Física teórica
MECÁNICA

Cinemática tensorial

Tema 1
Vectores

Índice.

Distinción o diferencia entre $+$ y $\oplus$.

<u>Apartado - 3</u> (15).

Ley de composición externa. Operación externa. Dominio de operadores. Operador. Conjunto soporte. Producto escalovectorial.

<u>Apartado - 4</u> (16).

R-espacio vectorial de soporte V_L^n, con R como dominio de operadores. $[(V_L^n, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$. Símbolo $\equiv$.

Cinemática tensorial.
Tema 1 (vectores).

Magnitudes.

Apartado-1.

Una MAGNITUD FÍSICA es un valor cuantitativo o numérico asociado a una propiedad física (cualidad medible de un sistema físico), tomando como referencia un PATRÓN o UNIDAD DE MEDIDA. Existen magnitudes físicas BÁSICAS o FUNDAMENTALES y magnitudes físicas DERIVADAS (es decir, definidas a partir de las fundamentales).

Las magnitudes físicas pueden ser básicamente de 2 tipos: escalares y vectoriales o tensoriales (las magnitudes vectoriales son consideradas como un caso particular de las tensoriales).

Las <u>magnitudes escalares</u> son aquéllas que quedan completamente definidas mediante un número (generalmente, un número real) al que se le adosa la unidad de medida pertinente. Las <u>magnitudes vectoriales</u> son aquéllas que quedan caracterizadas por una cantidad (intensidad o módulo vectorial), una dirección, un sentido y frecuentemente un punto de aplicación.

Apartado-2.

Un ESCALAR es una magnitud física que se expresa mediante un número (real, generalmente) y posee el mismo valor en cualquier sistema de referencia. La magnitud escalar se expresa como una multiplicación o producto implícito de un número $r \in R$ por una unidad $u \in M$ de medida de una magnitud M: $\quad r \cdot u$

Matemáticamente hablando, un escalar suele ser un número real o complejo que da soporte a una estructura algebraica denominada CUERPO, la cual estructura juega un importante papel en la construcción de otra estructura algebraica más compleja llamada ESPACIO VECTORIAL. La estructura de Espacio Vectorial es el núcleo fundamental del Álgebra Lineal, rama básica del Álgebra Abstracta o Moderna que permite abordar con éxito teorías de un sinfín de disciplinas, desde la Economía

hasta la Física Teórica, aparte del propio valor matemá-
tico intrínseco que permite progresar a la misma matemática.

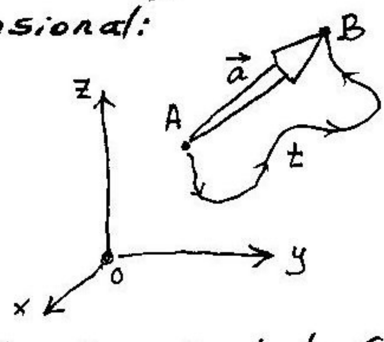
Apartado-3.

Los VECTORES son entes físicos y matemáticos que dan soporte conceptual a la estructura algebraica de ESPACIO VECTORIAL, fundamental en Álgebra Lineal, donde escalares y vectores son a la vez elementos contrapuestos y complementarios. Existen muchas clases de Vectores, pero todos ellos se pueden considerar tributarios conceptualmente de 2 tipos de vectores llamados VECTOR DESPLAZAMIENTO y VECTOR POSICIÓN. El estudio de estos 2 tipos de Vectores nos permitirá establecer un nexo teórico común para la Física y la Matemática, a partir del cual tratar todo tipo de vectores y también los Tensores.

Vectores fijos o ligados.

Apartado-1.

En física, el vector más sencillo es el que tiene que ver con el desplazamiento de un cuerpo puntual o una partícula (un punto geométrico, en términos más abstractos) desde un punto A hasta otro B del espacio tridimensional:



Hay que tener en cuenta, sin embargo, que no es lo mismo DESPLAZAMIENTO que TRAYECTORIA. El Desplazamiento se considera como un segmento rectilíneo orientado $\vec{a} = \vec{AB}$ que indica la distancia orientada (positiva o negativa) desde A hasta B: $\vec{a} = \pm\, dist(A,B)$

La Trayectoria, en cambio, es habitualmente una curva alabeada continua t que indica el camino seguido por la partícula desde A hacia B y puede tener un sentido de recorrido positivo (desde A hasta B) o negativo (desde B hasta A).

Para poder definir $\vec{a}$ de manera conveniente es necesario defi-

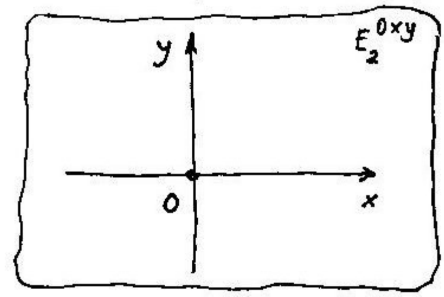
Apartado-2.

Se llama ESPACIO EUCLIDIANO CLÁSICO, o simplemente ESPACIO EUCLIDIANO, al espacio tridimensional que percibimos intuitivamente y que Euclides (325-265 antes de la EC) concibió en su obra matemática ELEMENTOS (un tratado aritmético y geométrico compuesto por 13 tomos, que contenía una recopilación bien ordenada de todo el saber matemático de la Antigüedad, presentado en forma de sistema teórico lógico y deductivo a partir de unos axiomas y unas definiciones fundamentales). Tal espacio euclidiano lo representaremos por E_3 (espacio euclidiano tridimensional ordinario, considerado como un conjunto de infinitos puntos correspondientes a todo el espacio). Y dentro de E_3 existirían infinita cantidad de PLANOS EUCLIDIANOS, siendo cada plano en sí mismo un Espacio Bidimensional Ordinario ó E_2. A su vez, E_2 alberga infinita cantidad de RECTAS EUCLIDIANAS, siendo cada recta un Espacio Unidimensional Ordinario ó E_1. Finalmente, cada E_1 alberga una infinita cantidad de PUNTOS EUCLIDIANOS adimensionales, y denotaremos a cada punto como E_0 (espacio euclidiano adimensional ordinario).

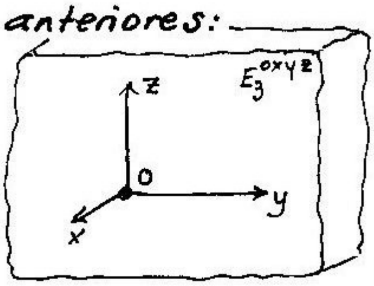
En Matemática Moderna se ha ampliado el concepto de espacio tridimensional E_3, reduciendo este último a un caso particular de un Espacio Euclidiano N-Dimensional ó E_n, que Euclides ni siquiera llegó a plantearse. En E_n, cuando $n \geq 4$, no es posible dar una representación geométrica espacial, con lo que para $n \geq 4$ el tratamiento teórico forzosamente queda circunscrito a los dominios del Álgebra Abstracta y el Análisis Abstracto, sin aparente conexión con el mundo real al que estamos acostumbrados.

Apartado-3.

René Descartes (1596-1650) introdujo en E_2 un sistema de coordenadas Oxy, llamadas COORDENADAS CARTESIANAS, dando lugar al llamado PLANO CARTESIANO y a los comienzos de la Geometría Analítica. El Plano Cartesiano, o ESPACIO BIDIMENSIONAL CARTESIANO, lo denotaremos por E_2^{Oxy}:



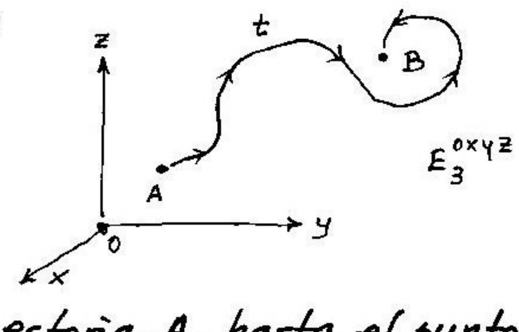
Dicho espacio E_2^{0xy} albergaría en su seno al ESPACIO CARTESIANO UNIDIMENSIONAL ó RECTA CARTESIANA, que denotaremos por E_1^{0x} (eje de abscisas). Por su parte, E_1^{0x} albergaría al ESPACIO CARTESIANO ADIMENSIONAL ó PUNTO CARTESIANO, que denotaremos por E_0^{0} (el centro de coordenadas). Posteriormente, se introdujo el ESPACIO CARTESIANO TRIDIMENSIONAL, denotado por E_3^{0xyz}, que alberga a los tres anteriores:



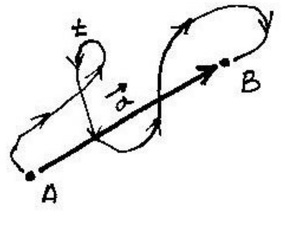
Finalmente, por generalizaciones abstractas, se introdujo el concepto de ESPACIO CARTESIANO N-DIMENSIONAL, denotado por $E_n^{0x_1 \dots x_n}$, donde el sistema de coordenadas $0x_1 x_2 \dots x_n$ se compone teóricamente de n ejes coordenados ortogonales (perpendiculares entre sí), denotados aquí por x_i $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$, que se cortan en 0, el centro u origen de coordenadas. Cuando $n \geq 4$, evidentemente, se hace imposible la representación geométrica y entonces todo el estudio matemático en dicho contexto debe circunscribirse necesariamente a los dominios del Álgebra Moderna o Abstracta.

Apartado - 4.

En Cinemática, la TRAYECTORIA de un cuerpo puntual es un segmento de línea curva alabeada continua t que se recorre en un determinado sentido:



Por otra parte, el DESPLAZAMIENTO de dicho cuerpo puntual es un segmento rectilíneo orientado $\overrightarrow{AB}$ que va desde el punto inicial de la trayectoria, A, hasta el punto final de la misma, B, y recibe el nombre de VECTOR DESPLAZAMIENTO, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, del citado cuerpo puntual. Dicho vector $\overrightarrow{AB}$ une los puntos inicial y final de la trayectoria.



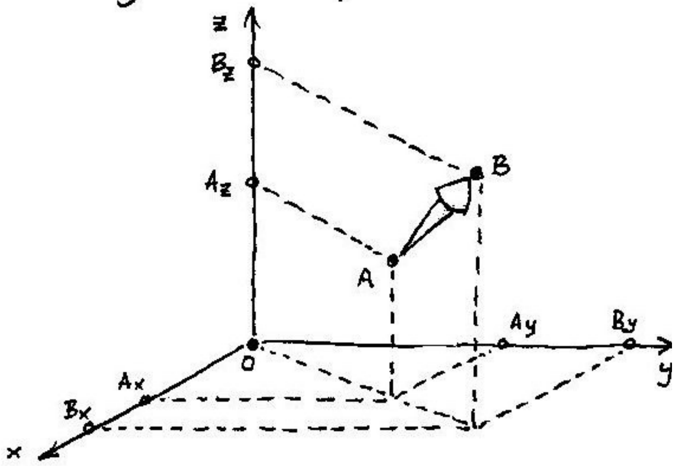
Apartado-5.

El espacio cartesiano tridimensional E_3^{Oxyz} y el vector desplazamiento $\vec{a}$ constituyen una abstracción de muchas situaciones concretas que tienen que ver con mapas (estelares, atmosféricos, etc.) y puntos de referencia en ellos (estrella polar, torres de observación, etc.), al objeto de poder describir analíticamente el cambio de ubicación de objetos móviles (cometas, aviones, etc.) que se desplazan en el espacio. Por lo tanto, el vector desplazamiento $\vec{a} = \vec{AB}$ se enmarca dentro del sistema referencial del espacio tridimensional cartesiano E_3^{Oxyz}, donde se puede dotar a A y B de unas coordenadas precisas que permiten efectuar cálculos algebraicos pertinentes:

Las coordenadas de A y B son:

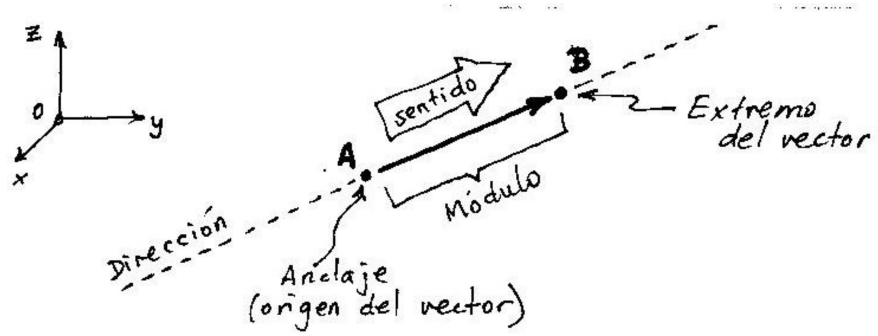
$\text{coord}(A) = (A_x, A_y, A_z)$

$\text{coord}(B) = (B_x, B_y, B_z)$



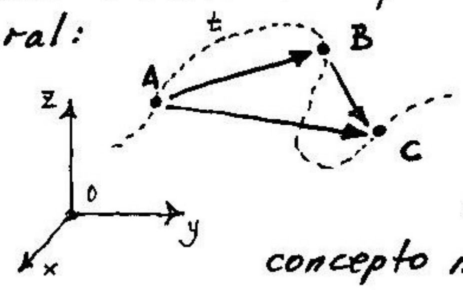
Apartado-6.

Un vector desplazamiento $\vec{AB} = \vec{a}$ posee en sí mismo (está constituído por) los siguientes elementos: Anclaje o punto de aplicación, extremo (punto extremo), módulo o intensidad, dirección y sentido. El ANCLAJE o punto de aplicación de $\vec{AB}$ es A, de coordenadas (A_x, A_y, A_z) en E_3^{Oxyz}. El EXTREMO de $\vec{AB}$ es B, de coordenadas (B_x, B_y, B_z) en E_3^{Oxyz}. El MÓDULO de $\vec{AB}$, que se denota por $|\vec{AB}|$, es un número $a \in R^+$ (número real positivo, excepcionalmente el cero cuando $A=B$) y equivale a la distancia o longitud del segmento rectilíneo AB: $|\vec{AB}| = |\vec{a}| = a \in R^+ = \text{long}(AB) = \text{dist}(A,B)$. La DIRECCIÓN de $\vec{AB}$ es la recta AB, denominada también RECTA DE ACCIÓN o RECTA SOPORTE de $\vec{AB}$. El SENTIDO de $\vec{AB}$, dentro de su recta soporte, es el que va desde A hacia B (el sentido opuesto a éste es el que va desde B hacia A):



Apartado - 7.

Cuando un tramo de trayectoria t se jalona en al menos 3 puntos A, B y C, es posible entonces definir una Adición o Suma de vectores-desplazamiento de una manera lógica y natural:



$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Si hacemos abstracción de (o eludimos) la trayectoria t, obtenemos un concepto más matemático denominado VECTOR FIJO o VECTOR LIGADO (pues se sobreentenderá: Vector anclado o ligado a un punto fijo del espacio cartesiano). Por lo tanto, al igual que el Vector Desplazamiento, el Vector Fijo constará de los siguientes elementos constitutivos:

1).- PUNTO DE ANCLAJE, o punto de Aplicación u Origen del Vector.

2).- Punto Extremo del Vector.

3).- MÓDULO, longitud o distancia entre el origen y el extremo del Vector.

4).- Dirección, o Recta de Acción (Recta soporte), que contiene al Vector.

5).- SENTIDO, desde el origen hacia el extremo del Vector.

Apartado - 8.

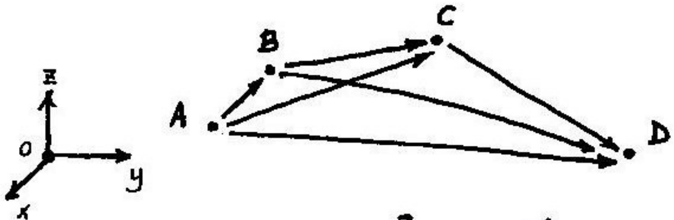
Llamando V_f^3 al conjunto de todos los vectores fijos que se pueden representar en E_3^{OXYZ} y llamando $\oplus$ a la operación de Adición o Suma de Vectores fijos (los cuales deberán estar necesariamente concatenados), se puede entonces definir una estructura algebraica de GRUPO (no abeliano, por cierto) para $(V_f^3, \oplus)$, al cumplir las siguientes propiedades:

1).- Clausura: $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_f^3 \mid \text{conc}(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow (\vec{a} \oplus \vec{b}) \in V_f^3$.

La expresión "conc$(\vec{a}, \vec{b})$" significa que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ están con catenados, esto es, que el extremo de $\vec{a}$ coincide con el origen de $\vec{b}$.

2).- Asociatividad: $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V_f^3 \mid conc(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \Rightarrow$
$$\Rightarrow (\vec{a}\oplus\vec{b})\oplus\vec{c} = \vec{a}\oplus(\vec{b}\oplus\vec{c}).$$

La expresión "conc($\vec{a},\vec{b},\vec{c}$)" significa que $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$ están concatenados, o sea, que $\vec{b}$ está anclado en el extremo de $\vec{a}$ y $\vec{c}$ en el extremo de $\vec{b}$. La asociatividad de la adición de vectores fijos es fácilmente deducible al observar el gráfico siguiente:



$\vec{a} = \vec{AB}$
$\vec{b} = \vec{BC}$
$\vec{c} = \vec{CD}$

3).- Neutralidad: $\forall \vec{a} \in V_f^3 \mid \vec{a} = \vec{AB} \Rightarrow$
$$\Rightarrow \exists \vec{o} \in V_f^3 \mid \vec{o} = \vec{AA} = \vec{BB} \mid \vec{a}\oplus\vec{o} = \vec{o}\oplus\vec{a} = \vec{a}$$

Donde:
$$\vec{a}\oplus\vec{o} = \vec{AB}\oplus\vec{BB} = \vec{AB}$$
$$\vec{o}\oplus\vec{a} = \vec{AA}\oplus\vec{AB} = \vec{AB}$$

El vector $\vec{o}$ se llama VECTOR NULO y equivale a un punto del espacio, es decir, a un vector en el que el origen y el extremo coinciden.

4).- Inversión: $\forall \vec{a} \in V_f^3 \mid \vec{a} = \vec{AB} \Rightarrow$
$$\Rightarrow \exists -\vec{a} \in V_f^3 \mid -\vec{a} = -\vec{AB} = \vec{BA} \mid \vec{a}\oplus(-\vec{a}) = \vec{AB}\oplus\vec{BA} = \vec{AA} = \vec{o}$$

Donde $-\vec{a}$ es el vector Opuesto al $\vec{a}$.

Apartado-9.

El concepto de $(V_f^3,\oplus)$ se puede generalizar para "n" dimensiones, introduciendo entonces la estructura $(V_f^n,\oplus)$, teóricamente representable en $E_n^{Ox_1\dots x_n}$, aunque geométrica o visualmente impracticable para $n \geq 4$. Se dota a $(V_f^n,\oplus)$ de estructura de Grupo (no conmutativo) al extender a él las propiedades de $(V_f^3,\oplus)$. Por tanto, para $(V_f^n,\oplus)$ hacemos cumplir:

1).- Clausura: $\forall \vec{a},\vec{b} \in V_f^n \mid conc(\vec{a},\vec{b}) \Rightarrow (\vec{a}\oplus\vec{b}) \in V_f^n$.

2).- Asociatividad: $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V_f^n \mid conc(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \Rightarrow$
$$\Rightarrow (\vec{a}\oplus\vec{b})\oplus c = \vec{a}\oplus(\vec{b}\oplus\vec{c}).$$

3).- Neutralidad: $\forall \vec{a} \in V_f^n \Rightarrow \exists \vec{o} \in V_f^n \mid \vec{a}\oplus\vec{o} = \vec{o}\oplus\vec{a} = \vec{a}$

4).- Inversión: $\forall \vec{a} \in V_f^n \Rightarrow \exists -\vec{a} \in V_f^n \mid \vec{a}\oplus(-\vec{a}) = (-\vec{a})\oplus\vec{a} = \vec{o}$.

Apartado-1.

Sean A y B sendos conjuntos no vacíos y sea $a\in A$ un elemento genérico de A y $b\in B$ un elemento genérico de B. Sea ahora el conjunto producto cartesiano $A\times B$: $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,\, b\in B\}$

Es posible enunciar cierta ley o propiedad, o vinculación, $\mathcal{R}$, con la pretensión de relacionar elementos de A con elementos de B, o sea, relacionar el elemento primera componente del par genérico $(a,b)\in A\times B$ con el elemento segunda componente de dicho par. Tal relación, $\mathcal{R}$, recibe el nombre de RELACIÓN BINARIA entre A y B, y puede cumplirse parcial o totalmente para los pares ordenados $(a,b)\in A\times B$. Así, si para determinado $(a_1,b_1)\in A\times B$ se cumple $\mathcal{R}$, se escribirá $a_1\mathcal{R}b_1$; pero si no se cumple, se escribirá $a_1\not\mathcal{R}b_1$. Al final, se obtendrán 2 subconjuntos disjuntos entre sí de $A\times B$, uno de ellos formado por los pares que sí cumplen $\mathcal{R}$ y otro formado por los pares que no cumplen $\mathcal{R}$.

Cuando sucede que $A=B$, entonces se dirá que $\mathcal{R}$ está definida en A, para los elementos de A. Vale decir, no obstante, que $\mathcal{R}$ queda definida para las componentes de $(a,b)\in$ $\in A\times A=A^2$.

Apartado-2.

Una relación binaria $\mathcal{R}$, definida en un conjunto A, se llamará RELACIÓN DE EQUIVALENCIA cuando el sistema $(A,\mathcal{R})$ goza de las siguientes propiedades:

1).- Reflexividad: $\forall a\in A \Rightarrow a\mathcal{R}a$

2).- Simetría: $\forall a,b\in A \mid a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$

3).- Transitividad: $\forall a,b,c\in A \mid a\mathcal{R}b,\, b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$

Un sistema así, $(A,\mathcal{R})$, o ESTRUCTURA DE EQUIVALENCIA, se caracteriza porque el conjunto soporte de la estructura, A, queda dividido mediante $\mathcal{R}$ en CLASES DE EQUIVALENCIA, cada una de las cuales es un subconjunto de A formado por todos los elementos de A que son equivalentes entre sí o equivalentes a un determinado $a\in A$. Ninguna de dichas clases resultará vacía, ya que por la propiedad Reflexiva (reflexividad) se tendrá al menos que $a \in cl(a)$, siendo "$cl(a)$" la notación que se usa para nominar la clase de equivalencia de $a \in A$. Por otra parte, se cumple:

1).- Dos elementos cualesquiera $a, b \in A$ y pertenecientes a su vez a una misma clase de equivalencia $cl(a)$, son equivalentes entre sí: $a \mathcal{R} b$.

2).- Si $a \mathcal{R} b$, entonces: $cl(a) = cl(b)$.

3).- De lo anterior se deduce que una determinada clase de equivalencia $cl(a)$ no sólo queda determinada por un cierto elemento $a \in A$ y $a \in cl(a)$, sino también por cualquier otro de los elementos $b \in cl(a)$, el cual también se puede tomar como REPRESENTANTE de dicha clase, pues: $cl(b) = cl(a)$.

4).- Si $c \in A$ es tal que $c \in cl(a)$ y $c \in cl(b)$, entonces sucede que: $cl(a) = cl(b)$.

5).- Si un determinado $b \in A$ es tal que $b \notin cl(a)$, entonces $b \not\mathcal{R} a$, y consecuentemente: $cl(a) \cap cl(b) = \phi$.

6).- De lo anterior se infiere que todo elemento $a \in A$ pertenece a una clase, y sólo una, por lo que toda relación de equivalencia $\mathcal{R}$ definida sobre un conjunto A determina una PARTICIÓN de A en subconjuntos $S_1, S_2, \ldots$ disjuntos entre sí que son las clases de equivalencia:

$$A = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \ldots$$

Tal que:

$$S_1 = cl(a)$$
$$S_2 = cl(b)$$
$$S_3 = cl(c)$$
$$------$$

y tal que: $\forall S_i, S_j \subset A \Rightarrow S_i \cap S_j = \phi$.

Al conjunto de todas las clases de equivalencia de $(A, \mathcal{R})$ se le llama CONJUNTO COCIENTE de $(A, \mathcal{R})$ y se denota por $A/\mathcal{R}$.

Apartado-3.

Todo vector fijo $\vec{AB} = \vec{a} \in V_f^n$ posee unas coordenadas en su origen A y otras coordenadas en su extremo B, tomadas respecto al espacio cartesiano $E_n^{0x_1 \dots x_n}$:

$$\mathrm{coord}\,(A) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$
$$\mathrm{coord}\,(B) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

Pues bien, se llamarán COMPONENTES del vector fijo $\vec{a} \in V_f^n$ a los elementos que integran la siguiente n-tupla:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

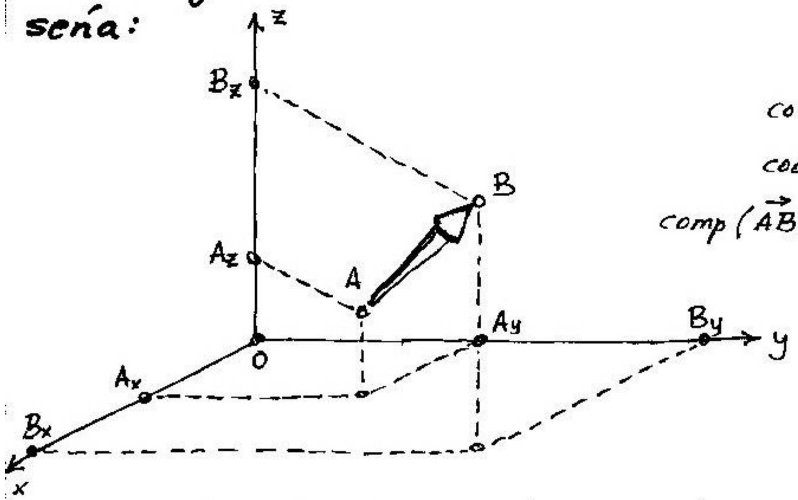
Tal que:

$$\mathrm{comp}\,(\vec{AB}) = \mathrm{comp}\,(\vec{a}) = \mathrm{coord}\,(B) - \mathrm{coord}\,(A) =$$
$$= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) - (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2, \dots, \beta_n - \alpha_n) =$$
$$= (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Donde:

$$a_1 = \beta_1 - \alpha_1 \;;\; a_2 = \beta_2 - \alpha_2 \;;\; \dots \;;\; a_n = \beta_n - \alpha_n.$$

En realidad, las componentes de un vector fijo $\vec{a} \in V_f^n$ son las longitudes orientadas (positivas o negativas) de las proyecciones ortogonales (perpendiculares) del vector $\vec{a} \in V_f^n$ sobre los ejes coordenados de $E_n^{0x_1 \dots x_n}$. Por ejemplo, para $n = 3$ sería:



$$\mathrm{coord}\,(A) = (A_x, A_y, A_z)$$
$$\mathrm{coord}\,(B) = (B_x, B_y, B_z)$$
$$\mathrm{comp}\,(\vec{AB}) = (B_x - A_x, B_y - A_y, B_z - A_z).$$

Se sobreentiende que hay muchos vectores fijos (infinita cantidad de ellos, de hecho) que coinciden en sus componentes (componentes iguales), aunque no lo hacen en cuanto a las coordenadas de sus respectivos orígenes (anclajes o puntos de aplicación). Por lo tanto, tiene sentido definir lo que se llama EQUIPOLENCIA VECTORIAL, para vectores fijos exclusivamente. Así, diremos que 2 vectores fijos, $\vec{a}, \vec{b} \in V_f^n$, con $\vec{a} \neq \vec{b}$, son EQUIPOLENTES cuando:

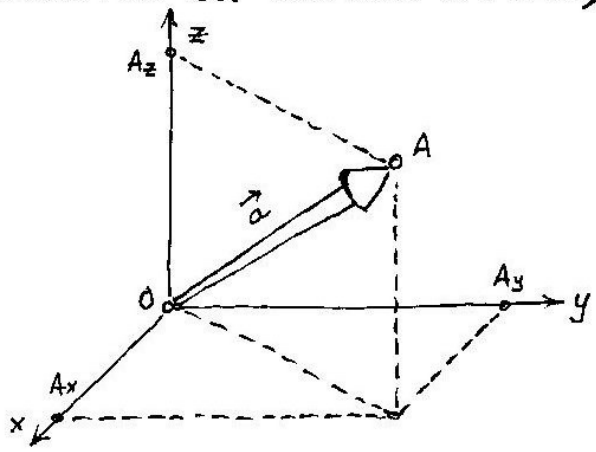
$$\mathrm{comp}\,(\vec{a}) = \mathrm{comp}\,(\vec{b})$$

y esto se denota así: $\vec{a} \sim \vec{b}$ (léase: $\vec{a}$ es equipolente a $\vec{b}$).

Apartado-4.

Todo vector fijo $\vec{OA} \in V_f^n$, tal que O es el origen de coordenadas de $E_n^{Ox_1 \dots x_n}$, recibe adicionalmente el nombre de VECTOR POSICIÓN del punto $A \in E_n^{Ox_1 \dots x_n}$. Un tal vector, anclado en el origen de coordenadas, posee unas componentes que coinciden con las coordenadas de su extremo A. Así, para $n=3$, tenemos:

$$\text{coord}(O) = (0,0,0)$$
$$\text{coord}(A) = (A_x, A_y, A_z)$$
$$\text{comp}(\vec{OA}) = \text{comp}(\vec{a}) = $$
$$= (A_x - 0, A_y - 0, A_z - 0) =$$
$$= (A_x, A_y, A_z) =$$
$$= \text{coord}(A).$$



TEOREMA-1.

Todo vector fijo $\vec{AB} \in V_f^n$ es equipolente a un, y sólo uno, vector posición $\vec{OP} \in V_f^n$.

DEMOSTRACIÓN: trivial.

TEOREMA-2

Todo vector posición $\vec{OP} \in V_f^n$ es equipolente a una infinita cantidad de vectores fijos $\vec{x} \in V_f^n$.

DEMOSTRACIÓN: Trivial.

Apartado-5.

La relación de Equipolencia $\sim$ definida para vectores fijos de V_f^n hace que $(V_f^n, \sim)$ posea estructura de equivalencia, pues en $(V_f^n, \sim)$ se cumplen las propiedades de la Equivalencia (de demostración trivial):

1).- Reflexividad: $\forall \vec{a} \in V_f^n \Rightarrow \vec{a} \sim \vec{a}$.

2).- Simetría: $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_f^n \mid \vec{a} \sim \vec{b} \Rightarrow \vec{b} \sim \vec{a}$.

3).- Transitividad: $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_f^n \mid \vec{a} \sim \vec{b}, \vec{b} \sim \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \sim \vec{c}$.

Cada clase de equivalencia definida en V_f^n mediante $\sim$ recibe el nombre de VECTOR LIBRE o elemento del conjunto cociente $V_f^n/_\sim$, siendo V_ℓ^n el conjunto de todos los vectores libres representables en $E_n^{Ox_1 \dots x_n}$. Por tanto, es obvio que: $V_\ell^n = V_f^n/_\sim$.

Si bien cualquier vector fijo $\vec{a}_f$ perteneciente a una clase $cl(\vec{a}_f) = \vec{a}_\ell \in V_\ell^n$ puede representar al vector libre $\vec{a}_\ell$ que coincide con dicha clase, sin embargo se suele escoger como representante oficial (REPRESENTANTE CANÓNICO) de la citada clase al vector posición (único vector posición de la clase, según próximo teorema) de la misma.

TEOREMA-3.

Toda clase de equivalencia de $V_f^n/_\sim$ alberga uno, y sólo un, vector posición perteneciente a la misma.

DEMOSTRACIÓN: trivial.

Frecuentemente se confunden erróneamente los conceptos de vector posición y vector libre, aunque, bien es cierto que, tal confusión no suele ser contraproducente para el Cálculo Vectorial.

Apartado-6.

Siendo $\vec{a}, \vec{b} \in V_f^n$, se define la SUMA DE LAS COMPONENTES de ambos vectores así:

$$\begin{aligned} comp(\vec{a}) + comp(\vec{b}) &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = \\ &= (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n) = (b_1+a_1, b_2+a_2, \dots, b_n+a_n) = \\ &= (b_1, b_2, \dots, b_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) = comp(\vec{b}) + comp(\vec{a}). \end{aligned}$$

Tal que:

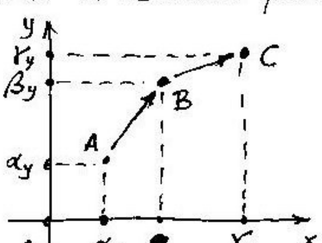
$$comp(\vec{a}) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$
$$comp(\vec{b}) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

TEOREMA-4.

Siendo $\vec{a}, \vec{b} \in V_f^n \mid conc(\vec{a}, \vec{b})$: $comp(\vec{a} \oplus \vec{b}) = comp(\vec{a}) + comp(\vec{b})$

DEMOSTRACIÓN:

Basta demostrar el teorema para $n \leq 3$, pues para $n \geq 4$ se extrapolan las definiciones dadas para $n=3$. Ahora bien, como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se encuentran en un mismo plano del espacio E_3^{0xyz}, basta entonces demostrar el teorema para $n=2$ (para $n=1$ es trivial):



$\vec{a} = \vec{AB} \mid comp(\vec{a}) = (\beta_x - \alpha_x, \beta_y - \alpha_y) = (a_x, a_y)$

$\vec{b} = \vec{BC} \mid comp(\vec{b}) = (\gamma_x - \beta_x, \gamma_y - \beta_y) = (b_x, b_y)$

$\vec{c} = \vec{AC} \mid comp(\vec{c}) = (\gamma_x - \alpha_x, \gamma_y - \alpha_y) = (c_x, c_y)$

Entonces:

$$\begin{aligned} comp(\vec{a} \oplus \vec{b}) &= comp(\vec{c}) = (c_x, c_y) = (a_x + b_x, a_y + b_y) = \\ &= (a_x, a_y) + (b_x, b_y) = comp(\vec{a}) + comp(\vec{b}) \end{aligned}$$

Puesto que:

$$c_x = \gamma_x - \alpha_x = \gamma_x - \alpha_x + (\beta_x - \beta_x) = (\gamma_x - \beta_x) + (\beta_x - \alpha_x) = a_x + b_x$$
$$c_y = \gamma_y - \alpha_y = \gamma_y - \alpha_y + (\beta_y - \beta_y) = (\gamma_y - \beta_y) + (\beta_y - \alpha_y) = a_y + b_y$$

TEOREMA-5.

Los elementos o vectores fijos $\vec{x}_f \in V_f^n$ de cualquier clase de equivalencia o vector libre $cl(\vec{x}_f) = \vec{x}_l \in V_f^n/_{\sim} = V_l^n$ pueden ponerse en biyección β con los puntos del espacio $x \in E_n^{0x_1 \dots x_n}$, de tal manera que cada elemento o vector fijo de $cl(\vec{x}_f) = \vec{x}_l$ está anclado a un punto $x \in E_n^{0x_1 \dots x_n}$ y cada elemento o punto del espacio $x \in E_n^{0x_1 \dots x_n}$ sirve de anclaje a un vector fijo de $cl(\vec{x}_f) = \vec{x}_l$.

DEMOSTRACIÓN: trivial.

TEOREMA-6.

$\forall \vec{a}_l, \vec{b}_l \in V_l^n$ siempre es posible encontrar un $\vec{a}_f \in \vec{a}_l$ y un $\vec{b}_f \in \vec{b}_l$ tales que exista $conc(\vec{a}_f, \vec{b})$, y siempre es posible encontrar un $\vec{c}_f \in \vec{a}_l$ tal que exista $conc(\vec{b}_f, \vec{c}_f)$.

DEMOSTRACIÓN: Corolario del teorema anterior.

TEOREMA-7.

Sean $\vec{a}_f, \vec{c}_f \in \vec{a}_l \in V_l^n$ y $\vec{b}_f \in \vec{b}_l \in V_l^n$, tales que $conc(\vec{a}_f, \vec{b}_f)$ y $conc(\vec{b}_f, \vec{c}_f)$. Entonces, se cumple:

$$(\vec{a}_f \oplus \vec{b}_f) \sim (\vec{b}_f \oplus \vec{c}_f)$$

DEMOSTRACIÓN:

Como $comp(\vec{a}_f) = comp(\vec{c}_f)$, entonces:

$$\begin{aligned} &comp(\vec{a}_f \oplus \vec{b}_f) = \\ &= comp(\vec{a}_f) + comp(\vec{b}_f) = \\ &= comp(\vec{c}_f) + comp(\vec{b}_f) = comp(\vec{b}_f) + comp(\vec{c}_f) = \\ &= comp(\vec{b}_f \oplus \vec{c}_f). \end{aligned}$$

Apartado-7.

Se define la ADICIÓN o SUMA de Vectores libres así:

$$\forall \vec{a}_l, \vec{b}_l \in V_l^n \Rightarrow \vec{a}_l \oplus \vec{b}_l = \vec{a}_f \oplus \vec{b}_f$$

Tal que: $\vec{a}_f \in \vec{a}_l \;;\; \vec{b}_f \in \vec{b}_l$

y tal que: $conc(\vec{a}_f, \vec{b}_f)$

Dicha suma posee la propiedad conmutativa, como se enuncia en el teorema siguiente.

TEOREMA-8.

$$\forall \vec{a}_i, \vec{b}_i \in V_i^n \Rightarrow \vec{a}_i \oplus \vec{b}_i = \vec{b}_i \oplus \vec{a}_i$$

DEMOSTRACIÓN: A partir del Teorema-7 anterior, basta probar que:

$$comp(\vec{a}_i \oplus \vec{b}_i) = comp(\vec{b}_i \oplus \vec{a}_i)$$

y esto se consigue fácilmente al comprobar que $(\vec{a}_i \oplus \vec{b}_i)$ y $(\vec{b}_i \oplus \vec{a}_i)$ son la misma clase de equivalencia de $V_i^n/_\sim = V_i^n$.

Consecuentemente, la estructura $(V_i^n, \oplus)$ es un Grupo Abeliano o Conmutativo, pues cumple:

1).- Clausura: $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_i^n \Rightarrow (\vec{a} \oplus \vec{b}) \in V_i^n$.

2).- Asociatividad: $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_i^n \Rightarrow (\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c} = \vec{a} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c})$.

3).- Neutralidad: $\forall \vec{a} \in V_i^n \Rightarrow \exists \vec{o} \in V_i^n \mid \vec{a} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{a} = \vec{a}$.

4).- Inversión: $\forall \vec{a} \in V_i^n \Rightarrow \exists -\vec{a} \in V_i^n \mid \vec{a} \oplus (-\vec{a}) = (-\vec{a}) \oplus \vec{a} = 0$.

5).- Conmutatividad: $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_i^n \Rightarrow \vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{b} \oplus \vec{a}$.

Espacio Vectorial.

Apartado-1.

Dado un conjunto E y el conjunto $E^2 = E \times E$, formado por todos los pares ordenados (a,b) tales que $a,b \in E$, sucede que toda aplicación $f: E^2 \to E$ tal que $f(a,b) = c$, con $c \in E$, constituye una LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA, u OPERACIÓN INTERNA sobre E. Dicha Ley se suele denotar por un símbolo arbitrario, tal como $*$, que relaciona la primera con la segunda componente del par (a,b):

$$a * b = c$$

Pues bien, siendo R el conjunto de los números reales y $+$ la Adición o Suma de elementos de R, el sistema $(R,+)$ tiene una estructura algebraica de Grupo Abeliano, por cumplir las siguientes propiedades:

1).- Clausura: $\forall a,b \in R \Rightarrow (a+b) \in R$.

2).- Asociatividad: $\forall a,b,c \in R \Rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$.

3).- Neutralidad: $\forall a \in R \Rightarrow \exists 0 \in R \mid a+0 = 0+a = a$.

4).- Inversión: $\forall a \in R \Rightarrow \exists -a \in R \mid a+(-a) = (-a)+a = 0$.

5).- Conmutatividad: $\forall a,b \in R \Rightarrow a+b = b+a$.

Además, siendo $R^* = R - \{0\}$ el conjunto de los números reales sin el 0 (cero) y siendo $\cdot$ la operación interna Multiplicación

o producto de elementos de R^*, entonces el sistema $(R^*, \cdot)$
tiene también estructura de Grupo Abeliano:

1).- Clausura: $\forall a, b \in R^* \Rightarrow (a \cdot b) \in R^*$.

2).- Asociatividad: $\forall a, b, c \in R^* \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

3).- Neutralidad: $\forall a \in R^* \Rightarrow \exists 1 \in R^* \mid a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

4).- Inversión: $\forall a \in R^* \Rightarrow \exists \frac{1}{a} = a^{-1} \in R^* \mid a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

5).- Conmutatividad: $\forall a, b \in R^* \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$.

Por otra parte, las estructuras $(R, +)$ y $(R^*, \cdot)$ se pueden vincular para dar lugar a la estructura $(R, +, \cdot)$ de Cuerpo Conmutativo, caracterizada por cumplir las siguientes propiedades:

1).- $(R, +)$ es grupo abeliano.

2).- $(R^*, \cdot)$ es grupo abeliano.

3).- Distributividad de $\cdot$ respecto a $+$:

$$\forall a, b, c \in R \Rightarrow a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Apartado-2.

Es conveniente distinguir entre adición o suma de números reales y adición o suma de vectores, pues no son la misma cosa. La adición de números reales queda circunscrita a la estructura $(R, +)$, en tanto que la suma de vectores tiene sentido sólo en $(V_L^n, \oplus)$. A tenor de la definición de Operación Interna, dada en el apartado anterior, tenemos:

$$f: R^2 \to R \mid \forall (a, b) \in R^2 \Rightarrow f[(a, b)] = a + b = c \in R.$$

$$g: (V_L^n)^2 \to V_L^n \mid \forall (\vec{a}, \vec{b}) \in (V_L^n)^2 \Rightarrow g[(\vec{a}, \vec{b})] = \vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{c} \in V_L^n.$$

Donde "f" y "g" definen sendas operaciones internas, sin nada en común, a pesar de compartir la equívoca denominación de Suma o Adición. También, por ende, se puede escribir:

$$+: R^2 \to R$$

$$\oplus: (V_L^n)^2 \to V_L^n.$$

cambiando "f" por $+$ y "g" por $\oplus$.

Apartado-3.

Dados un conjunto K y otro E, toda aplicación $f: K \times E \to E$, tal que $f(a, b) = c$, con $(a, b) \in K \times E$ y $c \in E$, constituye una LEY DE COMPOSICIÓN EXTERNA, u OPERACIÓN EXTERNA, sobre E. Al

conjunto K se le llama DOMINIO DE OPERADORES, a cada 16.
elemento $a \in K$ se le llama OPERADOR y a E se le llama CONJUNTO SOPORTE. Dicha Ley se suele denotar por un símbolo arbitrario, tal como $\odot$, que relaciona la primera con la segunda componente del par $(a,b) \in K \times E$: $a \odot b = c$.

Pues bien, entre los conjuntos R y V_L^n es posible definir una Operación Externa denominada PRODUCTO ESCALOVECTORIAL, consistente el multiplicar un número real $r \in R$ por un vector $\vec{v} \in V_L^n$. Dicho Producto está basado en el convenio establecido para el Cálculo Vectorial que establece que la suma de un vector $\vec{v} \in V_L^n$ consigo mismo $n \in N$ veces ha de verse como una multiplicación de $n \in N$ por $\vec{v} \in V_L^n$, es decir: $(n \odot \vec{v}) \in V_L^n$; donde, para simplificar la notación, se suele escribir $n\vec{v}$ en vez de $n \odot \vec{v}$. Ahora bien, por extensión numérica y aplicando el principio de permanencia de las leyes formales, que regula la ampliación del concepto de número (que conduce desde los números naturales hasta los reales y los complejos), también se define $r \odot \vec{v}$, ó $r\vec{v}$, con $r \in R$ y $\vec{v} \in V_L^n$. Ello trae, como consecuencia, lo siguiente:

$$comp\,(n\vec{v}) = comp(\vec{v}) + comp(\vec{v}) + \overset{n}{\cdots} + comp(\vec{v}) = n \cdot comp(\vec{v}) =$$
$$= n\,(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (nv_1, nv_2, \ldots, nv_n)$$

Tal que: $comp\,(\vec{v}) = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

De donde:

$$comp\,(r\vec{v}) = r \cdot comp\,(\vec{v}) = r\,(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (rv_1, rv_2, \ldots, rv_n).$$

Apartado-4.

Un R-espacio vectorial de soporte V_L^n (con R como dominio de operadores) es una estructura algebraica que se denota sucintamente (V_L^n, R), y más exactamente $[(V_L^n, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$, la cual cumple las siguientes propiedades:

1).- La sub-estructura $(V_L^n, \oplus)$ es un grupo abeliano.

2).- La sub-estructura $(R, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

3).- V_L^n es el soporte de la estructura de espacio vectorial, y R es el dominio de operadores.

4).- Existe la operación externa $\odot$, que relaciona $(V_L^n, \oplus)$ con $(R, +, \cdot)$ de la siguiente manera:

$$\odot : R \times V_L^n \rightarrow V_L^n.$$

Tal que:

$$\left.\begin{array}{l} \forall r \in R \\ \forall \vec{v} \in V_L^n \end{array}\right\} \Rightarrow \quad r \odot \vec{v} = r\vec{v} = \vec{w} \in V_L^n.$$

5).- $\left.\begin{array}{l} \forall r, t \in R \\ \forall \vec{v} \in V_L^n \end{array}\right\} \Rightarrow \quad r(t\vec{v}) = (rt)\vec{v}.$

6).- $\left.\begin{array}{l} 1 \in R \\ \forall \vec{v} \in V_L^n \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 1\vec{v} = \vec{v}.$

7).- $\left.\begin{array}{l} \forall r, t \in R \\ \forall \vec{v} \in V_L^n \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (r+t)\vec{v} = r\vec{v} \oplus t\vec{v}.$

8).- $\left.\begin{array}{l} \forall r \in R \\ \forall \vec{v}, \vec{w} \in V_L^n \end{array}\right\} \Rightarrow \quad r(\vec{v} \oplus \vec{w}) = r\vec{v} \oplus r\vec{w}.$

Estas propiedades son conocidas desde el Cálculo Vectorial básico impartido en la enseñanza secundaria o preuniversitaria, por lo que no es necesario demostrarlas, con lo que aquí simplemente nos remitimos a constatar axiomáticamente que $(V_L^n, R) \equiv [(V_L^n, \oplus), (R, +, \cdot), \odot]$ es un espacio vectorial (el símbolo $\equiv$, usado en este contexto, significa que las notaciones vinculadas por él son equivalentes o con igual significado algebraico).