de “función producto”:

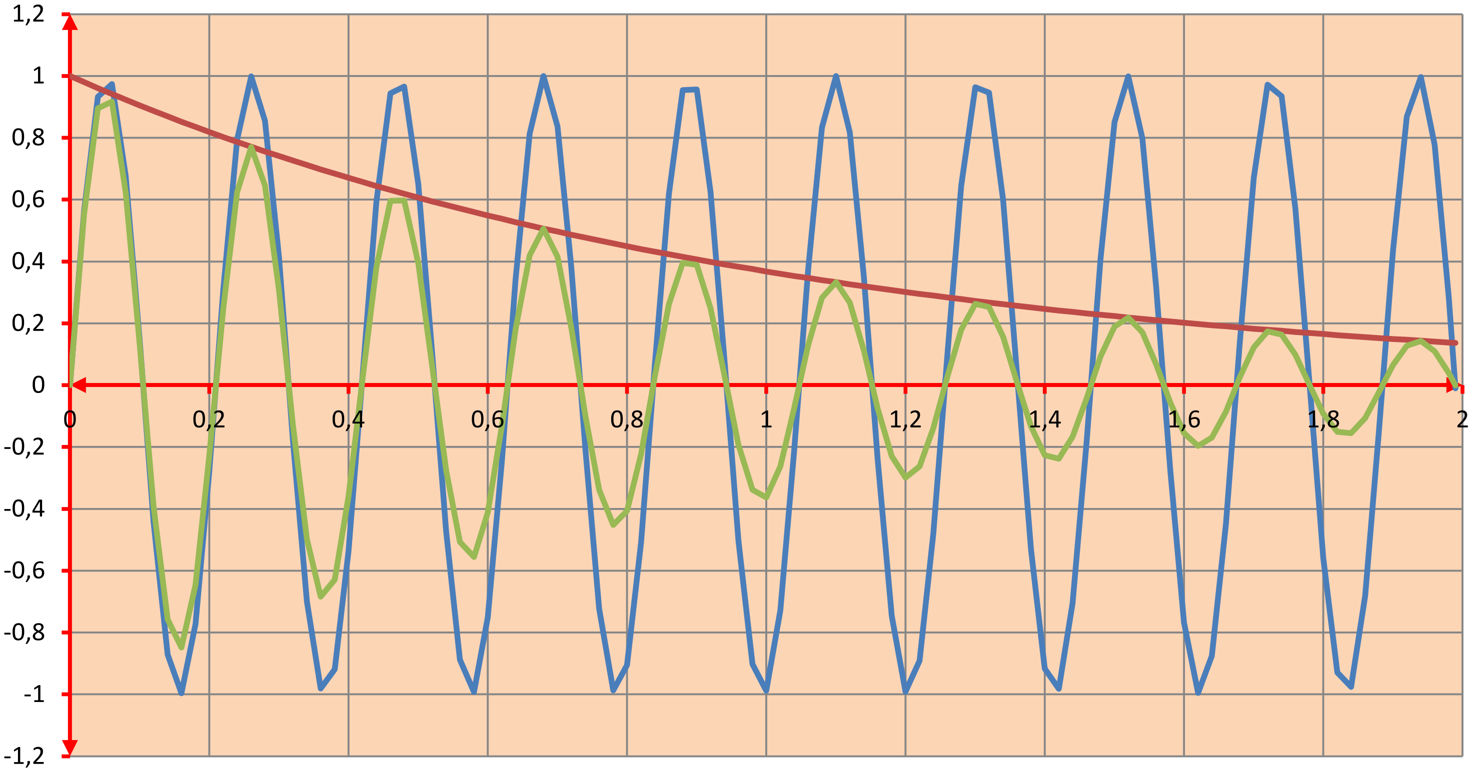
y la función: e^{-x}



Ejemplo de “función producto”:

haciendo el producto de las dadas: $y = \text{sen}\,(30.x)\ .\ e^{-x}$

Se obtiene una sinusoide amortiguada.



17 – Función Compuesta.

Función de función.

Supongamos que tomamos una función básica: $f = \text{sen } x$.

Es evidente que para cada valor de la variable independiente "x", existirá un valor correspondiente de la función "f", según lo conocido.

Ahora se puede tomar el valor de "f" y elevarlo al cuadrado de acuerdo con otra función también conocida: $g = f^2$.

Lo que se ha hecho, podemos simbolizarlo así: $\boxed{y = g\,[\,f\,(x)\,] = (sen\ x)^2 = sen^2\, x}$

Es decir que le asignamos un valor a "x", calculamos su seno y luego a este nuevo valor lo elevamos al cuadrado.

Se destaca con énfasis que las dos funciones componentes no están ligadas por ninguna operación aritmética entre ellas, sino que el valor final de "y" resulta de la aplicación sucesiva de las funciones básicas dadas.

Esta forma de unir funciones se llama *"función compuesta" o "función de función"* y resulta claro que tenemos así un nuevo conjunto infinito. Suele simbolizarse: $g \circ f$.

Una propiedad destacable es que la función compuesta *no es conmutativa .*
Es decir que " g o f " es diferente de " f o g ".

En efecto: y $=(sen\ x)^2 \neq y = \mathrm{sen}\ (\mathrm{x}^2)$, por lo que se escribe: y = sen^2 x

Una consideración especial merece el tema de los dominios respectivos.

Condición básica: *El codominio de la primera función "f", debe ser igual al dominio de la segunda "g" .*

En el caso de las funciones dadas, comprobamos que mientras el "dominio de f = sen x es R", el "codominio" es: [-1; 1]. Este conjunto debe ser el dominio de la función cuadrática "g".

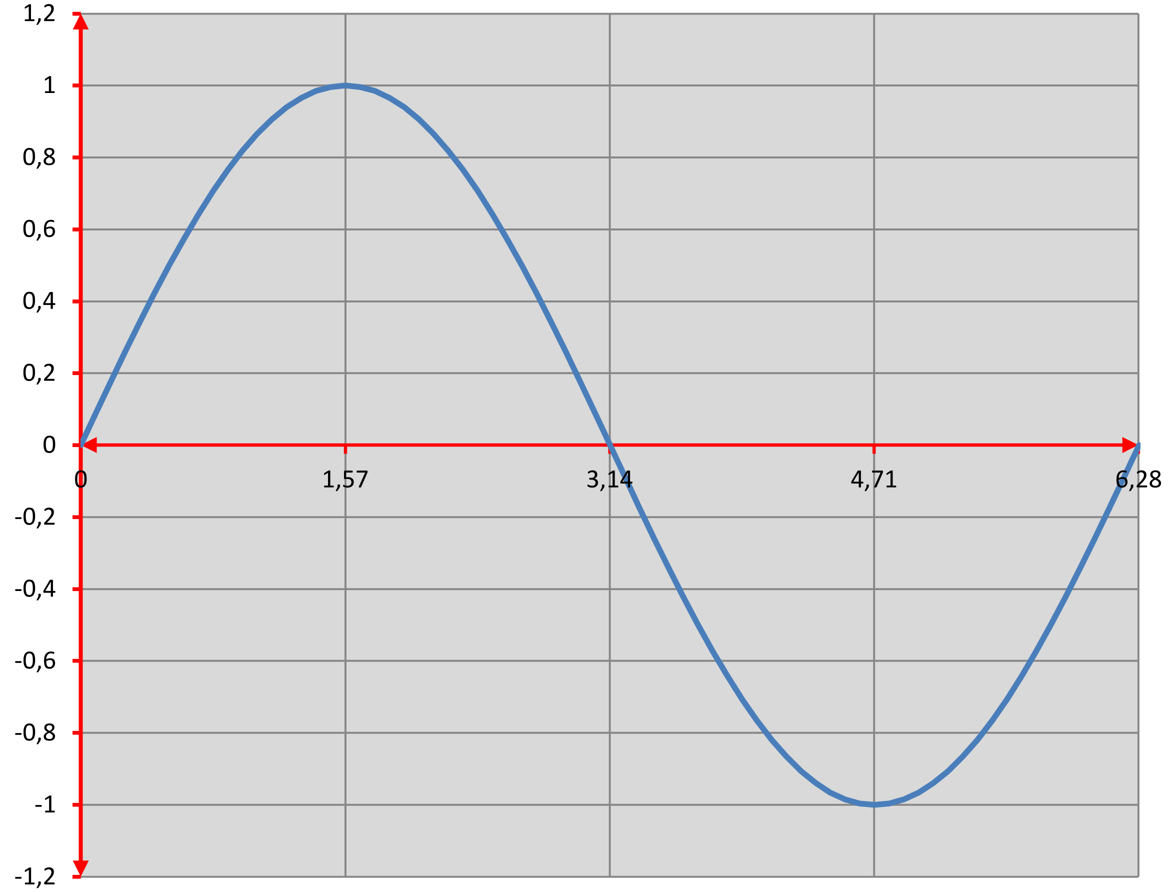
Si entre el codominio y dominio respectivo no existiera la coincidencia señalada, se puede decir que la función compuesta no existe.

No obstante con el conocimiento de las funciones básicas se pueden efectuar restricciones tales que hagan que *" la imagen" de "f" coincida con el dominio de "g".*

Ejemplo de función compuesta:
(ángulo en radianes)

$$y = (\mathrm{sen}\, x)^2 = \mathrm{sen}^2\, x$$

f = sen x



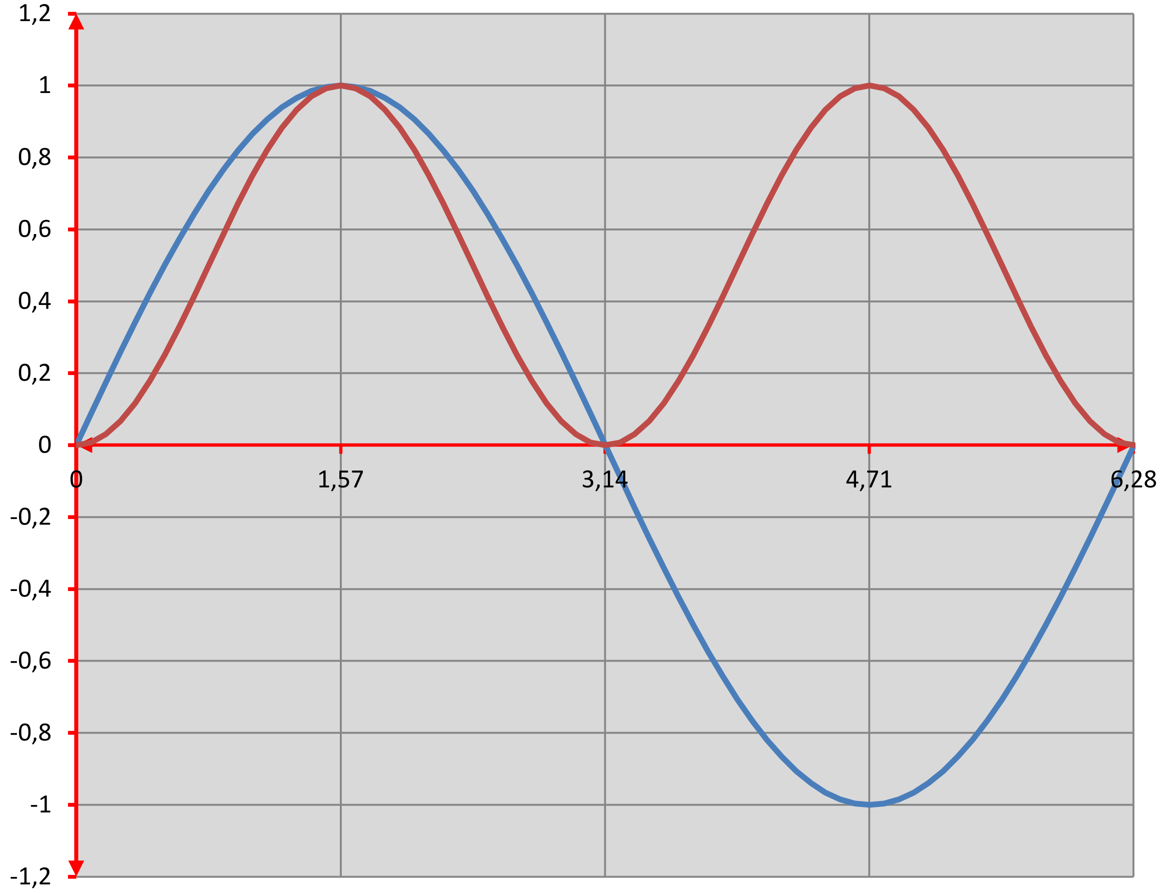
Ejemplo de función compuesta:
(ángulo en radianes)

$$y = (\mathrm{sen}\, x)^2 = \mathrm{sen}^2\, x$$

$f = \mathrm{sen}\, x$

$g = f^2$

El codominio de la primera
[-1; 1],
es el dominio de la segunda.



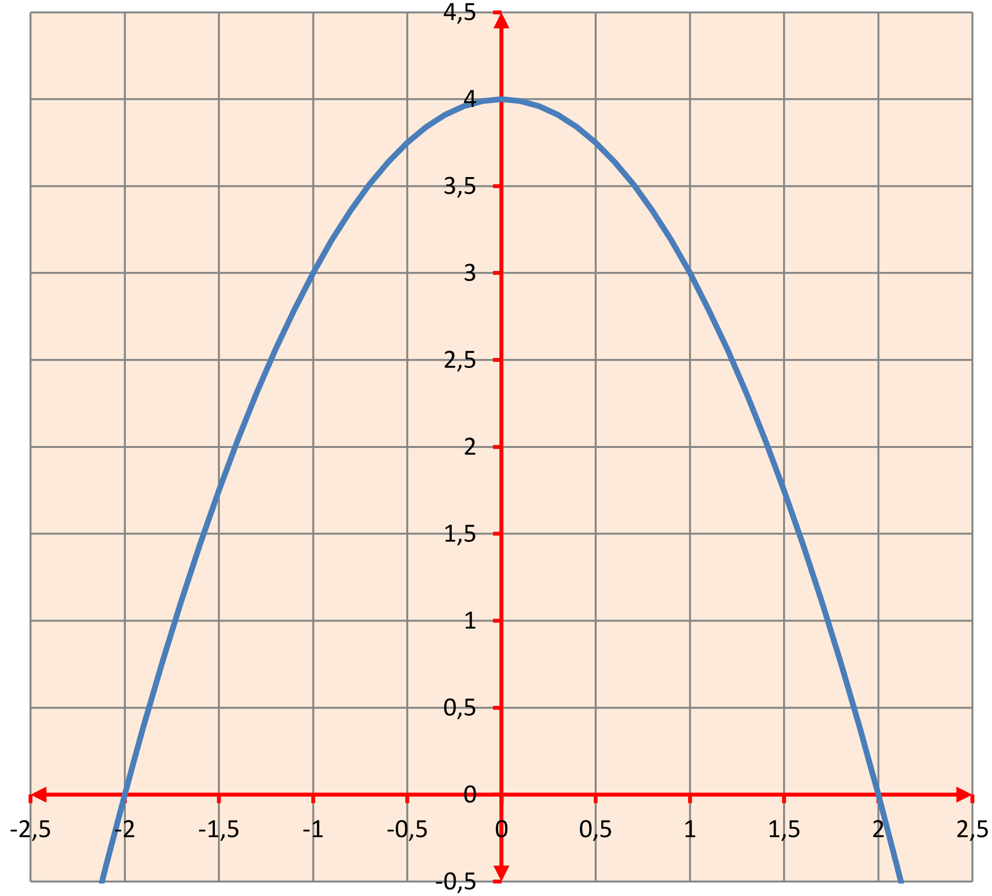
Ejemplo de función compuesta:

$$y = +\sqrt{-x^2 + 4}$$

Ejemplo de función compuesta:

$$y = +\sqrt{-x^2 + 4}$$

En este caso, la función
de 2° grado bajo el radical
$-x^2 + 4$
no puede ser negativa.



Ejemplo de función compuesta:

$$y = +\sqrt{-x^2 + 4}$$

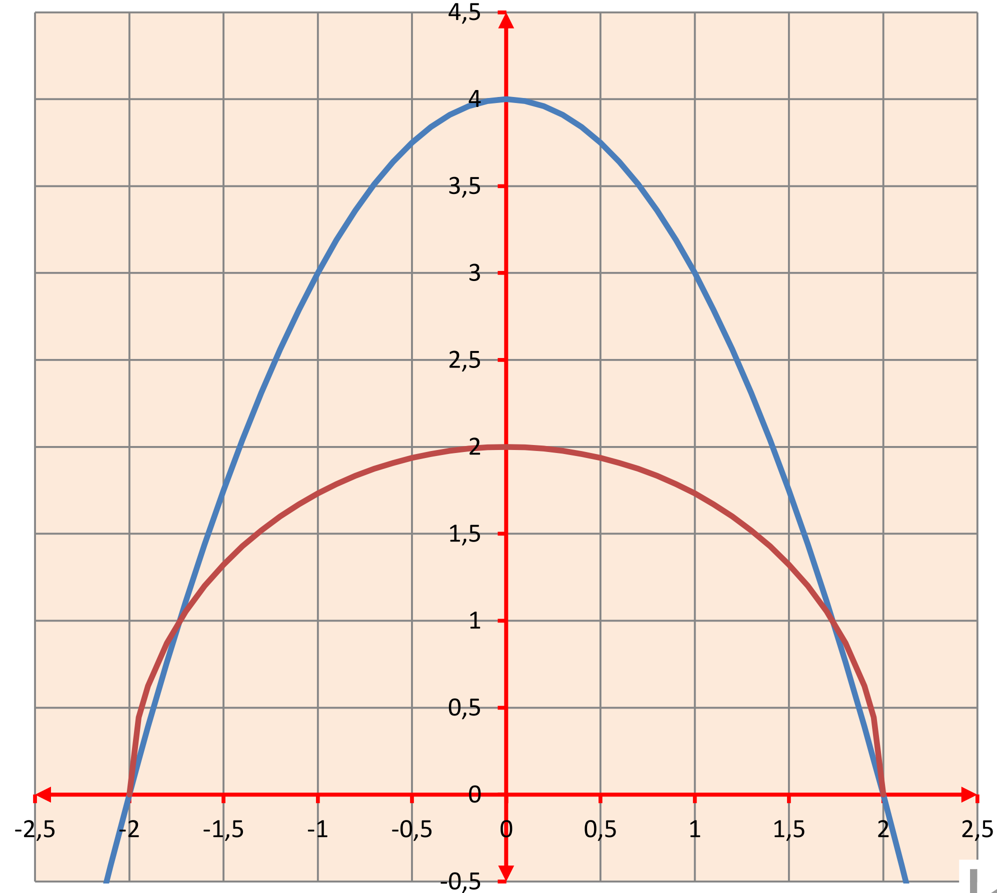
En este caso, la función
de 2° grado bajo el radical

$-x^2 + 4$

no puede ser negativa.

Las raíces son 2 y -2, con lo que el
dominio de la función
deberá ser [-2 ; 2] ,
pues fuera de esos valores
la parábola de 2° grado
se hace negativa.

La función dada corresponde a una
semicircunferencia de radio = 2



18 – Funciones Paramétricas.

Hasta ahora hemos visto en general, gráficos de funciones explícitas de la forma y = f (x) .
Pero existen ciertas funciones matemáticas en las que se expresan, tanto la absisa **“x”** como la ordenada **“y”**, cada una por separado, en función de otra variable **“t”**, que se llama *parámetro.*

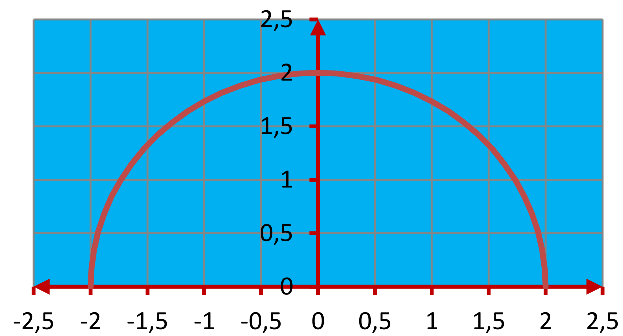
$$\begin{cases} y = g(t) \\ x = h(t) \end{cases}$$

Es así que se define cada punto (x_i ; y_i) de la gráfica, asignándole solo valores a “t”. Esto debe tenerse en cuenta cuando se defina el dominio del parámetro.

Por ejemplo la semicircunferencia de radio “r” la vimos en forma explícita: $y = +\sqrt{-x^2+4}$
Su dominio en ese caso es: [-2; 2].
Pero se puede expresar en forma paramétrica, para lo cual debe considerarse que “t” es un ángulo, medido por supuesto en radianes, con lo que el dominio de “t” es: [- π/2 ; π/2] **.**

Las expresiones quedan así:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \text{ sen } t \end{cases}$$



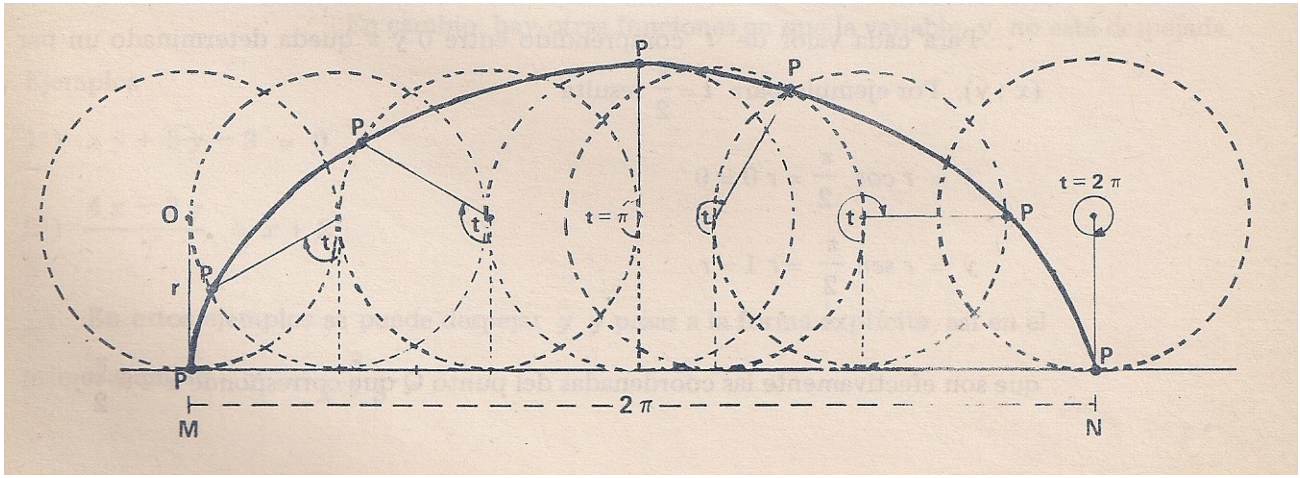
La semicircunferencia vista, la parábola de 2° grado y otras funciones, se pueden describir fácilmente con la forma explícita. Pero hay casos en que es ***indispensable*** el empleo de las expresiones paramétricas, por lo complicado que resulta el planteo en la forma explícita.

Es el caso de la llamada "cicloide", que se define como la curva engendrada por un punto de una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre una recta.

Sin demostrarlo, se presentan las expresiones paramétricas de la cicloide:

$$\begin{cases} x = r\,(t - \operatorname{sen} t) \\ y = r\,(1 - \cos t) \end{cases}$$

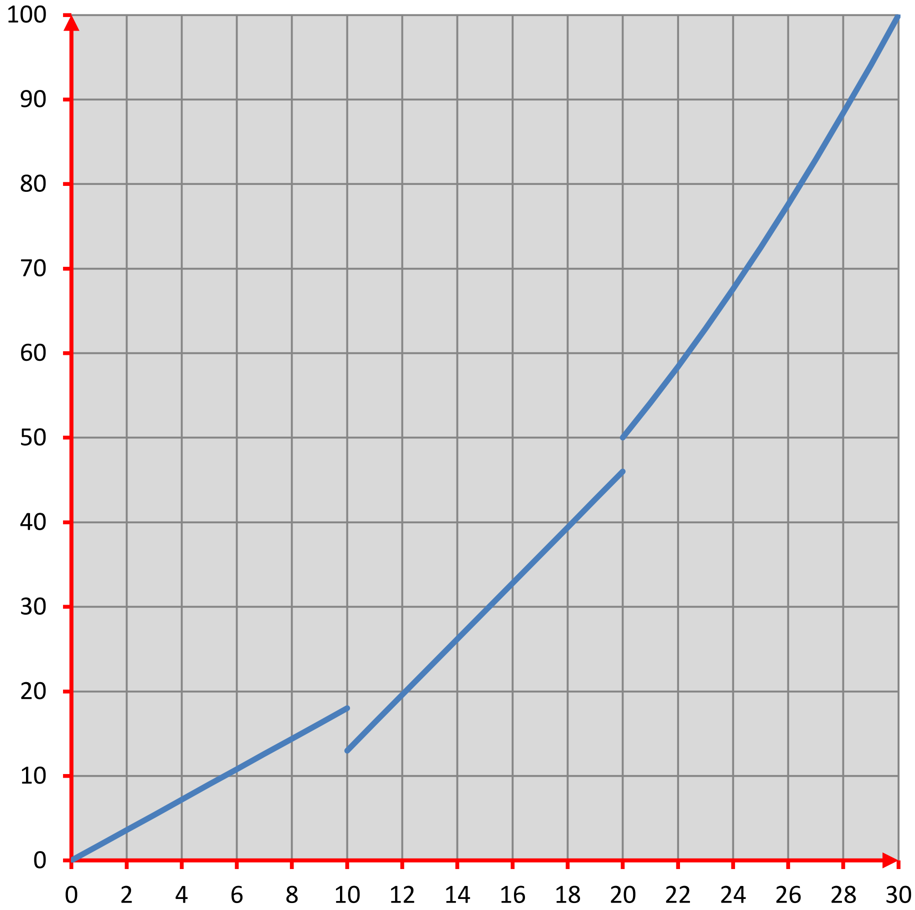
Dominio: $[\,0;\pi\,]$



19 – Funciones definidas por tramos.

Finalmente, se puede dar una función en dos o mas tramos diferentes, para lo cual hay que especificar claramente las expresiones explícitas correspondientes a cada uno de los tramos y sus respectivos dominios.

Damos algún ejemplo:



y = 1,3 x **D: [0 ; 10]**

y = 3,3 x – 20 **D: (10 ; 20]**

y = 0,1 x^2 + 10 **D: (20 ; 30]**

Apéndice

1. Se aclara como se definen simbólicamente los intervalos numéricos. Se proponen los siguientes conjuntos:

$A = \{ x / 2 < x < 8 \} \equiv (2; 8) \equiv$ intervalo abierto (no incluye los extremos)

$B = \{ x / 2 \leq x \leq 8 \} \equiv [2; 8] \equiv$ intervalo cerrado (incluye los extremos)

$C = \{ x / 2 < x \leq 8 \} \equiv (2; 8] \equiv$ intervalo abierto a la izquierda (incluye solo el extremo derecho)

$D = \{ x / 2 \leq x < 8 \} \equiv [2; 8) \equiv$ intervalo abierto a la derecha (incluye solo el extremo izquierdo)

Intervalos que contienen la noción de infinito (∞):

$E = \{ x / x > 5 \} \equiv (5; \infty) \equiv$ no incluye el 5

$F = \{ x / x \geq 5 \} \equiv [5; \infty) \equiv$ incluye el 5

$G = \{ x / x < 5 \} \equiv (-\infty; 5) \equiv$ no incluye el 5

$H = \{ x / x \leq 3 \} \equiv (-\infty; 5] \equiv$ incluye el 5

2. Después de haber conocido en forma clásica la *clasificación de las funciones*, se puede comprender en forma relativamente sencilla, una nueva clasificación.
Esta clasificación suele darse al comienzo del tema *"funciones"* cuando el estudiante aún no se ha familiarizado con el *"universo de las funciones".*

Tengamos en cuenta las definiciones que se dieron al comienzo de este trabajo:

Se dice que una variable "y" es función de otra variable "x", cuando entre ellas existe una expresión matemática tal que, a cada valor de "x" le hace corresponder un valor de "y" y sólo uno.

$$y = f(x)$$

La variable "x" se llama "variable *independiente" o "argumento*", mientras que a la "y" se la conoce como "variable *dependiente" o "función".*

El conjunto de valores que pueden ser asignados a "x" se llama "*Dominio D"* o "conjunto de partida" mientras que se conoce como "*Codominio CD*" o "conjunto de llegada", el que agrupa a los valores que puede tomar "y".

Dentro del codominio pueden existir elementos que no se correspondan con elementos del dominio; en ese caso se puede definir como *"conjunto imagen"* al que contiene solo aquellos valores que coincidan, *por la función*, con elementos del conjunto "x".

Función "inyectiva" : es aquella en la cual dos elementos distintos cualesquiera del dominio, tienen imágenes también distintas en el codominio. La correspondencia se dice que es *"uno a uno".*

Es el caso de la función lineal o la cúbica, pero no así la función cuadrática que "*no es inyectiva"* porque por ejemplo para x = 2 y x = -2, la función vale y = 4.

Función "sobreyectiva" (o suryectiva): es toda función en la cual el conjunto "imagen" es igual (o coincide) con el "codominio".

Nuevamente las funciones lineal y cúbica de R $\rightarrow$ R cumplen con la definición. En cambio la función cuadrática de R $\rightarrow$ R, *"no es sobreyectiva",* ya que los valores de x^2 son siempre positivos: $R^+ \neq$ R

Función "biyectiva": es la función que a la vez es *"inyectiva y sobreyectiva".* Se dice que la correspondencia es "*biunívoca" .*

Otra vez la función lineal es biyectiva (uno a uno y sobre); mientras que la función y = sen x de R en R no es ni inyectiva ni sobreyectiva, ya que su conjunto imagen es: [1;-1] $\neq R$.

3. Función Inversa:

Si en una función y = f(x), dada por el conjunto de pares de valores (x;y) , permutamos en cada uno el orden de sus componentes, el conjunto (y;x) que se obtiene es una nueva relación entre las variables.

Pero esta relación solo puede considerarse *"función"*, a la luz de las definiciones aceptadas, *exclusivamente si la función original y = f(x) es "biyectiva".*

En efecto, si la función "*no es inyectiva*" la inversa "*no puede ser función*" porque a cada valor de la variable independiente le correspondería mas de un valor imagen. Tampoco puede "*no ser sobreyectiva*" porque al diferir el conjunto imagen del codominio, habría valores de la variable del conjunto de partida que no se corresponderían con el conjunto de llegada.

Como consecuencia puede afirmarse que una función "$\boldsymbol{f}$" tiene función inversa "$\boldsymbol{f^{-1}}$" si y solo si, es una función biyectiva.

En conclusión: si los pares (x;y) definen la función biyectiva "f", los pares (y;x) definirán la función inversa f^{-1}.

Es importante destacar que existen funciones que no tienen función inversa.

En algunos casos para forzar a que una función sea <u>*biyectiva,*</u> se recurre a <u>*redefinir*</u> el <u>*dominio, el codominio o ambos*</u>.
Por ejemplo para la función cuadrática, se restringen dominio y codominio a reales positivos es decir: R^+en R^+, con lo que se obtiene claramente la función inversa irracional.

de y = x^2 de R^+en R^+ $\longrightarrow$ y = $\sqrt{x}$

El procedimiento para obtener la función inversa de una función dada es:

1. Se verifica que la función f: y = f(x) sea biyectiva.
2. Si corresponde se restringen el dominio, el codominio o ambos.
3. En la expresión de la función se despeja algebraicamente la variable "x": x = g(y)
4. En esta última se permutan "x" por "y" y se obtiene f^{-1}

Como otro ejemplo sea la función: y = sen x ; R en R .
Esta función no es inyectiva y para que lo sea hacemos al dominio D: $[-\pi/2;\ \pi/2]$.
La función tampoco es sobreyectiva, por lo tanto al codominio lo restringimos CD: [-1; 1].

De esta manera y = sen x ; $[-\pi/2;\ \pi/2]$ en$[-1;\ 1]$ sí es biyectiva, en consecuencia tiene inversa: y = arc sen x = sen^{-1}x ; [-1; 1] en $[-\pi/2;\ \pi/2]$.

Gracias por su atención.

Se sugiere discutir el tema propuesto.

F I N